

ДВОПЕРІДИЧНА ЗАДАЧА ПРО ПЛАСТИЧНЕ ВІДШАРОВУВАННЯ ЗА ПОЗДОВЖНЬОГО ЗСУВУ ЖОРСТКИХ РОМБІЧНИХ ПРИЗМАТИЧНИХ ВКЛЮЧЕНЬ У СЕРЕДОВИЩІ З ЗАТРИМКОЮ ТЕКУЧОСТІ

Г.Т. Сулим, М.В. Кривень

DOUBLE-PERIODIC PROBLEM ABOUT INTERFACIAL SLIP OF RIGID RHOMBIC PRISMATIC INCLUSIONS IN THE MEDIUM WITH YIELDING DECAY UNDER THE CONDITIONS OF LONGITUDINAL SHEAR

H.T. Sulym, M.V. Kryven

Львівський національний університет імені Івана Франка, Україна

Abstract Plastic interfacial slip of double-periodic system of rigid rhombic fibers under the conditions of shear load of composite is investigated. The medium material is elasto-plastic with yielding delay. Conditions of localizations of plastic deformations only on the inclusion-medium boundary are considered. Dependences of plastic bands lengths on the load level are determined.

Вступ. Пластичні деформації в місцях великої концентрації напружень доволі часто мають вигляд окремих смуг чи ліній ковзання [1].

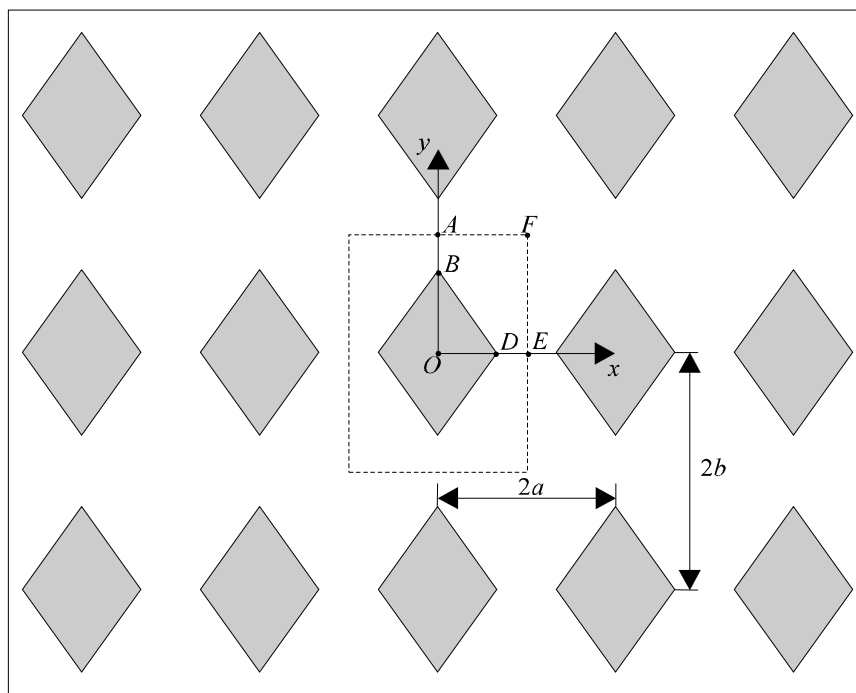


Рис. 1. Загальна схема двоперіодичної задачі

Одною з причин тонкосмугової локалізації пластичних деформацій, є затримка текучості: у деяких матеріалах пластичні деформації зароджуються при вищій інтенсивності напружень (верхній поріг текучості), ніж та, за якої вони далі вже розвиваються (нижній поріг текучості) [2, 3].

На діаграмі деформування матеріалу цьому явищу відповідає так званий «зуб текучості». Різниця згаданих порогів називається величиною затримки текучості. Врахування затримки дає змогу не тільки пояснити саме явище локалізації, але й визначити кількість пластичних ліній ковзання поблизу концентратора напружень.

