

## УТОМНЕ РУЙНУВАННЯ МАТЕРІАЛІВ ІЗ ЗАПОВНЕНИМИ ТРІЩИНАМИ

В.В. Панасюк, В.П. Силованюк, В.І. Маруха

### FATIGUE FRACTURE OF MATERIALS WITH FILLED UP CRACKS

V.V. Panasyuk, V.P. Sylovanyuk, V.I. Marukha

*Фізико-механічний інститут ім. Г.В.Карпенка НАНУ, Львів, Україна*

**Abstract** The formula for calculation of the damages accumulation under cyclic loading in the material has been proposed. The processes of cyclic elasto-plastic deformation at the filled crack tip have been investigated using the above formula. New kinetic dependences of fatigue crack propagation have been obtained. It was established that macrocrack growth rate in a cyclically deformed body is related, apart of the loading parameters and known strength characteristics of the material, with the parameters that account the intensity of damages accumulation and nonstability of the hysteresis loop width with the increase in the loading cycles number.

Матеріали із заповненими тріщинами часто зустрічаються на практиці. Заповненими тріщинами можна вважати графітові включення в чавунах, неметалічні включення в сталях, зварні шви в металах та „заліковані” ін’єкційними технологіями тріщини в будівельних матеріалах. Експлуатація матеріалів з такими дефектами в умовах циклічних навантажень носить певні особливості, пов’язані з деформуванням та локальним руйнуванням матеріалів в околі дефектів. Нижче пропонується модель втоми матеріалу із заповненими тріщинами.

Виходимо з класичного деформаційного критерію міцності, згідно з яким руйнування матеріалу в локальному об’ємі настає тоді, коли максимальна розтягова деформація  $\epsilon_{\max}$  досягає граничного значення  $\epsilon_c$

$$\epsilon_{\max} = \epsilon_c \quad (1)$$

Деформація матеріалу  $\epsilon_{\max}$  складається з двох частин: пружної ( $\epsilon_e$ ) і непружної ( $\epsilon_p$ ). Складова  $\epsilon_e$  пов’язана зі зворотними змінами міжатомних відстаней і не характеризує процеси накопичення дефектів. Складова  $\epsilon_p$  пов’язана з незворотніми процесами на мікрорівні (локальною пластичною деформацією – рухом дислокацій і генерацією вакансій, мікророзтріскуванням тощо) і, очевидно, може бути мірою накопичення мікродефектів у матеріалі.

Утомне руйнування під циклічним навантаженням матеріалу розглянемо як акт утворення нової поверхні тіла після  $N_f$  циклів навантаження. Це означає, що за вказану кількість циклічних деформацій у заданому об’ємі матеріалу нагромаджується таке його пошкодження, що спричинить руйнування (утворення нової поверхні) в результаті короткотривалого прикладання зусиль інтенсивності  $\sigma_a$  ( $\sigma_a$  – амплітуда навантаження в  $N_f$  циклі). Враховуючи сказане, умову (1) можна записати так:

$$\epsilon_{N_f} + \epsilon_e = \epsilon_c - \left( \sum_{N=1}^{N_f-1} \epsilon_N^m \right)^{1/m} \quad (2)$$

Тут  $\epsilon_e$  – пружна складова деформації в останньому циклі навантаження ( $\epsilon_e = \sigma_a/E$ ), а величина  $\epsilon_p$  замінена сумуванням по встановленому закону компонентів пластичних деформацій за кожен цикл навантаження до  $N=N_f$ ;  $m$  – характеристика матеріалу, яку визначають експериментально (чисельно її прирівнюють до аналогічного параметра в рівнянні Коффіна-Менсона за умов жорсткого навантаження тіла).

Для великих значень  $N_f$  величини  $\varepsilon_N^m$  можна розглядати як певну неперервну функцію ( $\varepsilon_N^m = F(N)$ ) від кількості циклів  $N$  і умову (2) записати в інтегральній формі:

$$\left( \int_1^{N_f} F(N) dN \right)^{\frac{1}{m}} + \varepsilon_e = \varepsilon_c. \quad (3)$$

Критеріальні співвідношення (2) і (3) дають можливість визначати кількість циклів до руйнування для довільних режимів циклічного навантаження, в тому числі з випадковою та запрограмованою змінами його амплітуди.

