

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ,
МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ**
**Тернопільський національний технічний університет
імені Івана Пулюя**

*Кафедра ТМ та СГМ
Кафедра ТОЗВ*

*О.В. Мильніков
М.І. Підгурський*

ОСНОВНІ ПИТАННЯ ОПОРУ МАТЕРІАЛІВ

***КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ ТА ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ
ДЛЯ СТУДЕНТІВ ЗАОЧНОЇ ФОРМИ НАВЧАННЯ***

*Тернопіль
2012*

УДК 620.10(075.8)

Мильніков О.В., Підгурський М.І. Основні питання Опору матеріалів.
Конспект лекцій та практичних занять для студентів заочної форми навчання –
Тернопіль: Видавництво ТНТУ, 2012. – 180с.

Конспект лекцій та практичних занять з Опору матеріалів для студентів заочної форми навчання написано у відповідності з Освітньо-професійною програмою вищої освіти, затвердженою Міністерством освіти і науки України 1.09.97р., з навчальним планом для студентів механічних спеціальностей з напрямку підготовки (спеціальності) __ 6.050503 “Машинобудування” та напрямку підготовки (спеціальності) __ 6.050504 “Зварювання”

Розглянуто і схвалено кафедрою технології та обладнання зварювального виробництва, методичною комісією механіко-технологічного факультету.

Рецензент: **Гевко Б.М.**, доктор технічних наук, професор,
Заслужений винахідник України,
академік Інженерної Академії України
зав.кафедрою технології машинобудування
ТНТУ

Рекомендовано до друку науково-методичною радою Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя.

О.В. Мильніков, М.І. Підгурський, 2012.

Видавництво ТНТУ імені Івана Пулюя

Передмова

Конспект написано на основі положень Освітньо-професійної програми вищої освіти, затвердженої Міністерством освіти і науки України 1.09.97р., лекційних та практичних занять з курсу „Опір матеріалів”, які автори проводять понад 40 років для студентів механічних спеціальностей у Тернопільському національному технічному університеті імені Івана Пулюя.

Серед кращих підручників з опору матеріалів, написаних у різні роки видатними науковими діячами, слід відзначити розробки С.П.Тимошенка, М.М.Беляєва, В.І.Феодосьєва. Гарним підручником, написаним з урахуванням сучасних досягнень механіки деформівного твердого тіла й до того ж прекрасно оформленим є, на думку авторів, „Сопротивление материалов”, написаний колективом учених під редакцією академіка НАН України Г.С.Писаренка.

На жаль, з відомих україномовних підручників, автори у позитивному плані використанні для студентів-заочників можуть відзначити тільки підручник С.Л.Посацького.

Мабуть не випадковим явищем є значна кількість підручників та посібників – складних і простих, математизованих і не дуже, з урахуванням вузької інженерної спеціалізації та загального спрямування саме з опору матеріалів. Так чи інакше, інженери різних профілів (та й не тільки інженери) стикаються у житті з практичною необхідністю оцінювати та забезпечувати міцність, жорсткість і стійкість конструкцій різних ступенів складності.

Викладач, що працює з певним контингентом студентів, змушений доводити майбутнім інженерам загально й давно відомі істини, перетворюючи їх кожного разу так, щоб конкретна студентська аудиторія відповідного інженерного спрямування, певного рівня загального розвитку й математичної підготовки змогла б їх сприйняти. Це і є основним мотивом створення цього конспекту для студентів заочної форми навчання механічних спеціальностей ТНТУ імені Івана Пулюя, який висвітлює тільки деякі, найбільш важливі питання Опору матеріалів.

Конспект містить тільки той лекційний матеріал та приклади розв'язку конкретних задач, що розглядаються на заняттях, які, на жаль, не завжди можуть відвідувати студенти-заочники. Це зумовлено, по-перше, тим, щоб не перевантажувати об'єм конспекту, а, по-друге, тому, що ці питання, їх важливість, складність і актуальність вимагають відображення в окремій навчально-методичній літературі. Нумерація параграфів, рисунків та формул на лекційних заняттях проводиться у прив'язці до відповідних тем, відображених у Робочій програмі дисципліни у тій її частині, яка стосується заочної форми навчання. Нумерація рисунків та формул на практичних заняттях проводиться там, де вона є необхідною, окремо для кожної задачі.

Слід відзначити, що автори, при написанні конспекту послуговувалися, в основному, навчально-методичним посібником «Опір матеріалів. Конспект лекцій», написаним одним з авторів - О.В.Мильніковим для студентів механічних спеціальностей стаціонарної форми навчання. Необхідність цього

кроку змотивована спробою стисло й зрозуміло викласти той матеріал, який можна донести до студентів у сучасних скорочених за часом курсах із опору матеріалів.

Автори висловлюють подяку академіку Інженерної Академії наук України, Заслуженому винахіднику України, докторові технічних наук, професору Гевко Б.М. та кандидатові фізико–математичних наук, доценту кафедри механіки суцільних середовищ Київського національного університету ім. Т.Г. Шевченка Кепічу Т.Ю., за цінні вказівки що до укладання матеріалу посібника та його рецензування.

Заняття 1. Лекція 1. Тема 1: Вступ. Основні поняття і задачі Опору матеріалів

Вступ. Задачі опору матеріалів. Коротка історична довідка. Основні гіпотези опору матеріалів. Класифікація тіл. Поняття про деформації. Сили та моменти сил.

1.1. Вступ

Опір матеріалів – це наука про інженерні методи розрахунку на міцність, жорсткість і стійкість елементів конструкцій, деталей машин та приладів.

Що ж таке міцність, жорсткість та стійкість?

Чому саме *інженерні* методи розрахунку? Що слід розуміти під терміном *конструкція*?

Міцність – це здатність тіл протидіяти зовнішнім силам, **не руйнуючись**.

Жорсткість – це здатність тіл протидіяти зовнішнім силам, якомога менше **деформуючись**.

Стійкість – це здатність тіл протидіяти зовнішнім силам, зберігаючи **первісну форму пружної рівноваги**.

Як бачимо, опір матеріалів вивчає поведінку тіл у полі зовнішніх сил. Але ж цим займається і теоретична механіка. Чим тоді відрізняються курси опору матеріалів та теоретичної механіки?

Якщо в теоретичній механіці всі тіла вважають абсолютно твердими і розглядають закономірності руху цих тіл, то в задачах опору матеріалів усі тіла вважають твердими, але здатними до деформацій і розглядають процеси, пов'язані з цими деформаціями, а рух цих тіл цікавить тільки з точки зору утворення додаткових сил (наприклад, сил інерції).

Під терміном „*конструкція*” будемо розуміти сукупність елементів (*тіл*), які функціонально пов'язані між собою та виконують певне технічне завдання. *Тіло*, в свою чергу, теж може виступати в ролі конструкції, якщо, наприклад, у постановці задачі потрібно враховувати неоднорідну побудову (композитні матеріали).

Опір матеріалів є наукою *інженерних* методів розрахунку саме тому, що постановка задач передбачає рівень абстрагування та спрощення таким, щоб інженер-практик міг розв'язати ці задачі, використовуючи доступний для нього математичний апарат.

Таким чином, опір матеріалів – це загальна наука про міцність і надійність конструкцій та їх елементів. Ці ж питання вивчають й інші суміжні дисципліни: будівельна механіка стержневих систем, яка в більшості розглядає закономірності, пов'язані зі створенням цілих систем стержнів, функціонально

зв'язаних між собою; математична теорія пружності, теорія пластичності, теорія повзучості, реологія та ін. Але ці науки використовують більш розвинений апарат математики.

При вирішенні основної задачі опору матеріалів – вибору матеріалу й поперечних розмірів для елементів споруд і машин, крім уміння обчислювати напруження, необхідне знання механічних властивостей реальних матеріалів. Це зумовлює необхідність лабораторних експериментальних досліджень. Глибокі знання про міцність матеріалів, що використовуються, і не менш глибоке і чітке уявлення про розподіл напружень в елементах конструкцій – ось що повинен дати курс опору матеріалів інженеру, аби достатньо озброїти його для вирішення практичних задач.

1.2. *Задачі опору матеріалів*

При проектуванні конструкцій і машин інженеру доводиться вибирати матеріал і поперечні розміри для кожного елемента конструкції так, щоб він надійно, без ризику руйнуватися або спотворити свою форму, *чинив опір* дії зовнішніх сил, які передаються на нього від сусідніх частин конструкції, тобто, щоб була забезпечена нормальна робота цього елемента. Підстави для правильного вирішення цієї задачі дає інженеру наука про *опір матеріалів*.

Опір матеріалів, вивчаючи поведінку різних матеріалів під впливом сил, вказує, як підібрати для кожного елемента конструкції необхідний матеріал і поперечні розміри за умови повної надійності роботи і найбільшого здешевлення конструкції.

Іноді в опорі матеріалів доводиться вирішувати видозмінену задачу — перевіряти достатність розмірів уже запроектованої або існуючої конструкції.

Вимоги надійності та найбільшої економії суперечать одна одній. Перше, зазвичай, призводить до збільшення матеріалоємності, друге ж вимагає її зниження. Ця суперечність є найважливішим елементом наукової методики, що зумовлює розвиток опору матеріалів як науки.

Часто настає момент, коли існуючі матеріали і методи перевірки міцності не в змозі задовольнити потребам практики, що ставить на чергу вирішення нових задач (наприклад, використання великих швидкостей в техніці взагалі, в авіації та турбобудуванні зокрема, перекриття великих прольотів, динамічні задачі і ін.). Тоді починаються пошуки нових матеріалів, дослідження їх властивостей, поліпшення і створення нових методів розрахунку та проектування. Опір матеріалів повинен встигати за загальним прогресом техніки.

У деяких випадках інженеру, крім основних вимог — надійності й найбільшої економії, - при виконанні конструкції доводиться задовольняти й інші умови, наприклад, вимоги до підвищення темпів спорудження (при відновленні зруйнованих споруд), мінімальної ваги (при конструюванні літаків) і т.п. Ці обставини також відображаються на виборі матеріалу, розмірів і форм самої конструкції та її елементів.

1.3. Коротка історична довідка

Початок розвитку опору матеріалів як науки відносять до 1638 р. і пов'язують з ім'ям Галілео Галілея, знаменитого італійського вченого. Він був професором математики в Падуї, жив в період розпаду феодального ладу, розвитку торгового капіталу, налагодження міжнародних морських стосунків і зародження гірничої та металургійної промисловості.

Нова економіка того часу поставила за мету вирішення ряду нових технічних проблем. Пожвавлення зовнішніх торгових відносин зумовило завдання збільшення вантажопідйомності суден, а це спричинило необхідність зміни їх конструкції. Водночас постало питання про реконструкцію і створення нових внутрішніх водних шляхів сполучення, включаючи розбудову каналів і шлюзів. Ці технічні завдання не могли бути вирішені простим копіюванням існуючих раніше конструкцій суден і споруд. Виявилось, що необхідно навчитися шляхом розрахунку оцінювати міцність елементів конструкції залежно від їх розмірів і величини діючих на них навантажень.

Значна частина робіт Галілея була присвячена вирішенню задач про залежність між розмірами балок і інших стержнів із тими навантаженнями, які можуть витримати ці елементи конструкції. Він вказав, що одержані ним результати можуть «принести велику користь при спорудженні великих суден, особливо при зміцненні палуб і покриттів, оскільки в спорудах цього роду легкість має величезне значення». Дослідження Галілея опубліковані в його книзі „Discorsi e Dimostrazioni matematiche” (1638, Лейден, Голландія).

Подальший розвиток опору матеріалів відбувався паралельно з розвитком техніки будівництва і машинобудування, що пов'язало його з цілим рядом робіт видатних учених-математиків, фізиків та інженерів, у тому числі й вітчизняних.

До речі, не можна не навести і негативний приклад, який досить сильно вплинув на розвиток опору матеріалів. І. Ньютон, якому завдячують бурхливим розвитком математика й механіка в цілому, в силу особистої неприязні до Р. Гука, зробив багато для того, щоб і та галузь науки – опір матеріалів, якою плідно займався Гук, вважалася недостойною уваги видатних умів того часу. Це було причиною того, що механіка твердого деформівного тіла, зокрема опір матеріалів, були загальмовані в своєму розвитку років на півтораєста.

Великий внесок в науку про опір матеріалів в XVIII столітті вніс дійсний член Петербурзької Академії наук Леонард Ейлер, що вирішив задачу про стійкість стиснутих стержнів.

У XIX столітті світову популярність набули роботи Д.І. Журавського і Х.С. Головіна. У зв'язку з проектуванням і спорудою мостів на Миколаївській залізниці, що будувалася між Петербургом і Москвою, Д.І. Журавський вирішив ряд важливих і цікавих питань, пов'язаних з міцністю балок при їх згині. Х.С. Головін уперше правильно розв'язав задачу про міцність кривих стержнів. Збагатили світову науку роботи Ф.С. Ясинського з питань стійкості елементів конструкцій, викликані необхідністю вивчення причин руйнування мостів. Професор М.О. Белелюбський організував і довго керував найбільшою

в світі лабораторією з випробовувань матеріалів в Петербурзькому інституті інженерів шляхів сполучення. Він же протягом багатьох років працював головою міжнародного суспільства з випробовувань матеріалів. Кінець ІХ століття ознаменувався появою перших наукових робіт одного з видатних учених у галузі механіки – С.П. Тимошенка.

З початку ХХ століття роль наших вітчизняних вчених в опорі матеріалів набула провідної ролі. Професор І.Г. Бубнов став засновником сучасної науки про міцність корабля. Академік А.Н. Крилов, крім подальшого розвитку праць про розрахунок корабля, провів важливі дослідження в галузі динамічних розрахунків. Професор Н.П. Пузиревський створив нову методику розрахунку балок на пружній основі. З численних праць академіка Б.Г. Гальоркіна достатньо згадати роботи, присвячені розвитку варіаційних методів механіки, загальному вирішенню просторової задачі теорії пружності й розрахунку плит. Багатьох питань розрахунку на міцність торкалися і роботи С.П. Тимошенка. Академік А.Н. Диннік опублікував ряд капітальних робіт, присвячених стійкості елементів конструкцій. Проф. М.М. Герсеванов плідно працював у галузі механіки ґрунтів, вирішував задачі міцності і стійкості основ і фундаментів споруд і машин. Професори П.Ф. Папкович і Ю.А. Шиманський очолили школу вчених, що займалася питаннями міцності кораблів. Професор М.М. Давиденков спільно зі своїми учнями створив нову теорію, що пояснює причини руйнування матеріалів. Велике значення мають і його праці з питань динамічної міцності та руйнування при ударі. Зусиллями наших інженерів розроблено нову теорію розрахунку залізобетонних конструкцій, яка відображає дійсний характер роботи цих конструкцій і при забезпеченій міцності дає значну економію матеріалів. Академік М.І. Мусхелішвілі розвинув сучасні методи теорії функцій комплексної змінної й теорії сингулярних інтегральних рівнянь і застосував їх до вирішення ряду задач. Професор В.З. Власов створив нову оригінальну теорію розрахунку тонкостінних оболонок і тонких стержнів, що мають широке використання в різних конструкціях. Великий внесок у розвиток механіки твердого деформівного тіла зробили академіки А.Д. Коваленко (термопружність і термопластичність), Г.М.Савін (теорія пластин та оболонок, концентрація напружень), Г.С.Писаренко, Я.С. Підстригач та інші. Створена ними наукова школа є однією з найпотужніших шкіл механіків у світі.

1.4. Основні поняття опору матеріалів

1.4.1. Основні гіпотези опору матеріалів

Опір матеріалів, як і будь-яка інша наука, базується на певних гіпотезах (аксіомах), основними з яких є:

- *гіпотеза про суцільність матеріалу* – матеріал заповнює все тіло;
- *гіпотеза про однорідність та ізотропність* – матеріал вважають однорідним та ізотропним;

– *гіпотеза про малі деформації* – розглядають деформації, які значно менші за розміри самих тіл (на 2 порядки і більше);

– *гіпотеза про ідеальну пружність (пружність – це здатність тіл відновлювати свою форму та розміри при розвантаженні)*;

– *закон Гука* – приймається лінійна залежність між величинами сил та деформаціями, що викликані ними. Більшість задач опору матеріалів розв'язують саме в цій постановці;

Гук Роберт (1635 – 1703) – англійський вчений-енциклопедист. Вивчав питання тиску повітря, розробив теорію капілярності, відкрив закон пропорційності між силами та деформаціями тіл, займався теорією планетарних рухів, висловлював ідею всесвітнього тяжіння, вивчав питання, пов'язані з природою світла, побудував перший повітряний насос та інші прилади, працював над проектами літальних апаратів. Після Великої лондонської пожежі брав активну участь у відбудові міста – багато споруд було виконано за його проектами.

– *принцип суперпозиції* – вважають, що результат від суми дій дорівнює сумі результатів від кожної дії окремо;

– *принцип Сен-Венана* – якщо тіло навантажене силами і при цьому розміри зони прикладання цих сил незначні в порівнянні з розмірами тіла, то в перерізах, достатньо віддалених від місць прикладання сил, напруження практично не залежить від способу навантаження.

–
Барре де Сен-Венан (1797 – 1886) – французький вчений у галузі математики та механіки. Основні дослідження відносяться до механіки твердого тіла, теорії пружності, гідростатики, гідродинаміки та векторного числення.

Хоча наведені тут гіпотези дають дуже великі наближення при дослідженні процесів, які відбуваються в тілах при навантаженні, інженерна практика дає змогу оцінити розрахунки, які базуються на цих гіпотезах як такі, що досить добре описують загальний стан навантажених тіл.

1.4.2. Класифікація тіл, що приймається в опорі матеріалів

В опорі матеріалів, як і в будь-якій науці, розглядають не самі конкретні тіла, а якийсь спрощений їх символ, модель, абстрагуючись від другорядних ознак цього тіла.

Усі тіла при розгляді задач опору матеріалів можна віднести до однієї з відповідних моделей:

– *стержень (брус)* – це тіло, в якого один із розмірів значно більший, ніж два інших (рис.1.1). При цьому стержень може бути з прямою віссю (прямий стержень) або ламаною віссю (рама). Стержні можуть бути як призматичні (рис.1.1,а,б), так і змінного поперечного перерізу (рис. 1.1,в).

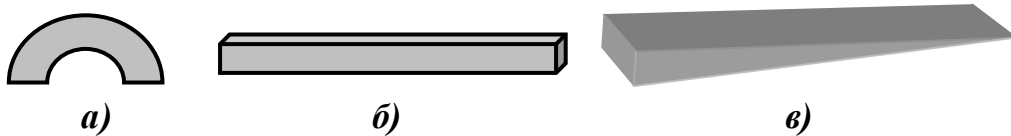


Рис.1.1. Типи стержнів (а – кривий, б – прямий, в –змінного поперечного перерізу)

– *оболонка* – це тіло, в якого один з розмірів значно менший, ніж два інших (рис. 1.2,а). За формою серединної поверхні оболонки поділяються на циліндричні, конічні, сфери. Якщо серединна поверхня є площиною, то така оболонка носить назву *пластини* (рис.1.2,б).

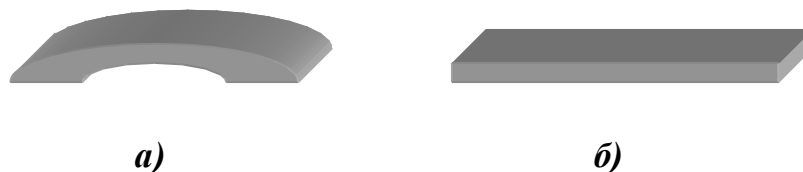


Рис.1.2. Оболонка (а) та пластина(б)

- *масиви* – тіла, в яких усі розміри приблизно одного порядку (рис. 1.3).



Рис.1.3. Масив

Прикладами деталей, які розглядаються як прямі стержні, є вали, балки, осі. Криві стержні – крюки підйомних кранів, віконні ручки і т.п. Як оболонки можна розглядати стінки котлів, обшивку крила літака, корпус

підводного човна й т.п. До пластин відносять плоскі кришки люків, панелі перекриття, диски турбомашин і т.п. Масивами можуть бути представлені куски каменю, блоки фундаментів та ін.

1.4.3. *Поняття про деформації*

Під деформаціями розуміють будь-які зміни розмірів або форми тіла.

Деформації можуть бути *абсолютні та відносні* (коли вони вимірюються відношенням зміни величини до її початкового значення).

У більшості випадків деформація тіла складається з двох частин: *пружної та пластичної (залишкової)*.

Пружні деформації – це деформації, які зникають при розвантаженні тіла. *Пластичні* – такі, що залишаються після розвантаження.

При нормальній експлуатації інженерних конструкцій не допускаються пластичні деформації, коли розміри і форми елементів конструкцій незворотно змінюються. Визначення умов виникнення та зростання пластичних деформацій має велике значення для знаходження тих навантажень, які безпечно можуть передаватися на конструкцію.

1.4.4. *Сили та їх класифікація*

Сили, що діють на тіло, можна класифікувати за різними ознаками.

Вони можуть бути *зовнішніми та внутрішніми*. Зовнішні – це сили, які прикладаються до тіла за рахунок інших тіл. Зовнішні сили, розподілені по всьому об'єму тіла, або його частині називають *об'ємними або масовими*. Зовнішні сили, прикладені по поверхні, носять назву *поверхневих*.

Навантаження – це система зовнішніх сил, що діють на тіло.

Внутрішніми силами називають сили взаємодії між частинами твердого тіла. Зовнішні сили викликають деформації тіл, що призводить до виникнення вже внутрішніх сил.

Навантаження тіла може бути *статичним або динамічним*. Статично прикладені сили – це сили, при дії яких практично немає прискорень тіла (чи його частин). Це має місце, коли навантаження тіла проводити, повільно змінюючи від нуля до повного прикладання сили. Динамічним називають навантаження, при якому виникають прискорення тіла, (чи якоїсь його частини) і, як наслідок цього, сили інерції.

Навантаження може бути *зосередженим* (діяти в досить локальній зоні – практично в точці) (рис.1.4,а) та *розподіленим* (тобто діяти або на певній площадці, або на певній довжині) (рис.1.4,б,в). Якщо розподіл має рівномірний характер (рис.1.4,в), навантаження носить назву *рівномірно-розподіленого*.

Для того, щоб порахувати повне навантаження Q в цьому випадку, рівномірно-розподілене навантаження q треба перемножити відповідно на площу, по якій воно розподіляється (або на довжину – у випадку розповсюдження по довжині). Тобто у випадку, зображеному на рис. 1.4,в. :

$$Q = qa.$$

Зосереджені сили, як правило, позначають великими літерами " F, R, Q, H " і вони мають розмірність одиниць сили (Н), (кН) та (МН).

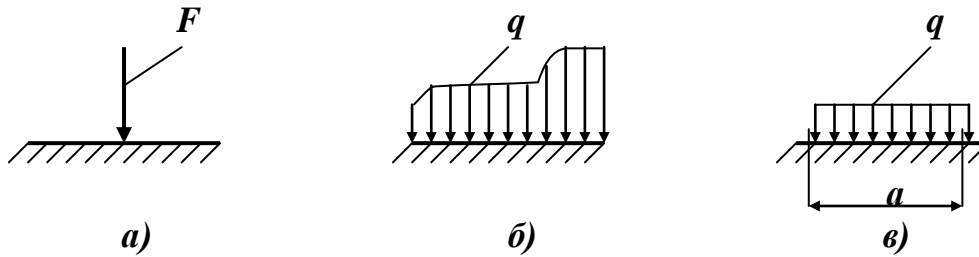


Рис. 1.4. Види навантажень: а) зосереджене, б) розподілене, в) рівномірно розподілене

Розподілене навантаження, як правило, позначають літерою " q " і воно має розмірність сили, віднесеної до площі (або сили, віднесеної до довжини) (Н/м^2), (кН/м^2) та (МН/м^2), або (Н/м), (кН/м) та (МН/м).

Момент сили відносно точки (осі) – це добуток сили на плече (рис 1.5).

Плече – це відстань від точки (осі), відносно якої визначається момент, до лінії дії сили (а не до точки прикладання сили, як дехто помилково думає).

Тобто момент сили F відносно точки (осі) A розраховується таким чином:

$$M_A = F \cdot a,$$

де a – це і є плече – довжина перпендикуляра, встановленого від т. A до лінії дії сили F .

Моменти сил позначають літерами " M " або " T " і мають розмірність добутку сили на довжину - (Нм), (кНм) та (МНм).

При цьому треба зауважити – якщо силу F переміщати вздовж лінії її дії, момент її відносно точки (осі) A буде залишатися незмінним.

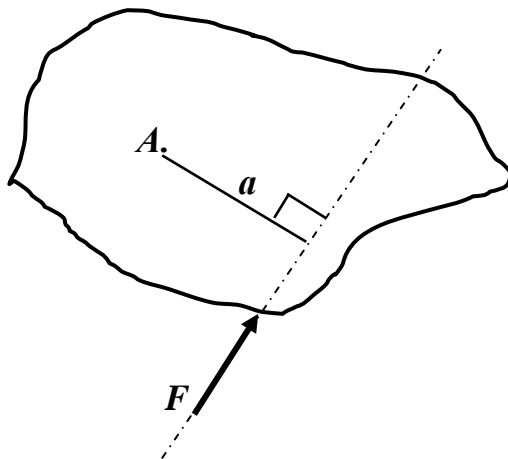


Рис.1.5. Обчислення моменту сили F відносно точки (осі) A

Цілком зрозуміло також, що у випадку коли напрямок дії сили проходить через точку (вісь) – момент сили відносно цієї точки (осі) дорівнює нулю.

**Заняття 2. Лекція 2. Закінчення теми 1 (Вступ). Тема 2. Розтяг – стиск.
Тема 3. Механічні характеристики конструкційних матеріалів**

Умови рівноваги. Метод перерізів. Поняття про напруження. Прості види деформацій. Деформація розтягу – стиску. Внутрішні сили, напруження, розрахунок на міцність. Деформації, Закон Гука, модуль Юнга I роду, коефіцієнт Пуассона. Механічні характеристики конструкційних матеріалів. Діаграма розтягу пластичних матеріалів.

1.4.5. Умови рівноваги

У зв'язку з тим, що опір матеріалів розглядає деформації тіл, у більшості випадків нехтуючи їх рухом, одними з основних математичних залежностей, що використовуються, є рівняння рівноваги.

В загальному випадку просторової задачі (рис.1.5), вибравши ортогональну декартову систему координат, їх можна сформулювати так:

- суми проекцій всіх сил, що діють на тіло, на відповідні осі дорівнюють нулю;
- суми моментів усіх сил, що діють на тіло, відносно будь-якої координатної осі дорівнюють нулю.

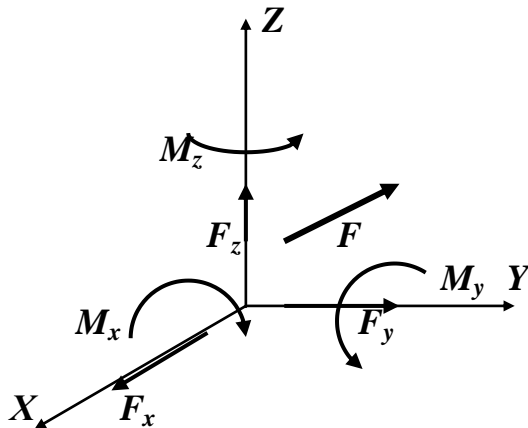


Рис.1.5. Силі фактори при загальному випадку просторового навантаження

Або символічно:

$$\begin{cases} \sum X = 0 \\ \sum Y = 0 \\ \sum Z = 0 \end{cases} \quad (1.1')$$

(1.1)

$$\begin{cases} \sum M_x = 0 \\ \sum M_y = 0 \\ \sum M_z = 0 \end{cases} \quad (1.1'')$$

Зрозуміло, що для плоскої задачі цих рівнянь вже буде тільки три (суми проєкцій сил на кожну з осей рівні 0 та сума моментів всіх сил відносно будь-якої довільної точки цієї площини теж дорівнюють 0).

$$\begin{cases} \sum X = 0 \\ \sum Y = 0 \\ \sum M_A = 0 \end{cases} \quad (1.2)$$

У випадку лінійного навантаження (уздовж однієї осі) рівняння рівноваги буде тільки одне – алгебраїчна сума всіх сил повинна дорівнювати 0.

$$\sum X = 0 \quad (1.3)$$

При розгляді стержневих систем постає питання про знаходження внутрішніх сил, що діють у будь-якому довільному перерізі. Для цього може бути використано

метод перерізів, суть якого полягає у тому, що внутрішній силовий фактор (сила, момент) у перерізі знаходиться як алгебраїчна сума всіх сил, взятих з одного боку від цього перерізу

Суть методу зображено на рис. 1.6, а, б, в.

Чому саме з одного боку? Тому, що за законами рівноваги сума сил з другого боку повинна дорівнювати тій же величині та бути спрямованою в протилежний бік (рис 1.6, в), виходячи з (1.3).

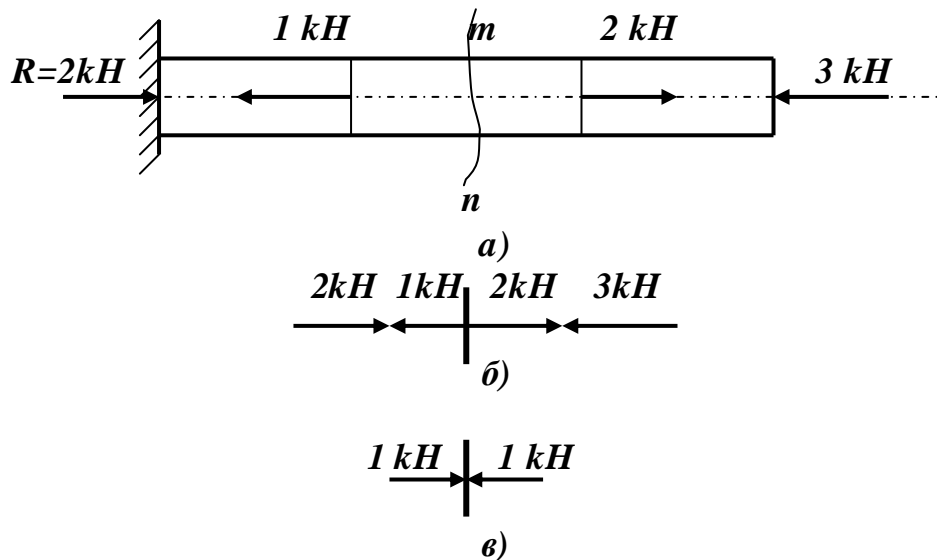


Рис. 1.6. Ілюстрація методу перерізів

Слід зауважити, що, по-перше, реакції опор – це також зовнішні сили і ними не можна нехтувати, по-друге, якщо зображений на рисунку вектор сили направлений в один бік, а величина сили за обчисленнями дорівнює від’ємному числу, то насправді сила спрямована в інший бік. Користуючись цим методом неважко побудувати епюру навантажень у наведеному стержні (рис 1.7).

Таким чином від системи зовнішніх сил можна перейти до внутрішніх силових факторів, тобто тих сил і моментів, що діють безпосередньо в перерізі, який нас цікавить.

1.4.6. Напруження

При вирішенні питання про міцність конструкції недостатньо знати тільки систему сил, що діють на цю конструкцію. Необхідно знати ще її розміри та матеріал, з якого вона зроблена. На початку XIX століття Огюст Коші, відомий математик і механік, увів поняття напруження, яке одночасно характеризує й силові фактори, що діяли в перерізі, й геометричні розміри цього перерізу. Напруження в загальному вигляді це відношення сили, що діє по площадці до величини (площі) цієї площадки.

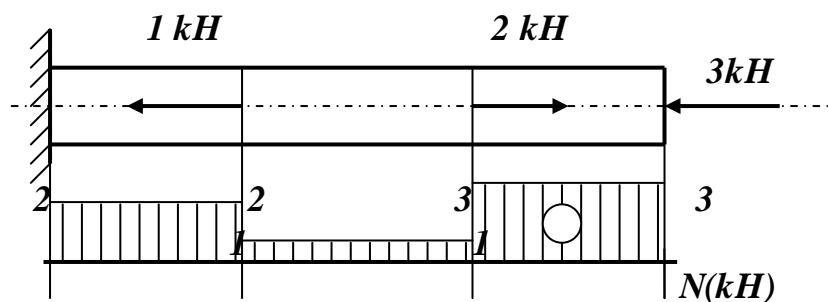


Рис.1.7. Розподіл навантажень у стержні

Коші Огюстен Луї (1789 – 1857) – французький математик. Написав більш 700 наукових робіт з теорії функцій, математичної фізики, математичного аналізу. В галузі механіки ввів поняття напруження, розробив диференціальні рівняння рівноваги, вивів загальні співвідношення між компонентами напружень та деформацій для ізотропного тіла. В оптиці розвинув теорію Френеля та теорію дисперсії. За наукові досягнення був удостоєний звання барона.

Розглянемо довільне тіло, на яке діє система зовнішніх сил $F_1, F_2 \dots F_i$ (рис. 1.8) і при цьому тіло знаходиться у рівновазі.

Розглянемо переріз тіла. Якщо відкинути ліву частину, то для збереження рівноваги до точок перерізу треба прикласти сили, які дорівнюють силам, що діють з боку відрізаної частини (рис. 1.9).

Вибираємо в околі якоїсь довільної точки A елементарну площадку dA . На неї буде діяти певна (внутрішня вже) сила dF . Тоді можна вважати, що

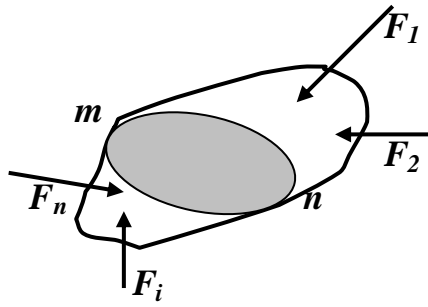


Рис.1.8. Навантажене тіло

повне напруження в т. А на площадці dA визначається як

$$p = \frac{dF}{dA} \quad (1.4)$$

Це *повне* напруження в т. А можна розглянути у вигляді двох складових – *нормальної* – σ та *дотичної* – τ (рис 1.10). В свою чергу

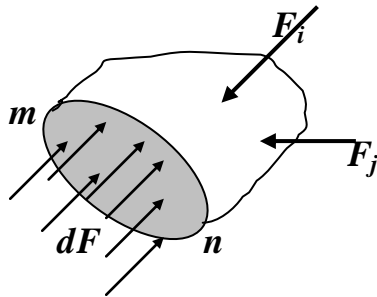


Рис.1.9. Розподіл сил по перерізу

$$\sigma = \frac{dN}{dA} ; \quad (1.5)$$

$$\tau = \frac{dQ}{dA} . \quad (1.6)$$

Очевидна залежність

$$p^2 = \sigma^2 + \tau^2 . \quad (1.7)$$

Напруження на площадці є векторною величиною з модулем, який

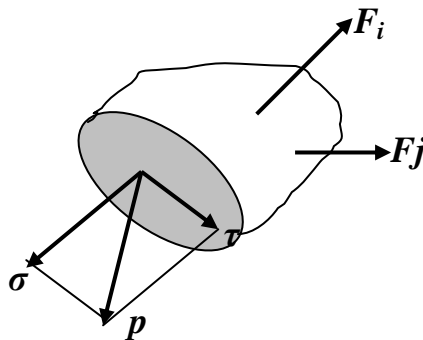


Рис.1.10. Типи напружень

обчислюється за формулами (1.4 – 1.6). Слід зауважити: якщо через т. А провести якийсь інший переріз і знову спробувати знайти напруження, то величина напруження, як повного, так і його складових, буде вже іншою.

Тобто, напруження в точці твердого тіла залежить не тільки від зовнішніх сил, геометрії системи та положення точки, в якій визначаються напруження, а ще й від того, як в цій точці орієнтована площа, на якій визначаються напруження.

Уява напруження у вигляді двох складових – нормальної та дотичної - допомагають зрозуміти способи руйнування тіла. Нормальне напруження зумовлює відрив частинок однієї від іншої. Дотичне напруження відповідно обумовлює їх взаємний зсув.

Розмірність одиниць напружень – це відношення одиниць сили до одиниць площі. В міжнародній системі за одиницю напружень приймають 1 Паскаль (Па), що дорівнює 1 Ньютону (Н) поділеному на $1\text{метр}^2 (\text{м}^2)$.

$Па = \frac{Н}{\text{м}^2}$ – досить мала величина, тому в техніці поширеніші одиниці

виміру 1 кПа (кілоПаскаль) ($kПа = \frac{kН}{\text{м}^2}$), або 1 МПа (мегаПаскаль)

($МПа = \frac{МН}{\text{м}^2}$).

1.5. Прості види деформацій.

Деформації тіл, що нас оточують прийнято поділяти на чотири прості види:

- розтяг – стиск;
- зсув (або зріз);
- кручення;
- згин.

Навіщо це роблять? – Для того, щоб навчитись визначати напружений та деформований стан у кожному окремому випадку простої деформації, а далі, використовуючи принцип суперпозиції та певні теорії міцності, оцінювати міцність та жорсткість елементів конструкцій у реальній ситуації наявності сукупності простих видів деформації.

Розглянемо по окремоті кожен з простих видів деформації.

Тема 2. Розтяг – стиск

Розтяг (або стиск) – це вид деформації, який виникає, якщо до стержня прикладати систему сил, що діють вздовж його осі.

Чому ми об'єднуємо такі протилежні, здавалося б, види деформацій?

Справа в тому, що процеси, які відбуваються при розтягу або стиску в більшості випадків є ідентичними, як і механічні характеристики дуже великої кількості пластичних конструкційних матеріалів. Тому ці протилежні види –

розтяг та стиск – описують одними й тими ж математичними залежностями і об’єднують як один вид: *розтяг – стиск*. При цьому домовились: все, що стосується розтягу (сили, напруження, деформації і т.п.) рахувати зі знаком „+”, а те, що стосується стиску – зі знаком „-”.

При розгляді розтягу – стиску користуються основними гіпотезами, розглянутими вище. Крім того, вводять ще гіпотези, які характерні саме для певних видів простої деформації. Так, наприклад, приймають гіпотезу плоских перерізів – *поперечні перерізи стержня, плоскі до деформації, залишаються плоскими і після неї, переміщуючись поступально вздовж осі стержня*.

2.1. Внутрішні сили та напруження при розтягу – стиску

Розглянемо стержень, навантажений поздовжніми силами (рис 2.1).

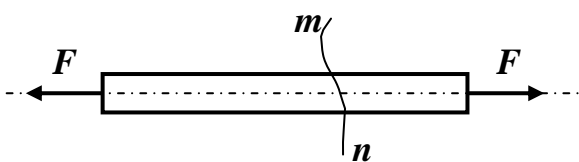


Рис. 2.1. Стержень, що розтягується

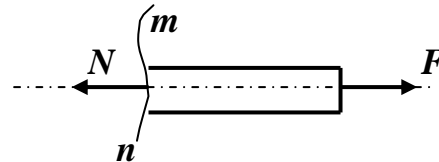


Рис. 2.2. Внутрішня сила в перерізі

У поперечному перерізі навантаженого таким чином стержня виникають тільки нормальні складові внутрішніх сил – N (рис. 2.2). Тому в довільному поперечному перерізі можуть виникати лише нормальні напруження. Причому ці напруження в кожній точці перерізу будуть однаковими, оскільки маленькі частки (диференціал) сили dN будуть однаковими на площадках dA , тобто формула

$$\sigma = \frac{dN}{dA}$$

може бути замінена на

$$\sigma = \frac{N}{A} \quad (2.1)$$

і тоді зрозуміло, що критерій міцності при розтягу – стиску можна записати так:

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{A} \leq [\sigma] \quad (2.2)$$

Слід зауважити, що може бути й інший варіант:

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A_{\min}} \leq [\sigma] \quad (2.3)$$

де $[\sigma]$ – це *допустимий рівень напружень*, який є однією з основних механічних характеристик конструкційного матеріалу. Методику його

визначення описано у параграфах 3.8.,3.9. З умов міцності (2.2) та (2.3) або за відомими силами N_{\max} (визначеними за методом перерізів) можна знайти площу поперечного перерізу стержня A або навпаки, якщо площа перерізу відома, знайти внутрішні, а далі й зовнішні сили, які можна прикласти до стержня.

2.2. Деформації при розтягу – стиску

Розглянемо стержень, зображений на рис. 2.3.

Нехай він має довжину l і площу поперечного перерізу A . Цей стержень розтягується силою F , прикладеною до вільного кінця стержня та власною вагою.