1. Формулювання задачі. Розглянемо задачу визначення напружено деформованого стану необмеженого середовища $-\infty < x, y, z < +\infty$ із затримкою текучості, яке містить двоперіодичну систему жорстких ромбічних включень

локалізації пластичних деформацій, є затримка текучості: у деяких матеріалах пластичні деформації зароджуються при вищій інтенсивності напружень (верхній поріг текучості), ніж та, за якої вони далі вже розвиваються (нижній поріг текучості) [2, 3]. На діаграмі деформування матеріалу цьому явищу відповідає так званий «зуб текучості». Різниця згаданих порогів називається

$|x - nh \operatorname{ctg} \alpha| \leq a, |y - mh| \leq b, |z| < \infty$ ($n, m \in \mathbb{Z}$, рис. 1), де $2a$ і $2b$ – горизонтальні і вертикальні діагоналі включень; 2α – кут при одній парі вершин включень. З огляду на симетрію задачі на рис. 2 зображено четвертину прямокутної комірки періодичності задачі. Вважатимемо, що середовище здеформовано поздовжніми зсувними навантаженнями, які викликали поле переміщень w , симетричне відносно вертикальних діагоналей включень і антисиметричне відносно горизонтальних.

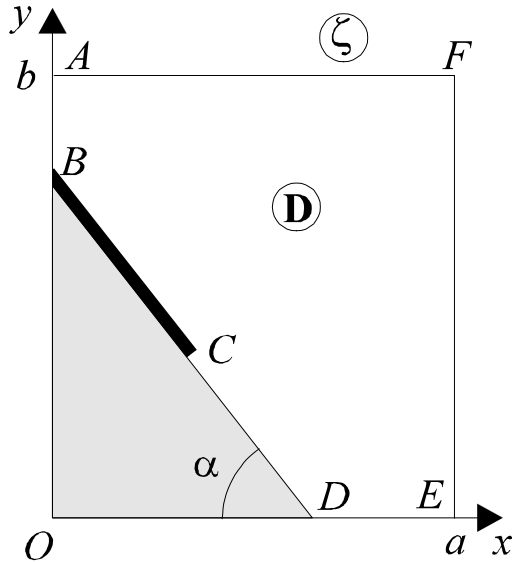


Рис. 2. Четвертина періоду площини Oxy . Потовщений відрізок – пластична смуга

Всередині усіх включень кожного ряду переміщення w однакові; від ряду до ряду вони змінюються на однакову величину. Поле напружень у кожному прямокутному представницькому елементі однакове.

Пружний розв'язок цієї задачі зовні включень дає необмежені напруження при вершинах, належних вертикальним діагоналям, і нульові біля вершин, які належать діагоналям горизонтальним [4]. Тому, незалежно від рівня навантаження та величини затримки текучості (хоч би і як завгодно великої) від вертикальних вершин ромбів розвиватимуться пластичні деформації. Вважатимемо, що до навантажування тіла включення перебували в ідеальному механічному контакті з середовищем, а перші лінії пластичного ковзання після прикладання навантаження до композиту зосереджені на межі включення-середовище.

2. Математична формалізація задачі. Нехай k і k_1 відповідно нижній і верхній пороги текучості. Внаслідок симетрії і періодичності розв'язок задачі досить визначити в п'ятикутнику $ABDEFA$ (область **D**). В результаті сформульованих вище умов симетричності поля переміщень відносно ліній $x=0$ і $x=a$ ($w(x, y) = w(-x, y)$ і $w(x-a, y) = w(a-x, y)$) напруження $\tau_{xz}(x, y)$ нульові на відрізках DE , EF , FA , AB області **D**. На ділянці CD межі області **D** виконуються умови ідеального механічного контакту і тому переміщення вздовж цієї ділянки дорівнюють сталій, яку, не зменшуючи загальності, можна вважати нульовою. А, отже, $\partial w / \partial l = 0$ ($l = -i \cos \alpha + j \sin \alpha$) на відрітку CD межі області **D**.