Використаємо співвідношення (3) як критеріальну умову росту тріщини біля заповненого дефекту.

Під час розтягу тіла біля дефекту формується зона передруйнування, в якій матеріал деформований за межі пружності. В рамках розрахункової схеми  $\delta_c$  – моделі [1] цю зону пружно-пластичних деформацій моделюємо розрізом ( $\Delta l$ ), до берегів якого прикладені напруження  $\sigma_0$ , які характеризують тут дію пружно-пластичного матеріалу (рис.1).

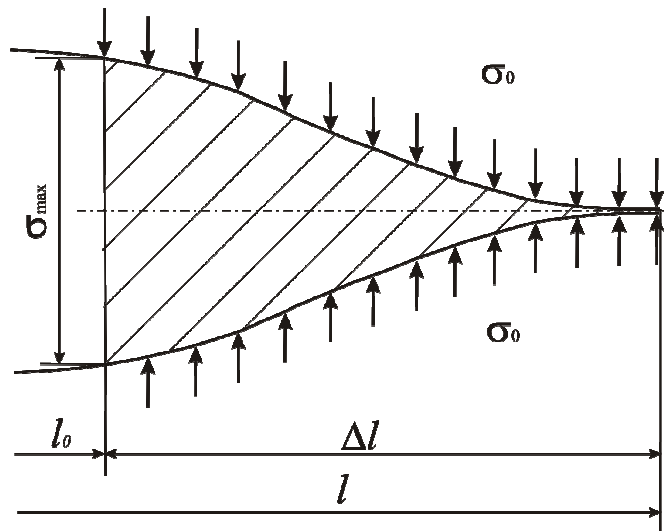


Рис.1 Зона передруйнування у півциклі навантаження.

Під час навантаження тіла елемент матеріалу висотою  $h$ , що знаходився біля вершини дефекту видовжується на величину  $\delta$ . Його деформацію можна визначити, враховуючи велике видовження, за формулою:

$$\varepsilon = \ln \left( 1 + \frac{\delta}{h} \right). \quad (4)$$

Пружна складова деформації  $\varepsilon_e$ , очевидно,  $\varepsilon_e = \sigma_0 / E$ .

Тоді для непружної складової  $\varepsilon_p$  деформації матеріалу біля вершини дефекту у півциклі навантаження маємо таку формулу (OAB, рис.2a):

$$\varepsilon_p = \ln \left( 1 + \frac{\delta}{h} \right) - \frac{\sigma_0}{E} \quad (5)$$

Під короткотривалим статичним навантаженням тріщина, згідно з  $\delta_c$  – моделлю, росте за умови  $\delta = \delta_c$ . Тоді рівність (1) набуває вигляду

$$\ln\left(1 + \frac{\delta_c}{h}\right) = \varepsilon_c. \quad (6)$$

Із співвідношення (6) величину  $h$  можна визначити через характеристики матеріалу  $\delta_c$ ,  $\varepsilon_c$ :

$$h = \frac{\delta_c}{\exp \varepsilon_c - 1}. \quad (7)$$

У півциклі розвантаження (рис.2а; лінія BCDE), коли зовнішнє зусилля  $p$  змінюється від  $p_{max}$  до  $p_{min}$ , в зоні переддруйнування спостерігається реверсивна пружно-пластична деформація елемента  $h$  (рис.2с).