При розтягу – стиску розглядають абсолютну деформацію – „видовження” – Δl та відносну – ε , що дорівнює відношенню абсолютного видовження до початкової довжини стержня і називається – „деформацією”:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \quad (2.4)$$

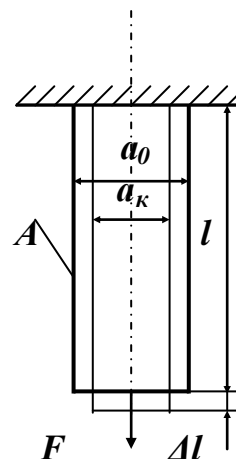


Рис. 2.3. Розтяг стержня

розглянемо спочатку видовження без врахування власної ваги стержня.

Експериментально встановлена залежність

$$\Delta l = \frac{Fl}{EA}, \quad (2.5)$$

яка є відображенням закону Гука, що пов’язує між собою сили і видовження лінійною залежністю.

При цьому величина E – це модуль Юнга I роду (або модуль пружності I роду).

Томас Юнг (1773 – 1829) – вчений-енциклопедист.

Був домашнім учителем, лікарем, професором, секретарем Бюро довгот, видавничим наукових журналів, займався різними галузями науки. Був, до речі, першим із сучасних учених, хто прочитав єгипетські написи на папірусах. Займався фізикою, хімією, фізіологією, медициною, астрономією, гео-фізикою, механікою, технікою, філологією. Відкрив інтерференцію світла та заснував хвильову теорію світла. Розвинув теорію звуку. Розробив теорію згину консольної та звичайної балки, досліджував пружну та пластичну деформації. Розвинув теорію руйнування твердих тіл ударом.

Увів поняття модуля пружності. Є одним з засновників науки про опір матеріалів.

Юнг увів цю величину, які є однією з найважливіших механічних характеристик матеріалу.

Залежність (2.5) може бути представлена у дещо іншому вигляді:

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{F}{EA} ,$$

звідки $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$ (2.6)

або $\sigma = E\varepsilon$. (2.7)

З виразів (2.6), (2.7) можна визначити, що E – це коефіцієнт пропорційності між напруженнями σ та деформаціями ε . Зрозуміло, що E має розмірність напружень (Па, кПа, МПа), оскільки ε – величина безрозмірна. Величину „ EA ” називають жорсткістю стержня при розтягу-стиску, а величину $\frac{EA}{l}$ – відносною жорсткістю.

2.3. Коефіцієнт Пуассона

Якщо до стержня прикладати навантаження вздовж осі, то в поперечному напрямку теж буде відбуватися деформація (рис.2.3). Якщо стержень уздовж осі буде видовжуватися, то в поперечному напрямі він буде звужуватися. Тоді поперечне видовження (точніше вкорочення) –

$$\Delta a = a_0 - a_k \quad (2.8)$$

і відповідно поперечна деформація:

$$\varepsilon = \frac{\Delta a}{a} . \quad (2.9)$$

Однією з найважливіших механічних характеристик матеріалу є так званий коефіцієнт Пуассона:

$$\mu = \left| \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} \right| . \quad (2.10)$$

Цей коефіцієнт є безрозмірною величиною, яка для конструкційних матеріалів змінюється в межах $0 - 0,5$. Враховуючи, що поздовжня та поперечна деформації мають протилежні знаки, можна записати:

$$\varepsilon_1 = -\mu\varepsilon . \quad (2.11)$$

Слід відзначити, що для деяких матеріалів (наприклад, біологічних тканин) коефіцієнт Пуассона може бути навіть більшим від 1.

Слід відзначити, що цими двома характеристиками далеко не вичерпується весь список механічних властивостей матеріалів, які повинні бути відомі інженерові-конструктору для правильного вибору матеріалу для конструкції, що проектується. Тому далі розглянемо деякі основні механічні властивості матеріалів та способи їх визначення.

Тема 3. Механічні характеристики конструкційних матеріалів

Для того, щоб проектувати і створювати конструкції та деталі машин, треба насамперед знати механічні властивості матеріалів, з яких планується виготовлення окремих елементів цих конструкцій та деталей. Для цього проводять лабораторні натуральні дослідження їх зразків.

Матеріали прийнято поділяти на *крихкі* та *пластичні*. Пластичні – це такі, що руйнуються при досить великих залишкових деформаціях $\varepsilon \sim (8 \div 28)\%$. Крихкими називають матеріали, що руйнуються при малих величинах залишкових деформацій $\varepsilon \leq 2\%$.

При цьому мається на увазі, що випробовування матеріалів проводять при кімнатних температурах та нормальних атмосферних тисках.

3.1. Діаграма розтягу пластичних матеріалів

Багато відомостей про матеріал інженери отримують із випробувань зразків на розтяг аж до руйнування. Для дослідів виготовляють зразок циліндричної форми круглого або прямокутного перерізу (рис. 3.1).



Рис. 3.1. Зразок для випробувань.

Зразок закріплюють у захватах розривної машини і починають розтягувати. При цьому самописець, з'єднаний з машиною, рисує так звану діаграму Прандтля (рис. 3.2). Якщо розглянути цю узагальнену діаграму розтягу пластичного матеріалу (рис. 3.2), то можна розбити її на кілька характерних ділянок.

– Ділянка OA – пряма лінія. Це – ділянка пропорційності. Точці A відповідає рівень навантаження, який називають *границею (або межею) пропорційності*. На цій ділянці спостерігається лінійна залежність між напруженнями та деформаціями, тобто виконується закон Гука.

– Точка B (практично співпадає з т. A) відповідає навантаженню, яке називають *границею (межею) пружності* (якщо матеріал навантажувати до т. B ., практично не спостерігається залишкових деформацій).

– Ділянка CD – це, так звана, *площадка текучості*. Їй відповідає *границя текучості*. Якщо матеріал деформувати до рівня текучості, то подальше його

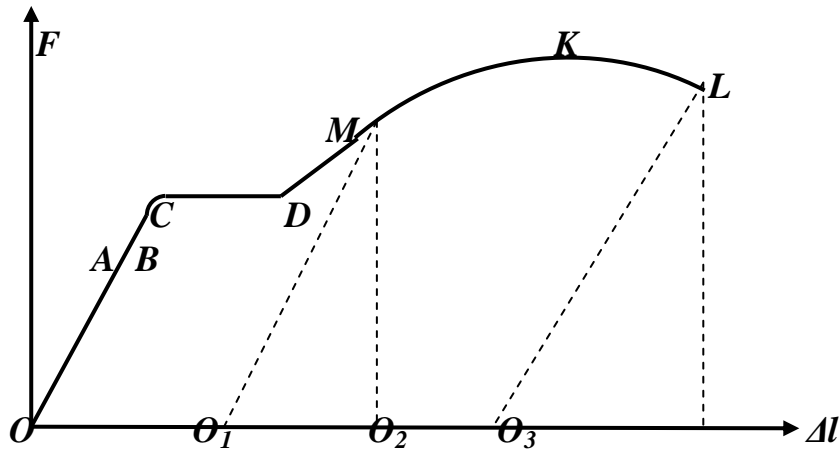


Рис. 3.2. Діаграма розтягу для пластичного матеріалу ($\Delta l, F$)

деформування не викликати зростання напружень.

– Ділянка DK – ділянка *тимчасового зміцнення*, де матеріал знов починає чинити опір силам, що його деформують.

– У точці K починається руйнування матеріалу, на зразку утворюється „шийка” – місцеве звуження. Цій точці відповідає *границя (межа) міцності*.

– У точці L зразок повністю зруйнується.

Відрізки $O_1 O_2$ та $O_3 O_4$ відображають ступінь пластичної деформації при розвантаженні зразка матеріалу в т. M та остаточному руйнуванні його в т. L .

Розглянута нами діаграма розтягу дозволяє встановити ще одну механічну характеристику матеріалу, пов’язану з поведінкою його при ударних навантаженнях. У цьому випадку опір стає тим більшим, чим більшою є робота, яку треба виконати, щоб розірвати зразок. Виявляється, що величина цієї роботи (в певному масштабі, звичайно) дорівнює площі діаграми розтягу, що зображена на рис. 3.3.

Розглянемо частину цієї діаграми в межах пропорційності. З рис.3.3 очевидно, що диференціал роботи системи $dA_c = \left(F + \frac{1}{2} dF \right) d\Delta l = F d\Delta l + \frac{1}{2} dF \cdot d\Delta l$, причому другий доданок значно менший, ніж перший і ним можна знехтувати, тоді:

$$dA_c = F \cdot d\Delta l .$$

Геометричні уявлення процесу інтегрування дозволяють зрозуміти, що при поступовому зростанні сили F та видовження Δl робота (або потенціальна енергія деформації) чисельно будуть представлені таким чином:

$$U = A_c = \int_0^{\Delta l} F d\Delta l = \frac{F \cdot \Delta l}{2} . \quad (3.1)$$

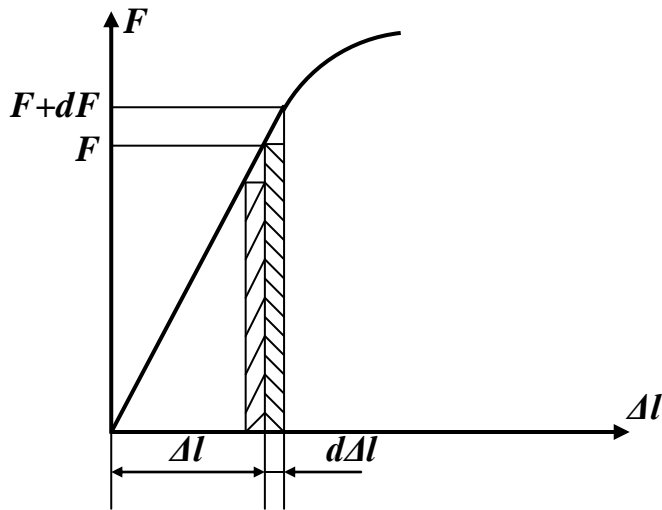


Рис. 3.3. Обчислення роботи, яка потрібна для деформації зразка

Аналогічні міркування можна застосувати і до повної площі діаграми. Для того, щоб отримати величину, яка б характеризувала не зразок, а сам матеріал, прийнято ділити роботу (її можна прирівняти, нехтуючи дисипацією, до потенціальної енергії деформації U , що накопичує зразок у процесі навантаження) на об'єм зразка.

$$\text{Співвідношення} \quad a = \frac{U}{A_0 l}, \quad (3.2)$$

де A_0 – початкова площа перерізу називають *питомою роботою пружної деформації*.

Аналогічно можна визначити *повну питому роботу*. Це та робота, яку треба затратити, щоб розірвати матеріал.

$$a_b = \frac{U_b}{A_0 l}. \quad (3.3)$$

Чим більшою є ця величина, тим більшу роботу слід затратити для руйнування зразка.

Слід зауважити, що матеріал зразка після переходу за границю текучості продовжує зберігати пружні деформації, до яких вже додаються пластичні. Це стає очевидним після розвантаження зразка після переходу за границю текучості (рис. 3.2, точка m). Якщо знову навантажувати і розвантажувати зразок, то границя пропорційності підвищується до того напруження, на яке попередньо був навантажений зразок, а залишкова деформація після розриву зменшується на величину oo_1 , тобто на величину залишкової деформації, набутої в процесі попереднього навантаження. Це явище називають *наклепом*.

3.2. Діаграма напружень

Зображена на рис 3.2 діаграма ілюструє поведінку матеріалу при заданих розмірах зразка, тому для отримання графіка, який характеризував би матеріал, що досліджується, діаграму розтягу представляють вже трохи в іншому вигляді.

Ординати кривої (рис. 3.2) ділять на початкову площу A_0 і отримують напруження $\sigma = \frac{F}{A_0}$, а абсциси ділять на початкову довжину, отримуючи при цьому деформації $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$. Таким чином, отримують графік у координатах ε, σ , який зображено на рис. 3.4. Вона називається діаграмою напружень при розтягу і за обрисами схожа на діаграму, що на рис. 3.2. На ній зображені

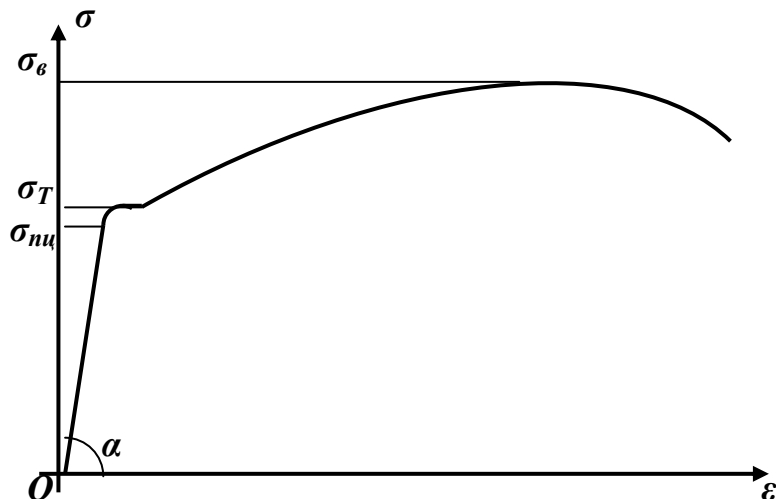


Рис. 3.4. Діаграма розтягу для пластичних матеріалів (ε, σ)

всі величини напружень, що характеризують механічні властивості матеріалів: границю пропорційності – $\sigma_{ни}$, текучості – $\sigma_{т}$, міцності – $\sigma_{в}$. З цієї діаграми вже видно, що

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sigma}{\varepsilon} = E, \quad (3.4)$$

де E – модуль пружності I роду.

3.3. Реальна діаграма напружень

Діаграму на рис. 3.4. можна розглядати як таку, що характеризує властивості даного матеріалу при розтягу. Проте ця характеристика є досить умовною, бо не враховує зміни площі поперечного перерізу в процесі деформації.

На рис 3.5 зображено діаграму розтягу для рейкової сталі, у якої абсциси дорівнюють відносній зміні площі, тобто $\psi_t = \frac{A_0 - A_t}{A_0}$, ординати відповідно – напруженням $\sigma_p = \frac{F}{A_t}$; т. А відповідає початку утворення шийки, тобто т. К на рис. 3.2; 3.4. Ординати реальної діаграми характеризують властивість матеріалу чинити опір пластичній деформації.

Ординату в точці т. А називають *реальною границею міцності (або реальним тимчасовим опором)*. Ординату в кінці при розриві зразка називають *напруженням при розриві*.

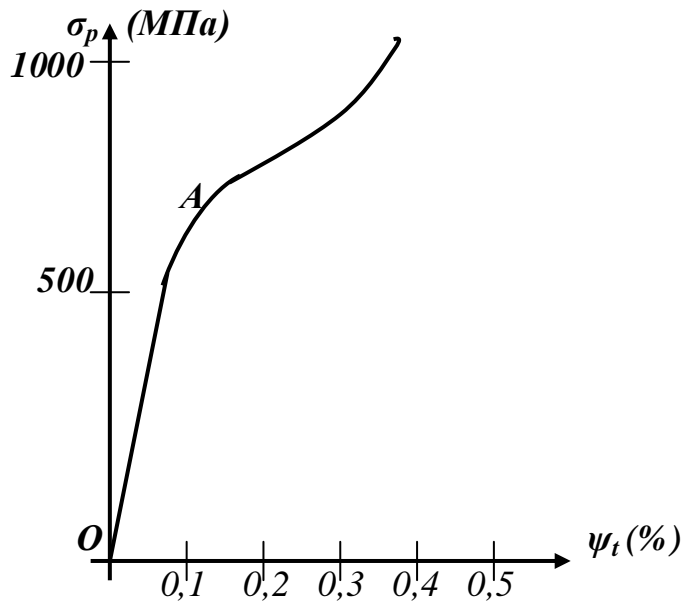


Рис.3.5. Реальна діаграма напружень

3.4. Діаграма розтягу для крихких матеріалів

Крихкі матеріали характеризуються тим, що руйнування зразків виникає вже при невеликих деформаціях. Наприклад діаграма розтягу чавуну представлена на рис. 3.6. Треба звернути увагу, що в порівнянні з рис. 3.2; 3.4

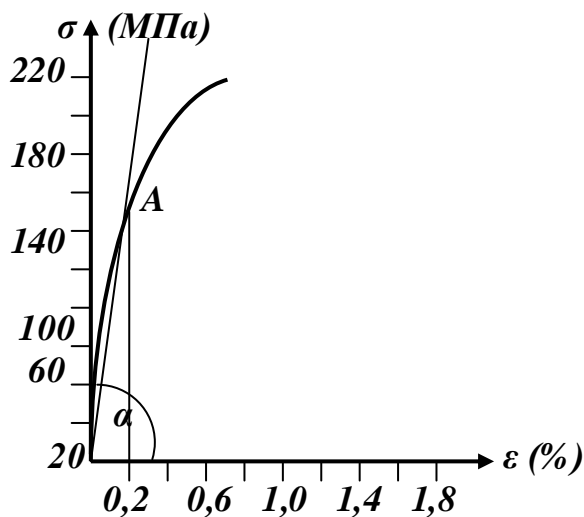


Рис. 3.6. Діаграма розтягу для крихких матеріалів

горизонтальний масштаб діаграми рис. 3.6 збільшений ~ в 40 раз, вертикальний ~ в 6.

Як правило, крихкі матеріали погано чинять опір розтягу. Для них також практично не існує ділянки пропорційності. Тому для обчислень модуля

пружності криву апроксимують хордою, яка сполучає початок координат і точку, що відповідає \sim границі пружності ($\varepsilon \sim 0,2\%$).

3.5. Діаграми стиску для пластичних і крихких матеріалів

Діаграма стиску для пластичного матеріалу незначно відрізняється від діаграми розтягу.

На рис. 3.7 зображено типову діаграму стиску для маловуглецевої сталі. На ній також спостерігаються ділянка пропорційності та площадка текучості, але т. к., яку розглядали на рис 3.2. та 3.4 – відсутня. Шийка тут не утворюється.

Що стосується стиску крихких матеріалів, то вони переносять стиск значно краще, ніж розтяг. Якщо порівняти дві діаграми – розтягу та стиску для чавуну, то отримаємо картину, схожу на зображену на рис. 3.8. (Знаком „+” відзначено зону розтягу, знаком „-“ – стиску).

3.6. Твердість

Величина границі міцності при розриві пластичних матеріалів певною мірою пов’язана з їх властивістю, що називають *твердістю*. *Твердість* - це здатність матеріалу чинити опір проникненню в нього інших тіл.

Одним з найпоширеніших методів визначення твердості є спосіб Брінеля.

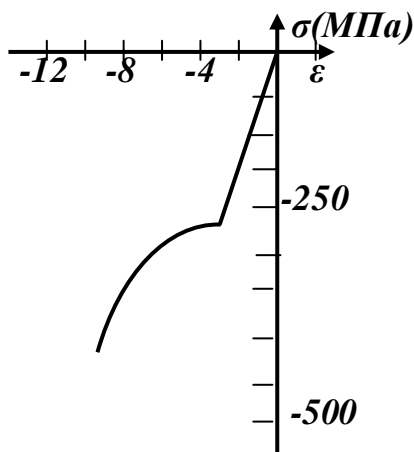


Рис.3.7. Діаграма стиску для пластичних матеріалів

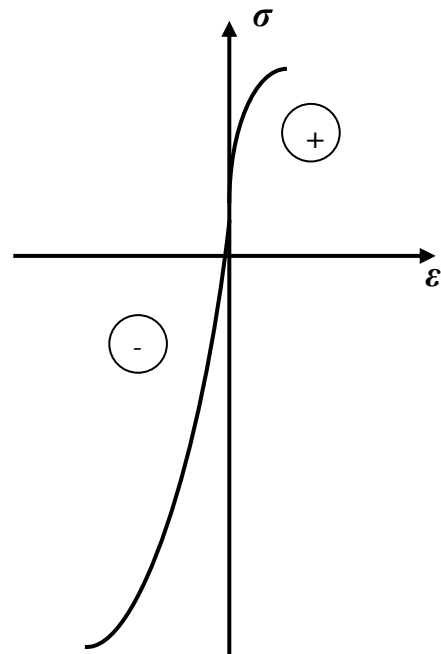


Рис.3.8. Діаграма стиску для крихких матеріалів

Характеристикою твердості при цьому є так зване „число твердості”, яке визначається за допомогою втискання в матеріал кульки, зробленої з закаленої

сталі. „Числом твердості по Брінелю” називають величину, що чисельно дорівнює відношенню вдавлюючої сили на площу кульової поверхні лунки.

$$H_B = \frac{P}{\pi D h} = \frac{2P}{\pi D (D - \sqrt{D^2 - d^2})}, \quad (3.5)$$

де D – діаметр кульки;
 d – діаметр відбитка;
 h – глибина відбитка.

Твердість у техніці прийнято вимірювати в $\frac{\text{кГ}}{\text{мм}^2}$ ($1 \frac{\text{кГ}}{\text{мм}^2} \approx 10 \text{ МПа}$).

Наприклад, для маловуглецевої сталі $H_B = 100 \div 120 \frac{\text{кГ}}{\text{мм}^2}$, для рейкової $H_B = 200 \div 220 \frac{\text{кГ}}{\text{мм}^2}$; для твердої закаленої $H_B = 400 \div 450 \frac{\text{кГ}}{\text{мм}^2}$.

Між числом твердості по Брінелю та границею міцності для сталі встановлена досить чітка емпірична залежність

$$\sigma_s \approx 0,36 H_B. \quad (3.6)$$

З інших методів визначення твердості можна виділити ще метод Роквелла. Він полягає у вдавлюванні в матеріал алмазної пірамідки або закаленої кульки діаметром 1,59 мм. У цьому випадку характеристикою твердості є глибина вдавлювання.

3.7. Порівняльні характеристики пластичних і крихких матеріалів

Основна різниця між крихкими та пластичними матеріалами полягає в тому, що крихкі матеріали руйнуються при досить малих деформаціях. У зв'язку з цим площі під діаграмами для пластичних матеріалів значно більші, ніж для крихких.

Тобто, для руйнування пластичних матеріалів треба затратити значно більшу роботу, ніж для руйнування крихких матеріалів. Крім того, крихкі матеріали значно гірше чинять опір розтягу й ударам та досить чутливі до місцевих напружень (концентраторів напружень (див. гл.17,18)). Вироби, зроблені з крихких матеріалів, не здатні до зміни форми.

Пластичні матеріали не мають цих недоліків. Таким чином, пластичність є однією з найважливіших і бажаних властивостей.

3.8. Основні положення для вибору коефіцієнта запасу міцності та допустимих напружень

3.8.1. Загальні положення

Розглянуті нами величини, що характеризують механічні властивості матеріалу (границі міцності, пропорційності, текучості, модуль пружності і т.

п.) визначають за допомогою лабораторних досліджень при статичному навантаженні.

Дію динамічних навантажень розглянемо пізніше.

Ідеєю будь-якого розрахунку на міцність є *зробити так, щоб максимальні розрахункові напруження в конструкції не перевищували допустимих*. Тобто:

$$p_{\max} \leq [p]; \quad \text{або} \quad \sigma_{\max} \leq [\sigma]; \quad \text{або} \quad \tau_{\max} \leq [\tau].$$

Візьмемо, наприклад,

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma]$$

і розглянемо, яким же чином вибрати рівень допустимих напружень $[\sigma]$.

При виборі напружень, що допускаються, доводиться враховувати цілий ряд обставин. Величини і характер дії сил, що входять у розрахунки, відомі нам не зовсім точно; механічні властивості матеріалів на практиці часто дають значні відхилення від середніх значень; методи наших розрахунків, наші уявлення про взаємодію окремих частин конструкцій зазвичай є спрощеними і наближеними.

Тому допустимі напруження вибирають як *зменшені небезпечні напруження*, тобто:

$$[\sigma] = \frac{\sigma^H}{k}, \quad (3.7)$$

де k – коефіцієнт запасу міцності (або коефіцієнт незнання, як часто називають його інженери).

Коефіцієнт запасу повинен врахувати всі ці неточності, що є неминучими в наших розрахунках.

Чим неодноріднішим є матеріал, чим наближеніше ми оцінюємо дійсні навантаження, чим спрощеніше уявляємо собі з'єднання окремих елементів конструкції, тим більшим цей коефіцієнт доводиться вибирати. Частини машин у роботі зношуються, тому у багатьох випадках доводиться давати «запас на знос». У металевих і дерев'яних інженерних спорудах доводиться враховувати можливість корозії й загнивання.

З другого боку, є конструкції (літаки, наприклад), де необхідно максимально знижувати коефіцієнт запасу з метою зменшення ваги. Так само інженеру доводиться знижувати коефіцієнт запасу при виконанні робіт на тимчасових спорудах в обстановці військового часу.

Таким чином, правильний вибір напружень, що допускаються, є вельми складною задачею, пов'язаною з методами розрахунків та дослідження матеріалів, а також господарсько-економічними і деякими іншими факторами.

Для багатьох конструкцій норми напружень, що допускаються, встановлюють прийнятні в тій чи іншій галузі нормативи, і інженер лише повинен уміти їх правильно застосовувати.

Підсумовуючи сказане, можна сформулювати основні міркування таким чином.

Коефіцієнт запасу треба вибирати з тим розрахунком, щоб був *забезпечений* відомий запас міцності проти виникнення так званого *небезпечного стану* матеріалу, який буде *загрозуючим* для роботи конструкції.

При статичному або ударному навантаженні для пластичних матеріалів такий стан характеризується появою великих залишкових деформацій (явище текучості), для крихких – появою тріщин, руйнуванням матеріалу. При повторно-змінному навантаженні небезпечний стан характеризується появою і розвитком тріщини втомленості. Напруження σ^H , що викликає небезпечний стан, зазвичай приймають відповідним:

$\sigma^H = \sigma_T$ – границя текучості – для пластичного матеріалу;

$\sigma^H = \sigma_\epsilon$ – границя міцності – для крихкого матеріалу (при статичному навантаженні);

$\sigma^H = \sigma_\kappa$ – границя витривалості – за умов виникнення тріщин при динамічному навантаженні.

Таким чином, залежно від характеру небезпечного стану матеріалу можна записати:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{k_T}; \quad [\sigma] = \frac{\sigma_\epsilon}{k_\epsilon}; \quad [\sigma] = \frac{\sigma_\kappa}{k_\kappa},$$

де, $k_T; k_\epsilon; k_\kappa$ — відповідні коефіцієнти запасу. Ці три формули можна узагальнити у вигляді (3.7):

$$[\sigma] = \frac{\sigma^H}{k}, \quad (3.8)$$

маючи на увазі під σ^H або σ_T , або σ_ϵ , або σ_κ , а під k – або k_T , або k_ϵ , або k_κ .

Оскільки межі текучості й витривалості певною мірою пов'язані з межею міцності, то для всіх видів небезпечного стану можна встановити коефіцієнт запасу й відносно межі міцності σ_ϵ .

Неоднорідність матеріалу, неточність при визначенні величин сил, неточність розрахунку, тобто загальні параметри, *враховують* так званим основним *коефіцієнтом* запасу k_0 . Для пластичних матеріалів (сталь) його зазвичай приймають рівним $k_m = k_0 = 1,4 \div 1,6$ для крихких матеріалів і дерева $k_\epsilon = k_0 = 2,5 \div 3,0$. Решту параметрів, тобто динамічність навантажень, змінність їх дії і вплив місцевих перенапружень враховують додатковими коефіцієнтами, на які множать основний.

Якщо при визначенні напружень, що допускаються, враховують тільки загальні параметри, тобто коефіцієнт запасу приймають рівним одному лише основному, то динаміку й місцеві напруження враховують, коли це можливо, у

величині дійсного напруження, перемножуючи основне статичне напруження на коефіцієнти динамічності й концентрації.

Прийняті в інженерній практиці значення загального коефіцієнта запасу відносно до межі міцності для різного стану матеріалу і для різного характеру дії навантажень із включенням у нього звичайної величини впливу динамічності навантаження і місцевих напружень показано в таблиці 3.1.

Коефіцієнти запасу міцності

Таблиця 3.1

Характер навантаження	Стан матеріалу	k_e
1. Статичне навантаження	Пластичний матеріал	2,4 ÷ 2,6
	Крихкий матеріал	3,0 ÷ 9,0
2. Ударне навантаження	Пластичний матеріал	2,8 ÷ 5,0
3. Змінне навантаження (розтяг – стиск однакової величини)	Пластичний матеріал (сталь)	5,0 ÷ 15,0

Ця таблиця має лише *орієнтовний* характер. Вона дає уявлення про зміну коефіцієнта залежно від різних обставин.

Заняття 3. Практичне заняття 1. Тема 2. Розтяг – стиск. Розрахунки на міцність

Задача 1.

Підібрати діаметр для сталю-ного стержня, закріпленого, та навантаженого як показано на рис.1.

Прийняти:

$$F_1 = 85 \text{ кН}; a = 1,2 \text{ м};$$

$$F_2 = 50 \text{ кН}; b = 0,8 \text{ м};$$

$$\sigma_T = 240 \text{ МПа}; k = 1,5.$$

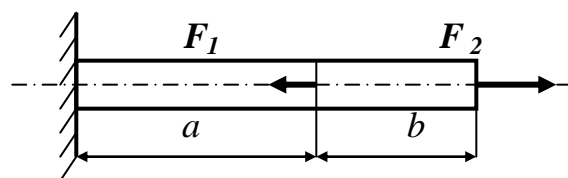


Рис. 1. Жорстко закріплений одним кінцем стержень

Розв'язок задачі .

Запишемо умову міцності при розтягу - стиску:

$$\sigma_{max} = \frac{N_{max}}{A} \leq [\sigma]. \quad (1)$$

Очевидно діаметр стержня скритий тут у величині, що позначена A – площі поперечного перерізу, яка в даному випадку є постійною і, якщо мова йде про діаметр, переріз є кругом, площу якого можна записати як:

$$A = \frac{\pi d^2}{4}. \quad (2)$$

Допустиме напруження $[\sigma]$ визначимо як:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{k} = \frac{240}{1,5} = 160 \text{ (МПа)}.$$

Зважаючи на те, що сила задана в kH , величину допустимого напруження слід також виразити в $kПа$, тобто $160 \text{ МПа} = 160 \cdot 10^3 \text{ кПа}$.

Підставляючи (2) в (1), та виражаючи з цього виразу діаметр d , отримаємо :

$$d \geq \sqrt{\frac{4N_{max}}{\pi[\sigma]}}. \quad (3)$$

Тепер очевидно, що для визначення діаметра, необхідно знайти значення максимальної сили N_{max} , що виникає в перерізах стержня. Для цього розглянемо метод перерізів (рис.2а). Нарисуємо епюру розподілу нормальних сил по довжині стержня та з'ясуємо, що $N_{max} = 50 \text{ кН}$. Тоді, підставляючи результати обчислень у формулу (3), отримаємо:

$$d \geq \sqrt{\frac{4 \cdot 50}{3,14 \cdot 160 \cdot 10^3}} \approx 1,99 \cdot 10^{-2} \text{ (м)} = 1,99 \text{ см}.$$

Тобто, закруглюючи, можна вибрати діаметр поперечного перерізу стержня таким, що дорівнює 2 см., або 20мм.

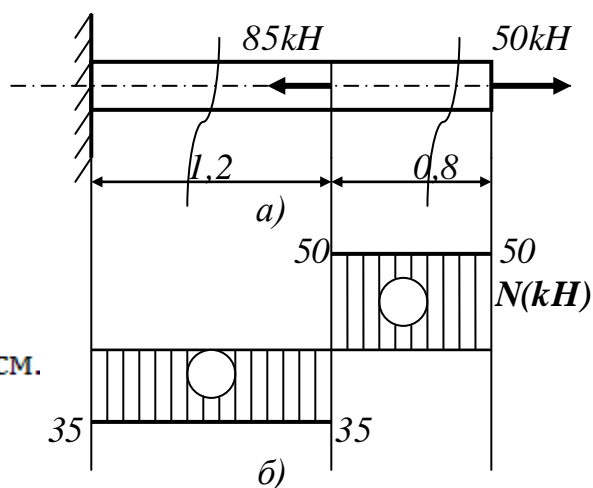


Рис.2. Метод перерізів:
а) - навантаження; б) - побудова епюру нормальних сил

Зауваження: Неважко помітити, що в цій задачі, де розглядалося статичне навантаження, довжини ділянок не відігравали ніякої ролі в розподілі навантажень по перерізах стержня.

Задача 2.

Підібрати діаметри для сталюого стержня змінного, поперечного перерізу закріпленого та навантаженого, як показано на рис.3. та визначити загальне видовження стержня.

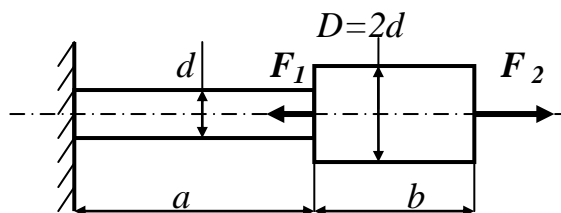


Рис. 3. Жорстко закріплений одним кінцем стержень зі змінним поперечним перерізом

Прийняти:

$$F_1 = 85 \text{ кН}; \quad a = 1,2 \text{ м};$$

$$F_2 = 50 \text{ кН}; \quad b = 0,8 \text{ м};$$

$$\sigma_T = 240 \text{ МПа}; \quad k = 1,5$$

Розв'язок задачі .

Записуючи умову міцності слід відмітити, що площа поперечних перерізів на різних ділянках стержня є різною. Навіть знайшовши значення внутрішніх сил на окремих ділянках, неможна сказати, що небезпека буде виникати там де діє більше внутрішнє зусилля. Тому умову міцності слід записати у такому вигляді:

$$\sigma_{max} = \frac{N_i}{A_i} \leq [\sigma], \quad i=1,2 \quad (1)$$

Тепер очевидно, що для визначення діаметра, необхідно знайти значення не просто максимальної сили N_{max} , а виразити напруження, що виникають в перерізах стержня. Для цього розглянемо ділянки стержня та застосуємо метод перерізів (рис.4а,б). Зобразимо розподіл нормальних сил по довжині стержня (рис.4б) та з'ясуємо, що $N_{max}=50kH$. Виразимо площі перерізів ділянок:

$$A_I = \frac{\pi(2d)^2}{4} = \pi d^2; \quad A_{II} = \frac{\pi d^2}{4} = 0,25\pi d^2.$$

Побудуємо епюру напружень у розмірності $(kH/\pi d^2)$ (рис.4в).

$$\sigma_I = \frac{50}{\pi d^2}; \quad \sigma_{II} = \frac{35}{0,25\pi d^2} = \frac{140}{\pi d^2}.$$

Тобто, напруження виявилися більшими на II ділянці. Підставляючи результати обчислень у формулу (1), отримаємо:

$$\sigma_{max} = \sigma_{II} = \frac{140}{0,25\pi d^2} \leq [\sigma],$$

звідки:

$$d \geq \sqrt{\frac{4 \cdot 140}{\pi \cdot [\sigma]}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 140}{3,14 \cdot 160 \cdot 10^3}} \approx 3,34 \cdot 10^{-2} (\text{м}) = 3,34 (\text{см})$$

Таким чином діаметр I-ої ділянки дорівнюватиме

$$D = 2d = 3,34 \cdot 2 = 6,68 (\text{см}),$$

а діаметр II-ої ділянки $d = 3,34 (\text{см})$.

При такому розрахунку II-га ділянка буде працювати при напруженнях, що дорівнюють допустимим, а перша – з недонапруженням.

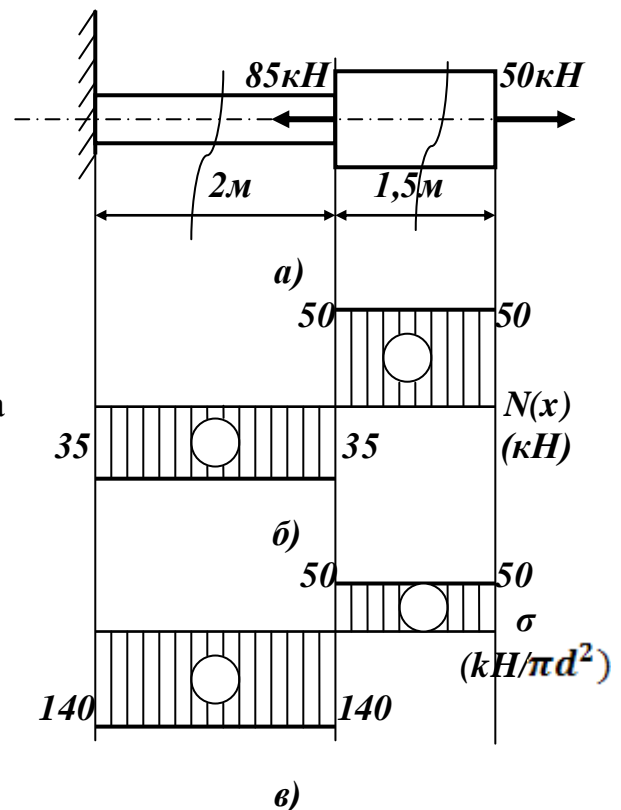


Рис.4. Використання методу перерізів:
а) вигляд навантаженого стержня;
б) побудова епюр нормальних сил;
в) епюра нормальних напружень

Задача 3.

Визначити силу Q , яка може бути прикладена до жорсткого бруса AB , шарнірно закріпленого в т. A , що тримається підвісом DC у т. C та навантаженого, як показано на рис. 5.

Прийняти:

$$A = 0,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2; \quad \alpha = 45^\circ;$$

$$a = 1,8 \text{ м}; \quad b = 0,8 \text{ м};$$

$$c = 0,3 \text{ м}; \quad [\sigma] = 160 \text{ МПа} = 160 \cdot 10^3 \text{ кПа}$$

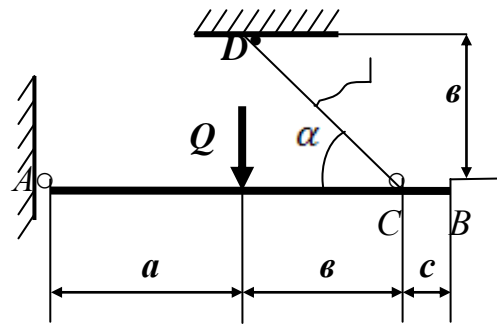


Рис. 5. Схема навантаження жорсткого бруса AB

Розв'язок задачі .

Запишемо умову міцності при розтягу - стиску:

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{A} \leq [\sigma], \quad (1)$$

де N_{\max} - це внутрішнє зусилля, що виникає у підвісі DC . Визначимо його з рівнянь статки. Для цього розглянемо рівновагу жорсткого бруса AB (рис. 6).

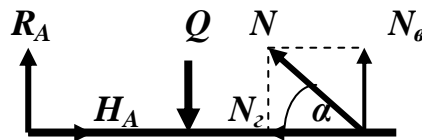


Рис. 6. Сили, під впливом яких брус AB знаходиться в рівновазі

Для плоскої системи сил можна записати три лінійно незалежних рівнянь статки:

$$\begin{cases} \sum X = H_A - N_{\Gamma} = 0 \\ \sum Y = R_A - Q + N_B = 0 \\ \sum M_A = Q \cdot a - N_B \cdot (a+b) = 0 \end{cases} ; \quad (2)$$

де вертикальна та горизонтальна складові сили N дорівнюють відповідно:

$$- N_{\Gamma} = N \cdot \sin \alpha;$$

$$- N_2 = N \cdot \cos \alpha.$$

Тоді:
$$N_B = N \cdot \sin \alpha = \frac{Q \cdot a}{(a+b)}.$$

Звідки
$$N = \frac{Q \cdot a}{(a+b) \cdot \sin \alpha}. \quad (3)$$

Тоді, підставляючи (3) в нерівність (1), матимемо:

$$\sigma_{max} = \frac{N_{max}}{A} = \frac{Q \cdot a}{(a + b) \cdot \sin \alpha} \leq [\sigma].$$

Перетворюючи, отримаємо:

$$[Q] \leq \frac{[\sigma] \cdot A(a+b) \sin \alpha}{a} = \frac{160 \cdot 10^3 \cdot 0,5 \cdot 10^{-4} (1,8+0,8) \cdot 0,71}{1,8} \approx 8,20 \text{ (кН)}.$$

**Заняття 4. Лекція 3. Тема 5. Складний напружений стан.
Тема 6. Геометричні характеристики плоских перерізів**

Поняття про складний напружений стан. Головні площадки. Головні напруження. Лінійний напружений стан. Напруження на похилих площадках. Плоский напружений стан. Пряма і обернена задачі. Круги Мора. Напруження на октаедричних площадках. Об'ємний напружений стан.

Класифікація геометричних характеристик перерізів. Площа. Статичний момент площі відносно осі. Моменти інерції: осьові, відцентровий та полярний. Осьовий та полярний моменти опору. Центральні та головні осі інерції.