Умова текучості в пластичних смугах, де пластичне деформування вже набуло розвитку, означає, що там зсувні напруження $\tau_{nz} = k$, де $\mathbf{n} = \mathbf{i} \sin \alpha + \mathbf{j} \cos \alpha$ – одинична нормаль до відрізка BC . Для задання рівня навантаження можна припускати відомим напружений стан в якійсь одній точці області **D**. Вважатимемо відомими напруження у вершинах прямокутника періода (у точці F області **D**, $\tau_{xz}(a, b) = 0, \tau_{yz}(a, b) = \tau_0$ ($\tau_0 < k_1$)).

Щодо аналітичної в області **D** функції $\tau(\zeta) = \tau_{yz}(x, y) + i \tau_{xz}(x, y)$ ($\zeta = x + iy$) сформульовані вище умови стосовно компонент тензора напружень приводять до такої крайової задачі:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \tau(\zeta) &= 0 \quad (\zeta \in DE \cup EF \cup FA \cup AB), \\ \arg \tau(\zeta) &= \alpha \quad (\zeta \in CD), \\ \operatorname{Im} \tau(\zeta) e^{i\alpha} &= k \quad (\zeta \in BC), \\ \tau(a + ib) &= \tau_0. \end{aligned} \quad (1)$$

Пластичні деформації розвиватимуться за схемою пластичного відшарування, тобто будуть локалізованими тільки на межі включення-середовище, якщо ніде в області \mathbf{D} не досягається верхній поріг текучості, тобто поки виконується умова, що

$$\max_m \tau_{mz}(x, y) = |\tau(\zeta)| < k_1 \quad ((x, y) \in \mathbf{D}). \quad (2)$$

3. Розв'язування задачі. Умови (1) визначають геометричний образ \mathbf{G} області \mathbf{D} у площині τ . Ділянці $DEFAB$ її межі відповідає відрізок $D'B'$ дійсної осі з початком у початку координат. Образом відрізка $CD \in \mathbf{D}$ є відрізок $C'D'$ променя, який також з починається у початку координат. Пластична смуга BC відображається у відрізок $B'C'$ прямої, нахиленої до дійсної осі під кутом $\pi - \alpha$, яка проходить на відсталі k від початку координат. Таким чином область \mathbf{D} відображається у трикутник (область \mathbf{G} на рис. 3) площини τ .

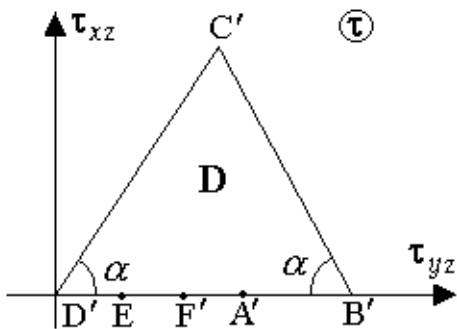


Рис. 3.

Оскільки здійснюване функцією $\tau(\zeta)$ конформне відображення є цілком визначене, то розв'язування крайової задачі (1) звелось до побудови відображення області \mathbf{D} на область \mathbf{G} .

Для його побудови запровадимо допоміжну площину t , у якій відповідні точки меж областей \mathbf{D} і \mathbf{G} відображаються в одні і ті ж точки дійсної осі: $A, A' \rightarrow A''$, $B, B' \rightarrow B''$, $C, C' \rightarrow C''$, $D, D' \rightarrow D''$, $E, E' \rightarrow E''$, $F, F' \rightarrow F''$ (рис. 4). Точка D'' знаходиться на нескінченності. Тоді пара функцій $\zeta = \zeta(t)$ і $\tau = \tau_1(t)$, які здійснюють це відображення,

визначатиме шукану функцію $\tau(\zeta)$ у параметричній формі. Відображення $\zeta = \zeta(t)$ і $\tau = \tau_1(t)$ можна побудувати за допомогою перетворення Крістофеля–Шварца [5].