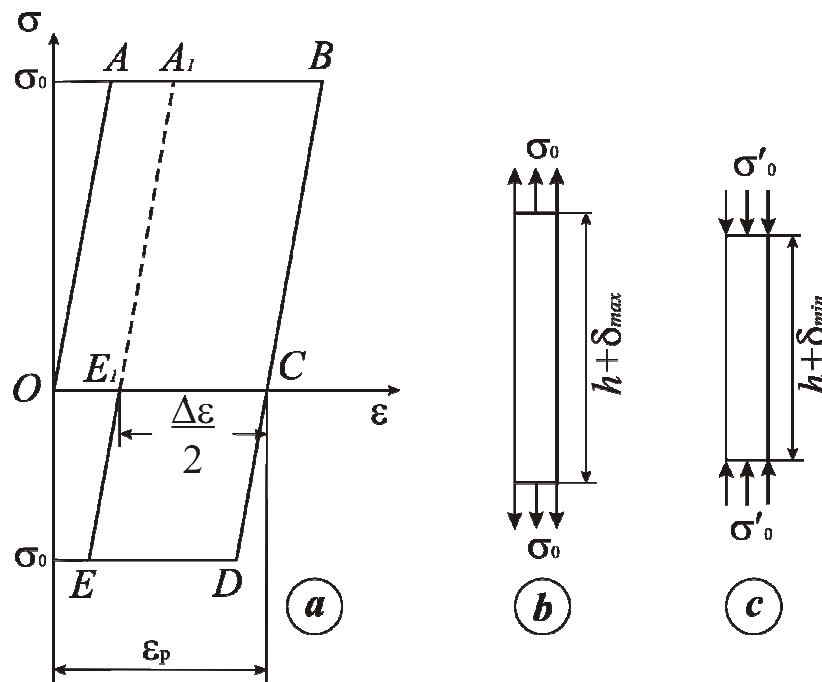


Рис.2. Схема навантаження-розвантаження елемента  $h$  матеріалу біля вершини дефекту:  $a$  – діаграма деформування в першому циклі;  $b$  – розтяг елемента  $h$  на величину  $\delta_{max}$ ;  $c$  – стиск елемента  $(h + \delta_{max})$  до величини  $(h + \delta_{min})$ .

Елемент  $h$ , що видовжився під дією навантаження  $p_{max}$  на величину  $\delta_{max}$  і став рівним  $(h + \delta_{max})$ , під час розвантаження тіла до величини  $p_{min}$  (перебуває під дією стискаючих напружень  $\sigma_o$ ) скорочується до величини  $(h + \delta_{min})$ . Враховуючи це, а також користуючись формулою (4), одержимо такий вираз для величини деформації цього елемента за півцикл розвантаження:

$$\varepsilon_1 = \ln \frac{h + \delta_{min}}{h + \delta_{max}}. \quad (8)$$

Тоді величина непружної деформації ( $\varepsilon_p$ ) елемента  $h$  у півциклі розвантаження

$$\bar{\varepsilon}_p = \ln \frac{h + \delta_{min}}{h + \delta_{max}} + \frac{\sigma'_o}{E} + \frac{\sigma_o}{E}. \quad (9)$$

Аналогічно, для наступного півциклу навантаження (лінія  $EE_1A_1B$  рис.2а) можна записати непружну складову деформації

$$\varepsilon'_p = \ln \frac{h + \delta_{\max}}{h + \delta_{\min}} - \frac{\sigma'_o}{E} - \frac{\sigma_o}{E}. \quad (10)$$

Таким чином, за допомогою формул (9), (10) для непружних складових деформації у півциклах навантаження і розвантаження можна визначити розмах  $\Delta\varepsilon$  непружної деформації:

$$\Delta\varepsilon = \varepsilon'_p - \bar{\varepsilon}_p = 2 \ln \frac{h + \delta_{\max}}{h + \delta_{\min}} - \frac{2(\sigma'_o + \sigma_o)}{E}. \quad (11)$$

