ЗГИН ПЛАСТИНИ З ДВОМА РІВНИМИ СИМЕТРИЧНИМИ ТРІЩИНАМИ ПО ДУЗІ КОЛА З УРАХУВАННЯМ КОНТАКТУ ЇХ БЕРЕГІВ

В.В. Божидарнік[1], В.К. Опанасович[2], П.В. Герасимчук[1]

BENDING OF A PLATE WITH TWO EQUAL SYMMETRIC CRACKS ALONG A CIRCULAR ARCH WITH ALLOWANCE FOR THE CONTACT OF THEIR FLANKS

V.V. Bozhidarnik, V.K. Opanasovych, P.V. Gerasymchuk

[1]Луцький державний технічний університет, Луцьк, Україна
[2]Львівський національний університет ім. Івана Франка, Львів, Україна

Abstract *In this paper the problem of one-sided bend of a plate with two symmetric cracks along the arc of circle by bend moments on infinity including a contact of their sides in the presence of geometric and physical symmetry of a sum has been investigated. By virtue of contact of crack's sides a task solution is given in the form of solution of two tasks: plane problem and bend (classical theory). Using complex potentials and methods of the theory complex variable quantity function, task solution has been reduced to linear conjugation, on the base of which the equation for finding the contact effort between crack's sides is got. Evident forms for complex potentials, contact efforts between crack's sides, coefficients of intensity efforts, moments are got for carrying out the numerical analysis, results of which are shown graphically.*

Якщо пластину з тріщинами згинати розподіленими моментами на нескінченності, то їх береги будуть контактувати, врахування цього явища приводить до ускладнення побудови розв'язку задачі у математичному плані і особливо, коли тріщини криволінійні, цим пояснюється, що в літературі існує порівняно мало досліджень такого типу задач. Зауважимо, що в останній час згину пластини з прямолінійними тріщинами з урахуванням контакту їх берегів присвячено достатньо публікацій. Згин пластин з криволінійною тріщиною вперше досліджено у праці [1], коли пластина з тріщиною по дузі кола перебуває під дією одностороннього згину на нескінченності. У публікації [2], цей результат узагальнюється на випадок двостороннього згину пластини. В даній роботі досліджено односторонній згин пластини з двома симетричними тріщинами по дузі кола згинальними моментами на нескінченності з урахуванням контакту їх берегів.

<u>Формулювання задачі</u>. Дослідимо односторонній згин ізотропної пластини завтовшки $2h$ рівномірно розподіленими моментами на нескінченності M з двома симетричними наскрізними тріщинами по дузі кола радіуса R із кутом розкриття 2φ. Вважаємо, що береги тріщини були вільні від зовнішнього навантаження, а вектор розподіленого згинального моменту на нескінченності перпендикулярний до однієї з осей симетрії тріщин, береги яких приходять у гладкий контакт по всій їх довжинах на верхній основі пластини.

Виберемо в серединній площині пластини декартову систему координат $Oxy\tilde{z}$ з початком в центрі кола, вздовж дуг якого розміщені тріщини. Направимо вісь Ox через середини дуг тріщин, які позначимо через L. Кінці тріщин в серединній площині позначимо через a_j і b_j $(j=1,2)$, причому $a_j=(-1)^{j+1}\mathrm{R}e^{-i\varphi}$, $b_j=\bar{a}_j$, де $i^2=-1$. Область координатної площини Oxy, яка розміщена в середині кола, позначимо через S^+, зовні – через S^-.