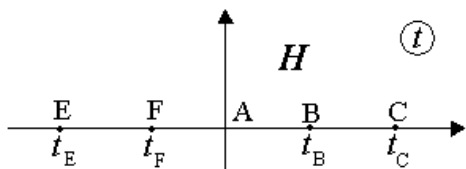


Рис. 4.

$$\zeta(t) = ib + \frac{b-h}{M} \int_0^t F_\zeta(\eta) d\eta, \quad (3)$$

де

$$F_\zeta(\eta) = (\eta-1)^{\frac{\alpha}{\pi}-2} ((\eta-t_E)(\eta-t_F)\eta)^{-\frac{1}{2}},$$

$$M = \int_0^1 |F_\zeta(\eta)| d\eta.$$

Тут і далі під нецілим степенем комплексної змінної розумітимемо аналітичну функцію, що набуває дійсних додатних значень при дійсних додатних значеннях аргументу. У загальному випадку відображення (3) забезпечує тільки потрібну величину кутів фігури \mathbf{D} . Метричні співвідношення у ній будуть сповнені, якщо виконуватимуться рівності

$$a \int_{t_E}^{t_F} |F_\zeta(\eta)| d\eta = b \int_{t_F}^0 |F_\zeta(\eta)| d\eta, \quad (b-h) \int_{t_F}^0 |F_\zeta(\eta)| d\eta = a \int_0^1 |F_\zeta(\eta)| d\eta, \quad (4)$$

чого можна досягти вибором параметрів $-\infty < t_E < t_F < 0$.

Можна довести, що стосовно вказаних параметрів система рівнянь (4) має єдиний розв'язок, який можна отримати за допомогою такого алгоритму:

$$t_F^{(j+1)} = t_F^{(j)} \left(1 + \lambda_1 \frac{b}{h} \frac{EF^{(j)} - AB^{(j)}}{EF^{(j)}} \right), \quad t_E^{(j+1)} = t_E^{(j)} \left(1 + \lambda_2 \frac{b}{a} \frac{AF^{(j)}}{EF^{(j)}} \right), \quad (5)$$

збіжного для достатньо малих чисел $\lambda_1 > 0$ і $\lambda_2 > 0$, якщо нульові наближення $t_F^{(0)}$, $t_E^{(0)}$ достатньо близькі до розв'язків цієї системи. Тут

$$EF^{(j)} = \int_{t_E}^{t_F} |F_\zeta^{(j)}(\eta)| d\eta, \quad AB^{(j)} = \int_0^1 |F_\zeta^{(j)}(\eta)| d\eta, \quad AF^{(j)} = \int_{t_F}^0 |F_\zeta^{(j)}(\eta)| d\eta.$$

Функції $F_\zeta^{(j)}(\eta)$ відрізняються від $F_\zeta(\eta)$ тільки заміною t_F і t_E на $t_F^{(j)}$, $t_E^{(j)}$.

Як засвідчив числовий експеримент, область збіжності розв'язку системи та параметри λ_1 , λ_2 , які визначають швидкість збіжності, суттєво залежать від форми області. Для випадку $a = b$, $\alpha = 45^\circ$ можна вважати $t_E^{(0)} = -2$, $t_F^{(0)} = -1$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Для інших випадків нульові наближення її розв'язку можна знайти методом підбору, або покладаючи їх такими, як у вже побудованих у розв'язку для фігури, не надто відмінної форми.