Із збільшенням кількості циклів  $N$  непружна деформація в циклі може змінюватись внаслідок ефекту циклічного зміцнення чи знеміцнення матеріалу. Прийmemo, що залежність розмаху  $\Delta\varepsilon_N$  непружної деформації в циклі від кількості циклів  $N$  виражається степеневою функцією

$$\Delta\varepsilon_N = \Delta\varepsilon N^{-k}, \quad (12)$$

де  $k$  – параметр, що характеризує здатність матеріалу до циклічного зміцнення або знеміцнення;  $\Delta\varepsilon$  – розмах непружної деформації в першому циклі (задається співвідношенням (11)). Тоді функція

$$F(N) = (\Delta\varepsilon)^m N^{-mk}. \quad (13)$$

З урахуванням апроксимації (12) і (13) критеріальне рівняння (3) можна записати так:

$$\Delta\varepsilon \left( \frac{N_f^{1-mk} - 1}{1 - mk} \right)^{\frac{1}{m}} + \varepsilon_e = \varepsilon_c. \quad (14)$$

Із співвідношення (14) як частковий випадок отримується відома залежність Коффіна-Менсона [2,3], якщо покласти  $k=0$  та знехтувати пружною складовою деформації  $\varepsilon_e$ .

Із рівності (14) одержимо такий вираз для обчислення кількості циклів ( $N_f$ ) необхідних для зародження тріщини в околі дефекту:

$$N_f = \left[ \frac{(\varepsilon_c - \varepsilon_e)^m}{\Delta\varepsilon^m} (1 - mk) + 1 \right]^{\frac{1}{1-mk}}. \quad (15)$$

Матеріал, що заповнює тріщину, перебуває в умовах циклічного навантаження. Амплітуду цього навантаження встановимо в рамках пружного розв'язку задачі про включення, припустивши, що пластична зона в околі дефекту мало змінює напружений стан всередині цього дефекту. Тоді в процесі циклічного навантаження напруження у дефекті еліптичної форми будуть однорідними і змінюватимуться від

$$\sigma_{\min} = \frac{p_{\min} (1 + 2\beta)\eta}{1 + 2\beta\eta} \quad (16)$$

за мінімальних навантажень, до

$$\sigma_{\max} = \frac{p_{\max} (1 + 2\beta)\eta}{1 + 2\beta\eta} \quad (17)$$

за максимальних [4].  $\beta = a/c$ ;  $\eta = E_1/E$ ;  $a, c$  – півосі еліпса;  $E_1, E$  – модулі Юнга включення та основного матеріалу відповідно.

Опір втомі матеріалу, що перебуває в умовах циклічно змінного однорідного напруженого стану, характеризується кривими втоми, рівняння яких записується у вигляді [5]

$$N_* \sigma_a^m = C_0, \quad (18)$$

Тут  $\sigma_a = \sigma_{\max} - \sigma_{\min}$ ;  $N_*$  - число циклів до руйнування;  $m, C_0$  - константи матеріалу.

На основі співвідношень (16)-(18) знаходиться число циклів до руйнування матеріалу заповнення

$$N_* = \frac{C_0(1+2\beta\eta)^m}{(p_{\max} - p_{\min})^m (1+2\beta)^m \eta^m}. \quad (19)$$

Із порівняння кількості циклів отриманих із співвідношень (15), (19) встановлюємо місце початкового локального руйнування в матеріалі. Можливі два варіанти. Якщо  $N_f > N_*$ , то спочатку зруйнується включення, утвориться тріщина довжиною  $l_0 = a$ . Кінетика її росту буде визначатися згідно моделі втомного руйнування, запропонованої в роботі [6]. Зазначимо, що модель застосовна як до коротких тріщин, де пластична зона співмірна з розміром тріщини, так і для довгих, де правомірна концепція коефіцієнтів інтенсивності напружень.