Нехай є навантажене зовнішніми силами F_i тіло (рис. 5.1). Виріжемо в довільній точці цього тіла елементарний об'єм у вигляді кубика, зображеного на рис. 5.2.

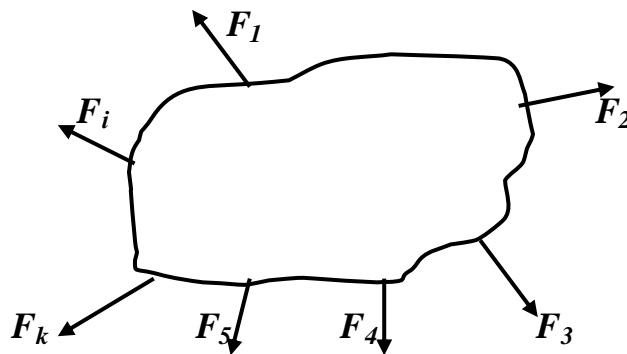


Рис. 5.1. Навантажене тіло

По гранях цього кубика в загальному випадку діятимуть 9 компонент напружень. Нормальні $\sigma_x; \sigma_y; \sigma_z$, та дотичні $\tau_{xy}; \tau_{xz}; \tau_{yx}; \tau_{yz}; \tau_{zx}; \tau_{xy}$.

З курсу теорії пружності відомо, що можна вибрати таку орієнтацію граней кубика, що дотичні напруження зникнуть і залишаться тільки нормальні (рис. 5.3).

Площинки, на яких діють тільки нормальні напруження, а дотичні відсутні, називають *головними площадками*, а відповідні нормальні напруження, що діють по цих площадках називають *головними напруженнями*. Головні напруження позначають $\sigma_1; \sigma_2; \sigma_3$. При цьому прийнято, що $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ (з урахуванням знака).

Розрізняють три види напруженого стану:

– *лінійний* – коли одне з головних напружень не дорівнює нулю, а два інших дорівнюють нулю. Тут можливі два варіанти – перший, коли $\sigma_1 \neq 0$, а $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, - це *одновісний розтяг* і другий, коли $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, а $\sigma_3 \neq 0$, - це *одновісний стиск*;

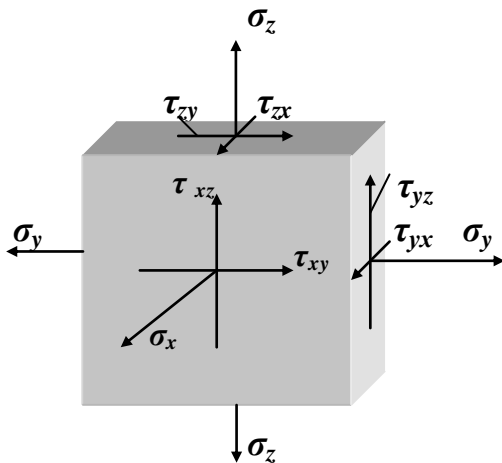


Рис. 5.2. Напруження на гранях кубика в загальному випадку

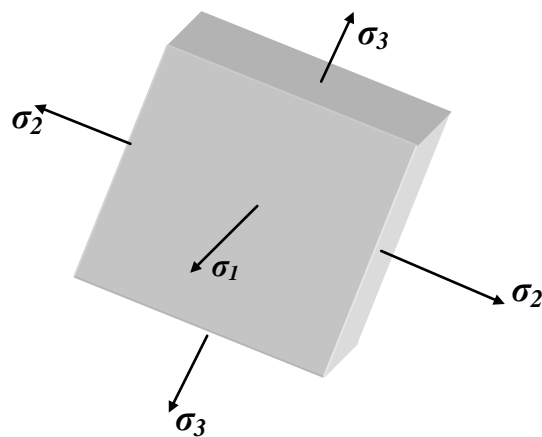


Рис. 5.3. Напруження на головних площадках

– *плоский* – коли одне з головних напружень дорівнює нулю, а два інших не дорівнюють нулю;

– *об'ємний* – коли жодне з головних напружень не дорівнює нулю.

5.1. Лінійний напружений стан. Напруження на площадках, розташованих під кутом до осі стержня

Розглянемо напруження, які виникають у розтягнутому стержні на різних площадках (рис. 5.4). Власною вагою стержня в цьому випадку будемо нехтувати.

На площадці, нормальній до осі – A_0 , виникають напруження:

$$\sigma_0 = \frac{N}{A_0} \text{ при } N = F. \quad (5.1)$$

Тепер розглянемо напруження на площадці A_α , нахиленій під кутом α до площини A_0 (α – кут між нормаллю до площадки A_α і віссю стержня) (рис 5.5).

Повне напруження на цій площадці

$$p_{\alpha} = \frac{N}{A_{\alpha}} = \frac{F}{A_0} \cos \alpha, \quad (5.2)$$

тому що

$$A_{\alpha} = \frac{A_0}{\cos \alpha}.$$

Тоді $p_{\alpha} = \sigma_0 \cos \alpha$ (5.3)

Розглядаючи складові, будемо мати:

нормальне напруження $\sigma_{\alpha} = \sigma_0 \cos^2 \alpha$ (5.4)

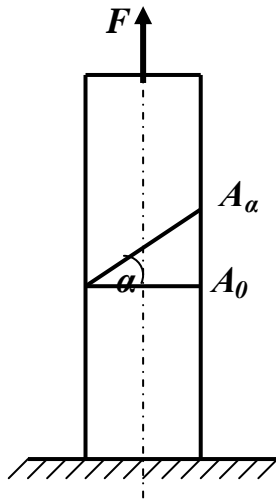


Рис. 5.4. Лінійний напружений стан

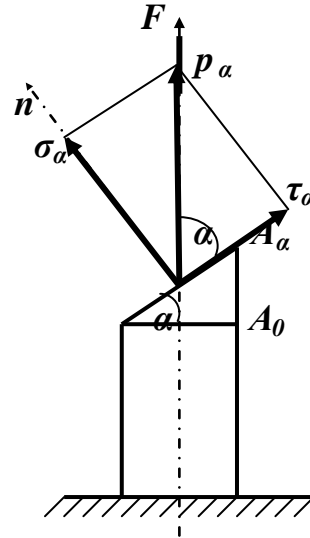


Рис. 5.5. Розподіл напружень на нахиленій площадці

і дотичне напруження

$$\tau_{\alpha} = \sigma_0 \cos \alpha \sin \alpha = \frac{\sigma_0}{2} \sin 2\alpha. \quad (5.5)$$

При цьому не важко переконатися, що виконується залежність

$$p_{\alpha}^2 = \sigma_{\alpha}^2 + \tau_{\alpha}^2. \quad (5.6)$$

Слід зауважити: якщо нормальне напруження вважається додатнім при розтягу, а від'ємним – при стиску, то дотичне напруження на грані вважається додатнім, якщо воно намагається повернути частину елемента, що розглядається, за годинниковою стрілкою. Від'ємним буде протилежний напрямок.

5.2. Плоский напружений стан

5.2.1. Пряма задача (аналітичне виведення)

Розглянемо елемент у вигляді кубика, „вирізаного” з тіла на головних площадках. Нехай він знаходиться у плоскому напруженому стані (рис. 5.6,а) і головні напруження задані таким чином: $\sigma_1 \neq 0$; $\sigma_2 \neq 0$; $\sigma_3 = 0$.

Треба знайти напруження на площадці, повернутої на кут α до тієї головної, де діє σ_I (рис. 5.6,б).

Розглянемо рис. 5.7.

Використовуючи принцип суперпозиції, на основі (5.4) та (5.5) можна записати:

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \beta;$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1}{2} \sin 2\alpha + \frac{\sigma_2}{2} \sin 2\beta$$

або, враховуючи, що $\beta = \alpha + 90^\circ$;

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha; \quad (5.7)$$

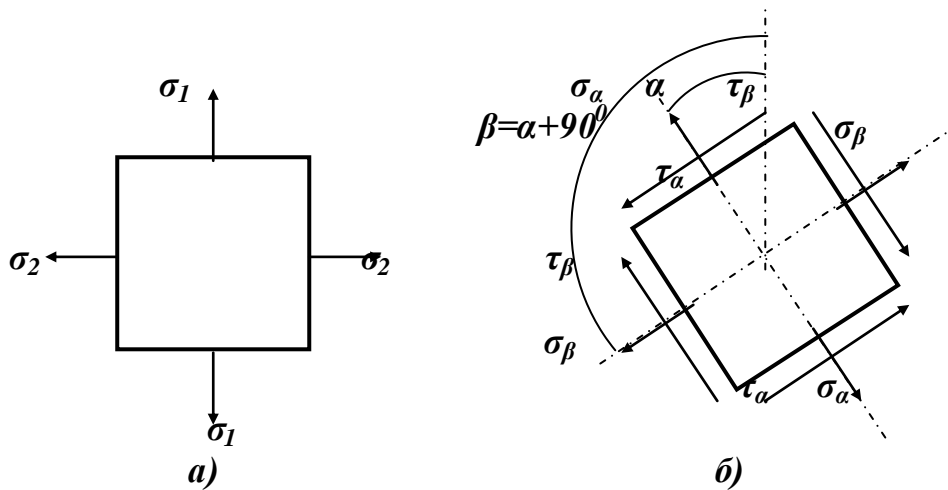


Рис. 5.6. Плоский напружений стан: а) головні площадки; б) площадки, розвернуті відносно головних

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha \quad (5.8)$$

Тепер запишемо напруження, які виникають на площадці, перпендикулярній до нами розглянутої (тобто розвернутої до тієї головної, де діє σ_I , на кут β (рис. 5.6,б та 5.7).

Тоді
$$\sigma_\beta = \sigma_1 \cos^2(\alpha + 90^\circ) + \sigma_2 \sin^2(\alpha + 90^\circ)$$

та
$$\sigma_\beta = \sigma_1 \sin^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \alpha \quad (5.9)$$

Аналогічно
$$\tau_\beta = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin(\alpha + 90^\circ),$$

а
$$\tau_\beta = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha \quad (5.10)$$

Дослідимо вираз (5.7) на extremum.

$$(\sigma_\alpha)' = -2\sigma_1 \cos \alpha \sin \alpha + 2\sigma_2 \sin \alpha \cos \alpha = -(\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\alpha = 0. \quad (5.11)$$

Звідси випливає, що нормальні напруження досягають max та min значень там, де дотичні дорівнюють 0. Тобто головні напруження є екстремальними.

Відносно τ_α зрозуміло, що найбільше значення (за модулем) τ_α отримає, якщо $\sin 2\alpha = 0$, тобто $\alpha = \pm 45^\circ$ та кратні їм кути.

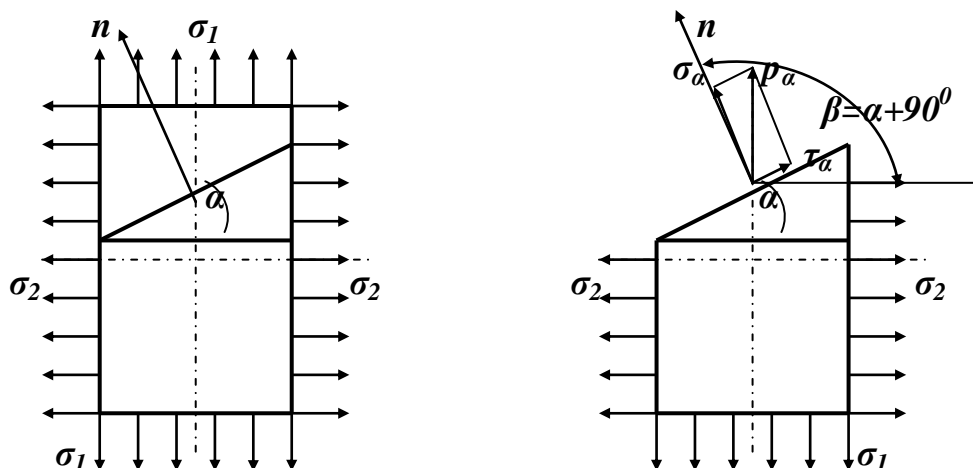


Рис. 5.7. Плоский напружений стан. Зміна напружень при повертанні площадок

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}. \quad (5.12)$$

Складемо почленно (5.7) та (5.9), тоді

$$\sigma_\alpha + \sigma_\beta = \sigma_1 + \sigma_2. \quad (5.13)$$

Тобто сума нормальних напружень на взаємно перпендикулярних площадках є величиною сталою. Порівнюючи (5.8) та (5.10) неважко помітити, що

$$\tau_\alpha = -\tau_\beta. \quad (5.14)$$

У теорії напруженого стану можна розмежувати дві основні задачі. Перша – *пряма задача* – коли задано головні напруження і кут повороту площадки, на якій треба визначити напруження σ_α і τ_α . Друга – *обернена задача* – коли задані напруження на неголовних площадках і треба визначити величини головних напружень та орієнтацію головних площадок. Обидві задачі можна розв'язати як аналітично, так і графічно – за допомогою кругів Мора.

Мор Хрістіан Отто (1835-1918) – німецький учений.

Один із засновників графічної кінематики, розробив так званий *метод трьох моментів*, створив одну з діючих теорій міцності. Розробив *метод сил* для розкриття статичної невизначеності та узагальнив формули Максвелла (теорема Максвелла – Мора).

5.2.2. Круги Мора (пряма задача)

Круг Мора – це геометричне місце точок (у випадку плоского напруженого стану – коло), координати яких відповідають чисельним значенням нормальних і дотичних напружень, що діють у точці на площадках, які мають різні кути нахилу.

Тобто круг Мора – це геометрична інтерпретація напруженого стану в певній точці навантаженого твердого тіла.

Нехай задано головні напруження σ_1 та σ_2 , а треба знайти напруження на площадках розвернутих під кутом α до головних площадок (рис. 5.8),.

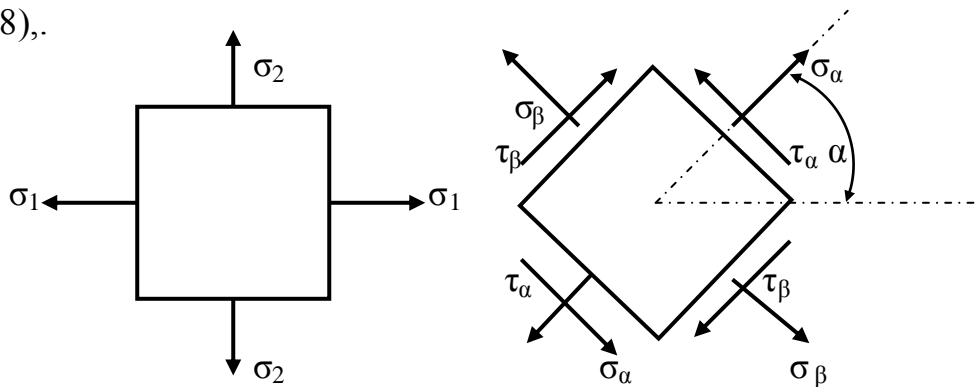


Рис. 5.8. Плоский напружений стан. Пряма задача

Вибираємо орієнтацію осей σ та τ таким чином, щоб вісь σ співпадала з напрямком більшого з головних напружень. Вісь τ буде спрямована перпендикулярно (рис. 5.9).

Відкладаємо на осі σ значення σ_1 та σ_2 (т.т. А та В). Після цього ділимо відстань між отриманими точками навпіл і вибираємо цю точку за центр кола, яке базується на відрізку осі АВ як на діаметрі.

Як вже було сказано, круг Мора – це геометричне місце точок, координати яких відображають напруження на площадках, нахилених під різними кутами в точці тіла, що досліджується. Тому для того, щоб знайти напруження на площадці, нахиленій до головної під кутом α , слід з центра кола С провести промінь під кутом 2α або з точки на осі σ , що відповідає σ_{\min} , провести промінь під кутом α . Перетин цих променів із колом дасть точку D (рис. 5.9), координати якої будуть відповідати σ_α та τ_α .

Дійсно, радіус кола

$$AC = BC = DC = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}.$$

Тоді

$$\sigma_\alpha = OA + AC + CK = \sigma_2 + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha; \quad (5.15)$$

$$\tau_\alpha = DK = DC \sin 2\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha. \quad (5.16)$$

Координати т. E , діаметрально протилежній т. D , відображають напруження по площадці, що розвернута на 90° до попередньої.

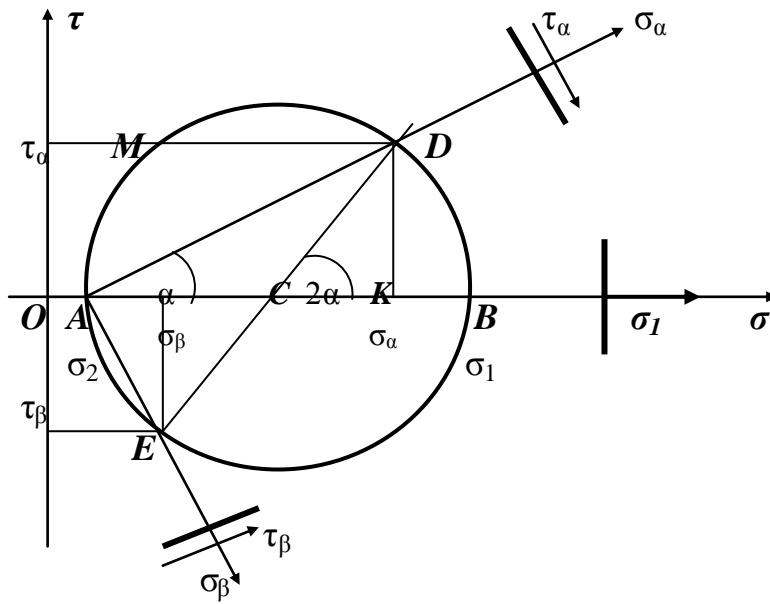


Рис. 5.9. Круг Мора. Пряма задача

Напрямок σ_α та σ_β визначають напрямком променів AD та AE відповідно. Орієнтацію τ_α та τ_β визначають знаком координати τ .

5.2.3. Круги Мора (обернена задача)

Нехай задані напруження на взаємно перпендикулярних неголовних площадках $\sigma_\alpha \tau_\alpha$ та $\sigma_\beta \tau_\beta$ (рис. 5.10). Треба визначити величини і напрямки головних напружень (тобто $\sigma_{\max}; \sigma_{\min}; \alpha$). Спочатку ми не знаємо, яку пару головних напружень отримаємо – $\sigma_1 \sigma_2$ чи $\sigma_2 \sigma_3$ чи $\sigma_1 \sigma_3$. Це буде залежати від знака отриманих напружень. Якщо обидва напруження вийдуть зі знаком „+” – це σ_1 та σ_2 ($\sigma_3 = 0$); якщо обидва матимуть знак „-”, – це σ_2 та σ_3 ($\sigma_1 = 0$). Якщо знаки різні – це пара σ_1 та σ_3 ($\sigma_2 = 0$). Домовимося вибирати $\sigma_\alpha \geq \sigma_\beta$.

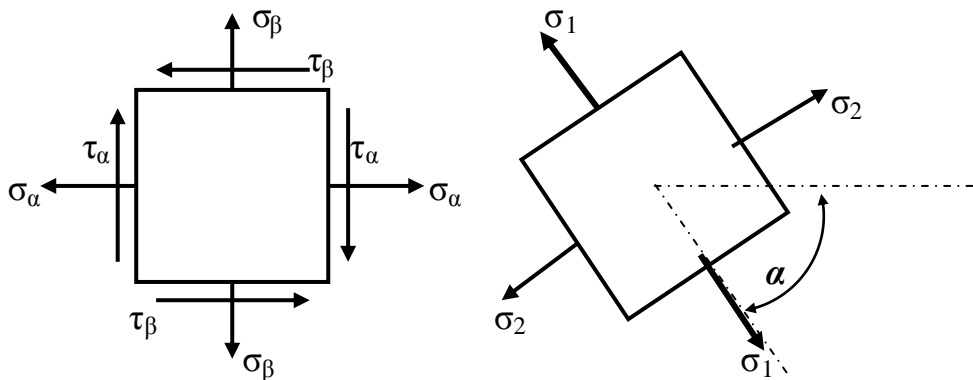


Рис. 5.10. Плоский напружений стан. обернена задача

У цьому випадку побудову круга Мора робимо так. Вісь σ орієнтуємо за напрямком σ_α , а ось τ – по нормалі до неї (рис. 5.11).

Далі позначаємо т. A та B , координати яких $\sigma_\alpha \tau_\alpha$ та $\sigma_\beta \tau_\beta$ – відповідно.

Сполучаємо між собою ці точки і на цьому відрізку AB , як на діаметрі, будуємо коло з центром у т. C (перетині відрізка AB з віссю σ).

Перетин кола з віссю σ дає в т. D та E відповідні головні напруження σ_1 та σ_2 (σ_3 в цьому випадку = 0).

Для визначення напрямку σ_1 треба з т. A опустити перпендикуляр на вісь σ до перетину його з колом в т. F . Промінь, проведений з т. E ($\sigma_2; 0$) через цю т. F , визначить напрямок σ_1 .

Аналогічно визначаємо напрям меншого з головних напружень (у даному випадку σ_2). З т. B перпендикулярно до осі σ проводимо промінь до перетину з колом у т. K , після чого промінь з т. E через т. K задає напрям σ_2 .

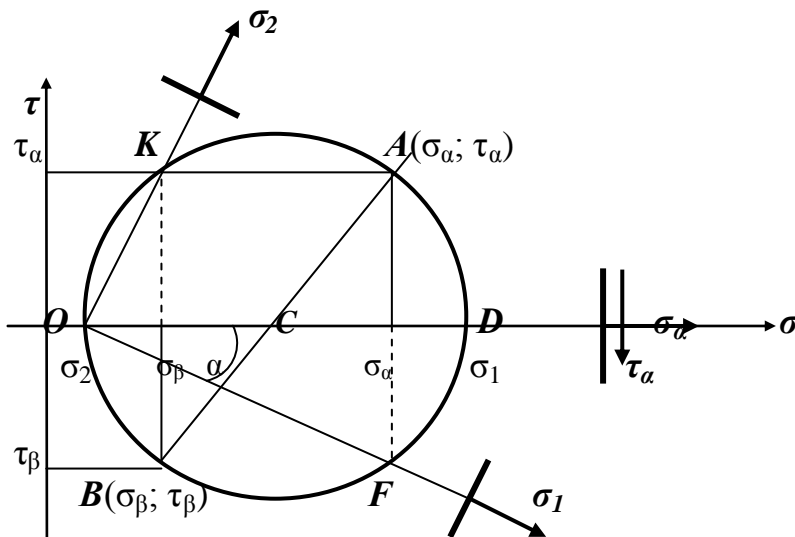


Рис. 5.11. Круг Мора. Обернена задача

5.2.4. Обернена задача (аналітичне виведення)

Тепер отримаємо аналітичні залежності для розв'язування оберненої задачі. Для цього можна або розглянути залежності (5.7; 5.10) або вивести їх за допомогою круга Мора. Розглянемо останній шлях.

$$\sigma_1 = OD = OC + CD = OC + AC = \frac{\sigma_\alpha + \sigma_\beta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_\alpha - \sigma_\beta}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

або

$$\sigma_1 = \frac{1}{2} \left[\sigma_\alpha + \sigma_\beta + \sqrt{(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)^2 + 4\tau^2} \right]. \quad (5.17)$$

Аналогічно
$$\sigma_2 = \frac{1}{2} \left[\sigma_\alpha + \sigma_\beta - \sqrt{(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)^2 + 4\tau^2} \right]. \quad (5.18)$$

Кут α можна обчислити використовуючи залежність

$$\operatorname{tg} 2\alpha = - \frac{\tau_\alpha}{\frac{\sigma_\alpha - \sigma_\beta}{2}} = - \frac{2\tau_\alpha}{\sigma_\alpha - \sigma_\beta}. \quad (5.19)$$

Знак „-“, з'являється з геометричних міркувань (рис. 5.11).

Можна також використати залежність

$$\operatorname{tg} \alpha = - \frac{\tau_\alpha}{\sigma_{\max} - \sigma_\beta}. \quad (5.20)$$

5.3. Октаедричні напруження

При вивченні пластичних деформацій цікавими є дотичні напруження, що діють на площадці, рівно нахилений до всіх головних напрямів. Таку площадку називають *октаедричною* (рис. 5.12).

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha.$$

Враховуючи, що завжди

$$\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_3 = 1,$$

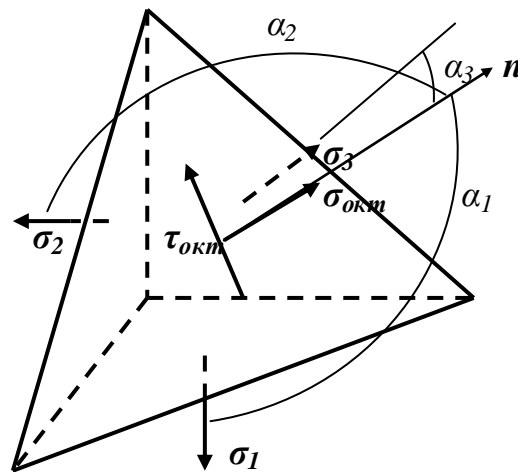


Рис. 5.12. Напруження на октаедричних площадках

отримаємо, що
$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{3}.$$

Тоді

$$\sigma_{\text{окт}} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}, \quad (5.21)$$

$$\begin{aligned}\tau_{окт} &= \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_1\sigma_3} = \\ &= \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}.\end{aligned}\quad (5.22)$$

В теорії пластичності зручно вводити так звану інтенсивність напружень σ_i .

$$\sigma_i = \frac{3}{\sqrt{2}} \tau_{окт} \quad (5.23)$$

$$\begin{aligned}\sigma_i &= \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1} = \\ \text{або} \quad &= \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}.\end{aligned}\quad (5.24)$$

5.4. Об'ємний напружений стан

5.4.1. Узагальнений закон Гука

Розглянемо елементарний об'єм напруженого тіла, вирізаний у вигляді кубика на головних площадках (рис. 5.11). Розглянемо деформації у напрямі дії σ_1 :

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \varepsilon_1(\sigma_1) + \varepsilon_1(\sigma_2) + \varepsilon_1(\sigma_3) = \frac{\sigma_1}{E} - \frac{\sigma_2}{E} \mu - \frac{\sigma_3}{E} \mu \\ \text{або} \quad \varepsilon_1 &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)].\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] \\ \text{Аналогічно} \quad \varepsilon_2 &= \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)]\end{aligned}\quad (5.25)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)]$$

Залежності (5.25) називають *узагальненим законом Гука для ізотропного тіла*.

Ці вирази справедливі не тільки для головних, але й для будь-яких трьох взаємно перпендикулярних напрямків, оскільки при малих деформаціях вплив зсуву на лінійну деформацію є малою величиною другого порядку.

5.4.2. Об'ємна деформація

Нехай елементарний об'єм у вигляді прямого паралелепіпеда має до деформації розміри $a; b; c$, а після деформації $-(a + \Delta a); (b + \Delta b)$ та $(c + \Delta c)$ відповідно.

Тоді його початковий об'єм дорівнює

$$V_0 = abc, \quad (5.26)$$

а кінцевий відповідно

$$V_k = (a + \Delta a)(b + \Delta b)(c + \Delta c) = abc + ab\Delta c + ac\Delta b + \\ + cb\Delta a + a\Delta b\Delta c + b\Delta a\Delta c + c\Delta a\Delta b + \Delta a\Delta b\Delta c.$$

Зрозуміло, що у цьому виразі останні чотири члени є нескінченно малими величинами порівняно з рештою членів.

Тоді відносна зміна об'єму

$$\theta = \frac{V_k - V_0}{V_0} \approx \frac{ab\Delta c + ac\Delta b + bc\Delta a}{abc}$$

або

$$\theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3. \quad (5.27)$$

Використавши (5.25) перетворимо (5.27) так

$$\theta = \frac{1-2\mu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3). \quad (5.28)$$

5.5. Теорії міцності

Міцність тіла, що знаходиться у складному напруженому стані навряд, чи може бути оцінена порівнянням із допустимим напруженням тільки одного, нехай і найбільшого напруження. Але все-таки перше найпростіше припущення полягає в тому, що *небезпечний стан матеріалу настає в той момент, коли найбільше за абсолютною величиною нормальне напруження досягає небезпечного значення*. Цю гіпотезу називають *теорією найбільших напружень* або *першою теорією міцності*.

Таким чином, і в загальному випадку, коли всі три головні напруження σ_1, σ_2 і σ_3 не дорівнюють нулю, при перевірці за цією теорією необхідно враховувати величину лише найбільшого розтягуючого та найбільшого стискаючого напруження. Величини ж двох інших головних напружень відсутні і, начебто, ніякого впливу на міцність матеріалу, на досягнення ним небезпечного стану не впливають і про них при перевірці міцності можна забути. Тоді до певної міри втрачається відмінність між перевіркою міцності при лінійному напруженому стані та при об'ємному.

Умови міцності для обох випадків записують однаково:

$$\sigma_{r1} = \sigma_1 \leq [\sigma] \quad \text{або} \quad \sigma_r = |\sigma_3| \leq [\sigma]. \quad (5.33)$$

При перевірці вказаної гіпотези дослідями виявилася невідповідність її висновків із результатами дослідів на всебічний стиск не тільки пластичних

матеріалів, але й крихких. Лише для випадку розтягу крихких матеріалів ця теорія узгоджується з дослідями. Оскільки ця теорія дає або зайві, або недостатні розміри перетинів елементів конструкцій при складному напруженому стані, її не застосовують і вона має лише історичне значення.

Висунута недоліками першої, і певною мірою на противагу їй, друга гіпотеза пропонує виникнення небезпечного стану визначати не рівнем найбільшого напруження, а величиною найбільшого відносного видовження (або вкорочення).

Якщо це так, то перевірку міцності слід проводити за найбільшими відносними деформаціями. Зберігаючи той же коефіцієнт запасу, для найбільшої відносної повздовжньої деформації в загальному випадку (всі головні напруження не рівні нулю) за допустимого ми повинні вибрати ту ж величину, що і при простому розтягу.

$$\text{Тобто} \quad \varepsilon_{\max} = \varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] \leq [\varepsilon].$$

Для випадку ж лінійного напруженого стану ми знаємо величину допустимого напруження $[\sigma]$. За законом Гука

$$[\varepsilon] = \frac{[\sigma]}{E}.$$

$$\text{Тоді} \quad \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] \leq \frac{[\sigma]}{E} \quad (5.34)$$

і остаточно

$$\sigma_{r2} = [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] \leq [\sigma] \quad (5.35)$$

Таким чином, приймаючи теорію найбільших відносних видовжень, необхідно порівнювати з допустимим напруженням, встановленим для простого розтягу або стиску, не те або інше головне напруження, а їх сукупність, так зване *приведене (розрахункове) напруження*, що визначається формулою:

$$\sigma_{r2} = [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)].$$

Ця гіпотеза також суперечить результатам досліджень міцності пластичних матеріалів. Якби вона була для таких матеріалів вірна, то зразок, що розтягується в двох або трьох напрямках, був би міцнішим за зразок, який розтягується лінійно. Досвід цього не підтверджує. Не підтверджується ця гіпотеза і при всесторонньому рівномірному стиску.

Для крихкого стану матеріалу теорія найбільших відносних деформацій дає результати, що, як правило, узгоджуються з дослідом.

Третя гіпотеза міцності (або теорія найбільших дотичних напружень) стверджує, що головну роль у виникненні небезпечного стану матеріалу відіграє найбільше напруження, але вже не нормальне, а дотичне, що дорівнює напіврізниці найбільшого і найменшого головних напружень:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} .$$

При цьому припущенні перевірку міцності треба здійснювати за дотичними напруженнями. Умова міцності має вигляд:

$$\tau_{\max} \leq [\tau].$$

Що стосується величини допустимих напружень $[\tau]$, то, вважаючи, що виникнення небезпечного стану залежить лише від найбільших дотичних напружень, при об'ємному напруженому стані ми повинні для цих напружень допускати ту ж величину, що і при простому розтягу.

Якщо при простому розтягу для нормальних напружень ми допускаємо величину $[\sigma]$, то тим самим для найбільших дотичних ми допускаємо значення $[\tau] = \frac{[\sigma]}{2}$ (див. 5.5). Ці дотичні напруження, як відомо, діють на площадці, нахиленій під кутом в $\pm 45^\circ$ до напрямку розтягуючої сили.

Умова міцності для об'ємного напруженого стану набуває вигляду:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \leq \frac{[\sigma]}{2} \quad \text{або} \quad \sigma_{r3} = (\sigma_1 - \sigma_3) \leq [\sigma]. \quad (5.36)$$

Таким чином, приймаючи вказану гіпотезу, при перевірці міцності доводиться порівнювати з напруженням, що допускається, при розтягуванні або стискуванні не найбільше нормальне напруження, а різницю між найбільшим і найменшим нормальними (головними) напруженнями. Величина розрахункового (приведеного) напруження в цьому випадку дорівнює:

$$\sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3 .$$

Третя умова міцності достатньо близько узгоджується з результатами дослідів, особливо для пластичних матеріалів. Вона підтверджується дослідом на всебічний стиск. Ця теорія забезпечує міцність елементів конструкцій, що розраховуються.

У тому простому вигляді розрахункових напружень (5.36) умова міцності може бути написана лише для тих матеріалів, для яких допустимі напруження на розтяг і стиск можуть бути прийняті рівними, наприклад, для сталі. Для таких матеріалів, як чавун, камінь і т. д. в умову (5.36) необхідно внести зміни, які вперше запропонував Х. Мор.

Критерій Мора базується на положенні, що міцність матеріалів у загальному випадку напруженого стану залежить, в основному, від величини та знака найбільшого — σ_1 і найменшого — σ_3 з головних напружень. Мор запропонував формулу для умови міцності, яка б враховувала різні рівні допустимих напружень при розтягу $[\sigma_+]$ та стиску $[\sigma_-]$ відповідно:

$$\sigma_{rM} = \left(\sigma_1 - \frac{[\sigma_+]}{[\sigma_-]} \sigma_3 \right) \leq [\sigma_+]. \quad (5.37)$$

Недоліком теорії найбільших дотичних напружень, що відразу впадає в очі, є та обставина, що вона не враховує впливу на роботу матеріалу середнього за величиною головного напруження. Виходить, що при постійних найбільшому σ_1 і найменшому σ_3 ми можемо, не змінюючи умов роботи матеріалу, як завгодно міняти величину середнього напруження σ_2 , лише б воно було менше σ_1 і більше σ_3 . Ця обставина є сумнівною. Досліди підтверджують, що величина напруження σ_2 все ж має вплив на міцність матеріалу.

У зв'язку з недоліками старих теорій виникли нові ідеї щодо того, який фактор викликає виникнення небезпечного стану.

Було зроблено припущення, що небезпечний стан матеріалу залежить не від величини деформацій або напружень окремо, а від сукупності тих та інших – від величини потенціальної енергії або від чисельно їй рівної питомої роботи деформації. Величина цієї роботи виражається через всі три головні напруження.

Якщо припустити, що причиною небезпечного стану є накопичення повної питомої потенціальної енергії деформації, то міцність матеріалу буде забезпечена за умови, коли

$$u \leq [u] .$$

Тут u – потенціальна енергія деформації при об'ємному напруженому стані, що виражається формулою (5.31), а $[u]$ – кількість потенціальної енергії, яку (за умовою рівномірності матеріалу при складному та лінійному напружених станах) можна отримати з виразу (5.31) для повної енергії деформації, що допускається при простому розтягу:

$$u_p = \frac{\sigma^2}{2E} .$$

При простому розтягу для нормальних напружень ми допускаємо величину $[\sigma]$, тим самим для питомої роботи деформації допускаємо

$$[u] = \frac{[\sigma]^2}{2E} .$$

Для дотримання того ж ступеня безпеки в загальному випадку для питомої роботи деформації ми повинні допускати рівень, не більший, ніж $[u]$. Умова міцності набуде вигляду:

$$\frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)] \leq \frac{[\sigma]^2}{2E}$$

або

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)} \leq [\sigma] . \quad (5.38)$$

Розрахункове напруження дорівнює

$$\sigma_r = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)} .$$

Ця гіпотеза не підтвердилася дослідами і має тільки історичне значення. Зате вона стала базою для створення нової енергетичної теорії міцності, що узгоджується з дослідами.

Теорія, яку зазвичай називають *четвертою теорією (або гіпотезою) міцності, припускає, що причиною виникнення небезпечної пластичної деформації є не вся потенціальна енергія деформації, а тільки та частина її, яка пов'язана зі зміною форми елементарних об'ємів матеріалу*. Отже, міцність матеріалу буде забезпечена, якщо

$$u_{\phi} \leq [u_{\phi}].$$

Тут потенціальна енергія формозміни при складному напруженому стані, дорівнює (5.32):

$$u_{\phi} = \frac{1+\mu}{3E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_1\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3].$$

Величина ж потенціальної енергії форми, що допускається, при простому розтягу дорівнює :

$$[u_{\phi}] = \frac{1+\mu}{3E} [\sigma]^2.$$

Тоді умова міцності за енергетичною теорією матиме вигляд:

$$\sigma_{rIV} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_1\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3} \leq [\sigma], \quad (5.39)$$

а розрахункове (приведене) напруження буде:

$$\sigma_{r4} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_1\sigma_3}.$$

Умову міцності (5.39) можна навести і в іншому вигляді, іноді зручнішому для обчислень:

$$\sigma_{rIV} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \leq [\sigma]. \quad (5.40)$$

Формули (5.39) і (5.40) представляють *умову міцності за теорією найбільшої потенціальної енергії зміни форми*.

Можна показати, що розрахункове напруження σ_{rIV} за цією теорією пропорційне дотичному напруженню на площадці, рівно нахилений до напрямів головних напружень – октаедричної. Ця теорія міцності може бути віднесена до категорії теорій, що засновують перевірку міцності для пластичних матеріалів за величиною дотичних напружень. Досліди досить добре підтверджують результати, одержані за цією теорією для пластичних матеріалів.

Тема 6. Геометричні характеристики плоских перерізів

Класифікація геометричних характеристик перерізів. Площа. Статичний момент площі відносно осі. Моменти інерції: осьові, відцентровий та полярний. Осьовий та полярний моменти опору. Центральні та головні осі інерції. Перетворення моментів інерції при паралельному перенесенні осей та при їх повороті

Відзначалося, що для розгляду задач міцності, жорсткості та стійкості необхідно мати уявлення не тільки про зовнішню систему сил, що діють на

тіло, але й про його розміри і форму. При цьому у багатьох випадках для розуміння процесів, пов'язаних з напружено-деформованим станом, не вистачає такої геометричної характеристики плоских перерізів, як площа. Наприклад, якщо звичайну лінійку (стержень прямокутного поперечного перерізу) розтягувати вздовж її осі, то з точки зору міцності й жорсткості немає різниці як буде орієнтований її поперечний переріз. Але, якщо ту ж саму лінійку спробувати зігнути в різних площинах – міцнісні та жорсткісні властивості будуть суттєво відрізнятися, хоча площа поперечного перерізу при цьому змінюватися не буде. Тому розглянемо ще деякі характеристики перерізів, які часто зустрічаються в опорі матеріалів.

6.1. Класифікація геометричних характеристик перерізів

6.1.1. Площа – A

Усі мають чітке уявлення що таке площа, тому відзначимо тільки, що ця величина завжди додатна і розмірність її – (од. довжини²), тобто (m^2) або похідні від цієї величини ($cm^2 = 10^{-4} m^2, mm^2 = 10^{-6} m^2$).

6.1.2. Статичний момент площі відносно осі

Розглянемо переріз у довільній декартовій прямокутній системі координат $хоу$ (рис. 6.1). Виберемо елемент площі dA . Тоді величина

$$S_x = \int_A y dA \quad (6.1)$$

буде називатися *статичним моментом площі A відносно осі x* .

Аналогічно $S_y = \int_A x dA$ – статичний момент цієї площі відносно осі y .

Розмірність статичного моменту площі – одиниці довжини в третьому степені (m^3, cm^3). Статичний момент може бути додатнім, від'ємним і дорівнювати нулю. Як правило, нас цікавить його величина – модуль, а знаком можна нехтувати.

Проводячи математичну аналогію з моментами сил та спираючись на теорему про момент рівнодійної, можна записати:

$$S_x = y_0 \cdot A \quad \text{та} \quad S_y = x_0 \cdot A, \quad (6.2)$$

де $x_0; y_0$ – координати центра ваги площі A .