Кількість параметрів підінтегральної функції перетворення Крістофеля–Шварца на три одиниці менша за кількість вершин многокутника. Тому відображення $\tau_1(t)$ єдине з точністю до гомотетії:

$$\tau_1(t) = \frac{k}{\sin \alpha} - \frac{2e^{i\alpha} k \operatorname{ctg} \alpha}{K} \int_1^t F_\tau(\eta) d\eta, \quad (6)$$

де

$$F_\tau(\eta) = (\eta - 1)^{\frac{\alpha}{\pi} - 1} (\eta - t_c)^{-\frac{2\alpha}{\pi}}, \quad K = \int_1^{t_c} |F_\tau(\eta)| d\eta.$$

Остання з умов (1) буде виконаною, якщо $\tau_1(t_c) = \tau_0$, тобто коли

$$\frac{k}{\sin \alpha} - \frac{2k \operatorname{ctg} \alpha}{K} \int_{t_F}^1 |F_\tau(\eta)| d\eta = \tau_0. \quad (7)$$

Розв'язавши рівняння (7) стосовно t_c , знайдемо довжину d пластичної смуги, яка відповідає заданим у вершинах прямокутника періода напруженням:

$$d = \int_1^{t_c} |F_\zeta(\eta)| d\eta. \quad (8)$$

4. Числовий аналіз прикладу. Волокна відшаровуватимуться без появи пластичних деформації де інде за винятком межі включення-середовище при достатньо великій затримці текучості

$$k_1 \geq k \sec \frac{\alpha}{2},$$

що слідує із умови (2), яку ми вважаємо виконаною.

Зрозуміло, що для побудови графічної залежності довжини смуги від навантаження τ_0 немає необхідності у безпосередньому розв'язуванні рівняння (7). Зручніше вважати систему (7), (8) параметричним рівнянням довжини смуги від τ_0 . Визначені у такий спосіб залежності безрозмірної довжини d/l смуги пластичного відшарування включень від параметра навантаження τ_0/k для двох форм ромбічних включень подані на рис. 5. Для першої з них пластичні деформації розвиватимуться за схемою пластичного відшарування, коли $k_1 \geq 1,42k$, для другої - $k_1 \geq 2k$.

Виявлено такі особливості пластичного відшаровування ромбічних включень. Підростання смуг інтенсифікується зі збільшенням відстані між включеннями у горизонтальному напрямку. Але коли вона вдвоє перевищує відстань між ними у вертикальному напрямку, то подальше збільшення горизонтальних відстаней практично вже не відбивається на процесі пластичного відшаровування. Пластичне відшаровування перебігає тим інтенсивніше, що менший кут при вертикальних діагоналях включень – так само, як і у ідеально пружно-пластичному середовищі [4].