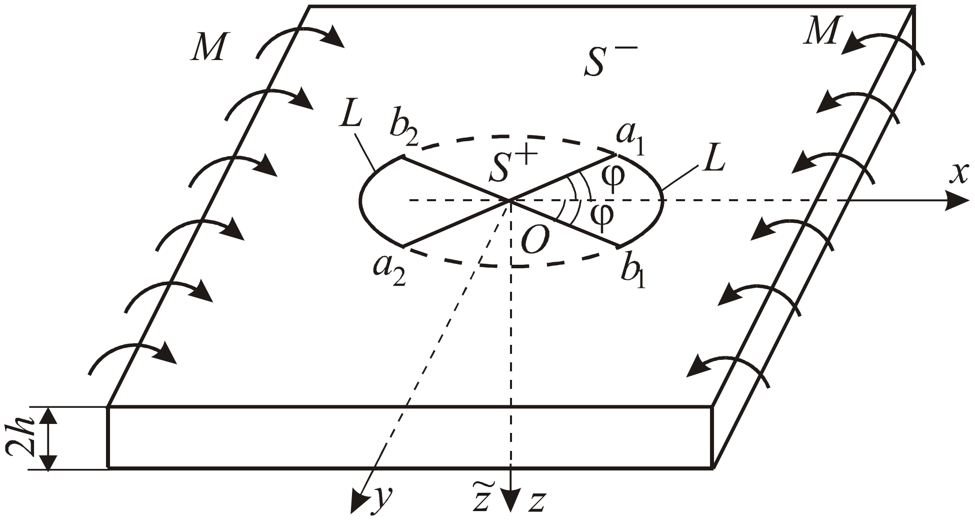

Рис. 1. Схема навантаження пластини та розміщення тріщин

Подібно до роботи [3] розв’язок задачі подамо у вигляді розв’язку двох задач: плоскої задачі та задачі згину, причому для опису згину використаємо класичну теорію. Отже, будемо мати крайові умови

$$\sigma_{rr}^{\pm} = -N_r/(2h),\ \sigma_{r\theta}^{\pm} = 0,\ M_r^{\pm} = hN_r,\ P_r^{\pm} = 0,\ [v_r] + h[\partial w/\partial r] = 0,\ \text{на}\ L, \tag{1}$$

де N_r – контактне зусилля між берегами тріщин; σ_{rr} і $\sigma_{r\theta}$ та v_r і v_θ – компоненти тензора напружень та компоненти вектора переміщень в полярній системі координат r і θ з полюсом в точці O і полярною віссю Ox для плоскої задачі, M_r і P_r – згинальний момент та узагальнена в сенсі Кірхгофа перерізувальна сила в тій же полярній системі координат; w – прогин пластини; $[f] = f^+ - f^-$, тут значками “+” і “–” позначені граничні значення відповідних величин при прямуванні точки площини до лінії L із областей S^+ і S^- відповідно.

Побудова розв’язку задачі. Для розв’язку плоскої задачі теорії пружності введемо комплексні потенціали $\Phi(z)$ і $\Psi(z)$ та функцію $\Omega(z)$, тоді для визначення напружено-деформованого стану пластини будемо мати такі формули

$$\begin{gathered}\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} = 4\,\mathrm{Re}\,\Phi(z),\\ \sigma_{rr} + i\sigma_{r\theta} = \Phi(z) - R^2 r^{-2}\Omega\left(R^2/\bar{z}\right) + f(r)\left(\overline{\Phi(z)} - \bar{z}\overline{\Phi'(z)}\right),\\ 2\mu r(v_r + iv_\theta) = \bar{z}\left[\kappa\varphi(z) + \omega\left(R^2/\bar{z}\right) - zf(r)\overline{\Phi(z)}\right],\end{gathered} \tag{2}$$

де μ і υ – відповідно модуль зсуву і коефіцієнт Пуассона матеріалу пластини; $\kappa = (3-\upsilon)/(1+\upsilon)$; $z = x + iy$, x і y – координати точки, для якої знаходимо шукані величини; $r = |z|$, $f(r) = 1 - R^2 r^{-2}$, $\overline{\Phi}\left(R^2/z\right) = \overline{\Phi\left(R^2/\bar{z}\right)}$,

$$\omega'(z) = \Omega(z) = -\overline{\Phi}\left(R^2/z\right) + R^2 z^{-1}\overline{\Phi}'\left(R^2/z\right) + R^2 z^{-2}\overline{\Psi}\left(R^2/z\right).$$

Якщо для функцій $\Phi(z)$ і $\Omega(z)$ мають місце розвинення

$$\Phi(z) = \begin{cases}\dfrac{a_1}{z^2} + \dfrac{a_2}{z^3} + \ldots, z \to \infty,\\ A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots, z \to 0,\end{cases} \qquad \Omega(z) = \begin{cases}B_0 + \dfrac{B_1}{z} + \dfrac{B_2}{z^2} + \ldots, z \to \infty,\\ b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots, z \to 0,\end{cases} \tag{3}$$

то мають виконуватись умови [4]

$$B_1 = 0,\ B_0 = -\overline{A}_0, \tag{4}$$

де A_j, B_j, a_j, b_j – невідомі коефіцієнти.