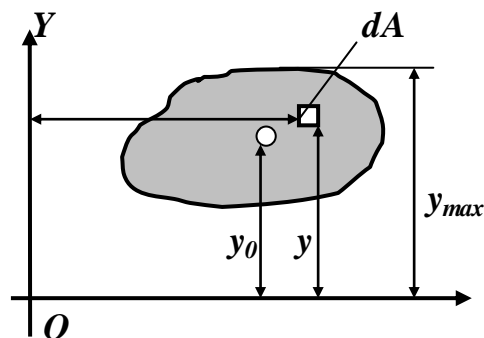


Рис.6.1. Переріз у декартовій системі координат

Це дає змогу обчислити координати центра ваги

$$\begin{cases} x_0 = \frac{S_y}{A} \\ y_0 = \frac{S_x}{A} \end{cases} \quad (6.3)$$

З цих формул випливає: якщо відносно певної осі статичний момент дорівнює 0, ця вісь є центральною (тобто вона проходить через центр ваги).

Для обчислення статичних моментів складної фігури її розбивають на простіші частини. При цьому загальний статичний момент буде дорівнювати алгебраїчній сумі статичних моментів окремих частин фігури відносно тієї самої осі:

$$\begin{aligned} S_x &= A_1 y_1 + A_2 y_2 + \dots + A_n y_n = \sum_{i=1}^n A_i y_i; \\ S_y &= A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_n x_n = \sum_{i=1}^n A_i x_i. \end{aligned} \quad (6.4)$$

6.1.3. Моменти інерції площ

А). *Осьовий (екваторіальний) момент інерції I_0 .*

Розглянемо той же самий переріз (рис. 6.1).

Осьовим (або екваторіальним) моментом інерції площі відносно осі X називають величину

$$I_x = \int_A y^2 dA \quad (6.5)$$

Ця величина має розмірність одиниць довжини в четвертій степені (m^4, cm^4) і приймає тільки додатні значення.

Б). *Відцентровий момент інерції.*

Відцентровим моментом інерції вважають величину

$$I_{xy} = \int_A xy dA \quad (6.6)$$

Розмірність її така ж сама, як і в осьового моменту інерції – одиниці довжини в четвертому степені.

Ця величина вже може приймати як додатні, так і від'ємні значення. Крім того відцентровий момент інерції може дорівнювати нулю.

Осі, відносно яких відцентровий момент інерції дорівнює нулю, називають головними осями інерції перерізу. Відповідні осьові моменти інерції називають головними. Якщо головні осі проходять через центр ваги перерізу, їх називають центральними головними осями інерції.

Зауваження: якщо хоч одна з пари координатних осей буде віссю симетрії, ці осі будуть головними.

Дане твердження випливає з того, що в умовах симетричності відносно осі кожній точці перерізу можна вказати симетричну, яка одну координату буде мати таку ж саму, а другу – зі зміненим знаком. Тоді в інтегральну суму увійдуть попарно члени, рівні за модулем та різні за знаком, що й перетворить цю суму в 0.

В). Полярний момент інерції.

Полярним моментом інерції I_p називають інтегральну суму добутків елементарних площадок dA на квадрат відстані їх від полюса – ρ^2 (у полярній системі координат), взяту по всій площі перерізу (рис. 6.2). Тобто

$$I_p = \int_A \rho^2 dA \quad (6.7)$$

Ця величина має розмірність одиниць довжини в четвертому степені ($см^4, м^4$), й може бути лише додатною. Зрозуміло: якщо сумістити початок декартової прямокутної системи координат O з полюсом полярної системи (див. рис. 6.2), то

$$I_p = I_x + I_y \text{ тому що } (\rho^2 = x^2 + y^2). \quad (6.8)$$

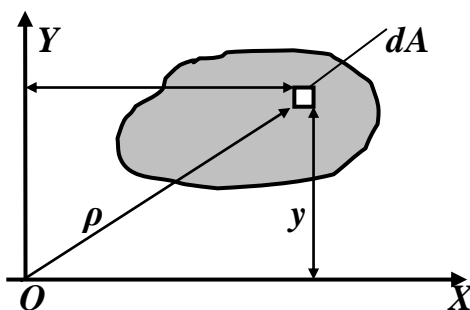


Рис. 6.2. Співвідношення осьових та полярного моментів інерції

6.1.4. Моменти опору

А). Момент опору осьовий.

Відношення осьового моменту інерції перерізу до відстані між відповідною віссю та найвіддаленішою від неї точкою перерізу називають осьовим моментом опору $W_0 (W_x; W_y)$

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}}; W_y = \frac{I_y}{x_{\max}}. \quad (6.9)$$

В). Момент опору полярний.

Полярний момент опору w_p – це, відповідно, відношення полярного моменту інерції I_p до відстані між полюсами та самою віддаленою точкою ρ_{\max} . Тобто

$$w_p = \frac{I_p}{\rho_{\max}}. \quad (6.10)$$

Розмірність осьових і полярних моментів інерції – одиниці довжини в третьому степені (m^3, cm^3). Знаком осьових моментів опору, як правило, не цікавляться, рахуючи їх за модулем.

6.1.5. Радіус інерції

Радіус інерції i - визначається як величина, що дорівнює кореню квадратному з відношення осьового моменту інерції I_0 до площі перерізу A :

$$\begin{aligned} i_x &= \sqrt{\frac{I_x}{A}}; \\ i_y &= \sqrt{\frac{I_y}{A}}. \end{aligned} \quad (6.11).$$

Розмірність цієї величини – одиниці довжини. Знак додатний.

Заняття 5. Лекція 4. Тема 6. Геометричні характеристики плоских перерізів (продовження). Тема 7. Чистий зсув. Кручення

Перетворення моментів інерції при паралельному перенесенні осей та при їх повороті. Головні осі інерції. Головні моменти інерції. Еліпс інерції. Обчислення моментів інерції та опору для деяких характерних перерізів. Визначення моментів інерції, опору та інших геометричних характеристик для прокатних профілів (двотаври, швелери, кутники тощо)

Чистий зсув, напруження, умова міцності, приклад розрахунку на міцність заклепкового з'єднання, деформації, з-н Гука при зсуві, модуль пружності II роду. Кручення, внутрішні силові фактори при крученні, напруження, критерій міцності, деформації, закон Гука, умова жорсткості при крученні

6.2. Перетворення моментів інерції

6.2.1. Перетворення моментів інерції при паралельному перенесенні осей

Нехай є прямокутна система координат x_0OY_0 пов'язана з центром ваги перерізу т.С (рис 6.3)

Будемо вважати відомими осьові та відцентровий моменти інерції відносно цих центральних осей та площу перерізу ($I_{x_0}; I_{y_0}; I_{x_0y_0}; A$). Нехай є також друга система координат XOY , осі якої паралельні осям першої системи та віддалені від неї на відстані відповідно „а” та „в”. Треба визначити осьові та відцентровий моменти інерції відносно осей O, X та O, Y іншої системи координат.

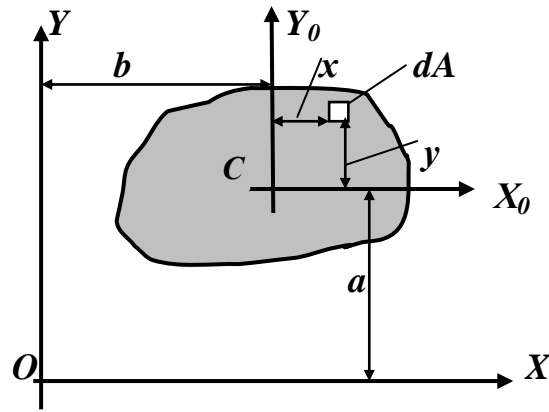


Рис.6.3. Перетворення моментів інерції при паралельному перенесенні осей

Для цього розглянемо елементарну площадку dA на перерізі. Її координати в старій системі координат – $x_0; y_0$, а у новій – $x; y$ відповідно.

Причому

$$\begin{aligned} x &= x_0 + b; \\ y &= y_0 + a. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Тоді скористаймося (6.5)

$$\begin{aligned} I_x &= \int_A y^2 dA; \\ I_y &= \int_A x^2 dA. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Підставимо в перше з цих співвідношень вираз для y з (6.12):

$$I_x = \int_A (y_0 + a)^2 dA .$$

Перетворюючи та розбиваючи на суму інтегралів

$$I_x = \int_A (y_0^2 + 2ay^2 + a^2) dA = \int_A y_0^2 dA + 2a \int_A y_0 dA + a^2 \int_A dA ,$$

маємо

$$I_x = I_{x_0} + a^2 A . \quad (6.14)$$

Дійсно: перший інтеграл цієї суми – це момент інерції відносно центральної осі ox_0 . Другий інтеграл є статичним моментом відносно осі ox_0 , який дорівнює нулю, тому що вона центральна. Останній інтеграл – це повна площа перерізу A . Цілком аналогічно можна вивести залежність

$$I_y = I_{y_0} + b^2 A . \quad (6.15)$$

Для виведення формули у випадку перетворення відцентрового моменту, скористаймося (6.6), підставивши (6.11).

$$I_{xy} = \int_A (y_0 x_0 dA + a \int_A x_0 dA + b \int_A y_0 dA + ab \int_A dA) .$$

Розглядаючи цей вираз, неважко помітити, що перший інтеграл в ньому – відцентровий момент відносно осей $x_0 y_0$ – $I_{x_0 y_0}$; другий та третій – це статичні

моменти відносно осей OX_0 та OY_0 (і тому дорівнюють нулю), а останній інтеграл являє собою повну площу перерізу A . Тобто

$$I_{xy} = I_{x_0y_0} + a \cdot b \cdot A \quad . \quad (6.16)$$

Зауваження: формулами (6.13 – 6.15) можна скористатися тільки в тому випадку, коли осі OX_0 та OY_0 – центральні. Тому слід уважно перераховувати моментів інерції при паралельному перенесенні осей. Якщо від нецентральної осей треба перейти до знов-таки нецентральної, цей перехід слід робити у 2 етапи:

- спочатку треба перейти від нецентральної до центральної осей, встановивши попередньо всі потрібні відстані та положення центра ваги;
- потім від центральної осей перейти до тих нецентральної осей, які нас цікавлять.

6.2.2. Перетворення моментів інерції при повертанні осей

Нехай є перша прямокутна система координат XOY та повернута на кут α відносно першої друга система X_1OY_1 . Причому всі ці осі довільні (тобто не обов'язково є центральними або головними) (рис. 6.4).

Розглянемо елементарну площадку dA . Її координати у першій системі x ; y , а в другій x_1 ; y_1 .

Співставивши значення координат, можна записати:

$$\begin{aligned} x_1 &= x \cos \alpha + y \sin \alpha; \\ y_1 &= y \cos \alpha - x \sin \alpha. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Враховуючи, що

$$I_{x_1} = \int_A y_1^2 dA; \quad I_{y_1} = \int_A x_1^2 dA; \quad I_{x_1y_1} = \int_A x_1 y_1 dA;$$

підставимо у ці співвідношення вирази (6.17).

Відповідно, перетворюючи, будемо мати:

$$I_{x_1} = \int_A (y \cos \alpha - x \sin \alpha)^2 dx = \cos^2 \alpha \int_A y^2 dA - 2 \sin \alpha \cos \alpha \int_A xy dA + \sin^2 \alpha \int_A x^2 dA$$

або

$$\cos^2 \alpha \cdot I_x - \sin 2\alpha \cdot I_{xy} + \sin^2 \alpha \cdot I_y \quad .$$

Остаточно можна записати:

$$I_{x_1} = I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{xy} \sin 2\alpha \quad . \quad (6.18)$$

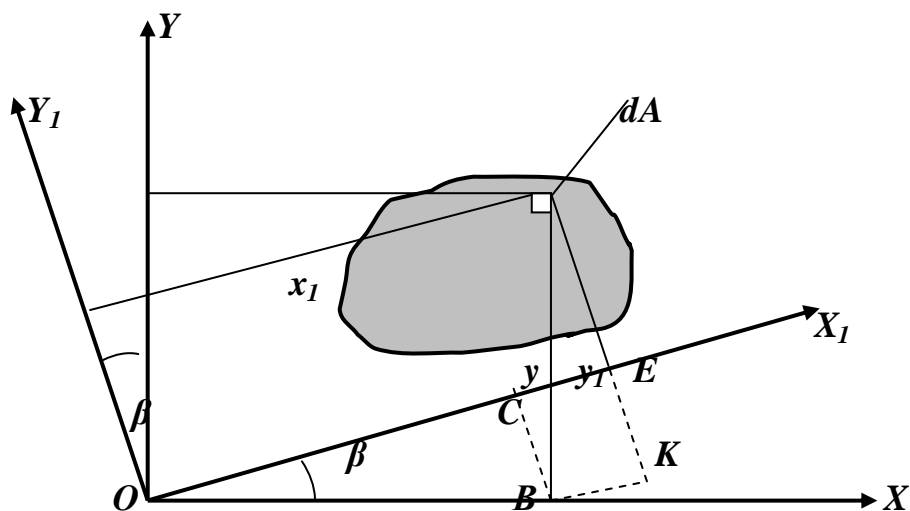


Рис. 6.4. Перетворення моментів інерції при повертанні осей

Роблячи аналогічні перетворення, отримаємо:

$$I_{y_1} = I_x \sin^2 \alpha + I_y \cos^2 \alpha + I_{xy} \sin 2\alpha \quad ; \quad (6.19)$$

$$I_{x_1 y_1} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{xy} \cos 2\alpha \quad . \quad (6.20)$$

Аналізуючи залежності (6.18) – (6.19), неважко отримати:

$$I_{x_1} + I_{y_1} = I_x + I_y = I_p \quad . \quad (6.21)$$

Тобто, при повертанні осей сума осьових моментів інерції не змінюється і дорівнює полярному моменту I_p (за тих умов, коли початок координат і полюс співпадають).

6.2.3. Головні осі інерції. Головні моменти інерції

Цікавим є питання про визначення осей, відносно яких моменти інерції будуть набувати найбільшого та найменшого значення. Позначимо ці осі „u” та „v”. Дослідимо на екстремум вираз (6.18). Взявши першу похідну та прирівнявши її до нуля, матимемо:

$$- 2 \cos \alpha \sin \alpha \cdot I_x + 2 \sin \alpha \cos \alpha \cdot I_y - 2 \cos 2\alpha \cdot I_{xy} = 0$$

або, перетворюючи:

$$\frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{xy} \cos 2\alpha = I_{x_1 y_1} = 0 \quad . \quad (6.22)$$

Тобто, I_{x_1} та I_{y_1} приймають екстремальні значення відносно тієї пари осей, для яких відцентровий момент $I_{x_1 y_1} = 0$. Тобто, за прийнятими нами позначеннями головних осей індексами „u” та „v” можна записати $I_{uv} = 0$. Нехай $I_u = I_{\max}$, а $I_v = I_{\min}$ (це відбувається за тієї умови, що $I_x > I_y$).

Головними осями інерції називають осі, відносно яких відцентровий момент дорівнює нулю.

Відносно головних осей виникають екстремальні значення моментів інерції, які теж називають головними моментами інерції.

Площини, проведені через вісь стержня та головні осі інерції називають головними площинами інерції.

Цікавим є визначення орієнтації головних осей та значень головних моментів інерції.

Нехай у перерізі є довільні взаємно перпендикулярні осі x та y . Відомі моменти інерції відносно цих осей I_x, I_y та I_{xy} . Потрібно встановити орієнтацію головних осей u та v , тобто визначити кут повороту на головні осі α_0 і визначити головні моменти інерції I_u та I_v .

Для визначення орієнтації головних осей розглянемо вираз (6.20). Для головних осей відцентровий момент дорівнює нулю, тому

$$\frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha_0 + I_{xy} \cos 2\alpha_0 = 0$$

$$\text{або} \quad \operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y}, \quad (6.23)$$

$$\text{звідки} \quad \alpha_0 = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(-\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y} \right). \quad (6.24)$$

Для визначення головних моментів розглянемо формули (6.18 – 6.19):

$$I_u = I_x \cos^2 \alpha_0 + I_y \sin^2 \alpha_0 - I_{xy} \sin 2\alpha_0;$$

$$I_v = I_x \sin^2 \alpha_0 + I_y \cos^2 \alpha_0 + I_{xy} \sin 2\alpha_0.$$

Розглянемо суму цих величин та їх різницю:

$$I_u + I_v = I_x + I_y; \quad (6.25)$$

$$\begin{aligned} I_u - I_v &= I_x \cos 2\alpha_0 - I_y \cos 2\alpha_0 - 2I_{xy} \sin 2\alpha_0 = \\ &= (I_x - I_y) \cos 2\alpha_0 + (I_x - I_y) \operatorname{tg} 2\alpha_0 \sin 2\alpha_0 = (I_x - I_y) \frac{1}{\cos 2\alpha_0}. \end{aligned} \quad (6.26)$$

Тоді з (6.25) та (6.26)

$$\begin{aligned} I_u &= \frac{1}{2} \left[I_x + I_y + (I_x - I_y) \frac{1}{\cos 2\alpha} \right]; \\ I_v &= \frac{1}{2} \left[I_x + I_y - (I_x - I_y) \frac{1}{\cos 2\alpha} \right]. \end{aligned} \quad (6.27)$$

Або, зробивши заміну

$$\frac{1}{\cos 2\alpha} = \pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha} = \sqrt{1 + \frac{4I_{xy}^2}{(I_x - I_y)^2}}, \quad (6.28)$$

маємо:

$$\begin{aligned} I_u &= \frac{1}{2} \left[I_x + I_y + \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2} \right] \\ I_v &= \frac{1}{2} \left[I_x + I_y - \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2} \right]. \end{aligned} \quad (6.29)$$

Таким чином, отримано можливість визначати як положення (орієнтації) головних осей, так і значень головних моментів інерції перерізу.

6.3. Обчислення моментів інерції та опору для деяких характерних перерізів

6.3.1. Прямокутник

Нехай задано прямокутник (рис. 6.6). Обчислимо його осьові моменти інерції I_x, I_y

(X, Y – центральні, головні осі інерції) : $I_x = \int y^2 dA$.

Елементарну площадку dA можна виразити як добуток $b dy$, тоді

$$I_x = 2 \int_0^{\frac{h}{2}} y^2 b dy = 2 \frac{y^3}{3} b \Big|_0^{\frac{h}{2}}$$

або
$$I_x = \frac{bh^3}{12} \quad (6.30)$$

аналогічно
$$I_y = \frac{bh^3}{12} \quad (6.31)$$

Обчислюючи осьові моменти опору W_y та W_z , отримуємо:

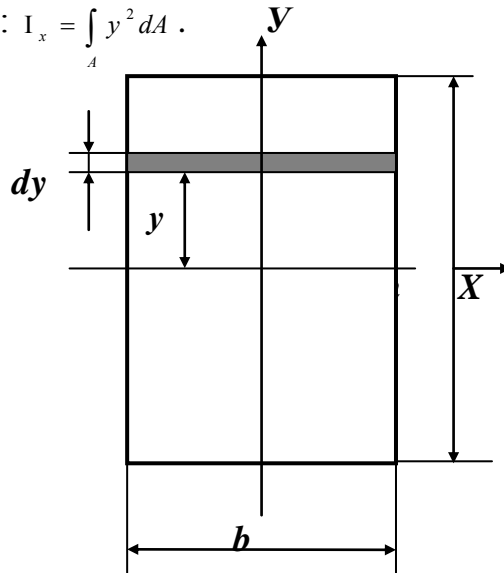


Рис. 6.6. Прямокутний переріз

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}} = \frac{\frac{bh^3}{12}}{\frac{h}{2}} = \frac{bh^2}{6} ; \quad (6.32)$$

$$W_y = \frac{I_y}{x_{\max}} = \frac{\frac{hb^3}{12}}{\frac{b}{2}} = \frac{hb^2}{6} . \quad (6.33)$$

6.3.2. Трикутник

Нехай задано довільний трикутник (рис. 6.7), вісь X співпадає з основою, а X_0 – центральна.

Знайдемо спочатку I_x :

$$I_x = \int_A y^2 dA .$$

Елементарна площадка dA запишеться як

$$dA = b(y) dy ,$$

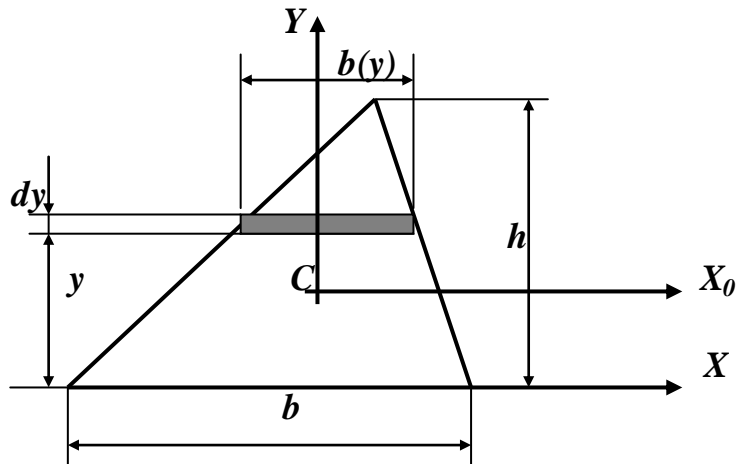


Рис. 6.7. Трикутний переріз

де
$$b(y) = b \frac{h-y}{h} = b \left(1 - \frac{y}{h} \right),$$

тобто
$$I_x = \int_0^h b y^2 \left(1 - \frac{y}{h} \right) dy$$

або
$$I_x = \frac{bh^3}{12} . \quad (6.34)$$

Для центральної осі x_0 момент інерції підраховуємо за допомогою формули паралельного переносу (6.13), знаючи, що центр ваги трикутника знаходиться на рівні $\frac{1}{3}$ висоти від основи.

$$I_{x_0} = I_x - a^2 A = \frac{bh^3}{12} - \frac{h^2}{9} \frac{bh}{2} .$$

Знак „-„ у формулі вибрано тому, що здійснюється перехід від нецентральної осі до центральної. Тобто

$$I_{x_0} = \frac{bh^3}{36} . \quad (6.35)$$

6.3.3. Круг

Нехай задано круг з радіусом R (рис. 6.8). Знайдемо момент інерції відносно будь-якої центральної осі, наприклад, X :

$$I_x = \int_A y^2 dA .$$

Площадку dA можна уявити як добуток $b(y)dy$. З рис.6.8 очевидно, що

$$b(y) = 2R \sin \frac{\alpha}{2}, \text{ а } y = R \cos \frac{\alpha}{2} . \text{ Тоді } dy = -\frac{1}{2} R \sin \frac{\alpha}{2} d\alpha .$$

Отже

$$I_x = \int_{-\pi}^0 R^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} 2R \sin \frac{\alpha}{2} \left(-\frac{1}{2} R \sin \frac{\alpha}{2} d\alpha \right). \quad (6.36)$$

Перетворюючи і змінюючи межі інтегрування, одержимо:

$$I_x = R^4 \int_0^{\pi} \cos^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \frac{\alpha}{2} d\alpha = R^4 \int_0^{\pi} \sin^2 \alpha d\alpha. \quad (6.37)$$

Тобто
$$I_x = \frac{\pi R^4}{4}. \quad (6.38)$$

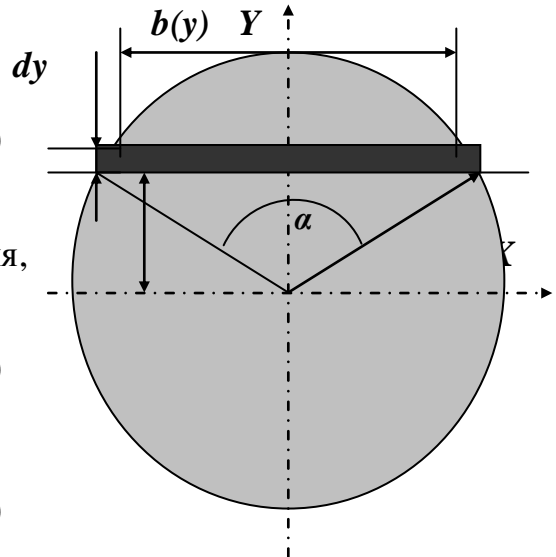


Рис.6.8.Круглий переріз

Осьовий момент опору

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}} = \frac{\pi R^3}{4}. \quad (6.39)$$

Скориставшись залежністю між осьовими та полярними моментами інерції та враховуючи, що для круга будь-яка центральна вісь є головною, можна підрахувати полярні моменти інерції та опору:

$$I_p = 2I_x = \frac{\pi R^4}{2} \quad (6.40)$$

$$W_p = \frac{\pi R^3}{2}. \quad (6.41)$$

6.3.4. Кільце

Нехай задано кільце (рис. 6.9).

Тоді моменти інерції можна підрахувати за властивостями інтегральних сум.

Тобто,

$$I_x = \frac{\pi R^4}{2} - \frac{\pi r^4}{4}$$

або в такому вигляді

$$I_x = \frac{\pi R^4}{2} (1 - \alpha^4), \quad (6.42)$$

де $\alpha = \frac{r}{R}$.

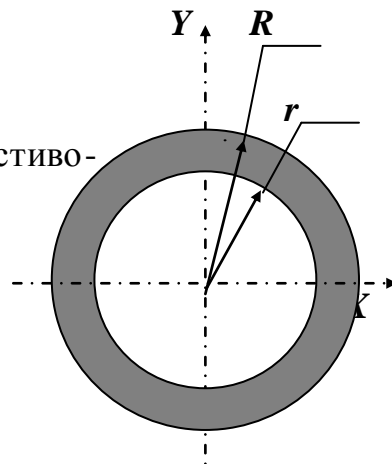


Рис.6.9. Кільцевий переріз

Аналогічно
$$W_x = \frac{\pi R^3}{4}(1 - \alpha^4); \quad (6.43)$$

$$I_p = \frac{\pi R^4}{2}(1 - \alpha^4); \quad (6.44)$$

$$W_p = \frac{\pi R^3}{2}(1 - \alpha^4). \quad (6.45)$$

6.4. Визначення моментів інерції, опору та інших геометричних характеристик для прокатних профілів (двотаври, швелери, кутники тощо)

Визначення моментів інерції, опору та інших геометричних характеристик для прокатних профілів (двотаври, швелери, кутники тощо) проводяться за допомогою таблиць сортаменту, представлених у різних довідниках, підручниках і задачниках з опору матеріалів і деталей машин.

Тема 7. Чистий зсув. Кручення

Чистий зсув, напруження, умова міцності, приклад розрахунку на міцність заклепкового з'єднання, деформації, з-н Гука при зсуві, модуль пружності II роду. Кручення, внутрішні силові фактори при крученні, напруження, критерій міцності, деформації, закон Гука, умова жорсткості при крученні

7.1. Чистий зсув, напруження, умова міцності

Чистий зсув (або зріз) – це випадок плоского напруженого стану, коли по гранях елемента діють тільки дотичні напруження.

У цьому неважко визначити випадку величини та напрямки головних напружень, розглядаючи, наприклад, круг Мора, зображений на рис. 7.1.

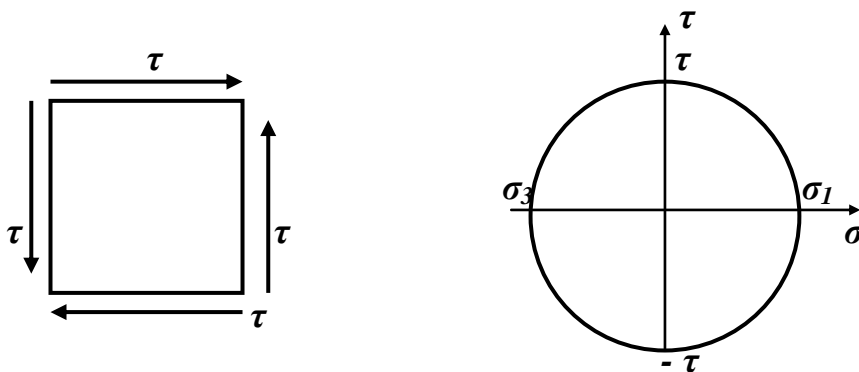


Рис.7.1. Напружений стан при чистому зсуві

Тоді цілком зрозуміло, що:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= -\sigma_3 = \tau; \\ \sigma_2 &= 0.\end{aligned}\quad (7.1)$$

Якщо згадати, що $\tau = \frac{dQ}{dA}$ та врахувати, що дотичні сили dQ , які викликають зсув, однакові по кожній площадці dA , то можна записати

$$\tau = \frac{Q}{A} \quad (7.2)$$

Очевидно, що умовою міцності при цьому буде

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max}}{A} \leq [\tau]. \quad (7.3)$$

7.1.1. Приклад розрахунку на міцність заклепкового з'єднання

Як правило, деформація зсуву зустрічається у сукупності з іншими видами деформації. Характерний приклад – робота найпростішого заклепкового з'єднання (рис. 7.2).

Нехай задача полягає в тому, щоб розрахувати кількість заклепок n у ряді, які з'єднують між собою дві пластини товщиною t , що розтягуються силами F . При цьому діаметр заклепки d , допустимі напруження на зріз $-\tau$, та на зминання (стиск) $-\sigma$.

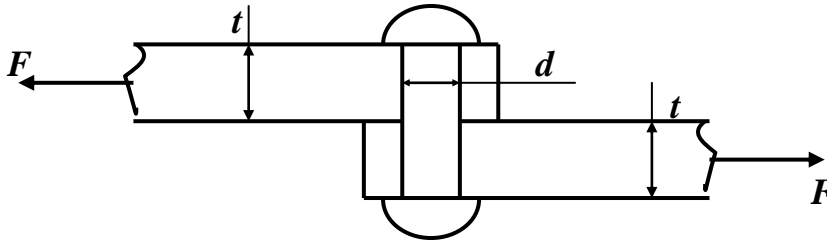


Рис. 7.2. Заклепкове з'єднання

Заклепка одночасно працює і в умовах зсуву (по діаметральному зрізу на границі дотикання пластин однієї до другої (рис. 7.3,а) та зминання (по площадках контакту заклепки з кожною пластиною (рис. 7.3,б,в).

Тоді розрахунком на міцність при зрізі буде :

$$\tau_{\max} = \frac{F}{n' \frac{\pi d^2}{4}} \geq [\tau],$$

де n' – кількість заклепок із розрахунку на зріз.

Звідси маємо:

$$n' \geq \frac{4F}{\pi d^2 [\tau]}. \quad (7.4)$$

Розрахунок на міцність при зминанні дасть:

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{n'' t d} < [\sigma],$$

де n'' – кількість заклепок з розрахунку на зминання,

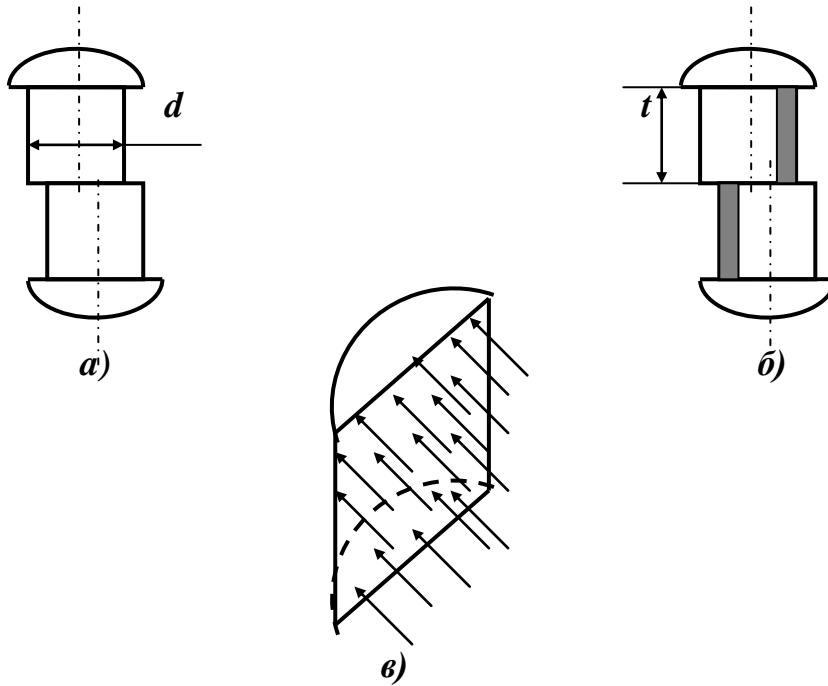


Рис.7.3. Навантаження на різні зони заклепки: а) зона зсуву, б) зона зминання, в) ефективно навантаження

тобто за умов зминання

$$n'' \geq \frac{F}{td[\sigma]} \quad (7.5)$$

Очевидно, ці розрахунки можуть дати різні значення n - n' та n'' . З цих двох значень треба буде вибрати найбільше для того, щоб задовольнялися обидві умови міцності – і на зріз, і на зминання.

7.2. Деформації, закон Гука при зсуві, модуль пружності П роду

Розглянемо деформацію елемента $ABCD$, що знаходиться в умовах чистого зсуву (рис. 7.4).

За абсолютну деформацію при зсуві приймають величину ΔS . За відносну деформацію $\gamma \sim \operatorname{tg} \gamma = \frac{\Delta S}{a}$. Розмірність величини ΔS – одиниці довжини.

Відносна деформація γ – безрозмірна величина.

Розглянемо деформацію видовження діагоналі AC цього елемента.

Враховуючи, що деформації малі, маємо

$$\varepsilon = \frac{KC'}{AK};$$

$$KC' = \frac{\Delta S}{\sqrt{2}};$$

$$AK = AC = a\sqrt{2} .$$

Тоді
$$\varepsilon = \frac{\Delta S}{\sqrt{2a}\sqrt{2}} = \frac{\Delta S}{2a} = \frac{\gamma}{2}. \quad (7.6)$$

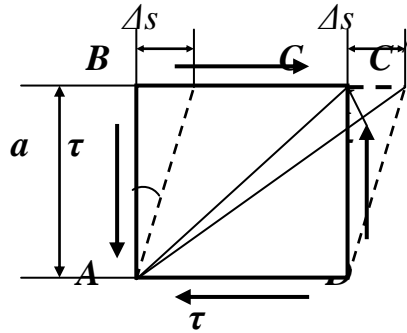


Рис.7.4. Деформації при чистому зсуві

Враховуючи (7.6) та закон Гука (5.25), матимемо:

$$\varepsilon = \frac{1}{E}[\sigma_1 - \mu\sigma_3] = \frac{\gamma}{2} \quad (7.7)$$

або
$$\frac{\tau}{E}[1 - \mu] = \frac{\gamma}{2} .$$

Звідки
$$\tau = \frac{E\gamma}{2(1 + \mu)}. \quad (7.8)$$

Позначимо

$$\frac{E}{2(1 + \mu)} = G . \quad (7.9)$$

Тоді (7.4) перетвориться на

$$\tau = G\gamma$$

або
$$\gamma = \frac{\tau}{G} . \quad (7.10)$$

Залежності (7.6) виражають закон Гука при зсуві. Величину G називають модулем Юнга другого роду або модулем пружності другого роду чи модулем зсуву. Розмірність та фізичний зміст цієї величини аналогічні модулю Юнга першого роду E (при розтягу – стиску).

Залежності (7.8) можуть бути переписані:

$$\frac{\Delta S}{a} = \frac{Q}{GA}$$

або
$$\Delta S = \frac{Qa}{GA} , \quad (7.11)$$

де Q – сила, що зсуває площадку площею A . Величина GA має такий же фізичний зміст, що й величина EA при розтягу – стиску і називається жорсткістю при зсуві.

7.3. Кручення

Кручення – це вид деформації, який виникає при прикладанні до стержня пар сил, що утворюють моменти в площинах, перпендикулярних до осі стержня.

Стержень, що працює на кручення, називають *валом*.

На доповнення до основних гіпотез опору матеріалів, що розглядалися раніше, введемо ще дві:

- гіпотеза плоских перерізів: *плоскі перерізи, перпендикулярні до осі вала залишаються плоскими під час деформації;*
- *відстань між цими перерізами не змінюється.*

7.4. Внутрішній силовий фактор при крученні. Напруження. Умова міцності

Оскільки кручення виникає при прикладанні пар сил у площинах, перпендикулярних до осі стержня, в довільному перерізі з шести можливих внутрішніх силових факторів виникає тільки один – *крутний момент T* (рис. 7.5).

Розглянемо напруження, які виникають при крученні круглого вала радіуса r .

З характеру дії внутрішнього силового фактора зрозуміло, що в перерізі, перпендикулярному до осі вала, ці напруження мають дотичний характер.

Розглядаючи елемент вала довжиною dx (рис.7.6) і його переріз, перпендикулярний до осі, можна записати лише одне рівняння рівноваги, а саме:

$$T = T_{\text{вн}} = \int_A \tau_{\rho} \cdot \rho \cdot dA, \quad (7.12)$$

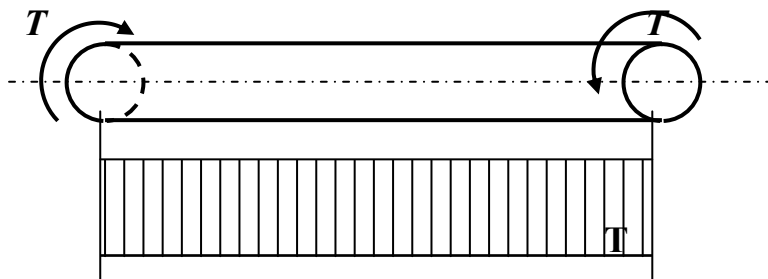


Рис. 7.5. Внутрішній силовий фактор при крученні

де ρ – відстань від центра перерізу до площадки dA , що розглядається (рис. 7.7);

τ_{ρ} – напруження на цій площадці.

Цього рівняння недостатньо, тому що є невідомим розподіл величин τ_{ρ} (а він явно не носить характер константи).

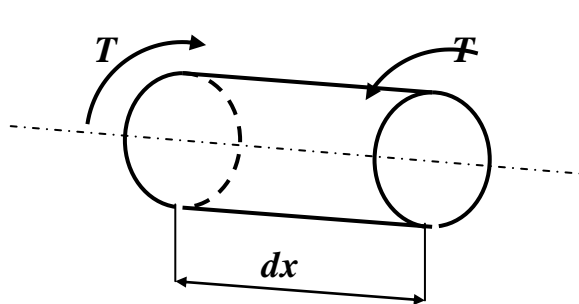


Рис. 7.6. Ділянка вала

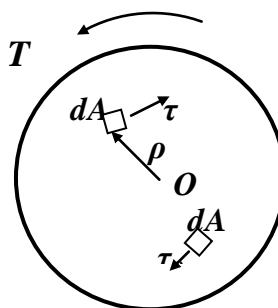


Рис. 7.7. Напруження в перерізі

Тобто система має статично невизначений характер. Розглянемо деформації в системі (рис. 7.8).

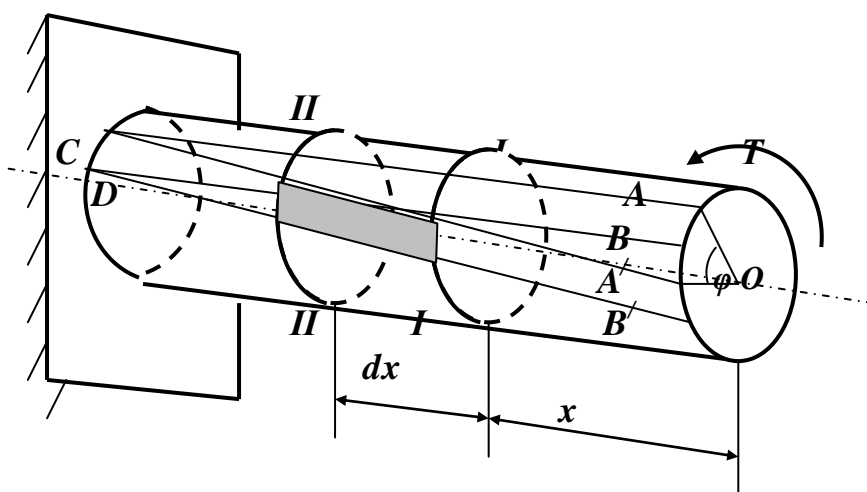


Рис. 7.8. Деформації вала

На поверхні стержня, що буде скручуватися (рис.7.8), двома суміжними утворюючими AC і BD та двома контурами суміжних перерізів $I-I$ та $II-II$ виділимо прямокутник. Після деформації вала цей елемент перекосяться (виділено сірим). “Виріжемо” цей елемент у вигляді, зображеному на рис. 7.9.

Розглядаючи його, можна зробити висновки, що деформація елемента носить зсувний характер, що викликає появу дотичних напружень на його гранях.