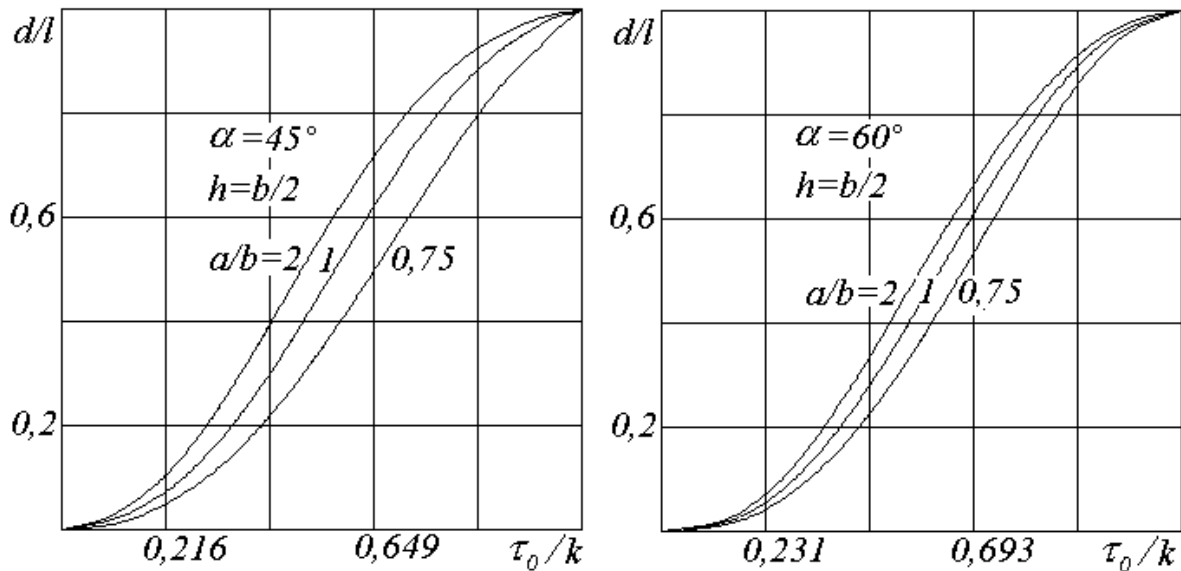


Рис. 5.

Спостерігається зменшення впливу на пластичне відшаровування віддалі між включеннями зі зменшенням кута при їх горизонтальних діагоналях. Для матеріалів із затримкою текучості становить інтерес дослідження впливу закругленості вертикальних вершин включень, за якої включення можуть не відшаровуватися зовсім.

5. Оцінка наближення розв'язку для ромбічного включення у прямокутній призмі. Знайдений розв'язок може слугувати наближенням для визначення пластичного відшаровування жорсткого ромбічного тунельного включення в необмеженій призмі прямокутного перерізу, zdeформованій сталими зсувними напруженнями $\tau_{yz} = \tau_0$, діючими на горизонтальних гранях призми [6]. Похибка наближення визначається мірою неоднорідності напруження τ_{yz} в горизонтальних площинах рівновіддалених від сусідніх рядів включень. Найбільше значення напруження τ_{yz} у цих площинах досягається посередині між парою сусідніх вертикально розташованих включень і дорівнює $\tau_1(0)$. Таким чином, відносна похибка в напруженнях, яку дає знайдений розв'язок двоперіодичної задачі стосовно дослідження пластичного відшаровування ромбічного включення у призмі скінченного поперечного перерізу, не перевищує $\theta = (\tau_1(0) - \tau_1(t_c)) / \tau_1(0)$. Неоднорідність напружень уздовж горизонтальних сторін прямокутника-періода зростає зі збільшенням віддалі між включеннями у горизонтальному напрямку. Для відображених на рис. 5 випадків, коли $\tau_0 = k$ неоднорідність напружень дорівнювала 10%, 16,2%, 23,2% для $\alpha = 45^\circ$ та 3%, 5%, 6% для $\alpha = 60^\circ$.

Література

1. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел. – М.: Изд-во ИЛ. – 1954. – 647 с.
2. Поль Б. Макроскопические критерии пластического течения и хрупкого разрушения // Разрушение. Т.2. – М.: Мир, 1975. – С. 336–520.
3. Криштал М.М. Неустойчивость и мезоскопическая неоднородность пластической деформации (аналитический обзор) Часть 1. Феноменология зуба текучести и прерывистой текучести // ФММ. – 2004. – Т.7. – Вып. 5. – С.5–29.
4. Кривень В.А. Двоперіодична пружнопластична задача поздовжнього зсуву тіла з жорсткими ромбічними включеннями // Математичні методи і фіз.- мех. поля. – 2001. – Т. 44, №1. – С. 109–113.
5. Иванов В.И., Попов В.Ю. Конформные отображения и их приложения. – М.: Едиториал УРСС, 2002 – 324 с.
6. Кривень В.А., Сулим Г.Т., Яворська М.І. Пластичне відшаровування при зсуві періодичних систем жорстких тонких включень // Вісник Дон. ун-ту, Сер. А: Природничі науки, 2003. – Вип. 1. – С. 66–71.