Для розв'язку задачі згину пластини введемо комплексні потенціали $\Phi_3(z)$ і $\Psi_3(z)$ та функцію $\Omega_3(z)$ [5], в результаті будемо мати такі залежності

$$M_r + M_\theta = 4\,\mathrm{Re}\,\Phi_3(z),$$

$$m(M_r + ic' + iP_r) = \tilde{\kappa}\Phi_3(z) + R^2 r^{-2}\Omega_3\left(R^2/\bar{z}\right) - f(r)\left[\overline{\Phi_3(z)} - \bar{z}\overline{\Phi_3'(z)}\right],$$

$$r(\partial w/\partial r + i\,\partial w/\partial s) = \bar{z}\left[\varphi_3(z) - \omega\left(R^2/\bar{z}\right) + zf(r)\overline{\Phi_3(z)}\right],$$

де s – дугова координата, c' – дійсна стала,

$$\tilde{\kappa} = (3+\nu)/(1-\nu),\ m = -[D(1-\nu)]^{-1},\ D = 2Eh^3/\left(3\left(1-\nu^2\right)\right),$$

$$\omega_3'(z) = \Omega_3(z) = -\overline{\Phi}_3\left(R^2/z\right) + R^2 z^{-1}\overline{\Phi}_3'\left(R^2/z\right) + R^2 z^{-2}\overline{\Psi}_3\left(R^2/z\right).$$

Функції $\Phi_3(z)$ і $\Omega_3(z)$ можна подати у вигляді [5]

$$\Phi_3(z) = \begin{cases} \Gamma + \dfrac{a_1'}{z^2} + \dfrac{a_2'}{z^3} + \ldots, z \to \infty, \\ A_0' + A_1' z + A_2' z^2 + \ldots, z \to 0, \end{cases} \qquad \Omega_3(z) = \begin{cases} B_0' + \dfrac{B_1'}{z} + \dfrac{B_2'}{z^2} + \ldots, z \to \infty, \\ \dfrac{\Gamma' R^2}{z^2} + b_0' + b_1' z + \ldots, z \to 0, \end{cases} \tag{6}$$

де

$$\Gamma = nM,\ \Gamma' = mM/2,\ n = -[4D(1+\upsilon)]^{-1},\ B_1' = 0,\ B_0' = -\overline{A}_0'. \tag{7}$$

A_j', B_j', a_j', b_j' – невідомі коефіцієнти.

Зауважимо, що в силу симетрії задачі сталі c' на берегах тріщин можна покласти рівними нулю.

Врахувавши (2) і (5), на основі крайових умов (1) отримаємо такі задачі лінійного спряження

$$[\tilde{\kappa}\Phi_3(t) - \Omega_3(t)]^+ - [\tilde{\kappa}\Phi_3(t) - \Omega_3(t)]^- = 0,\ t \in L,$$

$$[\Phi(t) + \Omega(t)]^+ - [\Phi(t) + \Omega(t)]^- = 0,\ t \in L,$$

розв'язавши які та взявши до уваги (3) і (6), отримаємо

$$\Omega(z) = -\overline{A}_0 - \Phi(z),\ \Omega_3(z) = \tilde{\kappa}\Phi_3(z) - D_0' - 0.5P/z^2, \tag{8}$$

де

$$D_0' = \tilde{\kappa}\Gamma + \overline{A_0'},\ P = -2\Gamma' R^2.$$

На основі останньої крайової умови (1) отримаємо таку задачу лінійного спряження

$$F^+(t) - F^-(t) = 0,\ t \in L, \tag{9}$$

де

$$F(z) = \Phi(z) - z\Phi'(z) - \overline{\Phi}\left(R^2/z\right) + R^2/z\,\overline{\Phi}'\left(R^2/z\right) + \beta\Big(\Phi_3(z) - z\Phi_3'(z) - \overline{\Phi}_3\left(R^2/z\right) +$$
$$+ R^2/z\,\overline{\Phi}_3'\left(R^2/z\right)\Big),\ \beta = 2h(1+\tilde{\kappa})\mu/(1+\kappa). \tag{10}$$