В рамках моделі швидкість росту тріщини визначається як

$$v = \frac{\Delta l_f}{N_f} = l_0 \left( \sec \alpha \cos \frac{\alpha \sigma'_0}{\sigma'_0 + \sigma_0} - 1 \right) \left[ 1 + \frac{(\varepsilon_c - \varepsilon_e)^m (1 - mk)}{\left( 2 \ln \frac{h + \delta_{\max}}{h + \delta_{\min}} - \frac{\sigma_0 + \sigma'_0}{2} \right)^{1/m}} \right]^{\frac{1}{mk-1}}, \quad (20)$$

$$\alpha = \frac{\pi p_{\max}}{2\sigma_0}.$$

В умовах маломасштабної пластичності та циклічно стабільних матеріалів залежність (20) набере вигляду

$$v = \frac{\pi K_{1\max}^2}{8\sigma_0^2} \left( 1 - \frac{(K_{1\max} + K_{1\min})^2}{4K_{1\max}^2} \right) \left( \frac{2\pi(K_{1\max} + K_{1\min})^3 - 16\pi K_{1\max}^2 K_{1\min}}{4K_c^2 K_{1\max}} \right)^m \quad (21)$$

Для конструкційних матеріалів параметр  $m$  змінюється в межах від 1 до 5, тому показник степеня при  $K_{1\max}$  у співвідношенні (21) може набувати значень від 4 до 12.

Розглянемо другий варіант, коли  $N_f < N_*$ . В цьому випадку в околі включення після  $N_f$  циклів навантаження зародиться тріщина довжиною  $\Delta l_f$ . Як розрахункову схему для обчислення розмаху деформацій  $\Delta \varepsilon$  та розміру тріщини  $\Delta l_f$  розглянемо заповнену тріщину довжини  $2l_0$  в безмежній пластинці, що піддана дії циклічних навантажень, які змінюються від  $p_{\min}$  до  $p_{\max}$ . Під дією цих зусиль в околі дефекту формується зона передруйнування, де матеріал деформований за межі пружності.

Під максимальним навантаженням у першому циклі, згідно з положенням  $\delta_c$ -моделі пружно-пластичних тіл [1], ця зона моделюється розрізом на продовженні дефекту, береги якого притягуються напруженнями  $\sigma_0$  (рис.1). Для ідеального пружно-пластичного матеріалу  $\sigma_0$  прирівнюється до границі текучості  $\sigma_T$  під час

розтягу матеріалу. Для матеріалу, що зміцнюється,  $\sigma_0$  можна визначати, наприклад, як середнє арифметичне між  $\sigma_T$  і  $\sigma_0$  – границею міцності матеріалу під час розтягу.

Зі зменшенням навантаження від  $p_{max}$  до  $p_{min}$  відбувається зворотнє переміщення границь пружного матеріалу. Цим переміщенням протидіє залишкова деформація пластичного ядра. В результаті в зоні переддруйнування напруження перерозподіляються. В частині цієї зони,  $l_0 < x < l_f$  прилеглий до вершини дефекту, напруження змінюються на стискальні інтенсивністю  $\sigma'_0$  ( $\sigma'_0$  може відрізнятись від  $\sigma_0$ ). В решті зони  $l_0 < x < l_f$  вони залишаються розтяговими і рівними  $\sigma_0$ , що забезпечує плавність змикання берегів в кінці зони переддруйнування (рис.3).

Внаслідок такого модельного подання ситуації в зоні переддруйнування за максимальних та мінімальних зусиль у циклі навантаження формуються дві крайові задачі теорії пружності для математичного розрізу довжини  $2l$ :

$$1) \quad \sigma_y(x,0) = \begin{cases} -p_{max} + \frac{u_y E_1 \beta}{\sqrt{a^2 - x^2}}, & |x| \leq l_0 \\ -p_{max} + \sigma_0 & l_0 < |x| \leq l \end{cases} \quad (22)$$

$$\tau_{xy}(x,0) = 0, \quad |x| \leq l$$

$$2) \quad \sigma_y(x,0) = \begin{cases} -p_{min} + \frac{u_y E_1 \beta}{\sqrt{a^2 - x^2}}, & |x| \leq l_0 \\ -p_{min} - \sigma'_0, & l_0 < |x| \leq l_f \\ -p_{min} + \sigma'_0, & l_f < |x| \leq l \end{cases} \quad (23)$$

$$\tau_{xy}(x,0) = 0, \quad |x| \leq l.$$

Тут  $u_y$  – переміщення поверхні заповненої тріщини.