Так абсолютний зсув в елементі $A_1B_1C_1D_1 - BB_1=r d\varphi$, і тоді відносний зсув:

$$\gamma = \frac{BB_1}{A_1B} = \frac{r \cdot d\varphi}{dx}.$$

Згадуючи закон Гука - $\tau = G \cdot \gamma$, матимемо:

$$\tau_B = G \cdot \gamma = rG \frac{d\varphi}{dx}. \quad (7.13)$$

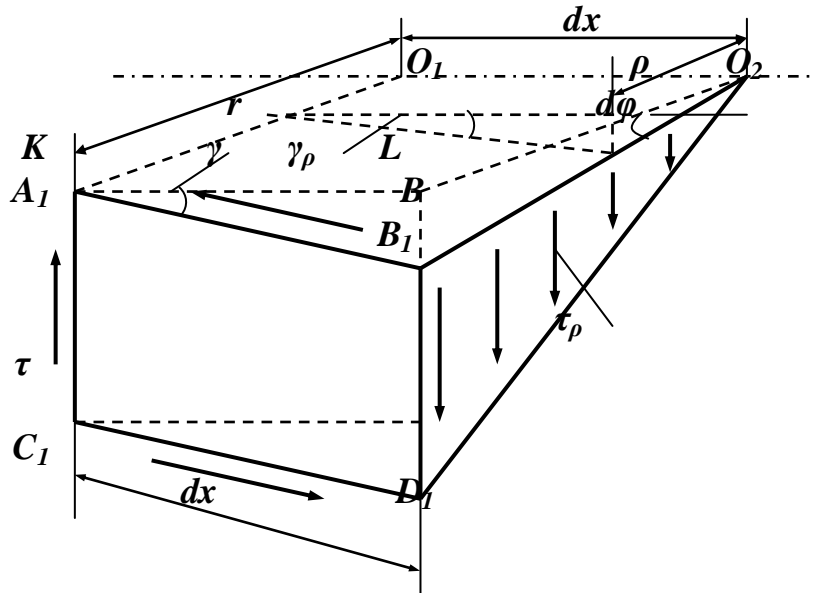


Рис. 7.9. Деформації на ділянці вала довжиною dx

Знаходячи напруження не в поверхневих шарах (т.В), а на якійсь відстані ρ від осі, відповідно отримаємо:

$$\tau_{\rho} = \rho G \frac{d\varphi}{dx}, \quad (7.14)$$

з чого випливає, що закон розподілу напружень по перерізу є *лінійним*. Підставляючи (7.14.) в (7.12) та інтегруючи, отримаємо:

$$G \frac{d\varphi}{dx} \int_A \rho^2 dA = T$$

або

$$G \frac{d\varphi}{dx} I_p = T, \quad (7.15)$$

де I_p – полярний момент інерції.

Співставляючи цей вираз з (7.14), після нескладних перетворень маємо:

$$\tau_{\rho} = \frac{T \cdot \rho}{I_p}. \quad (7.16)$$

Очевидно, що дотичні напруження досягають найбільшого значення при $\rho_{\max} = r$, тобто:

$$\tau_{\max} = \frac{T \cdot \rho_{\max}}{I_p} = \frac{T}{\frac{I_p}{\rho_{\max}}} = \frac{T}{W_p},$$

де W_p – полярний момент опору.

Це дає змогу записати умову міцності при крученні в такому вигляді:

$$\tau_{\max} = \frac{T_{\max}}{W_p} \leq [\tau]. \quad (7.17)$$

Використовуючи цю умову, можна або за відомими силовими факторами, що створюють крутний момент T , знайти полярний момент опору і далі,

залежно від тієї, чи іншої форми, розміри перерізу, або навпаки – знаючи розміри перерізу, обчислити найбільшу величину крутного моменту, яку можна допустити в перерізі, що, в свою чергу, дозволить знайти допустимі величини зовнішніх навантажень.

7.5. Деформації при крученні. Закон Гука. Умова жорсткості

У процесі виведення формул для напружень, при розгляді статичної невизначеності цієї задачі вже вводилося поняття деформації, за яку приймався кут закручування перерізу, перпендикулярного до осі вала відносно нерухомого опорного перерізу (рис.7.8; 7.9; 7.10 – кути φ та $d\varphi$).

Розглядаючи співвідношення (7.15), неважко отримати:

$$d\varphi = \frac{T \cdot dx}{GI_p} \quad (7.18)$$

або, інтегруючи

$$\varphi(x) = \int_0^x \frac{T dx}{GI_p} = \frac{T x}{GI_p} \quad (7.19)$$

при довжині вала (або ділянки вала) l , найбільший кут закручування буде між крайніми

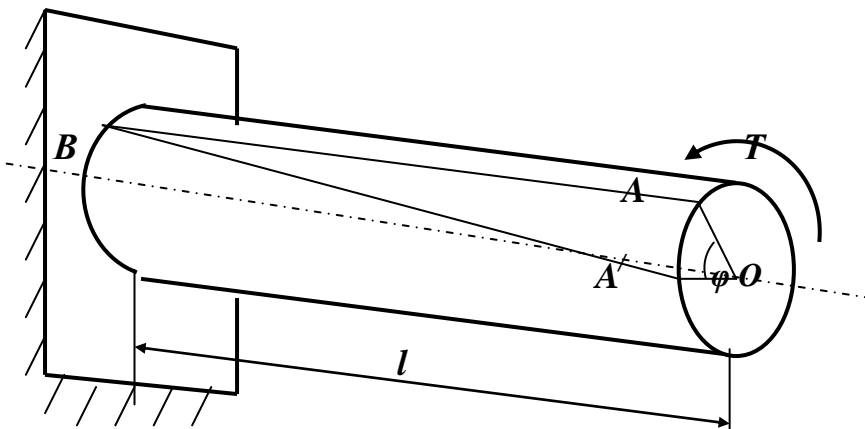


Рис. 7.10. Кут закручування вала на довжині l

перерізами і дорівнюватиме

$$\varphi(l) = \frac{Tl}{GI_p} \quad (\text{рад}) . \quad (7.20)$$

У даному випадку розмірність кута φ – радіани. Для того, щоб отримати величину φ в градусах, потрібно додати множник $\frac{180^\circ}{\pi}$, тобто:

$$\varphi = \frac{Tl}{GI_p} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \quad (\text{град}) . \quad (7.21)$$

Вирази (7.20) та (7.21) являють собою закон Гука при крученні, а величину GI_p називають жорсткістю при крученні.

Крім абсолютної величини – кута закручування φ , в інженерній практиці часто використовують відносний кут закручування – θ :

$$\theta = \frac{\varphi}{l} = \frac{T}{GI_p} \quad (\text{рад/м}) \quad (7.22)$$

або

$$\theta = \frac{\varphi}{l} = \frac{T}{GI_p} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \quad (\text{град/м}). \quad (7.23)$$

Тепер, коли записані вирази для деформацій, можна записати й умову жорсткості. Її можна записати в різних варіаціях – (7.24) – (7.27) (залежно від того, яка допустима величина є заданою):

$$\varphi_{\max} = \frac{Tl}{GI_p} \leq [\varphi] \quad (\text{рад}); \quad (7.24)$$

$$\varphi_{\max} = \frac{Tl}{GI_p} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \leq [\varphi] \quad (\text{град}); \quad (7.25)$$

$$\theta_{\max} = \frac{T}{GI_p} \leq [\theta] \quad (\text{рад/м}); \quad (7.26)$$

$$\theta_{\max} = \frac{T}{GI_p} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \leq [\theta] \quad (\text{град/м}). \quad (7.27)$$

Використовуючи умови жорсткості, можна або за відомою картиною зовнішніх навантажень (від яких залежить величина T_{\max}) знайти розміри поперечного перерізу заданої форми, які “сховані” у величині I_p – полярному моменті інерції; або навпаки, знаючи форму та розміри поперечного перерізу, визначити допустимі величини силових навантажень на вал.

Заняття 6. Практичне заняття 2.

Тема 6. Геометричні характеристики плоских перерізів

Задача 1.

Знайти моменти інерції та опору відносно головних центральних осей складного перерізу (рис.1), що складається з окремих прокатних профілів (двотавра № 20 та швелера № 14)

Скориставшись таблицями сортаменту ГОСТ 8240 – 89 випишемо значення геометричних характеристик відповідних профілів. При цьому все, що стосується двотавра, будемо

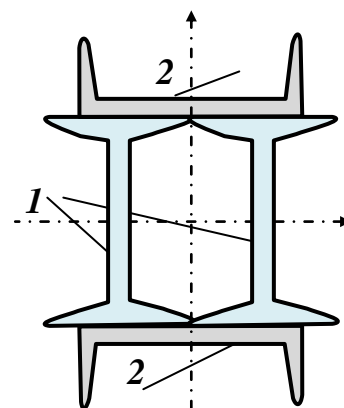


Рис.1. Вид складного перерізу

позначати індексом 1, а все, що ст.-
осується швелера – індексом 2 (рисунки 2,3).

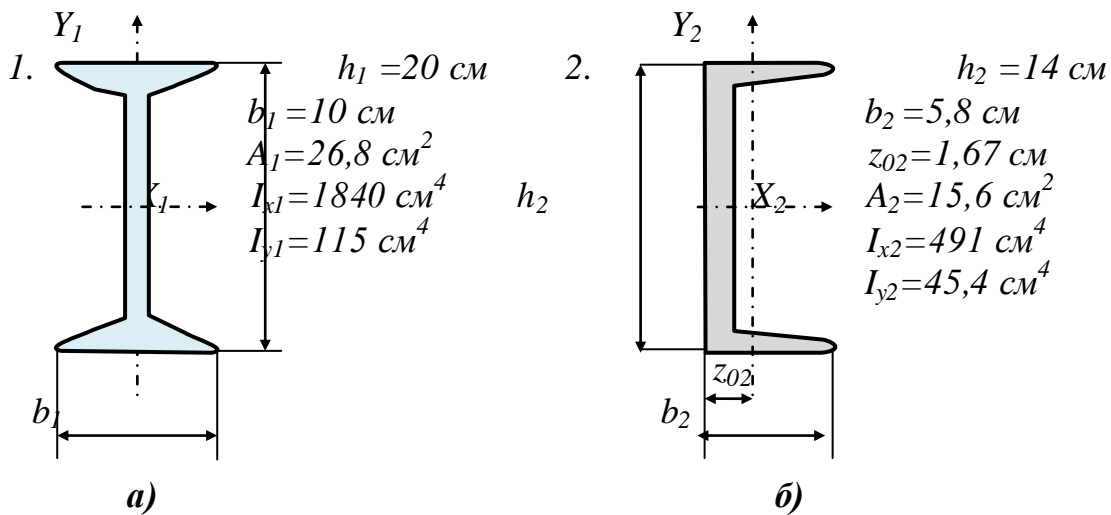


Рис. 2. Окремі прокатні профілі:
а) двотавр; б) швелер.

Розв'язок задачі

Накреслимо в масштабі складний переріз та нанесемо всі розміри та осі (рис.3). Переріз має осі симетрії U та V - саме вони і будуть центральними ($S_u=S_v=0$) та головними ($I_{uv}=0$) осями інерції.

Враховуючи, що складний переріз складається з двох пар профілів, для обчислення осьових моментів інерції I_u та I_v , використаємо формулу змін моментів інерції при паралельному переносі осей. Зокрема для обчислення осьового моменту інерції I_u можна записати:

$$I_u = 2I_{u1} + 2I_{u2} = 2I_{x1} + 2(I_{y2} + a_2^2 A_2), \quad (1)$$

де момент I_{u1} - це частка моменту відносно осі від 1-ої фігури (двотавра), момент I_{u2} - це, відповідно, частка моменту від 2-ї фігури (швелера), а a – це відстань, на яку переноситься вісь (в даному випадку – це відстань від осі Y_2 до центральної головної осі U).

У даному випадку $a_2 = \frac{h_1}{2} + z_{02} = \frac{20}{2} + 1,67 = 11,67(\text{см})$

При цьому головна ось 1-ої фігури X_1 співпадає з головною віссю перерізу U , тому момент інерції від 1-ої фігури - I_{u1} входить в суму без доданку, який обумовлює збільшення моменту інерції при переході від центральної до паралельної їй осі.

Підставляючи значення величин з умови задачі, проведемо обчислення:

$$I_u = 2(I_{u_1} + I_{u_2}) = 2(I_{x_1} + (I_{y_2} + a_2^2 A_2)) = 2(1840 + (45,4 + 11,67^2 \cdot 15,6)) \approx 8019,9 (\text{см}^4),$$

Тоді момент опору W_u обчислимо за формулою

$$W_u = \frac{I_u}{v_{max}},$$

де v_{max} - це відстань від осі U до найбільш віддаленої точки.

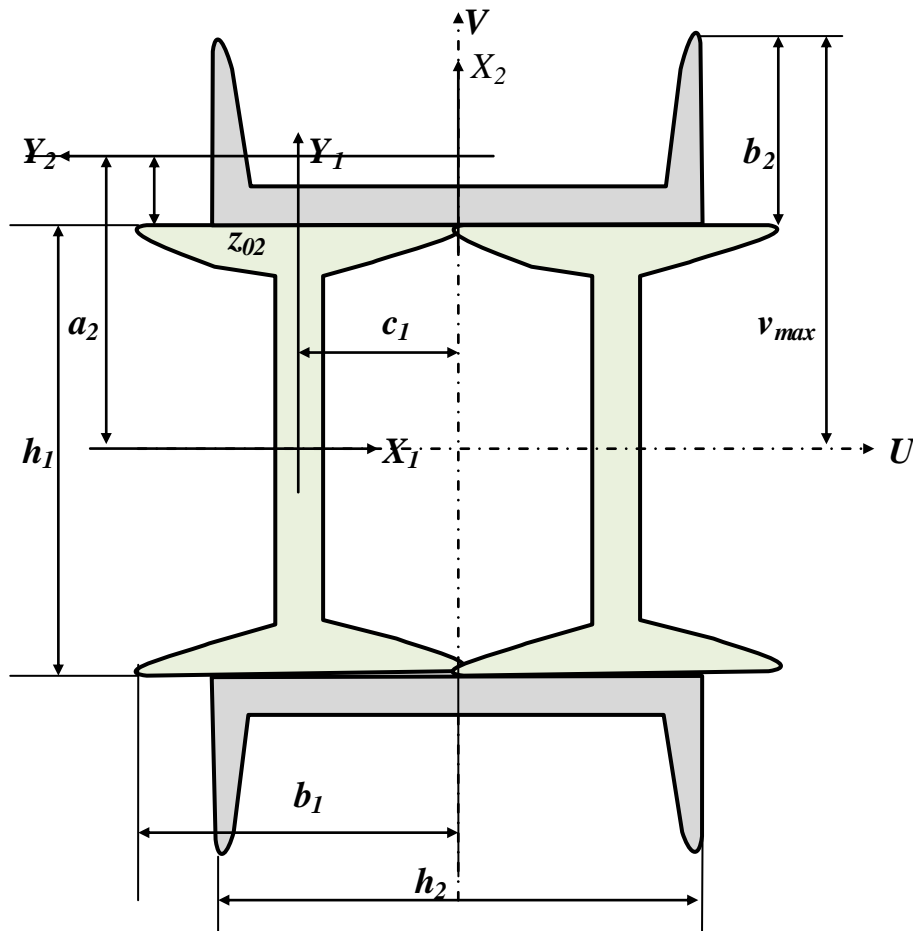


Рис. 3. Робочі креслення складного перерізу для розв'язку задачі

У нашому випадку $v_{max} = \frac{h_1}{2} + b_2 = \frac{20}{2} + 5,8 = 15,8$ (см).

Тоді:

$$W_u = \frac{I_u}{v_{max}} = \frac{8019,9}{15,8} \approx 507,6 (\text{см}^3).$$

За аналогічними міркуваннями обчислимо моменти інерції та опору відносно вертикальної центральної головної осі V .

У даному випадку вісь X_2 2-ої фігури (швелера) співпадатиме з віссю V і ніякого переносу не відбудеться. А ось вертикальні головні осі Y_1 1-ої фігури (двотавра) зсунуті відносно осі V на відстань c_1 .

При цьому $c_1 = \frac{b_1}{2} = 5$ (см).

Тоді:

$$I_v = 2(I_{v_1} + I_{v_2}) = 2(I_{y_1} + c_1^2 \cdot A_1) + 2I_{y_2} = 2((115 + 5^2 \cdot 26,8) + 491) \approx 2552 \text{ (см}^4\text{)}.$$

Відповідно:

$$W_v = \frac{I_v}{u_{\max}},$$

де u_{\max} - відстань від осі V до найбільш віддаленої від неї точки $u_{\max} = b_1 = 10$ (см).

$$\text{Тоді } W_v = \frac{I_v}{u_{\max}} = \frac{2552}{10} = 255,2 \text{ (см}^2\text{)}.$$

При розв'язку цієї задачі слід звернути увагу на те, що:

- відстань, на яку переміщується вісь, відіграє дуже велику роль для збільшення величини моменту інерції. Додаток за рахунок пересування осі часто досягає значно більшого значення ніж початковий (власний) момент інерції;
- момент інерції відносно горизонтальної головної центральної осі U виявився значно більшим, ніж момент інерції відносно вертикальної головної центральної осі V . Це дає змогу зробити висновки про найкращу орієнтацію площини дії сил по відношенню до цього перерізу (якщо балка буде мати такий переріз, то найкраще, щоб площина навантажень проходила через вісь V і згин проходив би у вертикальній площині).

Заняття 7. Практичне заняття 3.

Тема 7. Кручення

Приклад розрахунку вала на міцність та жорсткість

Поставимо перед собою задачу підібрати діаметр для суцільного сталюго вала круглого поперечного перерізу, навантаженого так, як показано на рис.1.

При цьому прийемо такі значення параметрів навантажень, розмірів та допустимих величин:

$$T_1 = 1,5 \text{ кНм} \quad a = 0,4 \text{ м.}$$

$$T_2 = 1,8 \text{ кНм} \quad b = 0,8 \text{ м.}$$

$$T_3 = 1,6 \text{ кНм} \quad c = 0,6 \text{ м.}$$

$$[\tau] = 80 \text{ МПа} = 80 \times 10^3 \text{ кПа}$$

$$[\theta] = 1 \text{ град/м}$$

$$G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа} = 8 \cdot 10^7 \text{ кПа}$$

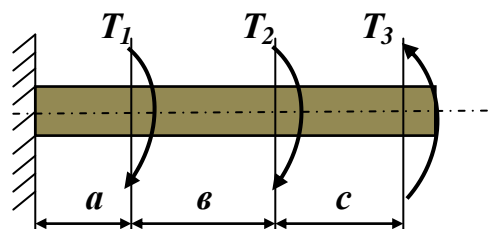


Рис.1. Навантаження вала

Розв'язок задачі

1. Визначимо крутні моменти, що діють на окремих ділянках валу. Скористаємося для цього методом перерізів.

При цьому почнемо з вільного кінця валу, тому що там прикладено відомий момент, в той час, як на лівому кінці в жорсткому закріпленні валу виникає невідомий нам спочатку реактивний момент. Позначимо окремі ділянки валу *I*, *II*, *III*. Використовуючи метод перерізів, знайдемо значення крутних моментів на кожній ділянці валу. Побудову епюри крутних моментів *T* зображено на рис. Максимальний крутний момент спостерігається на III ділянці і дорівнює $T_{max} = 1,7 \text{ кНм}$.

Навантаження валу та епюр розподілу крутних моментів по довжині валу представлено на рис.2а,б.

2. Визначимо діаметр валу з умови міцності

$$\tau_{max} = \frac{T_{max}}{W_p} \leq [\tau].$$

При цьому згадаємо, що для круглого поперечного перерізу полярний момент опору визначається, як відомо виразом $W_p = \frac{\pi d^3}{16}$.

Тоді, перетворюючи та узагальнюючи останні два вирази, можна записати:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot T_{max}}{\pi [\tau]}}$$

та, підставляючи дані, матимемо:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 1,7}{3,14 \cdot 80 \cdot 10^3}} \approx 0,48 \cdot 10^{-1} \text{ (м)} = 48 \text{ (мм)}.$$

3. Тепер визначимо діаметр валу з умови жорсткості

$$\theta_{max} = \frac{T_{max}}{G \cdot I_p} \frac{180^\circ}{\pi} \leq [\theta],$$

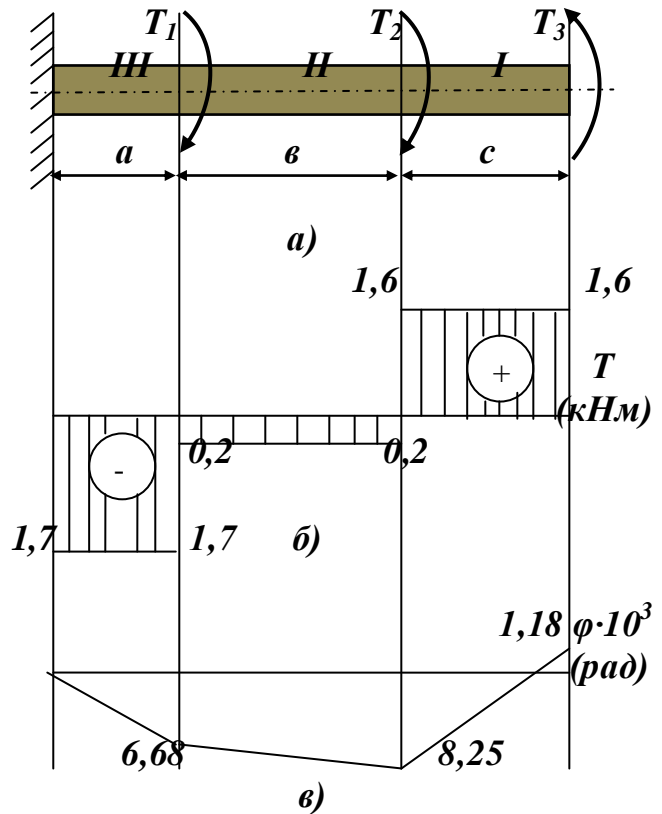


Рис.2. Схема для розрахунку валу:
а) вигляд навантаження вал; б) графік розподілу крутних моментів; в) епюра кутів закручування

де I_p – полярний момент інерції запишеться, як $I_p = \frac{\pi d^4}{32}$. Перетворюючи ці залежності, отримуємо:

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{32 \cdot T_{\max} \cdot 180^\circ}{\pi^2 [\theta] G}}$$

Підставляючи числові дані, маємо:

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 1,7 \cdot 180^\circ}{\pi^2 \cdot 1 \cdot 8 \cdot 10^7}} \approx 5,9 \cdot 10^{-2} \text{ (м)} = 59 \text{ (мм)}.$$

Реальний розмір діаметра вибираємо з цих двох розрахунків, як максимальне значення – тобто $d = 59 \text{ мм}$. В цьому випадку він буде задовольняти як розрахунку на міцність, так і розрахунку на жорсткість.

Заокруглимо значення діаметра до стандартного – 60 мм ($6 \cdot 10^{-2}$ м).

Розрахуємо тепер кут закручування вільного кінця вала. Очевидно цей кут буде дорівнювати алгебраїчній сумі кутів повороту, які наростають на окремих ділянках вала.

Формулу для розрахунків кутів закручування на кожній ділянці вала можна записати так:

$$\varphi_i = \frac{T_i \cdot l_i}{G \cdot I_p} \quad (i=1,2,3)$$

Жорсткість $G I_p$ є постійною величиною для всіх ділянок вала. Розрахуємо її окремо:

$$G I_p = G \frac{\pi \cdot d^4}{32} = 8 \cdot 10^7 \frac{\pi (6 \cdot 10^{-2})^4}{32} \approx 101,74 \text{ (кН} \cdot \text{м}^2).$$

Тоді:

$$\varphi_I = \frac{T_I \cdot c}{G \cdot I_p} = \frac{1,6 \cdot 0,6}{101,74} \approx 9,43 \cdot 10^{-3} \text{ (рад)}.$$

Аналогічно:

$$\varphi_{II} = \frac{T_{II} \cdot b}{G \cdot I_p} = \frac{-0,2 \cdot 0,8}{101,74} \approx -1,57 \cdot 10^{-3} \text{ (рад)};$$

$$\varphi_{III} = \frac{T_{III} \cdot a}{G \cdot I_p} = \frac{-1,7 \cdot 0,4}{101,74} \approx -6,68 \cdot 10^{-3} \text{ (рад)}.$$

Тоді $\sum \varphi_i = \varphi_I + \varphi_{II} + \varphi_{III} = (9,43 - 1,57 - 6,68) \cdot 10^{-3} \text{ (рад)} = 1,18 \cdot 10^{-3} \text{ (рад)}$.

Побудуємо епюру кутів закручування, починаючи з жорсткого закріплення, де початковий кут закручування дорівнює нулю (рис.2в).

Заняття 8. Лекція 5. Тема 8. Згин

Визначення. Типи опор балок. Внутрішні силові фактори при згині. Диференціальні залежності між силовими факторами при згині. Побудова епюр перерізуючих сил Q і згинаючих моментів M

Згин – це вид деформації, який виникає при прикладанні до стержня пар сил, які утворюють моменти в площинах, що проходять через вісь стержня.

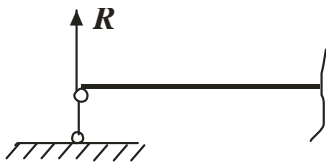
Стержень, який працює на згин, називають *балкою*.

Вільний, не опертий кінець балки називають *консолью*.

8.1. Типи опор балок

Усі існуючі опори балок можна звести до трьох типів:

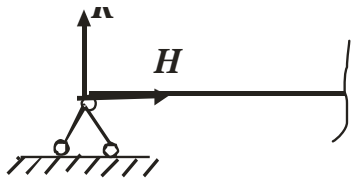
А). Шарнірно - рухома опора (рис.8.1).



Характерна тим, що на ній виникає реакція, нормальна до опори.

Рис.8.1. Шарнірно - рухома опора

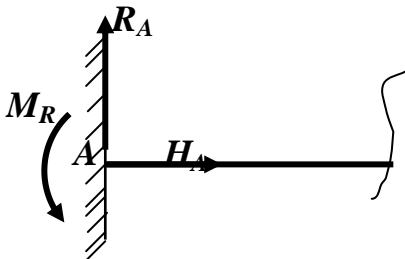
Б). Шарнірно - нерухома опора (рис.8.2).



Характерна тим, що на ній виникає реакція, яка може бути розкладена на дві складові: одна - нормальна до опори, а друга - вздовж балки.

Рис.8.2. Шарнірно - нерухома опора

В). Жорстке защемлення (рис.8.3).



Характерне тим, що на ній, крім двох складових реакцій, може виникати ще й реактивний момент M_R .

Рис.8.3. Жорстке защемлення

Г) Проміжний шарнір (рис.8.4).

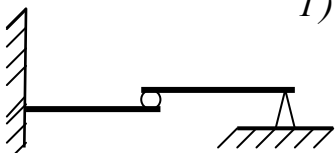


Рис.8.4. Проміжний шарнір

Проміжні шарніри – це елементи, які гасять і не передають згинні моменти (рис.8.4). Слід зауважити, що сума моментів відносно центра шарніра від сил, взятих із одного боку від

шарніра, дорівнює 0.

8.2. Внутрішні силові фактори при згині

Розглядаючи згин, введемо на додаток до основних гіпотез опору матеріалів ще деякі гіпотези, характерні для згину:

- будемо розглядати перерізи, що мають хоча б одну вісь симетрії, причому навантаження будемо проводити саме в площині симетрії;
- перерізи, нормальні до осі балки, залишаються плоскими в процесі деформації (гіпотеза плоских перерізів);
- сусідні волокна балки (уявимо її волокнистою структурою) не тиснуть одне на одне.

Розглянемо довільно навантажену в напрямі, нормальному до осі, балку (рис. 8.5).

Користуючись методом перерізів, розріжемо цю балку в довільному перерізі – „I-I” на відстані x від лівої опори та відкинемо праву, наприклад, частину (рис. 8.6).

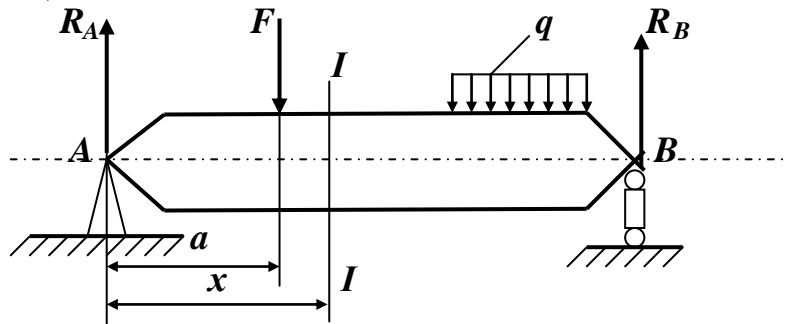


Рис.8.5. Довільно навантажена балка

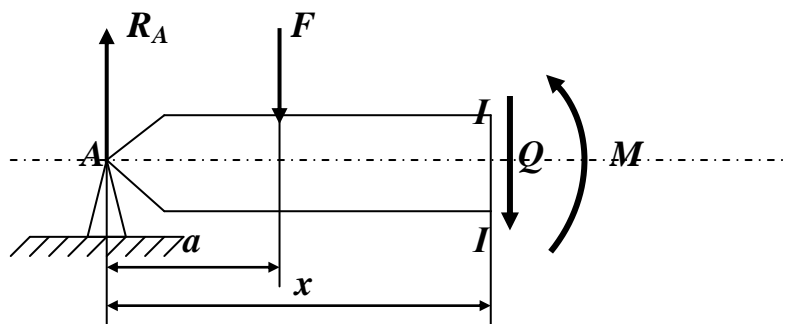


Рис.8.6. Внутрішні силові фактори при згині

Частина, що залишається, повинна знаходитися в рівновазі. Тоді сума сил і моментів, що діють відносно перерізу „I-I” повинні дорівнювати 0. Це можливо тільки в тому випадку, коли замість дії відрізаної частини у перерізі прикласти зосереджену силу Q та момент M , які будуть дорівнювати

алгебраїчній сумі всіх сил і моментів відповідно, взятих зліва від перерізу. Тобто, з точки зору рівноваги можна записати:

$$\begin{cases} \sum Y = R_A - P_1 - Q = 0 \\ \sum M = R_A x - P_1(x - a) - M = 0 \end{cases} \quad (8.1)$$

звідки

$$\begin{cases} Q = R_A - P_1 \\ M = R_A x - P_1(x - a) \end{cases} \quad (8.2)$$

У даному випадку розглядаємо вже 2 внутрішніх силових фактори – *перерізуючу силу* Q (яку ще називають „поперечною силою”) та *згинаючий момент* M .

Згідно з методом перерізів, перерізуючу силу Q та згинаючий момент M підраховують як алгебраїчні суми відповідних величин, взятих із одного боку від перерізу.

Встановимо правила вибору знаків. Якщо підрахунок сил проводиться зліва, то сила направлена догори – додатна. Якщо справа – навпаки, достатньою буде сила, направлена вниз (рис. 8.7). Для моментів правило знаків вибирають так: якщо момент вигинає балку опуклістю вниз – він додатний, якщо навпаки – від’ємний (рис. 8.8).

За рахунок наявності в перерізі, нормальному до осі балки, зразу двох силових факторів Q та M , у ньому в загальному випадку виникають як нормальні, так і дотичні напруження.

Причому,

$$\sigma = \varphi(M);$$

$$\tau = f(Q).$$

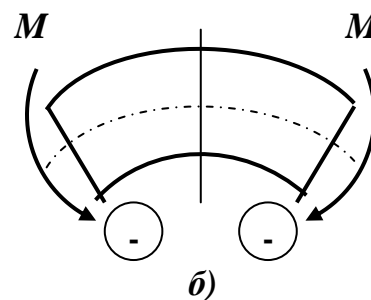
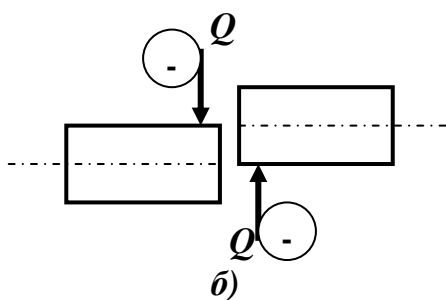
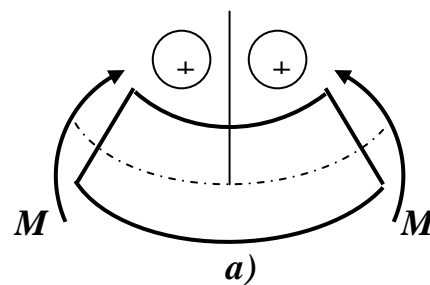
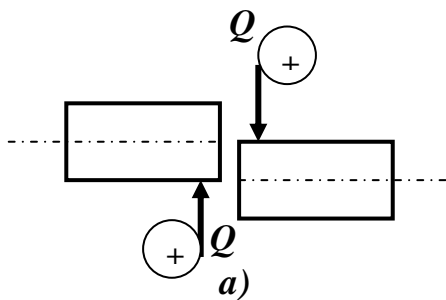


Рис.8.7. Вибір знаків для перерізуючої Рис.8.8. Вибір знаків для згинаючого

сили: а) додатній, б) від’ємний моменту: а) додатній, б) від’ємний

Очевидно, чим більшими у перерізі будуть Q та M , тим більшими будуть і відповідні напруження (за умов, що балка має один і той же переріз по всій довжині). Тому визначення небезпечного перерізу (тобто перерізу, в якому виникають найбільші напруження) пов’язано з визначенням функцій розподілу перерізуючої сили Q та згинаючого моменту M . Це можна робити як аналітичним шляхом, так і шляхом побудови епюр розподілу цих величин. На практиці застосовують обидва шляхи. Користуючись аналітичними залежностями, проводять розрахунки, а епюри використовують для якісного оцінювання факторів згину (характер розподілу величин, орієнтація розтягнутих волокон тощо).

8.3. Диференціальні залежності між силовими факторами при згині

Розглянемо довільно навантажену балку (рис.8.9). На відстані x від лівої опори розглянемо ділянку довжиною dx , вибрану таким чином, щоб на ній не була прикладена зосереджена сила або момент (рис. 8.10).

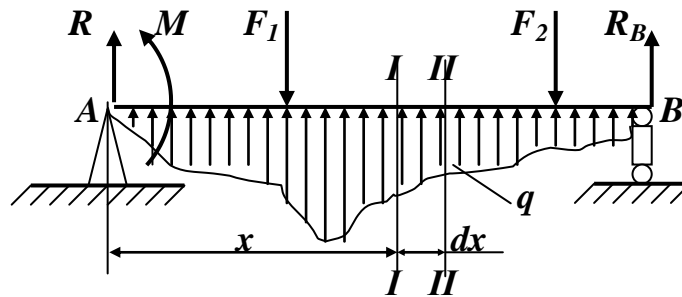


Рис. 8.9. Довільно навантажена балка

На границях цієї ділянки виникають перерізуючі сили Q_1 та Q_2 і моменти M_1 та M_2 відповідно. Причому,

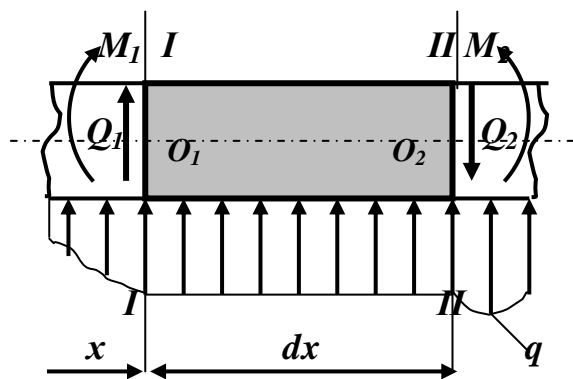


Рис. 8.10. Ділянка довжиною dx

$$Q_1 = Q;$$

$$M_1 = M;$$

$$Q_2 = Q + dQ;$$

$$M_2 = M + dM.$$

Розглянемо рівновагу виділеного елемента:

$$\Sigma Y = Q + qdx - (Q + dQ) = 0; \quad (8.3)$$

$$\Sigma M_{o_2} = Qdx + qdx \frac{dx}{2} + M - (M + dM) = 0.$$

Звідки з точністю до нескінченно малих величин

$$\frac{dQ(x)}{dx} = q(x); \quad (8.4)$$

$$\frac{dM(x)}{dx} = Q(x). \quad (8.5)$$

Продиференціювавши (8.5), отримаємо:

$$\frac{d^2 M(x)}{dx^2} = q(x). \quad (8.6)$$

Зауваження. Якщо на ділянці, що розглядається, діє розподілений момент m , залежність (8.5) буде мати вигляд:

$$\frac{dM}{dx} = Q + m.$$

Ці співвідношення мають велике значення при дослідженні напруженого стану балки та побудові епюр перерізуючих сил і згинаючих моментів.

8.4. Побудова епюр перерізуючих сил Q і згинаючих моментів M

Побудову епюр перерізуючих сил і згинаючих моментів, що проводиться з метою визначення небезпечних місць балки та обчислення в них напружень, можна проводити як якісно (наближено, коли інженеру невідомі всі параметри навантаження), так і кількісно (при повному чисельному розрахунку). Кількісно епюри будують за тими ж правилами, що й графіки будь-яких функцій. Тобто на відповідній ділянці записують функції $Q(x)$ та $M(x)$, підраховують їх значення у характерних точках (екстремуми, значення на границях ділянок) і будують графічні зображення у відповідних системах координат.

Що стосується якісної побудови епюр, то існує кілька основних правил для їх побудови.

8.4.1. Правила контролю та рекомендації щодо побудови епюр Q і M

1. З'ясувати систему зовнішніх сил, зокрема визначитися з реакціями опор.

Визначити, які сили треба взяти до уваги, а якими можна знехтувати. Наприклад, чи треба у випадку, що розглядається, враховувати власну вагу балки? Що стосується реакцій, то, якщо задані параметри балки та конкретні навантаження, слід також чисельно визначити і реакції опор. Якщо ж

навантаження задані в загальному вигляді, то і реакції визначають тільки якісно.

2. З чого почати і чим закінчити (або що на кінцях балки)?

Епюра сил. Якщо на кінцях немає зосередженої сили (в т.ч. реакцій опор), перерізуюча сила дорівнює нулю.

Якщо йти по балці зліва, сила, що діє догори, дасть стрибок вгору, якщо йти справа, ця ж сила зумовлює стрибок вниз.

Епюра моментів. Якщо на кінцях немає моментів (або жорсткого защемлення, де виникає реактивний момент), згинаючий момент дорівнює нулю.

Якщо моменти (чи жорстке защемлення) є, то на цьому кінці на епюрі моментів спостерігається стрибок у тому напрямі, з якого боку розтягнуті волокна балки.

Зауваження. В різних підручниках з опору матеріалів автори будують епюру моментів, базуючись на різних критеріях. Одні пропонують будувати епюру моментів, відкладаючи додатні значення у верхній півплощині, а від'ємні – у нижній, інші рисують епюру з боку розтягнутих волокон, мотивуючи це тим, що розтягнуті волокна є небезпечними з точки зору розвитку тріщин (при цьому епюра моментів виявляється дзеркально відображеною відносно моментів, зображених за першим способом, тобто додатні значення відкладаються на нижній півплощині). Ніякої принципової різниці між цими способами немає. Для подальшого викладання матеріалу домовимося **додатні значення моментів відкладати у нижчій півплощині (при цьому епюра буде нарисована з боку стиснутих волокон балки).**

3. В якому напрямку починати будувати епюру.

Епюра сил. При побудові епюри зліва направо, якщо навантаження спрямоване донизу, лінія епюри теж іде вниз. Якщо навантаження спрямоване догори, то графік теж зростає догори. При побудові епюри справа наліво все навпаки.

Епюра моментів. Моменти додатного напрямку відкладають вниз, моменти від'ємного напрямку – догори (тобто епюру будують з боку розтягнутих волокон балки).

4. Форма епюри.

Для розгляду даного питання слід добре зрозуміти та усвідомити диференціальні співвідношення між згинаючим моментом $M(x)$, перерізуючою силою $Q(x)$ та розподіленим навантаженням $q(x)$ (8.4- 8.6).

Епюра сил. Якщо на ділянці відсутнє розподілене навантаження, перерізуюча сила є постійною величиною:

- якщо на ділянці діє рівномірно розподілене навантаження, функція $Q(x)$ є лінійною;

- якщо q розподіляється по лінійній залежності, функція $Q(x)$ параболічна і т.п.

Епюра моментів. Епюру (як правило) будують після побудови епюри сил:

- якщо на ділянці $Q(x) = const$, то $M(x)$ – лінійна функція;
- якщо $Q(x)$ лінійна, то $M(x)$ – параболічна і т.д.