Розв'язавши задачу лінійного спряження (9), одержимо

$$F(z) = -\overline{A}_0 + \beta\left(\Gamma - \overline{A}_0'\right). \tag{11}$$

Врахувавши (8), (2) і (5), на основі крайових умов (1) отримаємо

$$\Phi^+(t) + \Phi^-(t) = -N_r/(2h) - \overline{A}_0,\ t \in L,$$

$$\Phi_3^+(t) + \Phi_3^-(t) = \left(mhN_r + D_0' + 0.5P/t^2\right)/\tilde{\kappa},\ t \in L. \tag{12}$$

Додавши граничні значення функції $\Phi(z)$ на L та врахувавши (12), після перетворень отримаємо рівняння для знаходження контактного зусилля між берегами тріщин

$$\frac{\partial N_r}{\partial\theta} = -3i\delta_1\left(t^2/R^2 - R^2/t^2\right),\ t \in L,$$

розв'язок якого матиме вигляд

$$N_r = A - 1.5\delta_1\left(R^2/t^2 + t^2/R^2\right),\ t \in L, \tag{13}$$

і умову

$$\operatorname{Re} A_0 + \beta \operatorname{Re} A_0' = \beta\Gamma, \tag{14}$$

де A – невідома дійсна стала; $\delta_1 = -\Gamma'\beta h/\left(2m\beta h^2 - \tilde{\kappa}\right)$.

Підставляючи (13) у (12) та розв'язуючи відповідні задачі лінійного спряження, отримаємо

$$\Phi_3(z) = 0.5\left(q_3 + q_4/z^2 + q_5 z^2\right) - 0.5\left[q_3\left(z^2 + \gamma_{15}\right) + q_5\left(z^2 + \gamma_{15}z^2 + \gamma_{17}\right) + q_4\left(1 - R^2/z^2\right) - \right.$$

$$\left. - 2c_2 - 2\Gamma z^2\right]/X(z), \tag{15}$$

$$\Phi(z) = 0.5\left(\delta_4 + 0.75\delta_1\left(R^2/z^2 + z^2/R^2\right)/h\right) - 0.5\left\{\delta_4\left(z^2 + \gamma_{15}\right) - 2c_1 + 0.75\delta_1\left[\left(z^4 + \gamma_{15}z^2 + \gamma_{17}\right)/R^2 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + R^2 - R^4/z^2\right]/h\right\},$$

де c_1 і c_2 – невідомі сталі,

$$\delta_4 = -\overline{A}_0 - 0.5A/h,\ q_3 = \left(mAh + \tilde{\kappa}\Gamma + A_0'\right)/\tilde{\kappa},\ q_5 = -3mh\delta_1/\left(2\tilde{\kappa}R^2\right),$$

$$q_4 = -1.5hm\delta_1 R^2/\tilde{\kappa} + 0.5P/\tilde{\kappa},\ \gamma_{15} = -R^2\cos 2\varphi.\ \gamma_{17} = 0.5R^4\sin^2 2\varphi.$$

Для визначення невідомих сталих введемо позначення

$$x_1 = A_0,\ x_2 = A_0',\ x_3 = A/R,\ x_4 = c_1/R^2,\ x_5 = c_2,$$

і для їх знаходження скористаємося співвідношенням (14), на основі (15) знайдемо залежності

$$\Phi_3(0) = A_0',\ \Phi(0) = A_0,$$

а також умовами однозначності прогину, кутів повороту, переміщень у плоскій задачі при обході контурів тріщин. Після перетворень приходимо до такої системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{j=1}^{5} a_{ij}x_j = b_i,\ i = \overline{1,5},$$