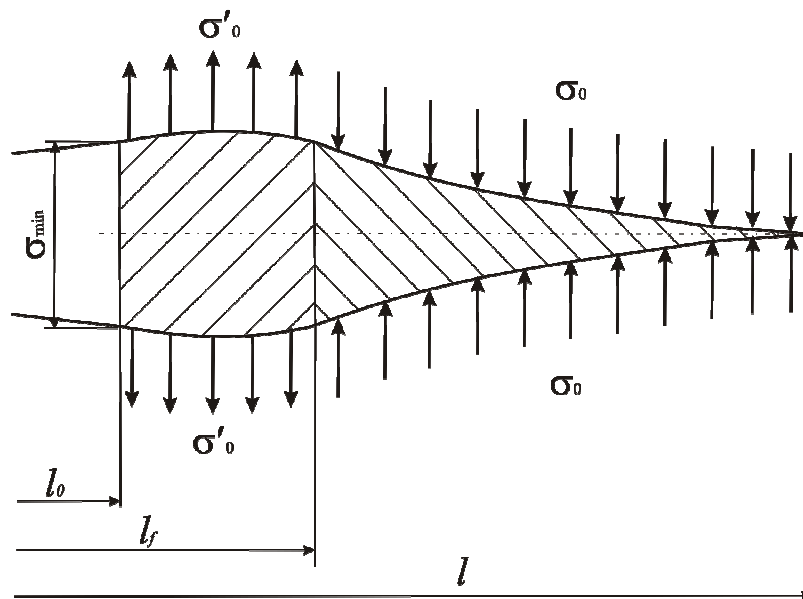


Рис.3. Схематичне зображення зон стиску та розтягу біля вершини дефекту.

В результаті розв'язку крайових задач (22), (23) за допомогою апарату сингулярних інтегральних рівнянь, отримуються співвідношення для обчислення розміру циклічної пластичної зони  $\Delta l_f$ , який ототожнюється з розміром тріщини, що виникає біля дефекту в результаті циклічних навантажень

$$\Delta l_f = l_0 f(\alpha, \beta, \eta, R), \quad R = \frac{P_{\min}}{P_{\max}} \quad (24)$$

та величини розкриття  $\delta_{\max}$ ,  $\delta_{\min}$  у схемах, що зображені на рис. 2, 3:

$$\begin{aligned} \delta_{\max} &= g_{\max}(l_0, P_{\max}, \beta, \eta, \nu, E, \sigma_0) \\ \delta_{\min} &= g_{\min}(l_0, P_{\max}, P_{\min}, \beta, \eta, \nu, E, \sigma_0, \sigma'_0) \end{aligned} \quad (25)$$

Тоді розмах пластичної деформації може бути обчислений згідно (11), (24), (25) і кількість циклів до зародження тріщини встановлюється із співвідношення (15).

Кінетика росту тріщини розміром  $\Delta l_f$ , що зародилася в околі заповненої тріщини, встановлюється згідно схем пластичної деформації в околі дефектного ансамблю включення – тріщина – пластична зона, подібних до зображених на рис. 1, 3.

### Література

1. Панасюк В.В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. –К.: Наук. думка, 1968. – 246 с.
2. Coffin L.E. A study of the effects of cycle thermal stresses in ductile metals.// Trans. ASME.- 1954, №76. –P. 794–807.
3. Manson S.S. Thermal stress and low cycle fatigue. – New York: Mc Gran-Hill,
4. Панасюк В.В., Стадник М.М., Силованюк В.П. Концентрация напряжений в трехмерных телах с тонкими включениями. –К.: Наук. думка, 1986. –216с.
5. Серенсен С.В. Сопротивление материалов усталостному и хрупкому разрушению. –М.: Атомиздат, 1975. –190с.
6. Панасюк В.В., Силованюк В.П. Розрахункова модель утомного руйнування матеріалів // Фіз.-хім. механіка матеріалів. –2003. –№3, –С.44-54