УДК 517.3

Брощак О. - ст. гр. КА-11
Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

ДЕЯКІ ЗАСТОСУВАННЯ ІНТЕГРАЛІВ, ЗАЛЕЖНИХ ВІД ПАРАМЕТРА

Науковий керівник: канд. фіз. – мат. наук, доцент Самборська О.М.

Broschak O.
Ternopil Ivan Pul'uj National Technical University

SOME APPLICATIONS OF INTEGRALS DEPENDENT ON A PARAMETER

Supervisor: Samborska O.

Ключові слова: інтеграл, невласний інтеграл, параметр
Keywords: inteqral, improper inteqral, parameter

Розглядається інтеграл $I(\alpha)=\int_a^b f(x,\alpha)dx$, в якому підінтегральна функція залежить від деякого параметра α. Неважко довести наступні твердження.

1. Якщо функція $f(x,\alpha)$ неперервна при $a \le x \le b$, $c \le \alpha \le d$, то справджується формула: $\int_c^d \mathrm{I}(\alpha)d\alpha = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,\alpha)dx\right)d\alpha = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,\alpha)d\alpha\right)dx$. (1)

2. Якщо крім цього, $f'_{\alpha}(x,\alpha)$ неперервна в даному прямокутнику, то для будь – якого $\alpha \in [c;d]$ справедлива формула: $\mathrm{I}'(\alpha)=\int_a^b f'_{\alpha}(x,\alpha)dx$. (2)

Можна розглядати невласний інтеграл, залежний від параметра: $\mathrm{I}(\alpha)=\int_a^{+\infty} f(x,\alpha)dx$. При виконанні певних умов для цього інтеграла справджуються формули, аналогічні до формул (1) та (2). Застосуємо формули (1) та (2) до обчислення визначених інтегралів.

Обчислити інтеграл $\mathrm{I}=\int_0^1 \frac{\operatorname{arc} tqx}{x\sqrt{1-x^2}}dx$. Введемо параметр α та розглянемо інтеграл $\mathrm{I}(\alpha)=\int_0^1 \frac{\operatorname{arc} tq\alpha x}{x\sqrt{1-x^2}}dx$ $(\alpha \ge 0)$. За формулою (2) отримаємо: $\mathrm{I}'(\alpha)=\int_0^1 \frac{dx}{(1+\alpha^2x^2)\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}$. Звідси $\mathrm{I}(\alpha)=\frac{\pi}{2}\int\frac{d\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}=\frac{\pi}{2}\ln\left(\alpha+\sqrt{1+\alpha^2}\right)+c$.

Оскільки $\mathrm{I}(0)=0$, то $c=0$. $\mathrm{I}=\frac{\pi}{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$.

Обчислити інтеграл $\mathrm{I}=\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x}dx$ $(a,b>0)$. $\frac{x^b-x^a}{\ln x}=\int_a^b x^{\alpha}d\alpha$. За формулою (1) $\mathrm{I}=\int_a^b d\alpha\int_0^1 x^{\alpha}dx=\int_a^b \frac{d\alpha}{\alpha+1}=\ln\frac{b+1}{a+1}$.