Варто нагадати: якщо епюра $Q(x)$ перетинає вісь (тобто $Q(x) = 0$), функція $M(x)$ в цьому перерізі має екстремальне значення.

5. Стрибки.

Епюра сил. На епюрі сил стрибки можуть бути лише в місці прикладання зосередженої сили (в т.ч. на опорах унаслідок виникнення реакцій).

Епюра моментів. На епюрі моментів стрибки можуть бути лише в місці прикладання моментів, у т.ч. у жорсткому защемленні, тому що там може виникнути реактивний момент.

8.4.2. Приклад побудови епюр перерізуючих сил Q і згинаючих моментів M

Нехай задана балка (рис. 8.11). Побудуємо для неї епюри $Q(x)$ та $M(x)$ без урахування власної ваги.

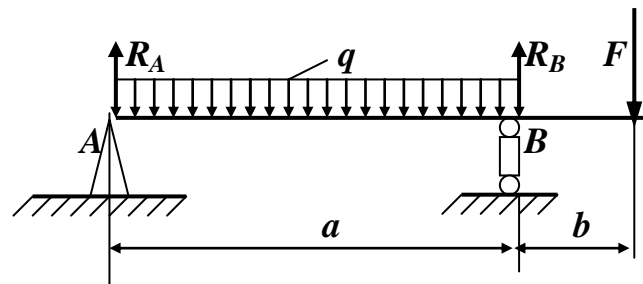


Рис. 8.11. Навантажена балка

Нехай $q = 2 \text{ кН/м}$; $F = 1 \text{ кН}$; $a = 4 \text{ м}$; $b = 1 \text{ м}$.

Спершу визначимо систему всіх зовнішніх сил, що діють на балку, підрахувавши реакції опор R_A та R_B . Для цього використаємо рівняння рівноваги – запишемо суму моментів спочатку відносно т. А, потім – відносно т. В. Ці два рівняння дадуть R_A та R_B . Для перевірки використаємо третє рівняння рівноваги $\sum Y = 0$.

$$\sum M_A = q \cdot 4 \cdot 2 - R_B \cdot 4 + F \cdot 5 = 0.$$

Звідки

$$R_B = \frac{q \cdot 4 \cdot 2 + F \cdot 5}{4} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 2 + 1 \cdot 5}{4} = 5,25 \text{ (кН)};$$

$$\sum M_B = R_B \cdot 4 - q \cdot 4 \cdot 2 - F \cdot 1 = 0.$$

Звідси
$$R_B = \frac{q \cdot 4 \cdot 2 - F \cdot 1}{4} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 2 + 11}{4} = 3,75 \text{ (кН)} .$$

Перевірка:
$$\Sigma Y = R_A + R_B - q \cdot 4 - F = 3,75 + 5,25 - 2 \cdot 4 - 1 = 0 .$$

Обидві реакції вийшли додатними, що показує відповідність нарисованих стрілок R_A та R_B реальному напрямку.

Тепер можна приступати до записування функцій та побудови епюр. Розіб'ємо балку на дві ділянки. На першій ділянці будемо йти зліва, а на другій – справа.

I ділянка. $0 \leq x < 4$ (розглядаємо її, йдучи зліва).

Запишемо функцію розподілу перерізуючих сил:

$$Q(x_1) = R_A - qx_1 .$$

Функція лінійна. Знайдемо її значення на кінці та початку.

$$Q(0) = R_A = 3,75 \text{ (кН)} ;$$

$$Q(4) = R_A - 2 \cdot 4 = 3,75 - 8 = -4,25 \text{ (кН)} .$$

Тепер запишемо функцію моментів:

$$M(x_1) = R_A x_1 - qx_1 \frac{x_1}{2} = R_A x - q \frac{x_1^2}{2} .$$

Функція параболічна. Знайдемо її значення на кінцях проміжку:

$$M(0) = 0 ;$$

$$M(4) = 3,75 \cdot 4 - 2 \frac{4^2}{2} = -1 \text{ (кНм)} .$$

Тепер II ділянка $0 \leq x_2 < 1$ (ідемо вже справа).

Відповідно записуємо функції сил і моментів:

$$Q(x_2) = F = 1 \text{ (кН)} \quad - \text{ функція є константою} ;$$

$$M(x_2) = -Fx_2 \quad - \text{ лінійна функція} .$$

Знаходимо її значення на границі проміжку:

$$M(0) = 0 ;$$

$$M(1) = -1 \text{ (кНм)} .$$

Очевидно, що найбільше значення функцій моментів може бути або на правій опорі (т. в), або на першій ділянці. На опорі момент відомий. Знайдемо тепер максимальний момент M_{\max} . З епюри M_{\max} спостерігається на I ділянці. Виходячи з диференціальних залежностей (8.5), можна записати для I ділянки:

$$\frac{dM(x_0)}{dx} = Q(x_0) = R_A - qx_0 = 0 ;$$

$$x_0 = \frac{R_A}{q} = \frac{3,75}{2} \approx 1,87 \text{ (м)} .$$

Звідки й знайдемо координату перерізу x_0 , в якому виникає M_{\max} . Тобто

$$M_{\max} = M(x_0) = R_A x_0 - q \frac{x_0^2}{2} = 3,75 \cdot 1,87 - 2 \frac{1,87^2}{2} \approx 3,516 \text{ (кНм)}.$$

Робимо графічні побудови (рис. 8.11).

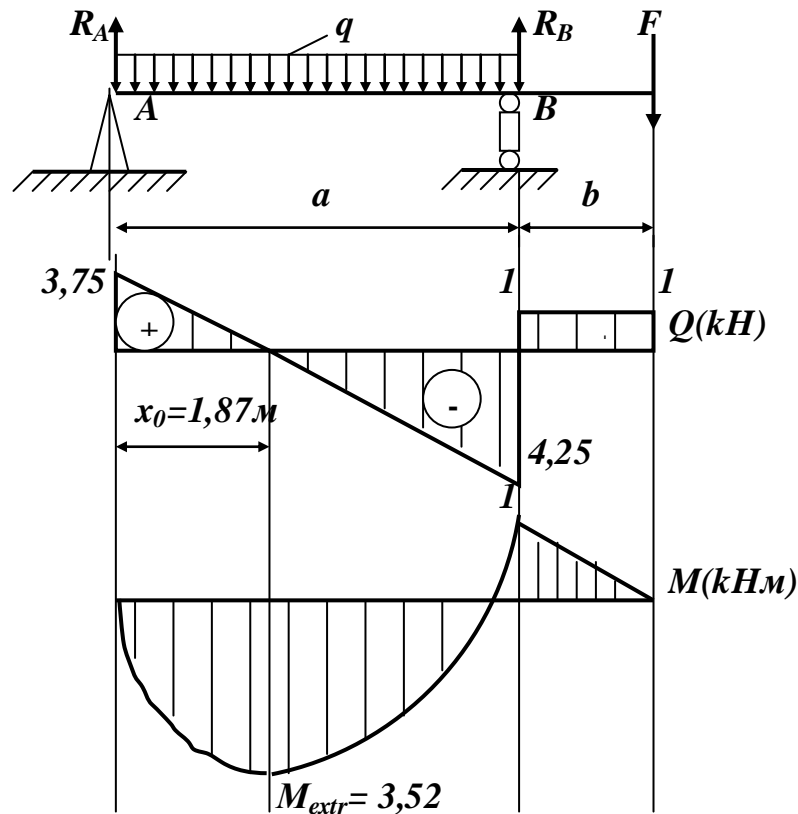


Рис. 8.11. Епюри розподілу перерізуючих сил і згинаючих моментів по довжині балки

Таким чином можна зробити висновки, що для цієї балки перерізуюча сила досягає свого максимального значення на правій опорі ($Q_{\max} = 4,25 \text{ кН}$), а найбільший момент виникає на відстані $x_0 = 1,87 \text{ м}$ від лівої опори ($M_{\max} = 3,52 \text{ кНм}$).

Заняття 9. Практичне заняття 4. Продовження теми 8 (Згин)

Нормальні напруження при згині. Умова міцності при згині за нормальними напруженнями.. Розподіл нормальних напружень по висоті перерізу. Приклад розрахунку балки на міцність за нормальними напруженнями

8.5. Нормальні напруження при згині. Умова міцності при згині за

нормальними напруженнями

Вже відзначалося, що нормальні та дотичні напруження, які одночасно можуть виникати в нормальному до осі перерізі балки, пов'язані з моментами та перерізуючою силою відповідно.

Вивід формули нормальних напружень в перерізі балки (тут не наводиться) дає змогу розглядати нормальні напруження, як функцію відстані шару, в якому визначаються напруження – z (рис.1):

$$\sigma = \frac{M \cdot z}{I_y} . \quad (8.16)$$

Якщо розглянути найбільші напруження в перерізі (див. рис.1), то слід відзначити, що вони виникають у найвіддаленіших від нейтральної осі шарах ($|z| = z_{\max}$).

$$\text{Тобто} \quad \sigma_{\max} = \frac{M \cdot z_{\max}}{I_y} = \frac{M}{\frac{I_y}{z_{\max}}} = \frac{M}{W_y} , \quad (8.17)$$

де W_y – момент опору перерізу відносно осі y .

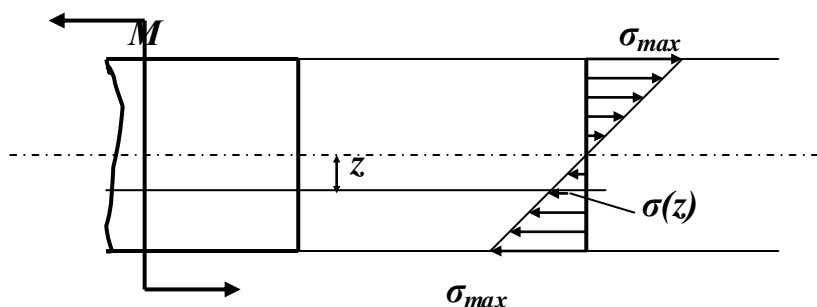


Рис.8.15. Розподіл нормальних напружень по висоті перерізу

Повертаючись до питання знаходження σ_{\max} нормальних напружень σ_{\max} у балці, слід ще знати небезпечний переріз, тобто той, де $M = M_{\max}$, тоді

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_y} . \quad (8.18)$$

Використовуючи (8.18), неважко записати умову міцності за нормальними напруженнями при згині:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_y} \leq [\sigma] . \quad (8.19)$$

З цієї формули за відомими моментами M та знаючи допустимий рівень напружень $[\sigma]$, можна визначити осьовий момент опору W_y (а далі і розміри відповідного перерізу) або за відомими формою та розмірами перерізу підібрати допустимі силові фактори, якими можна навантажити балку. При цьому значення M_{\max} підбирають при побудові епюр $Q(x)$ та $M(x)$.

Практика показала, що в більшості випадків найнебезпечнішими для балок є нормальні напруження. Тому залежності (8.17 ÷ 8.19) є дуже важливими розрахунковими формулами.

Дослідження показали, що формули (8.17 ÷ 8.19) практично справедливі не тільки для випадку чистого згину, але й у тому випадку, коли на ділянці, що розглядається, перерізуюча сила Q не дорівнює нулю.

Похибка незначна і можна вважати формули (8.17 ÷ 8.19) універсальними при розгляді плоского згину прямого бруса.

Слід зауважити, що для звичайних довгих балок у більшості випадків саме нормальні напруження є домінуючими з точки зору виникнення небезпеки.

Приклад розрахунку балки на міцність за нормальними напруженнями

Нехай задана балка (рис. 8.11). Побудуємо для неї епюри $Q_{(x)}$ та $M_{(x)}$ без урахування власної ваги та підберемо для неї сталевий двотавровий переріз.

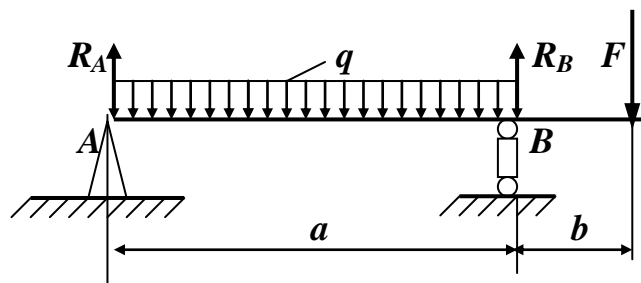


Рис. 8.11. Навантажена балка

Нехай $q = 2\text{кН/м}$; $F = 1\text{кН}$; $a = 4\text{м}$; $b = 1\text{м}$; $[\sigma] = 160\text{ МПа}$.

Спершу визначимо систему всіх зовнішніх сил, що діють на балку, підрахувавши реакції опор R_A та R_B . Для цього використаємо рівняння рівноваги – запишемо суму моментів спочатку відносно т. А, потім – відносно т. В. Ці два рівняння дадуть R_A та R_B . Для перевірки використаємо третє рівняння рівноваги $\sum Y = 0$.

$$\sum M_A = q \cdot 4 \cdot 2 - R_B \cdot 4 + F \cdot 5 = 0 .$$

Звідки
$$R_B = \frac{q \cdot 4 \cdot 2 + F \cdot 5}{4} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 2 + 1 \cdot 5}{4} = 5,25\text{ (кН)} ;$$

$$\sum M_B = R_B \cdot 4 - q \cdot 4 \cdot 2 - F \cdot 1 = 0 .$$

Звідси
$$R_B = \frac{q \cdot 4 \cdot 2 - F \cdot 1}{4} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 2 + 11}{4} = 3,75\text{ (кН)} .$$

Перевірка:
$$\sum Y = R_A + R_B - q \cdot 4 - F = 3,75 + 5,25 - 2 \cdot 4 - 1 = 0 .$$

Обидві реакції вийшли додатними, що показує відповідність нарисованих стрілок R_A та R_B реальному напрямку.

Тепер можна приступати до записування функцій та побудови епюр. Розіб'ємо балку на дві ділянки. На першій ділянці будемо йти зліва, а на другій – справа.

I ділянка. $0 \leq x < 4$ (розглядаємо її, йдучи зліва).

Запишемо функцію розподілу перерізуючих сил:

$$Q(x_1) = R_A - qx_1.$$

Функція лінійна. Знайдемо її значення на кінці та початку.

$$Q(0) = R_A = 3,75 \text{ (кН)};$$

$$Q(4) = R_A - 2 \cdot 4 = 3,75 - 8 = -4,25 \text{ (кН)}.$$

Тепер запишемо функцію моментів:

$$M(x_1) = R_A x_1 - qx_1 \frac{x_1}{2} = R_A x - q \frac{x^2}{2}.$$

Функція параболічна. Знайдемо її значення на кінцях проміжку:

$$M(0) = 0;$$

$$M(4) = 3,75 \cdot 4 - 2 \frac{4^2}{2} = -1 \text{ (кНм)}.$$

Тепер II ділянка $0 \leq x_2 < 1$ (ідемо вже справа).

Відповідно записуємо функції сил і моментів:

$$Q(x_2) = F = 1 \text{ (кН)} \quad - \text{ функція є константою};$$

$$M(x_2) = -Fx_2 \quad - \text{ лінійна функція}.$$

Знаходимо її значення на границі проміжку:

$$M(0) = 0;$$

$$M(1) = -1 \text{ (кНм)}.$$

Очевидно, що найбільше значення функцій моментів може бути або на правій опорі (т. в), або на першій ділянці. На опорі момент відомий. Знайдемо тепер максимальний момент M_{\max} . З епюри M_{\max} спостерігається на I ділянці. Виходячи з диференціальних залежностей (8.5), можна записати для I ділянки:

$$\frac{dM(x_0)}{dx} = Q(x_0) = R_A - qx_0 = 0;$$

$$x_0 = \frac{R_A}{q} = \frac{3,75}{2} \approx 1,87 \text{ (м)}.$$

Звідки й знайдемо координату перерізу x_0 , в якому виникає M_{\max} . Тобто

$$M_{\max} = M(x_0) = R_A x_0 - q \frac{x_0^2}{2} = 3,75 \cdot 1,87 - 2 \frac{1,87^2}{2} \approx 3,516 \text{ (кНм)}.$$

Робимо графічні побудови (рис. 8.11).

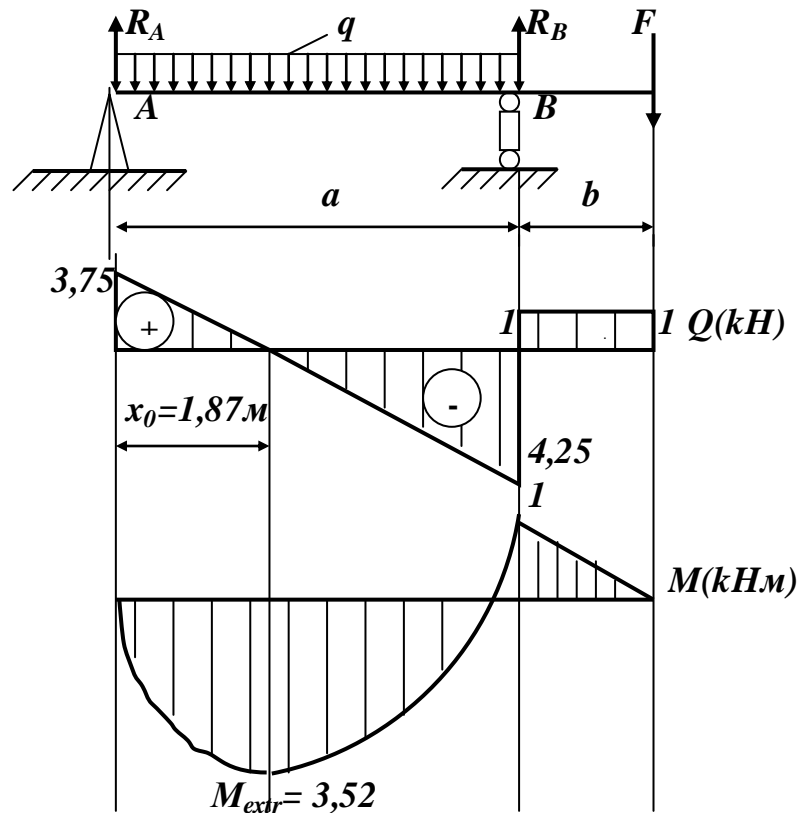


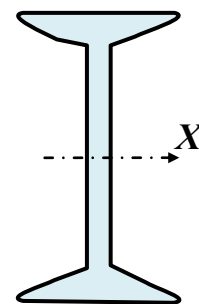
Рис. 8.11. Епюри розподілу перерізуючих сил і згинаючих моментів по довжині балки

Таким чином можна зробити висновки, що для цієї балки перерізуюча сила досягає свого максимального значення на правій опорі ($Q_{\max} = 4,25 \text{ кН}$), а найбільший момент виникає на відстані $x_0 = 1,87 \text{ м}$ від лівої опори ($M_{\max} = 3,52 \text{ кНм}$).

Тепер, використовуючи умову міцності за нормальними напруженнями при згині (8.19), можна визначити осьовий момент опору перерізу

$$W_o \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{3,52}{160 \cdot 10^3} = 22 \cdot 10^{-6} \text{ (м}^3\text{)} = 22 \text{ см}^3;$$

За таблицями сортаменту *ГОСТ 8240 – 89* знаходимо двотавр № 10 (рис. 8.12), для якого



осьовий момент опору $W_0 = W_x = 39,7 \text{ см}^3$.

Рис. 8.12. Вигляд двотавра

II семестр

Заняття 1. Лекція 1. Тема 10. Складний опір

Складний опір. Косий згин. Визначення напружень при косому згині. Умова міцності. Визначення переміщень при косому згині. Позацентровий стиск (розтяг). Напруження при позацентровому стиску(розтягу). Розрахунок на міцність. Ядро перерізу

У попередніх розділах ми ознайомилися з розрахунками на міцність і визначенням деформацій при розгляді 4-х видів простої деформації: розтягу – стиску, зсуву, кручення та згину. Але в інженерній практиці найчастіше зустрічаються випадки дії навантажень, при яких в об'єкті одночасно виникають кілька видів простої деформації. Наприклад вали, як правило, працюють не тільки на кручення, але й на згин, стовпи ліхтарів на вулицях працюють на стиск за рахунок власної ваги і на згин за рахунок зміщення навантаження від осі. Таких прикладів можна навести безліч.

Розглянемо принципи розрахунків на міцність і визначення деформацій при виникненні таких ситуацій.

10.1. Складний згин. Косий згин

Складним згином називають випадок, коли балку навантажують у різних площинах, які, проходячи через центральну вісь, не співпадають з головними площинами інерції. Частковий випадок складного згину – це косий згин – випадок складного, коли навантаження прикладають в одній площині, яка, проходячи через центральну вісь, не співпадає з жодною із головних площин інерції.

10.1.1. Визначення напружень при косому згині. Умова міцності

Розглянемо, наприклад, консольну балку (рис.10.1а), навантажену на вільному кінці силою, лінія дії якої, проходячи через центр ваги перерізу (для визначеності виберемо його прямокутним), відхиляється від вертикальної головної осі на кут φ (рис. 10.1,б).

Для того, щоб з'ясувати, з якими простими деформаціями маємо справу, розглянемо рис. 10.2.

Розклавши силу F на горизонтальну $F_{гор}$ та вертикальну $F_{верт}$ складові, запишемо:

$$F_{гор} = F \cdot \sin \varphi \quad \text{та} \quad F_{верт} = F \cdot \cos \varphi.$$

Тепер неважко помітити, що сила $F_{гор}$ викликає згин у горизонтальній площині, а сила $F_{верт}$ – відповідно згин у вертикальній площині. Згинаючі моменти відповідно:

$$M_{гор} = -F \cdot \sin \varphi \cdot x \quad \text{та} \quad M_{верт} = -F \cdot \cos \varphi \cdot x.$$

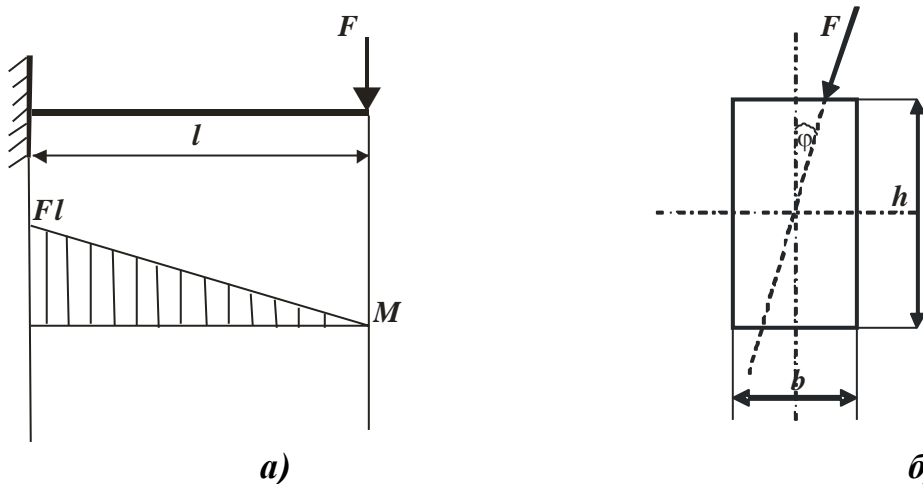


Рис.10.1. Косий згин: а) – загальний вид навантаження; б) – орієнтація навантаження в перерізі

Від цих обох згинів у площині перерізу виникають нормальні напруження і тому їх можна просто алгебраїчно скласти. В силу того, що в більшості випадків дотичні напруження не відіграють суттєвої ролі, при розгляді косого згину ми їх розглядати не будемо. І тоді

$$\sigma(x, y, z) = \sigma_{гор} + \sigma_{верт} = -\frac{M_{гор} \cdot y}{I_z} - \frac{M_{верт} \cdot z}{I_y} = -\frac{F \cdot \sin \varphi \cdot x \cdot y}{I_z} - \frac{F \cdot \cos \varphi \cdot x \cdot z}{I_y}$$

або, перетворюючи

$$\sigma(x, y, z) = -F \cdot x \cdot \left(\frac{\sin \varphi \cdot y}{I_z} + \frac{\cos \varphi \cdot z}{I_y} \right). \quad (10.1)$$

Зауважимо, що ця формула записана для балки, що розглядається у вибраній нами системі координат і не носить узагальненого змісту. На рис. 10.3 зображено епюри напружень у перерізі балки „а” – при прямому згині і „б” – при косому.

Для того, щоб знайти точки, в яких виникатимуть найбільші напруження, треба визначити положення нейтральної осі. Для цього прирівнюємо вираз нормальних напружень до нуля .

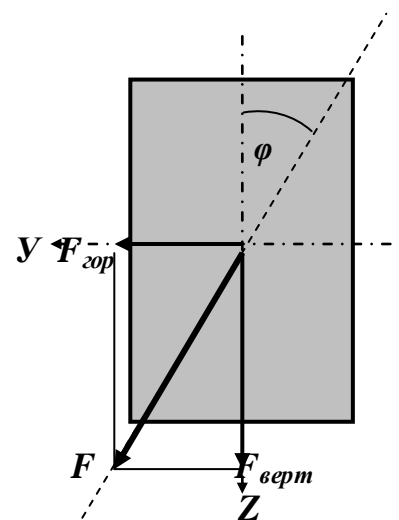


Рис.10.2. Складові сили в перерізі

У зв'язку з тим, що добуток Fx не дорівнює нулю, прирівняємо до нуля тільки вираз у дужках:

$$\left(\frac{\sin \varphi \cdot y_0}{I_z} + \frac{\cos \varphi \cdot z_0}{I_y} \right) = 0, \quad (10.2)$$

де $y_0; z_0$ – координати точок нейтральної осі.

Розглядаючи вираз, бачимо, що:

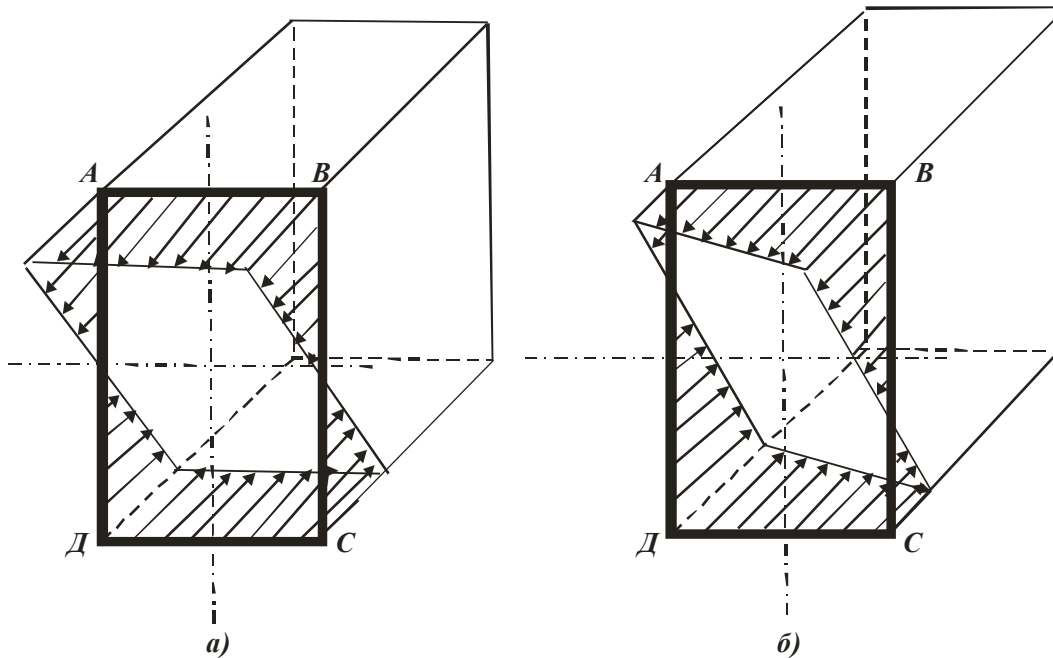


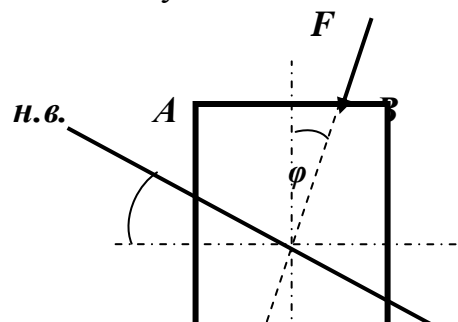
Рис. 10.3. Епюри розподілу напружень у перерізі:
а) – при прямому згині, б) – при косому згині

- нейтральна вісь дійсно є прямою лінією, між координатами $y_0; z_0$ спостерігається лінійна залежність;
- нейтральна вісь проходить через центр ваги перерізу, якщо $y_0=0$, то і $z_0=0$;
- нейтральна вісь розвертається на певний кут α відносно горизонтальної головної осі інерції (рис.10.4):

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{z_0}{y_0} = -\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \cdot \frac{I_y}{I_z}, \text{ або } \operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg} \varphi \cdot \frac{I_y}{I_z}. \quad (10.3)$$

З формули (10.3) випливає, що чим більшою є різниця між головними осьовими моментами інерції, тим більшою вона буде між кутом відхилення нейтральної осі та кутом відхилення площини, в якій діють навантаження, від головної площини інерції – тобто можливі випадки, за яких $\alpha \gg \varphi$. З точки зору інженерної практики – це означає, що невеликі кутові зміщення площини дії сил можуть призвести до значних відхилень площини деформацій.

З даного співвідношення бачимо,



якщо головні моменти інерції однакові (у випадку кола та правильних багатокутників), косого згину не відбувається.

Тепер, коли з'ясовано положення нейтральної осі, стає очевидним положення точок **B** і **D**, в яких виникатимуть найбільші розтягуючі та стискаючі нормальні напруження (рис. 10.4).

Якщо конструкція виготовлена з пластичного матеріалу, для якого будуть однаковими рівні допустимих напружень на розтяг $[\sigma_p]$ та стиск $[\sigma_{ст}]$, то умову міцності можна записати:

$$\sigma_{\max}(x, y, z) = -F \cdot l \cdot \left(\frac{\sin \varphi \cdot y_{\max}}{I_z} + \frac{\cos \varphi \cdot z_{\max}}{I_y} \right) \leq [\sigma]$$

або

$$\sigma_{\max}(x, y, z) = -F \cdot l \cdot \left(\frac{\sin \varphi}{W_z} + \frac{\cos \varphi}{W_y} \right) \leq [\sigma] \quad (10.4)$$

З цієї умови, як і у випадку прямого згину знаючи розміри поперечного перерізу, можна визначити допустимі сили, або, знаючи їх, визначити розміри поперечного перерізу. Слід зауважити, що для визначення цих розмірів слід наперед задати їх співвідношення - $\frac{b}{h} = k$, тому що з одної нерівності не можна однозначно визначити два невідомих.

10.1.2. Визначення переміщень при косому згині

Переміщення при косому згині розраховують як геометричну суму переміщень, орієнтованих уздовж головних осей інерції:

$$f = \sqrt{f_y^2 + f_z^2}, \quad (10.5)$$

а для випадку, який розглядаємо, відповідно

$$f_y = \frac{F \cdot \sin \varphi \cdot l^3}{3EI_z} \quad \text{та} \quad f_z = \frac{F \cdot \cos \varphi \cdot l^3}{3EI_y},$$

обчислюючи результуючу, отримаємо:

$$f = \sqrt{\left(\frac{F \cdot \sin \varphi \cdot l^3}{3EI_z} \right)^2 + \left(\frac{F \cdot \cos \varphi \cdot l^3}{3EI_y} \right)^2} = \frac{Fl^3}{3E} \sqrt{\frac{\sin^2 \varphi}{I_z} + \frac{\cos^2 \varphi}{I_y}}.$$

нормальними напруженнями при звичайному прямому згині.

10.2. Сумісна дія згину та розтягу (або стиску). Згин за умов дії поздовжніх та поперечних сил

В інженерній практиці досить часто зустрічаються випадки сумісної роботи стержня на згин та на розтяг (або стиск). Такі деформації можуть виникати не тільки під дією поперечних, але й поздовжніх сил. Подібний



випадок зображений на рис. 10.5. На балку діють поперечне розподілене навантаження q та сила F , яка орієнтована вздовж осі балки.

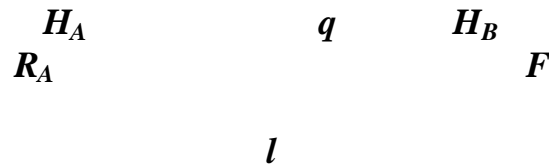


Рисунок 10.5. Одночасна дія поздовжніх та поперечних навантажень

Нехай прогини балки значно менші, ніж розміри поперечного перерізу, тоді можна рахувати, що й після деформації сила F разом з реакцією R_A будуть утворювати осьовий стиск цієї балки. Використовуючи принцип суперпозиції, можна знайти напруження в будь-якій точці кожного поперечного перерізу балки, як алгебраїчну силу напружень, що викликані силою та розподіленим навантаженням q .

Стискаючі напруження від сили F однакові в усіх точках кожного перерізу:

$$\sigma_F = -\frac{F}{A};$$

Нормальні напруження від згину у вертикальній площині в перерізі на координаті x можна записати як:

$$\sigma_q = \frac{M(x) \cdot z}{I_y}.$$

Таким чином, повне напруження в точці з координатою z по висоті перерізу, рахуючи від нейтральної осі, для цього перерізу дорівнює:

$$\sigma = \sigma_F + \sigma_q = -\frac{F}{A} + \frac{M(x) \cdot z}{I_y}.$$

На рис. 10.6. зображені епюри розподілу нормальних напружень в перерізі, що розглядається: а) – від сили F ; б) – від розподіленого навантаження q ; в) – сумарна епюра.

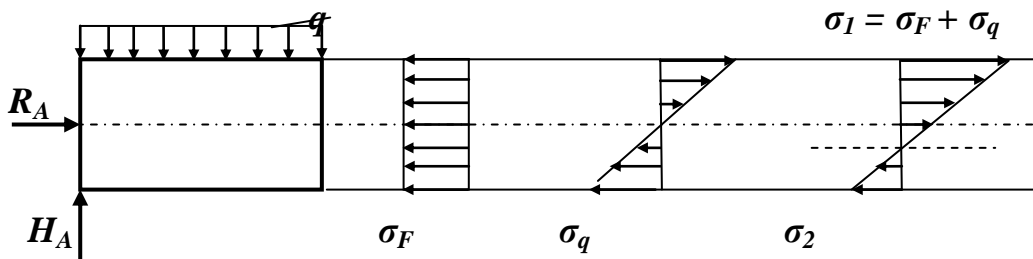


Рисунок 10.6. Розподіл нормальних напружень в перерізі при сумісній дії стиску та згину

Найбільше напруження в цьому випадку в цьому перерізі буде у верхніх волокнах, де обидва види деформації викликають стискаючі напруження. В

нижніх волокнах можуть бути, як стискаючі, так і розтягуючі напруження – це залежить від величин напружень σ_F та σ_q . Для складання умови міцності знайдемо найбільше значення нормального напруження.

Напруження від сили F в усіх перерізах однакова та рівномірно розподілені, тому небезпечними будуть, найбільш напружені від згину. Такими є крайні волокна в перерізі з найбільшим напруженням від згину. Такими є крайні волокна в перерізі з найбільшим згинаючим моментом; для них

$$\sigma_{q \max} = \mp \frac{M_{\max}(x)}{W_y}.$$

Таким чином, напруження в крайніх волокнах 1 та 2 (рис.10.6в) середнього перерізу балки виражаться формулою

$$\sigma_{1,2} = -\frac{F}{A} \pm \frac{M(x) \cdot z}{I_y}.$$

Тоді розрахункове напруження запишеться так:

$$|\sigma_{\max}| = |\sigma_1| = \left| \frac{F}{A} \pm \frac{M(x) \cdot z}{I_y} \right|.$$

Якби сила F була розтягуючою, то знак першого доданку помінявся б, та небезпечними були б уже нижні волокна.

Позначаючи, для загального випадку дії декількох сил, нормальну силу в перерізі N , можемо записати загальну формулу для перевірки міцності.

$$\sigma_{\max} = \mp \left| \frac{N}{A} \pm \frac{M_{\max}(x)}{W_y} \right| \leq [\sigma].$$

При складанні цієї формули, приймалося, що переріз симетричний відносно нейтральної осі i , крім того, матеріал балки однаково чинить опір розтягу і стиску.

Приведений метод розрахунку застосовується й при дії на балку сил, орієнтованих під кутом до осі балки. В цьому випадку таку силу можна розкласти на нормальну до осі, яка буде вигинати балку, та поздовжню – стискаючу чи розтягуючу.

10.3. Позацентричний стиск (розтяг)

Спробуємо дати відповідь на запитання: - як це так може бути, щоб до стержня приклали стискаюче навантаження, а він руйнувався від розтягуючих напружень? Або чому не такі вже й рідкісні випадки, коли стіни споруд та колони руйнуються внаслідок утворення тріщин в основі (причому ці тріщини стають все ширшими, „розкриваються”, що вказує на наявність розтягуючих напружень)? Відповіді на ці запитання можна дати, розглянувши такий вид деформації як позацентричний стиск (розтяг).

Позацентричний стиск (розтяг) – це випадок навантаження стержня, коли поздовжні сили діють по лінії, яка паралельна осі стержня та віддалена від неї на відстань e , яку називають ексцентриситетом (рис. 10.7 та 10.8).

З точки зору сукупності простих деформацій – це сумісна дія стиску (розтягу) та двох згинів відносно головних площин інерції (рис 10.8).

Зауваження: домовимось обирати напрямки головних осей Y та Z таким чином, щоб проекція точки прикладання сили опинилася в I квадранті.

10.3.1. Напруження при позацентровому стиску(розтягу). Розрахунок на міцність

Розглянемо, вказаний на рис. 10.7 та 10.8 переріз. Сила F не тільки стискає стержень, але й викликає згин через створення силою моментів відносно осей Y та Z – відповідно $M_y = F \cdot z_F$ та $M_z = F \cdot y_F$.

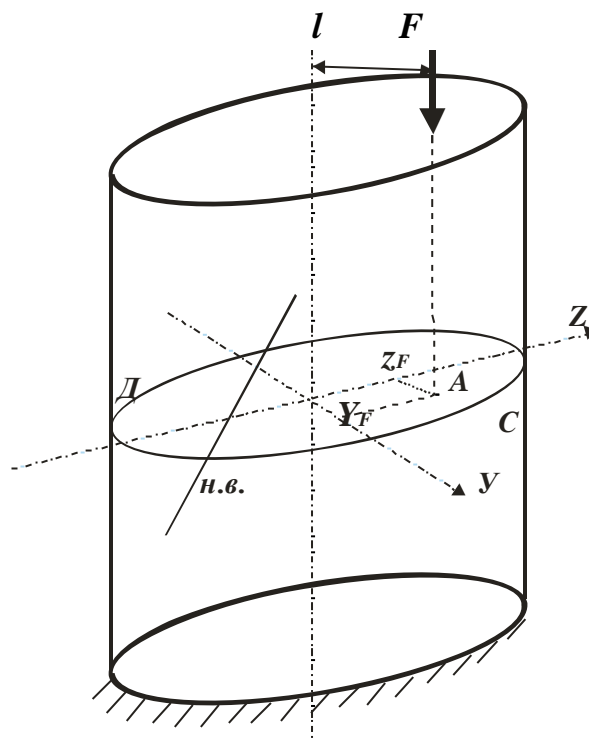
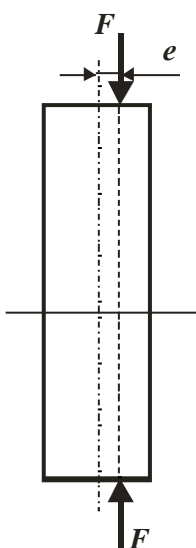


Рис.10.7. Позацентровий стиск

**Рис.10.8. Позацентровий стиск.
Розгляд перерізу стержня**

Тоді напруження нормального характеру в довільній точці з координатами $Y;Z$ запишемо так:

$$\sigma(y, z) = -\frac{F}{A} - \frac{F \cdot z}{I_y} - \frac{F \cdot y}{I_z}$$

або, перетворюючи, винести за дужки член $-\frac{F}{A}$ і отримаємо остаточний вираз для напруження:

$$\sigma(y; z) = -\frac{F}{A} \left(1 + \frac{z_F \cdot z}{i_y^2} + \frac{y_F \cdot y}{i_z^2} \right) \quad (10.6)$$

Перед тим, як записати умову міцності, слід розглянути питання: в яких же точках перерізу виникають найбільші напруження. Для цього знайдемо

положення нейтральної осі, в точках якої нормальні напруження дорівнюють нулю.

$$\sigma(y_0, z_0) = -\frac{F}{A} \left(1 + \frac{z_F \cdot z_0}{i_y^2} + \frac{y_F \cdot y_0}{i_z^2} \right) = 0,$$

де y_0 та z_0 – координати точок нейтральної осі;
 i_x та i_y – радіуси інерції відносно осей X та Y .