де

$$a_{11} = 2\int_0^{\varphi}\rho(\theta,\varphi)d\theta,\ a_{12} = 0,\ a_{13} = 0.5a_{11}R/h,\ a_{14} = 4\int_0^{\varphi}\rho^{-1}(\theta,\varphi)d\theta,\ a_{15} = 0,$$

$$\rho(\theta,\varphi) = \sqrt{\cos 2\theta - \cos 2\varphi},$$

$$b_1 = \left(1.5\delta_1/h\right)\int_0^{\varphi}\left(\cos 4\theta - \cos 2\varphi\cos 2\theta + 0.5\sin^2 2\varphi - \cos 2\theta + 1\right)/\rho(\theta,\varphi)d\theta,$$

$$a_{21} = 1,\ a_{22} = \beta,\ a_{23} = a_{24} = a_{25} = 0,\ b_2 = \beta\Gamma,\ a_{31} = 1 + \sin^2\varphi,\ a_{32} = 0,$$

$$a_{33} = 0.5R\sin^2\varphi/h,\ a_{34} = 1,\ a_{35} = 0,\ b_3 = 0.75\delta_1\sin^2\varphi\left(1 + \cos^2\varphi\right)/h,$$

$$a_{41} = 0,\ a_{42} = a_{11}R^2/\tilde{\kappa},\ a_{43} = R^3 mha_{11}/\tilde{\kappa},\ a_{44} = 0,\ a_{45} = -a_{14},$$

$$b_4 = -2\int_0^{\varphi}\left[\Gamma R^2\rho^2(\theta,\varphi) + q_5R^4\left(\cos 4\theta - \cos 2\varphi\cos 2\theta + 0.5\sin^2 2\varphi\right) - \right.$$

$$\left. - \left(q_4 + 2\Gamma R^2\right)\cos 2\theta + q_4\right]/\rho(\theta,\varphi)d\theta,$$

$$a_{51} = 0,\ a_{52} = 1 - \sin^2\varphi/\tilde{\kappa},\ a_{53} = -\sin^2\varphi\, mhR/\tilde{\kappa},$$

$$a_{54} = 0,\ a_{55} = R^{-2},\ b_5 = \left[\left(\Gamma R^2 + q_4\right)\sin^2\varphi + 0.25q_5R^4\sin^2 2\varphi\right]/R^2.$$

Коефіцієнти інтенсивності моментів K_j (КІМ) і зусиль k_j (КІЗ) знайдемо за формулами

$$K_{13}-iK_{23}=\frac{iD}{b_1\sqrt{2R\sin 2\varphi}}\left[2\left(\Gamma b_1^2+c_2\right)-q_3\left(b_1^2+\gamma_{15}\right)-q_4\left(b_1^4+\gamma_{15}b_1^2+\gamma_{17}+1-\frac{R^2}{b_1^2}\right)\right], \quad (15)$$

$$k_1-ik_2=-\frac{2hi}{b_1\sqrt{2R\sin 2\varphi}}\left[2c_1-\delta_4\left(b_1^2+\gamma_{15}\right)-\frac{3\delta_1}{4h}\left\{\frac{b_1^4+\gamma_{15}b_1^2+\gamma_{17}}{R^2}+R^2\left(1-\frac{a_1^2}{R^2}\right)\right\}\right].$$

Наведемо розв’язок цієї задачі без врахування контакту берегів тріщин. На основі формул (5), повторивши подібні викладки, приходимо до таких виразів для функцій $\Phi_3(z)$ і $\Omega_3(z)$

$$\Phi_3(z)=\frac{1}{2}\left(r_0+\frac{r_1}{z^2}\right)-\frac{1}{2X(z)}\left[r_0\left(z^2-R^2\cos 2\varphi\right)-\frac{r_1R^2}{z^2}+2c_5-2\Gamma z^2+r_1\right],$$

$$\Omega_3(z)=\tilde{\kappa}\Phi_3(z)-\tilde{\kappa}\Gamma-\frac{P}{2z^2}-\tilde{A}_0',$$

де c_5 – невідома стала,

$$\tilde{A}_0'=\Phi_3(0),\ r_1=0.5P/\tilde{\kappa},\ r_0=\Gamma+\tilde{A}_0'/\tilde{\kappa}. \quad (17)$$