За умови, що множник $\frac{F}{A}$ не дорівнює нулю, можна записати рівняння нейтральної осі так:

$$\left(1 + \frac{z_F \cdot z_0}{i_y^2} + \frac{y_F \cdot y_0}{i_z^2} \right) = 0. \quad (10.7)$$

Розглядаючи це рівняння, можна зробити висновки:

– нейтральна вісь є прямою лінією – адже y_0 та z_0 пов'язані між собою лінійною залежністю;

– ця пряма не проходить через центр ваги перерізу – адже

виконуються умови: – якщо $y_0 = 0$, то $z_0 = -\frac{i_y^2}{z_F}$;

– якщо $z_0 = 0$, то $y_0 = -\frac{i_z^2}{y_F}$.

Це можна розглядати як координати двох точок, розташованих на осях Y та Z відповідно. Знак „-“, показує, що нейтральна вісь не проходить через квадрант, у якому знаходиться проекція точки прикладання сили F .

Тепер знайдемо небезпечні точки. Нейтральна вісь розділяє переріз на дві частини – на одній діятимуть стискаючі напруження, на другій – розтягуючі. В точках, які найвіддаленіші від нейтральної осі (рис. 10.8 – точки C та D) будуть діяти відповідно найбільші стискаючі та розтягуючі напруження. У випадку, коли важко на око визначити найвіддаленіші точки, проводять лінії, паралельні до нейтральної осі, й таким чином визначають ці точки.

Якщо матеріал по різному чинить опір розтягу та стиску (тобто $[\sigma_{розт.}] \neq [\sigma_{ст.}]$), слід записати дві умови міцності:

$$\sigma_{\max \text{ ст.}} = \sigma_C = \left| -\frac{F}{A} \left(1 + \frac{z_F \cdot z_C}{i_y^2} + \frac{y_F \cdot y_C}{i_z^2} \right) \right| \leq [\sigma_{\text{ст.}}]; \quad (10.8)$$

$$\sigma_{\max \text{ розт.}} = \sigma_D = \left| -\frac{F}{A} \left(1 + \frac{z_F \cdot z_D}{i_y^2} + \frac{y_F \cdot y_D}{i_z^2} \right) \right| \leq [\sigma_{\text{розт.}}]. \quad (10.9)$$

Якщо визначаємо, наприклад силу F , то потрібно взяти за кінцевий результат, мінімальне значення F , отримане з двох даних розрахунків.

10.3.2. Ядро перерізу

Важливим є питання про визначення зони навколо центра ваги перерізу, прикладання в якій сили, викличе по всьому перерізу напруження тільки одного знака – так званого *ядра перерізу*. Розглянемо деякі випадки.

1. Наприклад, круглий переріз радіуса r (рис. 10.9).

Граничне положення точки прикладання сили F (т. А), обумовить положення нейтральної осі, як прямої, дотичної до кола з протилежного боку. Тобто:

$$y_0=0; \quad z_0 = -r$$

$$y_F=0; \quad z_F - \text{потрібно визначити.}$$

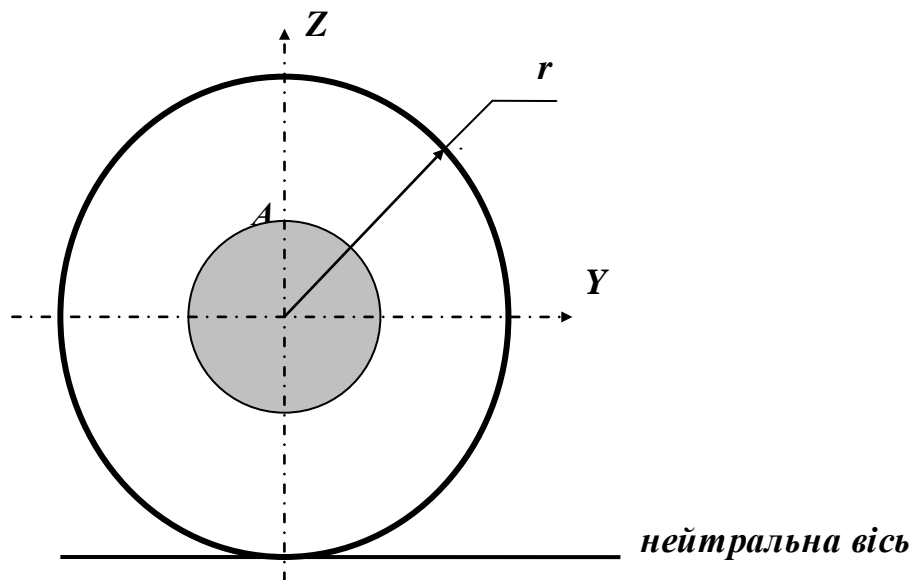


Рис.10.9. Ядро для круглого перерізу

Якщо $y_0=0$, і $z_0 = -\frac{i_y^2}{z_F}$, то $z_F = -\frac{i_e^2}{z_0}$.

$$i_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{\pi r^4}{\pi r^2} = \frac{r^2}{4}, \quad \text{тоді} \quad z_F = -\frac{\frac{r^2}{4}}{-r} = \frac{r}{4}.$$

Аналогічно можна провести розрахунки для інших напрямків і з'ясувати, що

для круглого поперечного перерізу ядром буде також круг із радіусом $\frac{r}{4}$ та центром, що співпадає з центром перерізу.

2. Розглянемо прямокутний переріз (рис.10.10) за принципом, аналогічним попередньому.

а) Нейтральна вісь проходить по нижній межі перерізу

$$z_0 = -\frac{h}{2}, \quad z_F = -\frac{i_y^2}{z_0}, \quad i_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{\frac{b \cdot h^3}{12}}{b \cdot h} = \frac{h^2}{12}, \quad \text{ТОДІ} \quad z_F = -\frac{h^2}{12 \left(-\frac{h}{2}\right)} = \frac{h}{6}.$$

Тобто координати точки, яку ми шукаємо: $A(0; \frac{h}{6})$.

Аналогічно знайдемо координати т. A' , симетричної до т. A відносно осі Y , та точок B і B' .

б) Тепер розглянемо як їх з'єднати. Наприклад т. A і B . Для цього розглянемо як нейтральна вісь буде повертатись навколо т. $C(-\frac{b}{2}; -\frac{h}{2})$. Використаємо

рівняння нейтральної осі $(1 + \frac{z_F \cdot z_0}{i_y^2} + \frac{y_F \cdot y_0}{i_z^2}) = 0$.

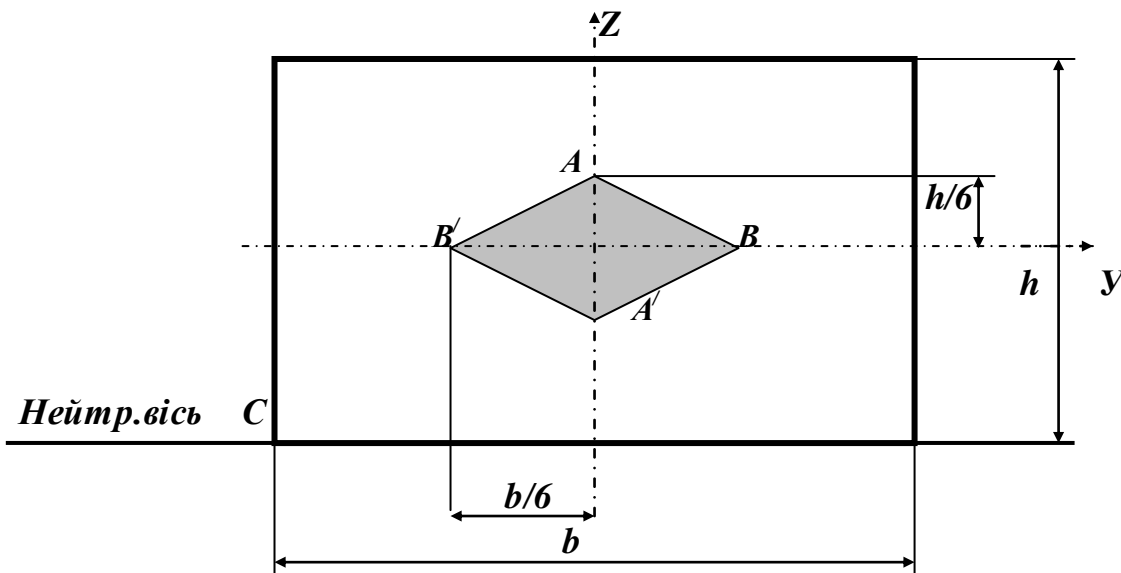


Рис. 10.10. Ядро для прямокутного перерізу

y_0 та z_0 – в даному випадку y_C ; z_C – є константами, тоді z_F та y_F пов'язані лінійною залежністю, тобто т. A та т. B , і, як наслідок – т. B та A' ; т. A' та т. B' і т. B' та A з'єднуються прямими лініями. Тобто ядром перерізу в даному випадку є ромб з діагоналями $\frac{b}{3}$ та $\frac{h}{3}$.

Заняття 2. Практичне заняття 1. Продовження теми 10 (Складний опір)

Сумісна дія згину та кручення. Застосування теорій міцності для оцінки напруженого стану при сумісній дії згину та кручення. Приклад розрахунку еквівалентного моменту при сумісній дії згину та кручення.

10.4. Сумісна дія згину та кручення

Інженерна практика показує, що вали, як правило, працюють не тільки на кручення, але й в умовах згину за рахунок власної ваги та радіальних зусиль, що виникають при передаванні валом потужностей. Питання оцінювання напружено-деформованого стану в цьому випадку ускладнюється такими факторами:

- радіальні зусилля можуть виникати в різних напрямках, що викликає появу згинаючих моментів у різних площинах;
- виникнення в одному й тому ж перерізі, перпендикулярному до осі вала, не тільки дотичних напружень від кручення, але й нормальних напружень від згинів у різних площинах (одночасно зауважимо, що дотичними напруженнями, які виникають від згину, можна нехтувати, тому що вони є значно меншими ніж дотичні напруження від кручення).

Перше питання вирішується порівняно просто – всі моменти розбиваються на складові відносно, наприклад, горизонтальної та вертикальної площин. Далі будуються епюри згинальних моментів у цих площинах і за допомогою геометричного складання по перерізах (10.9) з'ясовується положення перерізу, в якому виникає максимальний згинальний момент і його значення цього моменту.

$$M_{\Sigma} = \sqrt{M_{гор.}^2 + M_{верт.}^2}; \quad (10.9)$$

При цьому слід зауважити, що епюри сумарних моментів взагалі можуть мати нелінійний характер, але опуклість графіків буде спрямована у бік осі абсцис. Тобто максимальних значень цей момент може досягати тільки на межах ділянок, що легко обчислюється. Щодо орієнтації площин, в яких діятимуть сумарні згинальні моменти в різних перерізах, то це в більшості випадків не суттєво. Як правило, поперечним перерізом валів вибирають перерізи, для будь-якої центральної вісь є головною (круг, кільце, правильний многокутник).

10.5. Застосування теорій міцності для оцінки напруженого стану при сумісній дії згину та кручення

Що стосується другого зауваження, то, по-перше, є зрозумілим той факт, що небезпечною зоною в перерізі буде зона перетину поверхневого шару вала з площиною, в якій виникає згинальний момент в цьому перерізі, тому що в ній виникають як найбільші нормальні напруження від згину, так і найбільші дотичні від кручення. По-друге, питання про знаходження найнебезпечнішого перерізу та обчислення моменту в ньому, вирішується за допомогою теорій міцності (зазвичай III-ої теорії, теорії Мора або IV-ої – енергетичної теорії міцності).

У зв'язку з тим, що розглядається питання сумісної дії нормальних і дотичних напружень, можна зробити висновок, що цей процес відобразиться

тими ж залежностями, що й при аналізі складного напруженого стану за повної перевірки на міцність при згині.

Наприклад, розглянемо формулу (8.36) для критерію Мора:

$$\sigma_{чМ} = \frac{1-m}{2}\sigma + \frac{1+m}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma],$$

де $m = \frac{[\sigma_+]}{[\sigma_-]}$.

Тоді $\sigma_{чМ} = \frac{1-m}{2} \cdot \frac{\sqrt{M_{верт.}^2 + M_{гор.}^2}}{W_o} + \frac{1+m}{2} \sqrt{\frac{M_{верт.}^2 + M_{гор.}^2}{W_o^2} + \frac{T^2}{W_p^2}} \leq [\sigma],$

враховуючи, що $W_p = 2W_o$,

$$\sigma_{чМ} = \frac{1-m}{2} \cdot \frac{\sqrt{M_{верт.}^2 + M_{гор.}^2}}{W_o} + \frac{1+m}{2} \frac{\sqrt{M_{верт.}^2 + M_{гор.}^2 + T^2}}{W_o} \leq [\sigma].$$

Розглядаючи чисельник, можна записати вираз для розрахункового моменту при використанні теорії Мора:

$$M_{чМ} = \frac{1-m}{2} \cdot \sqrt{M_{верт.}^2 + M_{гор.}^2} + \frac{1+m}{2} \sqrt{M_{верт.}^2 + M_{гор.}^2 + T^2}. \quad (10.10)$$

Тоді для III-ої теорії міцності розрахунковий момент запишемо так:

$$M_{чIII} = \sqrt{M_{верт.}^2 + M_{гор.}^2 + T^2}, \quad (10.11)$$

або

$$M_{чIII} = \sqrt{M_{\Sigma}^2 + T^2}. \quad (10.12)$$

Розглядаючи вираз для розрахункових напружень при застосуванні IV-ої (енергетичної) теорії міцності (8.35)

$$\sigma_{чIV} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]$$

та застосовуючи аналогічні перетворення, отримаємо вираз для розрахункового моменту:

$$M_{чIV} = \sqrt{M_{\Sigma}^2 + 0,75 \cdot T^2}. \quad (10.13)$$

Дослідження показують, що тепер умови міцності для різних теорій міцності, що розглядалися нами раніше (8.32) ÷ (8.36), можна записати так:

$$\sigma_{max.r} = \frac{M_{max.r}}{W_o} \leq [\sigma]. \quad (10.14)$$

10.6. Приклад розрахунку еквівалентного моменту при сумісній дії згину та кручення

Як приклад, розглянемо задачу про визначення напруженого стану, що виникає у плоскій рамці, навантаженій силами, спрямованими перпендикулярно до площини самої рамки (рис. 10.11). В точках *A* та *B* рамка зігнута під прямим кутом. Сила $F = 1,5ql$. Потрібно записати функції згинаючих та крутних моментів, побудувати по окремої їх епюри в аксонометрії у загальному вигляді в долях ql^2 , знайти небезпечний переріз та визначити еквівалентний момент у ньому, використовуючи IV теорію міцності.

Розглянемо чотири ділянки рамки (рис.10.12) та запишемо функції згинаючих $M(x)$ та крутних $T(x)$ моментів.

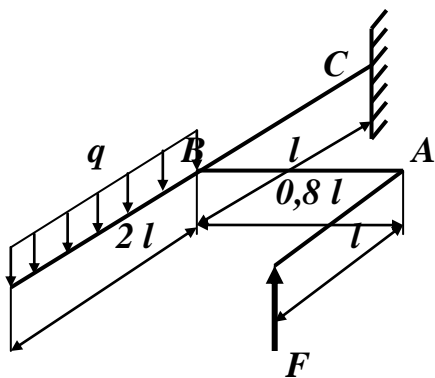


Рисунок 10.11. Вигляд навантаженої рамки

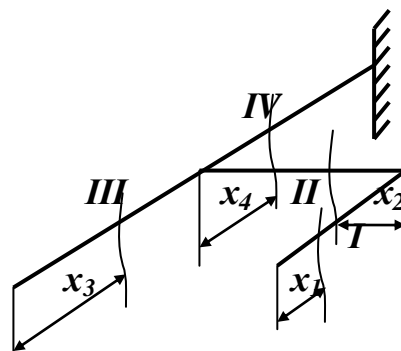
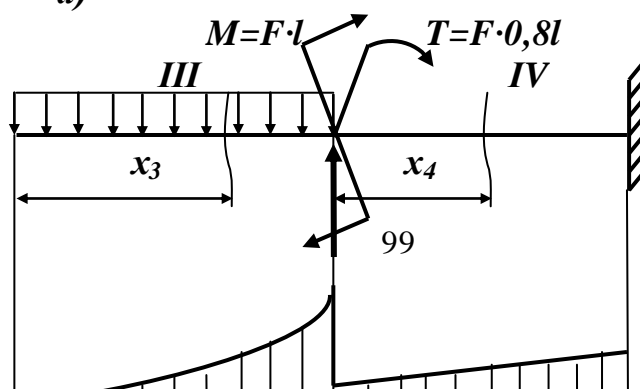
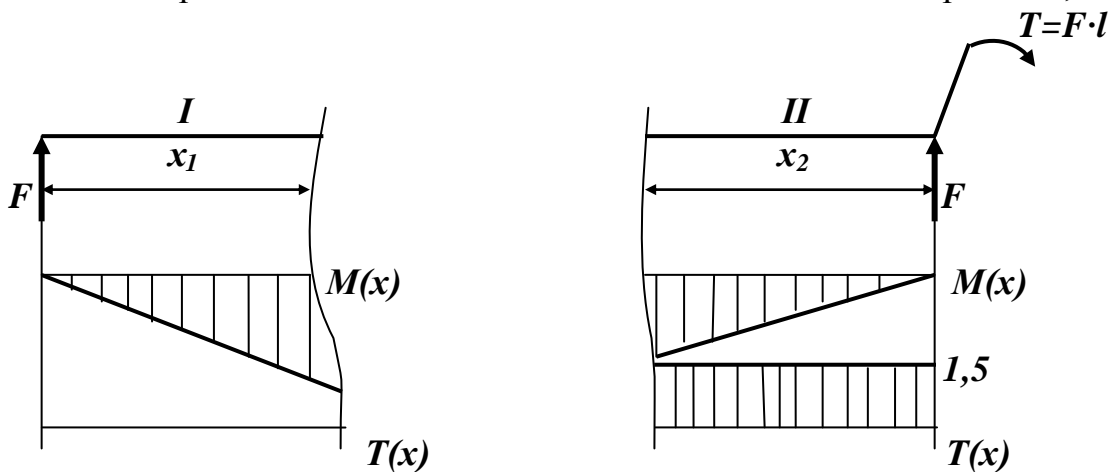


Рисунок 10.12. Розподіл ділянок на рамці

Для більш зрозумілого виконання розрахунків та запису згинаючих та крутних моментів розглянемо навантаження кожної ділянки по окремої,



т.В на кінці II ділянки; т.В на кінці III ділянки та т.С в жорсткому закріпленні.
Відповідно:

$$M_{rIV_{B_{II}}} = \sqrt{(1,2ql^2)^2 + 0,75(1,5ql^2)^2} \approx 1,77 ql^2;$$

$$M_{rIV_{B_{III}}} = \sqrt{(2ql^2)^2 + 0,75(0)^2} \approx 2,0 ql^2;$$

$$M_{rIV_{C_{IV}}} = \sqrt{(1,0ql^2)^2 + 0,75(1,2ql^2)^2} \approx 1,44 ql^2.$$

Тоді

$$M_{rIV_{max}} = M_{rIV_{B_{III}}} = \sqrt{(2ql^2)^2 + 0,75(0)^2} \approx 2,0 ql^2.$$

Таким чином розрахунки показують, що в даному випадку небезпечним буде переріз на кінці III ділянки в т.В, хоча на цій ділянці крутний момент є відсутнім.

Заняття 3. Лекція 2. Тема 11. Загальні теореми опору матеріалів

Узагальнена сила та узагальнене переміщення. Лінійна пружна система. Теорема Клапейрона. Принцип можливих переміщень. Теорема про взаємність робіт (теорема Бетті). Теореми Лагранжа та Кастільяно. Інтеграл переміщень (інтеграл Мора). Правило Верещагіна

Введемо поняття *узагальненої сили та узагальненого переміщення*.

Узагальнена сила (далі просто – сила) – це сукупність будь-яких силових факторів. Це і сила, і момент сили, і розподілене навантаження.

Узагальнене переміщення (далі просто – переміщення) – це будь-яке переміщення (формально – це множник при узагальненій силі у виразі роботи). Так для моменту переміщенням є кут повороту, так як робота моменту є $M\varphi$. Рівномірно розподілене навантаження, прикладене до балки, прогин якої є $v(z)$, виконує роботу

$$A = \int qv(z)dz = q \int vdz = q\omega.$$

Тут узагальнене переміщення – це ω , тобто площа, заключена між первісною віссю балки та зігнутим її положенням.

11.1. Лінійна пружна система

Лінійні пружні системи – це системи, елементи яких працюють в межах закону Гука, з'єднання реалізовані без тертя, а деформації настільки малі, що це дозволяє скласти рівняння статички для недеформованого стану.

За цих умов переміщення і сили зв'язані лінійною залежністю.

Для лінійних систем можна записати:

$$P_i = \sum c_{ij}u_j \quad (11.1)$$

або

$$u_i = \sum \delta_{ij} P_j, \quad (11.2)$$

де величини δ_{ij} – коефіцієнти впливу та c_{ij} – коефіцієнти жорсткості зв'язані співвідношенням:

$$c_{ij} = \frac{|\delta_{ij}|}{|\delta|},$$

де δ – визначник, загальний елемент якого є δ_{ij} , а $|\delta_{ij}|$ – алгебраїчне доповнення цього елемента.

Визначники $|\delta|$ та $|c|$ повинні бути відмінними від нуля.

При цьому неважко показати, що $c_{ij} = c_{ji}$, а тому й $\delta_{ij} = \delta_{ji}$.

Тобто матриці коефіцієнтів δ_{ij} та c_{ij} є симетричними.

У лінійній системі напруження можна виразити лінійно через зовнішні сили. Тому потенціальна енергія w_p в загальному плані представляє з себе квадратичну форму від сил $P_1 P_2 \dots P_u$. В силу цього w_u – є квадратичною формулою від переміщень.

Узагальненим цих понять є вираз

$$W = \frac{1}{2} \sum P_i u_i, \quad (11.3)$$

який носить назву *теорема Клапейрона*.

Клапейрон Бенуа Поль Еміль (1799 – 1864) – французький інженер, фізик та механік. У 1820-1830рр.-проф. Петербурзького ін-ту корпусу інженерів шляхів сполучення. Роботи в галузі механіки присвячені теорії пружності та будівельній механіці. Ввів у термодинаміку графічний метод. Вказав на існування для газів універсальної функції температури. Спільно з Г. Ламе дослідив стійкість арок і аналітичним шляхом знайшов положення січення зламу для кругової арки. Дав формулювання рівнянь 3-х моментів. Розробив новий метод обчислень напружень в нерозрізних балках.

Враховуючи (11.1) та (11.2) можна записати

$$W = \frac{1}{2} \sum_{ij} c_{ij} u_i u_j; \quad (11.4)$$

$$W = \frac{1}{2} \sum_{ij} \delta_{ij} P_i P_j . \quad (11.5)$$

Неважно пригадати, що розгляд виразу потенціальної енергії для складного напруженого деформованого стану (5.29) підтверджує ці висновки.

11.2. Принцип можливих переміщень

Якщо тіло під дією системи зовнішніх сил A і прикладених у точках з радіусами – векторами r_i знаходяться у рівновазі, то до цього тіла можна застосувати принцип можливих переміщень. Треба мати на увазі, що на можливих переміщеннях будуть створювати роботу не тільки зовнішні, але й внутрішні сили.

Запишемо умові рівності нулю роботи сил на можливих, тобто на таких, що не протирічать зв'язкам, переміщеннях деформованого тіла:

$$\sum P_i \delta_{r_i} = \delta W . \quad (11.6)$$

У правій частині стоїть зміна пружної енергії, що відповідає даній системі можливих переміщень.

Величину δW , роботу внутрішніх сил в об'ємі V на можливих переміщеннях можна уявити як

$$\delta W = \int_V \delta a dV , \quad (11.7)$$

де δa – питома елементарна робота внутрішніх сил.

11.3. Теорема про взаємність робіт (теорема Бетті)

Робота сил першої системи на переміщеннях від дії сил другої системи дорівнює роботі сил другої системи на переміщеннях від першої системи сил.

Нехай перша система сил $P'_1; P'_2 \dots P'_{12}$, а друга система $P''_{k+1}; P''_{k+2} \dots P''_n$.

Переміщення точки прикладання сили номер s першої системи від дії сил другої системи

$$u'_s = \sum_{i=k+1}^n P''_i \delta_{si} \quad (s = 1, 2 \dots k) .$$

Аналогічно

$$u''_i = \sum_{s=1}^k P'_s \delta_{is} \quad (i = k + 1 \dots n) .$$

Робота сил першої системи на переміщеннях точок їх прикладання від дії сил другої системи є

$$A' = \sum_{s=1}^k P'_s u''_s = \sum_{s=1}^k \sum_{i=k+1}^n P_s P'_i \delta_{si} .$$

Аналогічно:

$$A'' = \sum_{i=k+1}^n P''_i u_s = \sum_{i=k+1}^n \sum_{s=1}^k P_i P_s \delta_{si} .$$

Змінюючи порядок сумування та використовуючи симетрію коефіцієнтів δ_{is} , отримаємо, що $A' = A''$, що й доводить теорему.

11.4. Теорема Лагранжа та Кастільяно

Нехай на тіло діють узагальнені сили $P_1; P_2 \dots P_n$ і при цьому узагальнені переміщення – $u_1; u_2 \dots u_n$.

Тоді можна вважати

$$W = W_u(u_1; u_2; \dots u_n) = W_p(P_1; P_2; \dots P_n).$$

Додамо переміщенням довільних змін $\delta u_1; \delta u_2; \dots \delta u_n$. При цьому елементарна робота зовнішніх сил дорівнює

$$\sum P_i \delta u_i .$$

Якщо уявити W через узагальнені переміщення, для варіації W можна записати:

$$\delta W = \sum \frac{\partial W}{\partial u_i} \delta u_i .$$

Використовуючи (11.6):

$$\sum \left(P_i - \frac{\partial W}{\partial u_i} \right) \delta u_i = 0 . \quad (11.8)$$

Звідки:

$$P_i = \frac{\partial W}{\partial u_i} , \quad (11.9)$$

тобто похідна енергії деформації по переміщенню дорівнює силі. Це й є теорема Лагранжа. Якщо ж записати W як функцію сил :

$$W = W(P_1 \dots P_m) ;$$

то

$$\Phi = \sum P_i u_i - W . \quad (11.10)$$

Функція Φ носить назву доповнюючої роботи. Записуючи варіації Φ , отримаємо:

$$\delta \Phi = \sum P_i \delta u_i + \sum \delta P_i u_i - \sum \frac{\partial W}{\partial u_i} \delta u_i .$$

Але за теоремою Лагранжа:

$$\frac{\partial W}{\partial u_i} = P_i.$$

Тому :

$$\delta\Phi = \sum u_i \delta P_i. \quad (11.11)$$

Нехай функція Φ виражена тільки через зовнішні сили

$$\Phi = \Phi(P_1; P_2; \dots; P_n);$$

тоді

$$\delta\Phi = \sum \frac{\partial \Phi}{\partial P_i} \delta P_i.$$

Використовуючи (11.11) та помітивши, що варіації довільні, отримаємо

$$u_i = \frac{\partial \Phi}{\partial P_i}. \quad (11.12)$$

Ця формула відображає *теорему Кастільяно – похідна енергії деформації по силі дорівнює переміщенню*.

11.5. Інтеграл переміщень (інтеграл Мора)

Виходячи з формули Кастільяно, можна вивести формулу для визначення переміщень у стержневих системах, що працюють на розтяг – стиск, кручення та згин.

Запишемо формулу Кастільяно у варіаційній формі

$$\sum u_i \delta P_i = \delta W_p. \quad (11.13)$$

Визначатимемо переміщення у точці з номером S .

Нехай всі сили залишаються незмінними, а вар'юється тільки сила P_s .

При цьому вона отримує приріст δP_s . Тоді зміну поздовжньої сили позначимо через $N_{zs} \delta P_s$, зміну крутного момента через $T_{zs} \delta P_s$, а згинального момента $M_{xs} \delta P_s$. При цьому нехай ці N_{zs} ; T_{zs} та M_{xs} – це відповідно повздовжня сила, крутний та згинальний моменти в т. S .

У лівій частині рівняння (11.13), отримаємо:

$$u_s \delta P_s.$$

Первісне значення W_p є:

$$W_p = \sum_{i=1}^n \frac{N_i^2 l}{2EA} + \int_{l_i} \frac{T_z^2 dz}{2GI_p} + \int_{l_i} \frac{M_x^2 dz}{2EI_x}.$$

При цьому її приріст:

$$W_p + \delta W_p = \sum \frac{(N_z N_{zs} \delta P_s)^2}{2EA} + \dots.$$

Нехтуючи квадратом малої величини δP_s та скорочуючи її в (11.13), отримаємо:

$$u_s = \sum_{i=1}^n \frac{N_i N_{zs} l}{EA} + \int_l \frac{T_z T_{zs} dz}{GI_p} + \int_l \frac{M_x M_{xs}}{EI_x} dz. \quad (11.14)$$

Це так званий інтеграл Мора, або інтеграл переміщень.

Слід зауважити, що в більшості випадків домінуючим у цій формі є третій член, а першим двома можна нехтувати. І наближена формула (11.15) найбільш часто використовується при практичних розрахунках

$$\delta = \sum_i \int_{l_i} \frac{M_{(x)} M_{(z)s}}{EI} dz \quad . \quad (11.15)$$

11.6. Графоаналітичний спосіб розрахунку інтеграла переміщень (спосіб Верещагіна)

Обчислення інтеграла Мора можна суттєво спростити у випадку, коли хоча б одна з епюр (для дійсного навантаження або одиничного) складається з прямих ліній і балка має постійну жорсткість ($EI = const$) по довжині.

Розглянемо фрагмент епюр для якоїсь довільної балки (рис. 11.1.)

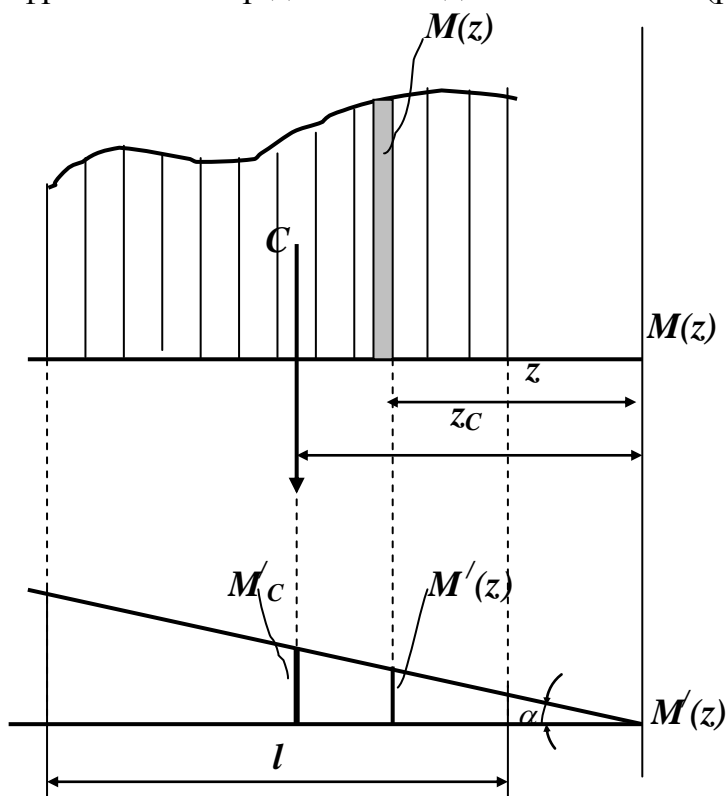


Рис. 11.1. Правило Верещагіна

Тоді інтеграл $\int_{l_i} \frac{M_{(z)} M_{(z)s}}{EI} dz$ можна розглядати таким чином.

Вираз $M_{(z)} dz$ – уявляє з себе диференціал площі епюри $M_{(z)} - d\omega$. Тобто:

$$M_{(z)} dz = d\omega \quad .$$

В той же час, в силу прямолінійності епюри від одиничних силових факторів $M'_{(z)}$

$$M_{(z)_s} = z \cdot \operatorname{tg} \alpha .$$

Тоді:

$$\int_{l_i} \frac{M_{(z)} M_{(z)_s}}{EI} dz = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{EI} \int_{l_i} z d\omega .$$

Останній інтеграл виражає статичний момент площі ω відповідно осі, перпендикулярної до осі z , тому можна записати, що:

$$\int_{l_i} z d\omega = \omega z_c$$

або:

$$\int_{l_i} \frac{M_{(z)} M_{(z)_s}}{EI} dz = \frac{\operatorname{tg} \alpha \cdot z_c \cdot \omega}{EI} ,$$

де z_c – координата центра ваги площі епюри ω . Після нескладних перетворень будемо мати $\frac{\omega M'_c}{EI}$, де M'_c – значення моменту на епюрі моментів від одиничних навантажень на тій координаті, де знаходиться центр ваги площі епюри ω . Тоді інтеграл Мора можна записати у такому вигляді:

$$\delta = \sum_i \frac{\omega_i M'_{c_i}}{EI} . \quad (11.16)$$

Цей спосіб обчислення інтеграла Мора носить назву *способу (або правила) Верещагіна*.

Заняття 4. Практичне заняття 2. Продовження теми 11 (Загальні теореми опору матеріалів). Застосування спрощеного інтеграла Мора та способу Верещагіна для визначення переміщень при згині

Аналіз застосування спрощеного інтеграла Мора та способу Верещагіна. Приклади розрахунків переміщень та деформацій при згині

11.7. Аналіз застосування спрощеного інтеграла Мора

Розглянемо порядок використання формули (11.15). Для правильного запису та розв'язку суми інтегралів

$$\delta = \sum_i \int_{l_i} \frac{M_i(x) M'_i(x)}{EI} dx$$

за умови, що жорсткість балки $EI = \text{const}$, потрібно:

1. Визначити число «і»:

- якщо переміщення визначається на границі ділянок балки, то «і» дорівнює кількості ділянок балки;

- якщо переміщення визначається на ділянці балки, то ця ділянка поділяється на дві, а число « i » відповідно збільшується на 1.
- 2. Записати функції згинаючих моментів $M_i(x)$ на кожній ділянці балки.
- 3. Побудувати допоміжну балку (така ж сама, як і основна, тільки не навантажена) та завантажити її в перерізі, де знаходиться прогин $y(x)$, одиничною силою $F' = 1$ (якщо знаходиться кут повороту перерізу, навантаження проводять одиничним моментом $M' = 1$).
- 4. На тих же ж ділянках та **в тих же ж системах координат, що й для основної балки**, записати згинаючі моменти $M'_i(x)$ від одиничного навантаження на допоміжній балці.
- 5. Підставити вищевказані вирази у формулу (11.15) та провести інтегрування і необхідні обчислення.

Зауваження 1: Якщо відповідь буде отримана із від'ємним знаком, це означатиме, що насправді переміщення спрямоване у бік, протилежний тому, в якому діє прикладене до допоміжної балки одиничне навантаження.

11.8. Приклад використання спрощеного інтеграла Мора для обчислення переміщень при згині

Визначимо прогин та кут повороту на вільному кінці (т.А) консольної балки довжиною l , жорстко закріпленої одним кінцем, та навантаженої зосередженою силою F , як показано на рис.11.2а. При цьому приймемо жорсткість балки EI постійною в усіх перерізах.

Спочатку визначимо прогин на вільному кінці консолі в т.А.

В даному випадку виконання задачі згідно вищенаведених пунктів дасть наступне:

1. В силу того, що прогин визначається на границі ділянки, а ділянок на балці тільки одна, маємо $i = 1$.
2. Функція моментів від реальних навантажень на реальній балці запишеться так:

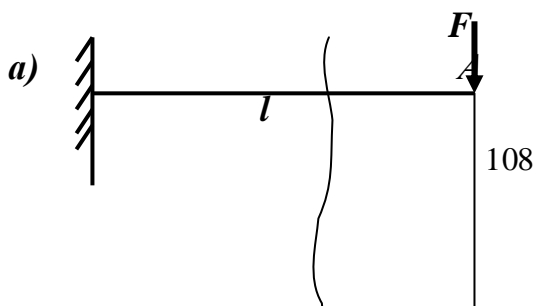
$$M(x) = -F \cdot x.$$

3. Будуємо допоміжну балку та навантажуюємо її в т.А одиничною силою $F' = 1$ (рис.11.2б).
4. В тій же системі координат, що й для реальної балки, записуємо функції моментів від одиничного навантаження:

$$M'(x) = -1 \cdot x.$$

5. Підставляємо отримані вирази в формулу спрощеного інтеграла Мора (11.15), враховуючи, що жорсткість балки є незмінною.

$$y_A = \frac{1}{EI} \int_0^l (-Fx)(-1x) dx = \frac{Fl^3}{3EI}.$$



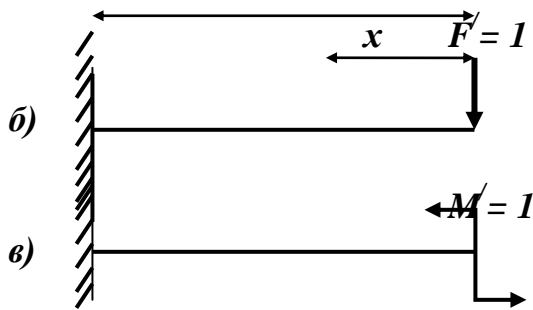


Рисунок 11.2. *Визначення кута повороту та прогину на вільному кінці консольної балки: а) – основна балка; б) – допоміжна балка, навантажена одиничною силою $F' = 1$ в перерізі, де визначається прогин; в) – допоміжна балка, навантажена одиничним моментом $M' = 1$, в перерізі, де визначається кут повороту*

Аналогічно проведемо прийоми та обчислення для визначення кута повороту в т.А. Тільки в цьому випадку на допоміжній балці в т.А. замість одиничної сили буде прикладений одиничний момент $M' = 1$ (рис. 11.2в). Відповідно:

$$M(x) = -F \cdot x;$$

$$M'(x) = +1.$$

Тоді:

$$\theta_A = \frac{1}{EI} \int_0^l (-Fx) \cdot 1 dx = -\frac{Fl^2}{2EI}.$$

Знак "--" показує, що насправді кут повороту перерізу орієнтований в бік протилежний напрямку одиничного моменту.

11.9. Порядок використання формули Верещагіна для обчислення переміщень при згині

Розглянемо порядок використання формули (11.16). Для правильного запису та розв'язку формули Верещагіна

$$\delta = \sum_i \frac{\omega_i M'_{c_i}}{EI},$$

за умови, що жорсткість балки EI – const, потрібно:

1. Побудувати епюри згинаючих моментів $M_i(x)$ для реальної балки.
2. Побудувати допоміжну балку (така ж сама, як і основна, тільки не навантажена) та завантажити її в перерізі, де знаходиться прогин $y(x)$, одиничною силою $F' = 1$ (якщо знаходиться кут повороту перерізу, навантаження проводять одиничним моментом $M' = 1$).
3. Побудувати епюри згинаючих моментів $M'_i(x)$ від одиничного

навантаження для допоміжної балки.

4. На епюрі моментів $M_i(x)$ для реальної балки обчислити площі епюр ω_i на кожній ділянці (розбивка на ділянки проводиться за тою ж методикою, що й при використанні інтеграла Мора – тобто, якщо переміщення знаходиться в перерізі, який знаходиться на проміжку між границями ділянок, то цей переріз робить з одної ділянки - дві) та визначити місцезнаходження їх центрів ваги.

Зауваження 2: Якщо епюри на ділянці будуть представлені складною фігурою, то її можна розбити на більш прості фігури, площі яких і центри ваги, знаходяться нескладними методами. При цьому кількість членів в сумі буде збільшуватися, тобто зростатиме число "i". Відповідно, можна відзначити, що число "i" у формулі Верещагина не може бути меншим від аналогічного числа при використанні формули Мора.

5. Спроекувати центри ваги площ ω_i на епюри моментів від одиничних навантажень $M'_i(x)$ і знайти на цих проекціях значення моментів M'_{Ci} .
6. Підставити вищевказані вирази у формулу (11.16) та провести необхідні обчислення.

Зауваження 3: Ці дії називають «перемноженням епюр». Зрозуміло, що якщо перемножаються епюри, що лежать по один бік від осі – буде отриманий знак "+". Якщо ж епюри лежать по різні боки, при перемноженні буде отримано знак "-" – тобто відповідний член увійде в суму з від'ємним знаком.