Беручи до уваги умову однозначності кутів повороту при обході контурів тріщин, а також (17), отримаємо систему рівнянь для знаходження невідомих сталих c_5 і $\tilde{A}_0'$

$$\tilde{A}_0'a_{42}-c_5a_{14}=b_7,\ \tilde{A}_0'a_{52}+c_5R^{-2}=b_8,$$

де

$$b_8=\left(r_1R^{-2}+\Gamma\right)\sin^2\varphi,\ b_7=2\int_0^{\varphi}\left[\Gamma R^2\left(\cos 2\theta+\cos 2\varphi\right)-2r_1\sin^2\theta\right]/\rho(\theta,\varphi)\,d\theta.$$

Коефіцієнти інтенсивності моментів $K_{j3}^{б}$ в цьому випадку знайдемо за формулами

$$K_{13}^{б}-iK_{23}^{б}=\frac{iD(3+\upsilon)}{b_1\sqrt{2R\sin 2\varphi}}\left[2\left(\Gamma b_1^2+c_5\right)-r_0\left(b_1^2+\gamma_{15}\right)-r_1\left(1-\frac{a_1^2}{R^2}\right)\right].$$

Числовий аналіз задачі та висновки. Був проведений числовий аналіз задачі, який подано на рис. 2-4. Рис 3 і 4 побудовані при коефіцієнті Пуассона $\upsilon=0.3$ матеріалу пластини.

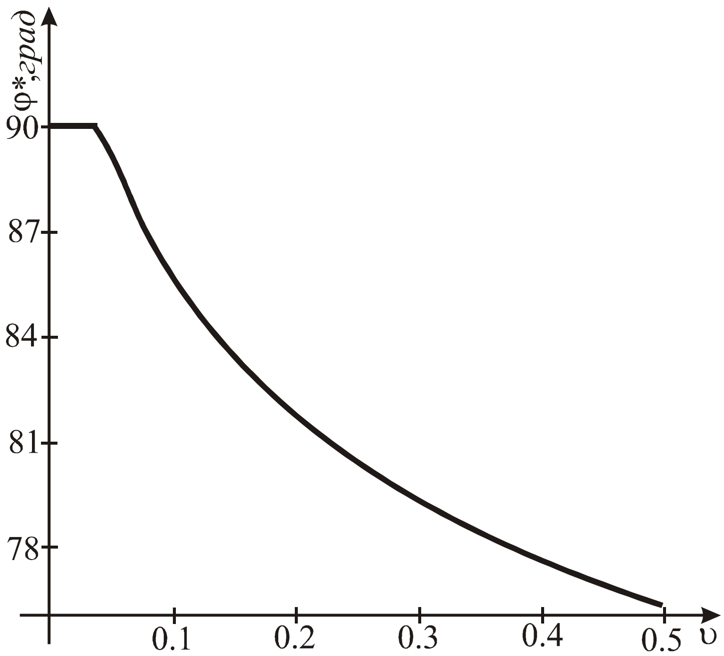

Рис. 2. Залежність граничного кута розкриття тріщин φ^*, коли контакт відбувається по всій їх довжині, від коефіцієнта Пуассона υ матеріалу пластини.

Як видно з рис. 2 із збільшенням коефіцієнта Пуассона υ граничний кут розкриття тріщин φ^*, коли контакт відбувається по всій довжині тріщин, спадає, причому для $\upsilon < \upsilon_* = 0.0389$ контакт берегів тріщин буде проходити при любому їх куті розкриття.

На основі рис. 3 можна зробити висновок, що при $\varphi > \varphi^* = 79{,}35^0$ буде проходити відставання берегів тріщин поблизу їх кінців, а при $\varphi < \varphi^*$ завжди проходить контакт берегів тріщин по всій довжині.

З рис. 4 видно, що приведені КІС k_1^* і КІМ K_1^* з ростом кута розкриття тріщин φ спадають і при кутах близьких до граничного φ^* вони міняють знак, в той час як k_2^* і K_2^* з ростом φ зростають, а потім спадають. Крім того, КІМ з врахуванням контакту берегів тріщин є менші ніж КІМ без врахування цього явища. Врахування контакту берегів тріщин спричиняє появу КІС k_1^* і k_2^*, причому $k_1^* / K_1^* = 3(1+\upsilon)/(3+\upsilon)$.

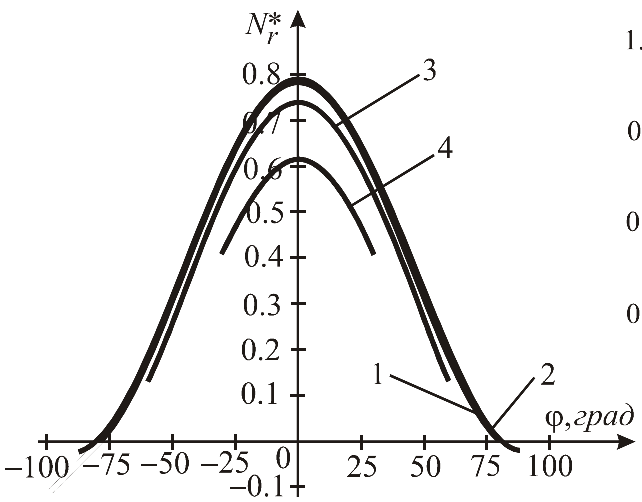

Рис. 3. Розподіл контактного зусилля між берегами тріщини при різних їх кутах розкриття φ. Крива 1 побудована при $\varphi = \varphi^* = 79.35^0$, крива 2 – при $\varphi = 88^0$, крива 3 – при $\varphi = 60^0$, крива 4 – при $\varphi = 30^0$.

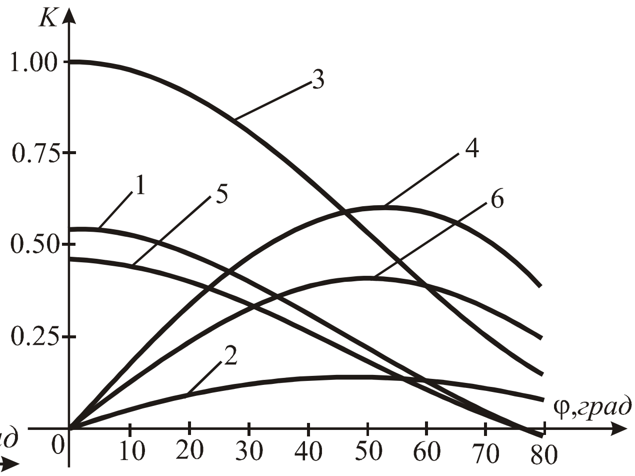

Рис. 4. Залежність приведених коефіцієнтів інтенсивності зусиль $k_i^* = k_i h / \left(M\sqrt{R\varphi}\right)$ і моментів $K_i^* = K_i h / \left(M\sqrt{R\varphi}\right)$ від кута розкриття тріщини φ при $\varphi^* = 79.35^0$. Криві 1 і 2 відповідають k_1^* і k_2^*, криві 5 і 6 – K_1^* і K_2^*, криві 3 і 4 – $K_1^{б*}$ і $K_2^{б*}$ тільки при відсутності контакту берегів тріщин.

Література

1. Герасимчук П. В., Божидарнік В. В., Опанасович В. К. Односторонній згин пластини з тріщиною по дузі кола з урахуванням контакту її берегів // Наукові нотатки Луцького технічного університету. – 2003. – с.57-63.
2. Божидарнік В. В., Опанасович В. К., Герасимчук П. В. Двосторонній згин ізотропної пластини з наскрізною тріщиною по дузі кола з урахуванням контакту її берегів // Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій. Під гол. ред. В. В. Панасюка. – Львів, Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України. – 2004. – с. 213-218.
3. Шацький І. П. Згин пластини, ослабленої розрізом з контактуючими берегами // Доп. НАН УРСР. Сер. А. Фіз.-мат. та техн. науки. – 1988, № 7. – с. 49-51.
4. Прусов И. А. Некоторые задачи термоупругости. – Минск, Изд-во Белорус. ун-та. – 1972. – 200 с.
5. Прусов И. А. Метод сопряжения в теории плит. – Минск, Изд-во Белорус. ун-та. – 1975. – 256 с.