Зауваження 4: В силу того, що спосіб Верещагина є тільки одним із способів розв'язку спрощеного інтеграла Мора, на тих ділянках балки, де епюри $M(x)$ представляють з себе прості фігури, можна використовувати спосіб Верещагина, а на інших ділянках записувати інтеграл Мора. Далі всі вирази підставляти у загальну алгебраїчну суму.

11.10. Приклад використання формули Верещагина для обчислення переміщень при згині

11.10.1. Тестова задача.

Для перевірки способу спочатку розглянемо знаходження переміщень для тієї ж самої навантаженої балки, що й при розгляді застосування спрощеного інтеграла Мора (рис.11.2а). Повторимо цей малюнок (рис.11.3а), побудуємо епюри $M_i(x)$ (рис.11.3б). Виберемо допоміжні балки (рис.11.3в,д), відповідно їх навантажимо та побудуємо епюри $M'_i(x)$ та $M''_i(x)$ (рис.11.3г,е).

Доцільність застосування способу Верещагина виникає тоді, коли епюри моментів від зовнішніх сил, що діють на реальну балку, представляють з себе прості фігури, площу яких та координати центра ваги легко обчислити. Так загальновідомо, що площа трикутника (форма епюр в даному випадку)

обчислюється як напівдобуток основи на висоту. А що до місцезнаходження центра ваги, то він у трикутнику знаходиться на $1/3$ висоти, рахуючи від основи (або на $2/3$ висоти, рахуючи від вершини).

В даному випадку, виконуючи правила використання формули Верещагіна, для визначення прогину y_A отримуємо:

$$\omega = \frac{1}{2} Fl \cdot l = \frac{Fl^2}{2};$$

$$M'_C = 1 \cdot \frac{2}{3} l.$$

Тоді, підставляючи в формулу 11.16. та враховуючи, що перемножаються епюри однакових знаків, матимемо:

$$y_A = \frac{1}{EI} \frac{Fl^2}{2} \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} l = \frac{Fl^3}{3EI}.$$

Тепер визначимо кут повороту θ_A . Площа ω залишається тою ж самою, при цьому навіть відпадає необхідність шукати положення центра ваги з тих міркувань, що епюри одиничних моментів $M''_i(x)$ представляють константу.

Тому, враховуючи, що епюри $M_i(x)$ та $M''_i(x)$ знаходяться по різні боки від осі та мають різні знаки, отримуємо:

$$\theta_A = -\frac{Fl^2}{2EI}.$$

Знак "–" при цьому показує, що реальний кут повороту перерізу в т. А орієнтований за напрямом, протилежним від дії одиничного моменту.

Результати повністю співпали з тими, які ми мали при визначенні переміщень за Мором. Тестова задача довела дієздатність способу.

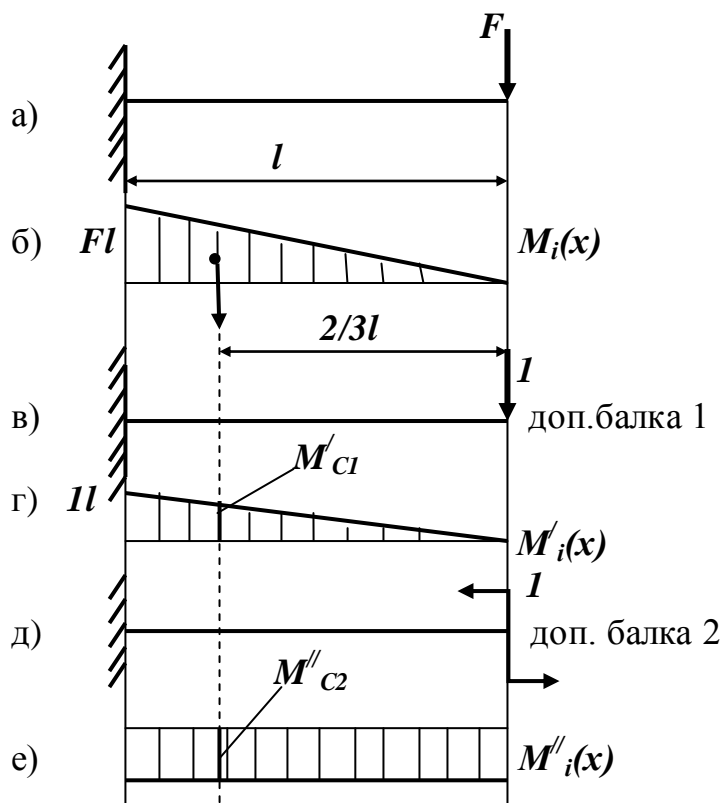


Рисунок 11.3. Визначення переміщень за допомогою способу Верещагіна:

- а) – вигляд реальної навантаженої балки; б) – епюри моментів від зовнішніх сил $M_i(x)$; в) – допоміжна балка для визначення прогинів;
 з) – епюри моментів від одиничної сили; д) – допоміжна балка для визначення кута повороту; е) – епюри моментів від одиничного моменту

11.10.2. Знаходження переміщень у більш складному випадку

Розглянемо більш складний варіант навантаження балки, зображеної на рис.11.4а.

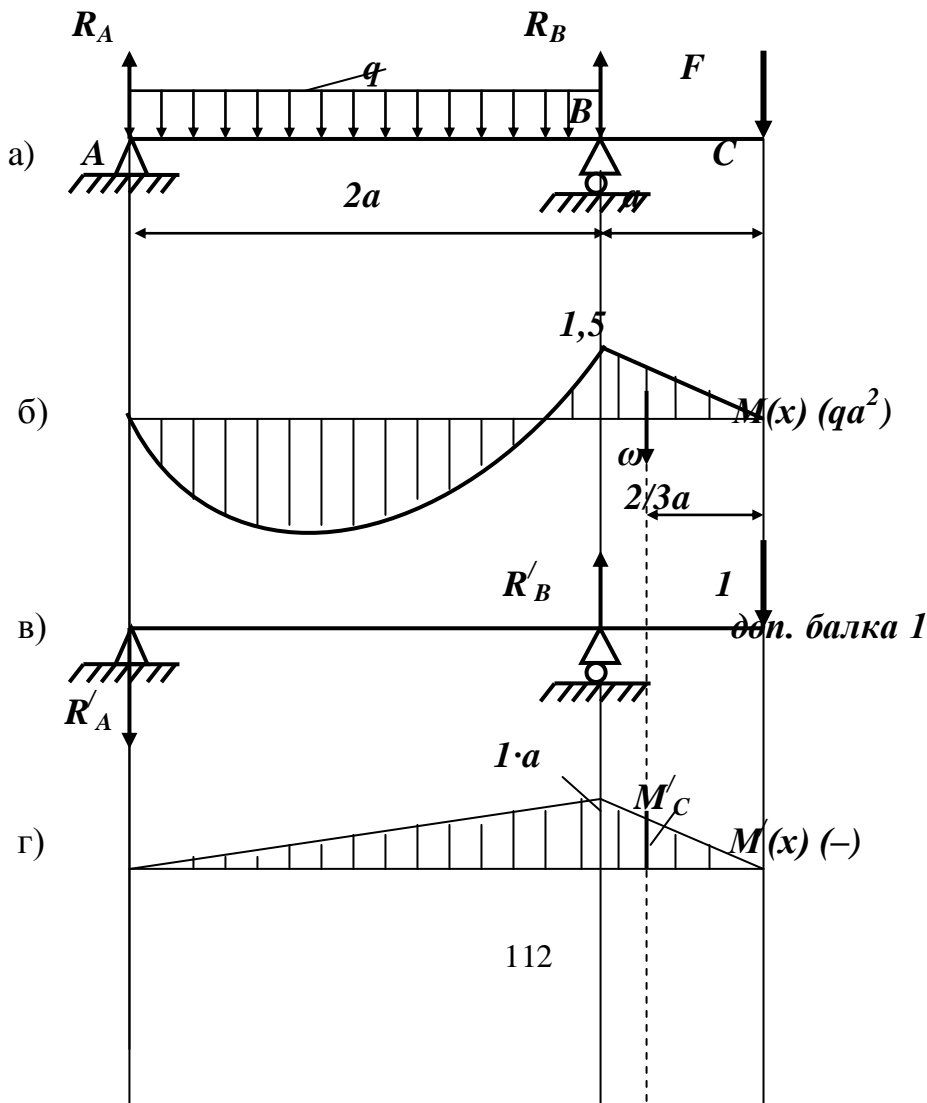
Прийmemo для визначеності $F = 1,5 qa$. Знайдемо в загальному вигляді прогин в т.С – y_C в долях $\frac{qa^3}{EI}$ та кут повороту в т.В – θ_B в долях $\frac{qa^3}{EI}$. Прийmemo, що жорсткість балки є незмінною.

Спочатку, як завжди, треба знайти всі зовнішні сили, що діють на балку, тобто потрібно знайти реакції R_A та R_B (вагою балки в цій задачі ми нехтуємо).

Для знаходження опорних реакцій запишемо рівняння рівноваги:

$$\sum M_A = q \cdot 2a \cdot a + F \cdot 3a - R_B \cdot 2a = 0;$$

$$\sum M_B = q \cdot 2a \cdot a - R_A \cdot 2a - F \cdot a = 0.$$



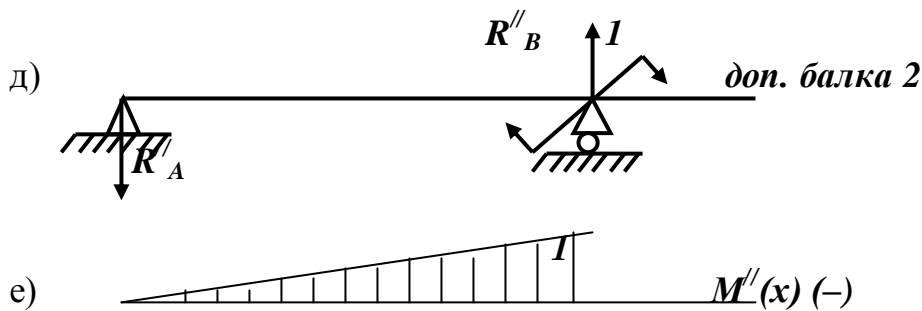


Рисунок 11.4. Визначення переміщень за допомогою спрощеного інтеграла Мора та способу Верещагіна: а) – вигляд реальної навантаженої балки; б) – епюри моментів від зовнішніх сил $M_i(x)$; в) – допоміжна балка для визначення прогинів; г) – епюри моментів від одиничної сили; д) – допоміжна балка для визначення кута повороту; е) – епюри моментів від одиничного моменту

Розв'язуючи їх, знаходимо:

$$R_A = \frac{2qa^2 - 1,5qa^2}{2a} = 0,25qa; \quad R_B = \frac{2qa^2 + 1,5qa^2}{2a} = 1,75qa.$$

Проведемо перевірку:

$$\sum y = R_A - q \cdot 2a + R_B - F = 0,25qa - 2qa + 1,75qa - 1,5qa \equiv 0.$$

Обчислення проведені правильно.

Побудуємо епюри згинаючих моментів для заданої балки (рис.11.4б).

Розв'яжемо першу частину задачі – знайдемо прогин в т.С.

Прогин знаходиться на границі ділянки, тобто кількість ділянок (а на балці їх дві) не змінюється. Очевидно, що на правій ділянці епюри $M_i(x)$ мають дуже простий вигляд. Тому на цій ділянці скористаємося формулою Верещагіна. А на лівій ділянці епюри мають складний вигляд та, крім того, змінюють знак. Тому на лівій ділянці краще скористатись спрощеним інтегралом Мора.

Побудуємо першу допоміжну (для обчислення прогину в т.С) балку (рис.11.4в), навантажимо її одиничною силою в т.С. Знайдемо значення реакцій R'_A та R'_B для першої допоміжної балки. Нескладні обчислення покажуть, що:

$$R'_A = \frac{1}{2}; \quad R'_B = \frac{3}{2}.$$

Побудуємо епюри моментів $M'(x)$ (рис.11.4г).

Тоді вираз для обчислення прогину набуде вигляду:

$$y_C = \frac{1}{EI} \left[\omega \cdot M'_C + \int_0^{2a} \left(R_A \cdot x - \frac{qx^2}{2} \right) \left(-R'_A \cdot x \right) dx \right].$$

Підставляючи дані, проводимо перетворення:

$$\begin{aligned} y_C &= \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 1,5qa \cdot a \cdot 1 \cdot \frac{2}{3}a + \int_0^{2a} \left(0,25qa \cdot x - \frac{qx^2}{2} \right) \left(-\frac{1}{2}x \right) dx \right] = \\ &= \frac{1}{EI} \left[1,5qa^4 + \int_0^{2a} \left(-0,125qa \cdot x^2 + \frac{qx^3}{4} \right) dx \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{EI} \left[1,5qa^4 + \left(-0,125qa \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{qx^4}{16} \right) \Big|_0^{2a} \right] = \\
&= \frac{1}{EI} \left[1,5qa^4 + \frac{2}{3}qa^4 \right] = \frac{13qa^4}{6EI}.
\end{aligned}$$

Аналіз отриманої відповіді показує що:

- розмірність відповідає одиницям довжини;
- додатне значення виразу означає, що напрям переміщення співпадає з напрямом одиничної сили.

Тепер виконаємо другу частину задачі – знайдемо кут повороту θ_B в перерізі на правій опорі (в т.**B**).

Побудуємо другу допоміжну балку та навантажимо її в т.**B** одиничним моментом (рис.11.4д). Побудуємо епюри $M''(x)$ (рис.11.4е). Очевидно, що на правій ділянці момент відсутній, тобто член в сумі, який пов'язаний із правою ділянкою, дорівнює нулю. А член суми, пов'язаний з лівою ділянкою знову запишемо, використовуючи спрощений інтеграл Мора.

Нескладні обчислення опорних реакцій R''_A та R''_B для другої допоміжної балки дають можливість отримати:

$$R''_A = R''_B = \frac{1}{2a}.$$

Тоді вираз для обчислення кута повороту набуде вигляду:

$$\theta_B = \frac{1}{EI} \left[\omega \cdot M''_C + \int_0^{2a} \left(R_A \cdot x - \frac{qx^2}{2} \right) \left(-R''_A \cdot x \right) dx \right].$$

Підставляючи дані, проводимо перетворення:

$$\begin{aligned}
\theta_B &= \frac{1}{EI} \left[0 + \int_0^{2a} \left(0,25qa \cdot x - \frac{qx^2}{2} \right) \left(-\frac{1}{2a} x \right) dx \right] = \\
&= \frac{1}{EI} \left[0 + \int_0^{2a} \left(-0,125q \cdot x^2 + \frac{qx^3}{4a} \right) dx \right] = \\
&= \frac{1}{EI} \left[0 + \left(-0,125q \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{qx^4}{16a} \right) \Big|_0^{2a} \right] = \frac{2qa^3}{3EI}.
\end{aligned}$$

Аналіз отриманої відповіді показує що:

- розмірність відповідає одиницям кута (радіани);
- додатне значення виразу означає, що напрям переміщення співпадає з напрямом одиничного моменту.

Заняття 5. Практичне заняття 3. Тема 14. Стійкість. Поздовжній згин стержнів

Поняття про стійкість стиснутих стержнів. Формула Ейлера для критичної сили. Вплив способу закріплення кінців стержня. Межі застосування

формули Ейлера і побудова повного графіка критичних напружень. Перевірка стиснутих стержнів на стійкість. Приклад розрахунку стиснутого стержня на стійкість. Вибір типу перерізу і матеріалу

14.1. Поняття про стійкість стиснутих стержнів

У попередньому викладі ми визначали поперечні розміри стержнів з умов міцності. Проте руйнування стержня може відбутися не тільки тому, що буде порушена міцність, але і тому, що стержень не збереже тієї форми, яка йому задана конструктором; при цьому зміниться і характер напруженого стану в стержні.

Стійкість – це здатність елементів конструкцій чинити опір зовнішнім навантаженням, зберігаючи первісну форму рівноваги.

Найтиповішим прикладом є робота стержня, стиснутого силами F . До цих пір для перевірки міцності ми мали умову

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq [\sigma],$$

де $[\sigma] = \frac{\sigma_m}{k_m}$ (для пластичного матеріалу), або $[\sigma] = \frac{\sigma_e}{k_e}$ (для крихкого матеріалу).

Ця умова припускає, що стержень весь час, аж до руйнування його напруженнями σ_m або σ_e , працює на осьовий стиск. Вже найпростіший дослід показує, що далеко не завжди можливо зруйнувати стержень шляхом доведення напружень стиску до межі текучості або до межі міцності матеріалу.

Якщо ми піддамо поздовжньому стиску тонку дерев'яну лінійку, то вона може зламатися, зігнувшись; причому перед зламом стискаючі сили, при яких відбудеться руйнування лінійки, будуть значно менше за ті, що викликали б при простому стиску напруження, рівні межі міцності матеріалу. Руйнування лінійки відбудеться тому, що вона не зможе зберегти надану їй форму прямолінійного, стиснутого стержня, а викривиться, що викличе появу згинаючих моментів від стискаючих сил F і, отже, додаткові напруження від згину - лінійка втратить стійкість.

Тому для надійної роботи конструкції мало, щоб вона була міцна; треба, щоб всі її елементи були стійкі: вони повинні при дії навантажень деформуватися в таких межах, щоб характер їх роботи залишався незмінним. Тому у цілому ряді випадків, зокрема, для стиснутих стержнів, крім перевірки на міцність, необхідна і перевірка на стійкість. Для здійснення цієї перевірки треба ближче ознайомитися з умовами, за яких стійкість прямолінійної форми стиснутого стержня порушується.

Візьмемо достатньо довгий в порівнянні з його поперечними розмірами стержень, шарнірно прикріплений до опор (рис.14.1), і навантажимо його згори центральною силою F , що поступово зростає. Очевидно, що, поки сила F порівняно мала, стержень

зберігатиме прямолінійну форму. При спробах відхилити його убік, наприклад шляхом прикладання короткочасно діючої горизонтальної сили, він після ряду коливань повертатиметься до первинної прямолінійної форми, як тільки буде знято додаткове навантаження, що викликало відхилення. При поступовому збільшенні сили F стержень все повільніше повертатиметься до первинного положення при перевірках його стійкості; нарешті, можна довести силу F до такої величини, при якій стержень, після невеликого відхилення його убік, вже не випрямиться, а залишиться викривленим. Якщо, не забираючи сили F , випрямити стержень, він вже, як правило, не зможе зберегти прямолінійну форму. Іншими словами, при цьому значенні сили F , званому *критичним*, F_k , прямолінійна форма перестає бути стійкою формою рівноваги стиснутого стержня.

Перехід до критичного значення сили F відбувається раптово; варто трохи зменшити

стискаючу силу в порівнянні з її критичною величиною, як прямолінійна форма рівноваги знов робиться стійкою.

З другого боку, при дуже невеликому перевищенні стискаючою силою F її критичного значення, прямолінійна форма стержня робиться вкрай нестійкою; достатньо при цьому невеликого ексцентриситету прикладеної сили, неоднорідності матеріалу по перетину, щоб стержень викривився, і не тільки не повернувся до колишньої форми, а продовжував викривлятися під дією все зростаючих при викривленні згинаючих моментів; процес викривлення закінчується або досягненням абсолютно нової (стійкої) форми рівноваги, або руйнуванням.

Виходячи з цього, ми повинні практично рахувати критичну величину стискаючої сили F_k еквівалентній навантаженню, що «руйнує» стиснутий стержень, що виводить його (і пов'язану з ним конструкцію) з умов нормальної роботи. Зазвичай, при цьому треба пам'ятати, що «руйнування» стержня навантаженням, що перевищує критичне, може відбуватися при неодмінній умові безперешкодного зростання викривлення стержня; тому якщо при бічному переміщенні стержень зустріне бічну опору, що обмежує його подальше викривлення, то руйнування може і не наступити.

Звичайно подібна можливість є виключенням; тому практично слід вважати критичну стискаючу силу нижньою межею „руйнуючої” стержень сили.

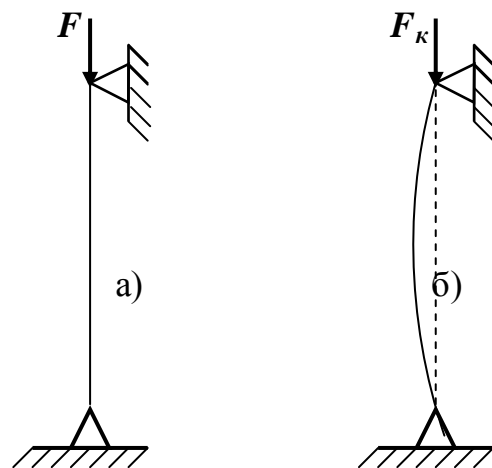


Рис. 14.1. Поздовжньо стиснутий стержень: а) дія докритичної сили; б) дія критичної сили

Описану вище фізичну картину втрати стійкості стиснутим стержнем легко здійснити насправді в будь-якій механічній лабораторії на дуже елементарній установці. Цей опис не є якоюсь теоретичною, ідеалізованою схемою, а відображає поведінку реального стержня під дією стискаючих сил.

Втрату стійкості прямолінійної форми стиснутого стержня іноді називають *поздовжнім згином*., оскільки вона спричиняє за собою значне викривлення стержня під дією подовжніх сил. Для перевірки на стійкість зберігся і дотепер термін *перевірка на поздовжній згин*, що є умовним, оскільки тут мова повинна йти не про перевірку на згин, а про перевірку на стійкість прямолінійної форми стержня.

Встановивши поняття про критичну силу як про «руйнуюче» навантаження, що виводить стержень з умов його нормальної роботи, можна скласти умову для перевірки на стійкість, аналогічну умові міцності.

Критична сила F_k викликає в стиснутому стержні напруження, яке називають *критичним напруженням* і позначають літерою σ_k ($\sigma_k = \frac{F_k}{A_{\text{бр}}}$)

(практика показала, що при розгляді задач стійкості можна не враховувати послаблень площі поперечного перерізу та рахувати площу «брутто» - $A_{\text{бр}}$). Критичне напруження є небезпечним напруженням для стиснутого стержня. Тому, щоб забезпечити стійкість прямолінійну форми стержня, стиснутого

силами F , необхідно до умови міцності $\left(\sigma = \frac{F}{A} \leq [\sigma]\right)$ додати ще умову

стійкості:

$$\sigma = \frac{F}{A_{\text{бр}}} \leq [\sigma_y], \quad (14.1)$$

де $[\sigma_y]$ — допустиме напруження на стійкість, що дорівнює критичному,

поділеному на коефіцієнт запасу стійкості $[\sigma_y] = \frac{\sigma_k}{k_y}$.

Для можливості здійснити перевірку на стійкість треба показати, як визначати σ_k і як вибрати коефіцієнт запасу k_y .

14.2. Формула Ейлера для критичної сили

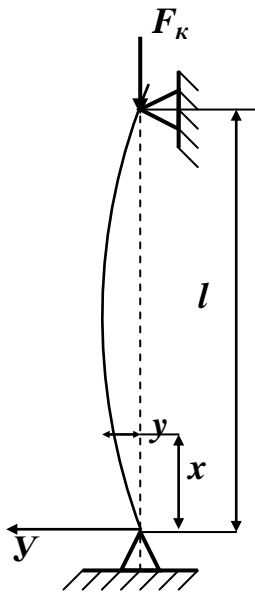
Для знаходження критичних напружень σ_k треба обчислити критичну силу F_k , тобто найменшу осьову стискаючу силу, здатну утримати в рівновазі злегка викривлений стиснутий стержень. Цю задачу вперше вирішив академік Петербурзької Академії наук Л. Эйлер в 1744 році.

Ейлер Леонард (15.04.1707. -18.09.1783) – математик, механік, фізик та астроном, акад. Петер- бурзької АН. Наукові інтереси – до всіх галузей природознавства, до яких можна було прикласти математичні методи досліджень. Наукові праці в галузі варіаційного числення,

теорії розв'язку диференціальних рівнянь, степеневих рядів, спеціальних функцій, гідродинаміці, небесній механіці, теорії теплоти, оптиці, механіці. Заклав основи математичної фізики, механіки твердого тіла. Список наукових праць включає понад 850 найменувань.

Відмітимо, що сама постановка задачі інша, ніж у всіх раніше розглянутих розділах курсу. Якщо раніше ми визначали деформацію стержня при заданих зовнішніх навантаженнях, то тут ставиться зворотня задача: задавши викривлення осі стиснутого стержня, слід визначити, при якому значенні осьової стискаючої сили F таке викривлення можливе.

Розглянемо прямий стержень постійної жорсткості, шарнірно опертий по кінцях; одна з опор допускає можливість поздовжнього переміщення відповідного кінця стержня (Рис. 14.2.). Власною вагою стержня нехтуємо.



Навантажимо стержень центрально прикладеними поздовжньо стискаючими силами $F = F_k$ і дамо йому вельми невелике викривлення в площині якнайменшої жорсткості. Стержень буде утримується у викривленому стані, що є можливим, оскільки $F = F_k$.

Деформація згину стержня припустима вельми малою, тому для вирішення поставленої задачі можна скористатися наближеним диференціальним рівнянням зігнутої осі стержня.

Вибравши початок координат в точці A і напрям координатних осей, як показано на рис. 14.2, матимемо:

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = M(x).$$

Візьмемо перетин на відстані x від початку координат;

ордината зігнутої осі в цьому перетині буде y , а згинаючий момент дорівнюватиме

$$M(x) = -Fy.$$

На схемі, зображеній на рис. 14.2., згинаючий момент є від'ємним, ординати ж при вибраному напрямі осі y виявляються додатними. (Якби стержень викривився, опуклістю в інший бік, то момент був би додатнім, а y — від'ємним, і знов таки $M(x) = -Fy$)

Тоді наближене диференціальне рівняння зігнутої осі балки набуде вигляд:

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = -F_k y. \quad (14.2)$$

Поділяючи обидві частини рівняння на EJ і, позначаючи дріб $\frac{F_k}{EJ}$ через k^2 , приводимо його до вигляду:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 y = 0 . \quad (14.3)$$

Загальний інтеграл цього рівняння має вигляд:

$$y = a \sin kx + b \cos kx . \quad (14.4)$$

Це рішення містить в собі три невідомих: постійні інтегрування a і b і значення $k = \sqrt{\frac{F_k}{EJ}}$, оскільки величина критичної сили нам невідома.

Граничні умови на кінцях стержня дають два рівняння:

у точці А при $x = 0$ прогин $y = 0$;

В при $x = l$ прогин $y = 0$.

З першої умови виходить (оскільки $\sin kx = 0$ і $\cos kx = 1$)

$$0 = b .$$

Таким чином, зігнута вісь стержня є синусоїдою з рівнянням

$$y = a \sin kx . \quad (14.5)$$

Застосовуючи другу умову, підставляємо в це рівняння

$$y = 0 \quad \text{та} \quad x = l$$

і отримуємо:

$$0 = a \sin kl . \quad (14.6)$$

Звідси витікає, що або a або kl рівні нулю.

Якщо a рівне нулю, то з рівняння (14.5) виходить, що прогин в будь-якому перетині стержня рівний нулю, тобто стержень залишився прямим. Це суперечить початковим умовам нашого висновку. Отже, $\sin kl = 0$, і величина kl може мати наступний нескінченний ряд значень:

$$kl = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots, n\pi, \quad (14.7)$$

де n — будь яке ціле число.

Звідси $k = \frac{\pi n}{l}$, а оскільки $k = \sqrt{\frac{F_k}{EJ}}$, то

$$\frac{F_k}{EJ} = \frac{\pi^2}{l^2} \cdot n^2 \quad \text{та} \quad F_k = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} \cdot n^2 . \quad (14.8)$$

Інакше кажучи, навантаження, здатне утримати дещо викривлений стержень в рівновазі, теоретично може мати цілий ряд значень. Але оскільки відшукується (і цікаве з практичної точки зору) найменше значення осьової стискаючої сили, при якій стає можливим подовжній згин, то слід прийняти $n = n_{\min}$.

Перший корінь $n = 0$ вимагає, щоб F_k було рівне нулю, що не відповідає початковим даним задачі; тому цей корінь повинен бути відкинтий і якнайменшим коренем береться значення $n = 1$. Але саме можливість цієї

величини перевищувати значення “1” можна пояснити, наприклад, той випадок, коли за допомогою потужного преса неможливо вдавяти цвях у дерев’яну дошку, в той час, як досвідчений майстер може забити такий цвях одним сильним і точним ударом (запропонувати аудиторії розібратися з цим прикладом).

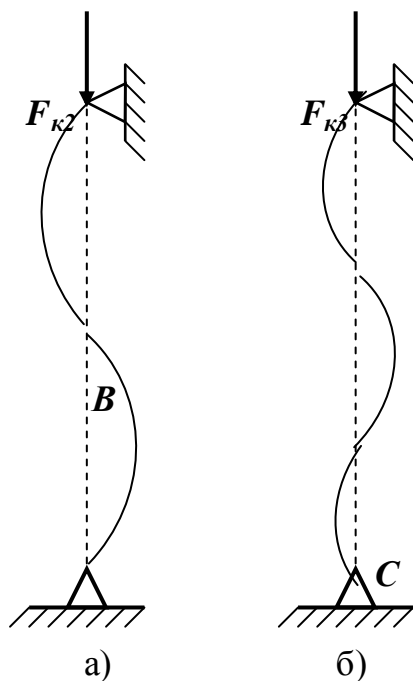
Тоді отримуємо:

$$F_k = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} . \quad (14.9)$$

Це — так звана формула Ейлера для стиснутого стержня з шарнірно-опертими кінцями. Значенню критичної сили (14.9) відповідає вигин стержня по синусоїді з однією напівхвилею (14.5).

$$y = a \sin \frac{\pi x}{l} . \quad (14.10)$$

Значенням критичної сили вищих порядків відповідають викривлення по синусоїдах з двома, трьома і т.д. напівхвилями (рис.14.3.):



$$\left. \begin{aligned} F_k &= \frac{4\pi^2 EJ}{l^2}; k = \frac{2\pi}{l}; y = a \sin \frac{2\pi x}{l}, \\ F_k &= \frac{9\pi^2 EJ}{l^2}; k = \frac{3\pi}{l}; y = a \sin \frac{3\pi x}{l} \end{aligned} \right\} . \quad (14.11)$$

Таким чином, чим більше точок перегину матиме **B** синусоїдально-викривлена вісь стержня, тим більшою повинна бути критична сила. Більш повні дослідження показують, що форми рівноваги, які визначаються формулами (14.11), нестійкі; вони переходять в стійкі форми лише за наявності проміжних опор в точках **B** і **C** (рис.14.3.).

Таким чином, поставлена задача розв’язана; для нашого стержня якнайменша критична сила визначається формулою :

$$F_k = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} ,$$

а зігнута вісь представляє з себе синусоїду:

$$y = a \sin \frac{\pi x}{l} .$$

Рис.14.3. Викривлення осі

а) при $n=2$; б) при $n=3$

Величина постійної інтегрування “а” залишилася невизначеною; фізичне значення її з'ясується, якщо в рівнянні синусоїди покласти $x = l/2$; тоді $y_{x=l/2}$ (тобто посередині довжини стержня) набуде значення:

$$y_{\max} = f = a.$$

Тобто, a — це прогин стержня в перетині посередині його довжини. Оскільки при критичному значенні сили F рівновага зігнутого стержня можлива при різних відхиленнях його від прямолінійної форми (лише б ці відхилення були малими), то природньо, що прогин f залишається невизначеним.

Він повинен бути при цьому настільки малим, щоб ми мали право застосовувати наближене диференціальне рівняння зігнутої осі, тобто щоб $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ було малим в порівнянні з одиницею.

Визначивши значення критичної сили, можна знайти і величину критичного напруження σ_k , розділивши силу F_k на площу перетину стержня A ; оскільки величина критичної сили визначалася з розгляду деформацій стержня, на яких місцеві ослаблення площі перетину позначаються вкрай слабо, то у формулу для F_k входить момент інерції $J_{\text{бп}} = i^2 A_{\text{бп}}$; тому прийнято при обчисленні критичних напружень, а також при складанні умови стійкості вводити в розрахунок повну, а не ослаблену площу поперечного перетину стержня $A_{\text{бп}}$. Тоді

$$\sigma_k = \frac{F_k}{A_{\text{бп}}} = \frac{\pi^2 EJ_{\text{бп}}}{l^2 A_{\text{бп}}} = \frac{\pi^2 E i^2}{l^2} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{l}{i}\right)^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}. \quad (14.12)$$

Таким чином, критичне напруження для стержнів даного матеріалу є обернено пропорційним до квадрата відношення довжини стержня до якнайменшого радіусу інерції його поперечного перетину. Це відношення $\lambda = l/i$ називається гнучкістю стержня і відіграє вельми важливу роль у всіх перевірках стиснутих стержнів на стійкість.

З формули (32.12) видно, що критичне напруження при тонких і довгих стержнях може бути вельми малим, нижчим за основне допустиме напруження $[\sigma]$. Так, для сталі 3 з межею міцності $\sigma_s \approx 400 \text{ МПа}$ та межею текучості $\sigma_m = 240 \text{ МПа}$ напруження, що допускається, може бути прийнято $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$; критичне ж напруження для стержня з гнучкістю $\lambda = 150$ при модулі пружності матеріалу $E = 2 \cdot 10^6 \text{ г/см}^2$ буде дорівнювати:

$$\sigma_k = \frac{\pi^2 \cdot 2 \cdot 10^5}{(150)^2} = 87,7 (\text{МПа}) < 160 \text{ МПа}.$$

Таким чином, якби площа стиснутого стержня з такою гнучкістю була підібрана лише за умовою міцності, то стержень руйнувався б від втрати стійкості прямолінійної форми.

14.3. Вплив способу закріплення кінців стержня

Формула Ейлера була одержана шляхом інтегрування наближеного диференціального рівняння зігнутої осі стержня при певному закріпленні його кінців (шарнірно-опертих). Значить, знайдений вираз критичної сили справедливий лише для стержня з шарнірно-опертими кінцями і зміниться при зміні умови закріплення кінців стержня.

Закріплення стиснутого стержня з шарнірно-опертими кінцями називають основним випадком закріплення. Інші види закріплення приводитимемо до основного випадку.

Якщо повторити весь хід висновку для стержня, жорстко зацімленого одним кінцем і навантаженого осью стискаючою силою на іншому кінці (рис.14.4."б"), то ми одержимо інший вираз для критичної сили, а отже, і для критичних напружень.

Підійдемо до з'ясування критичної сили для цього випадку шляхом наступних простих міркувань. Хай при досягненні силою F критичного значення колона зберігатиме рівновагу при малому вигині по кривій AB . Порівнюючи рис.14.4."а" та 14.4."б", бачимо, що зігнута вісь стержня,

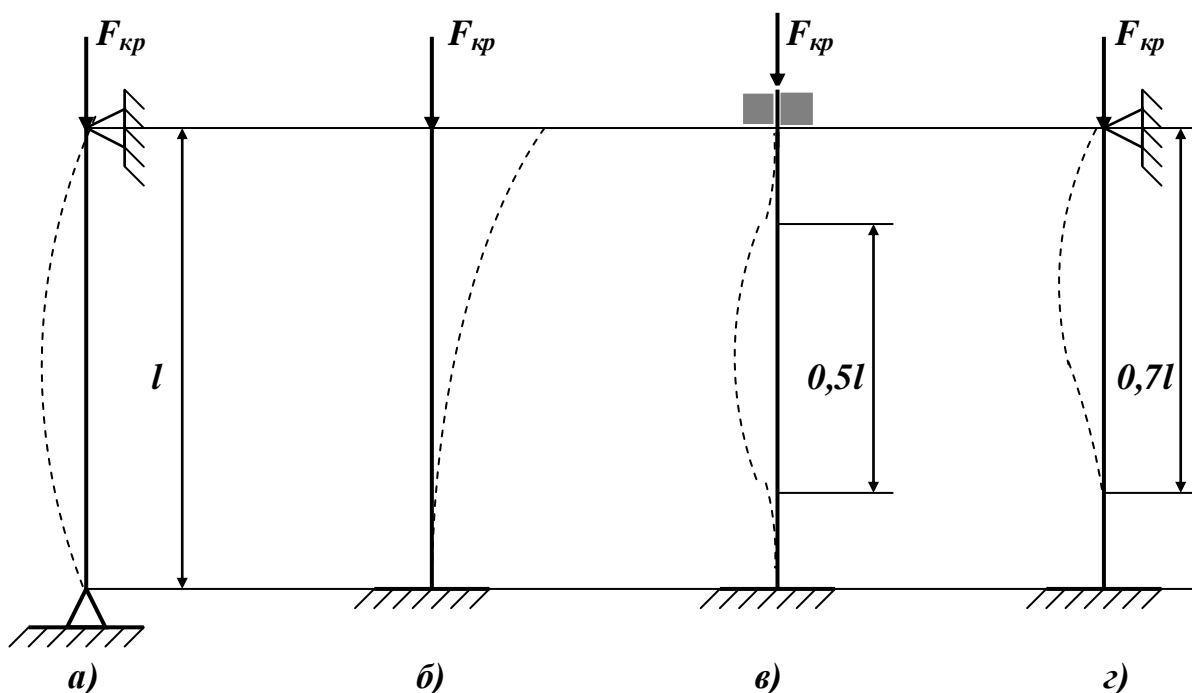


Рис. 14.4. Вигин осі при різних способах закріплення:
 а) $\mu = 1$; б) $\mu = 2$; в) $\mu = 0,5$; г) $\mu = 0,7$

жорстко закріпленого одним кінцем, знаходиться абсолютно в тих же умовах, що і верхня частина стержня подвійної довжини з шарнірно-закріпленими кінцями. Значить, критична сила для стійки завдовжки l з одним жорстко закріпленим, а іншим вільним кінцями буде та ж, що для стійки з шарнірно-опертими кінцями при довжині $2l$:

$$F_k = \frac{\pi^2 EJ}{(2l)^2} = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2}. \quad (14.13)$$

Якщо звернутися до випадку стійки, у якої обидва кінці жорстко закріплені і не можуть повертатися (рис.14.4."в"), то помітимо, що при вигині, за симетрією, середня частина стержня, завдовжки $\frac{l}{2}$, працюватиме в тих же умовах, що і стержень при шарнірно-опертих кінцях (оскільки в точках перегину C і D згинаючі моменти рівні нулю, то ці точки можна розглядати як шарніри).

Тому критична сила для стержня із жорстко закріпленими кінцями, довжиною l , рівна критичній силі для стержня основного випадку завдовжки

$$\frac{l}{2}: \quad F_k = \frac{\pi^2 EJ}{\left(\frac{l}{2}\right)^2} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}. \quad (14.14)$$

Формули (14.13) і (14.14) можна об'єднати з формулою для критичної сили основного випадку $P_k = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$ і записати:

$$F_k = \frac{\pi^2 EJ}{(\mu l)^2}; \quad (14.15)$$

тут μ — так званий, коефіцієнт приведення довжини, рівний відповідно:

при шарнірних кінцях (основний випадок) $\mu = 1$;

» одному вільному, іншому жорстко зацімленому $\mu = 2$;

» обох жорстко закріплених $\mu = 1/2$.

Для стержня, зображеного на рис.14.4."г", з одним жорстко закріпленим, а іншим шарнірно-опертим кінцями, коефіцієнт μ виявляється приблизно рівним $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,7$ а критична сила:

$$F_k \approx \frac{\pi^2 EJ}{(0,7l)^2} \approx 2 \frac{\pi^2 EJ}{l^2}. \quad (14.16)$$

Величина μl називається *приведеною (вільною) довжиною*; за допомогою коефіцієнта приведення довжини будь-який випадок конкретного виконання опор стержня можна звести до основного; треба лише при обчисленні гнучкості замість дійсної довжини стержня ввести в розрахунок приведену довжину μl . Поняття про приведену довжину було, вперше введено

професором Петербурзького інституту інженерів шляхів сполучення Ф. Ясинським.

Ясинський Фелікс Станіславович - (15.09.1856- 18.11.1899). Інженер та вчений в галузі будівельної механіки та теорії пружності. Був начальником технічного відділу Петербурзько-Московської залізниці, професором Петербурзького інституту інженерів шляхів сполучень, а також викладав в інших інститутах. Один з засновників розрахунків на стійкість. Вказав на необхідність введення коефіцієнта зменшення основного допустимого напруження. Його теорія суттєво вплинула на подальші розрахунки в галузі теорії стійкості.

На практиці, проте, майже ніколи не зустрічаються в чистому вигляді ті закріплення кінців стержня, які ми маємо на наших розрахункових схемах (рис. 14.4. "а", "б", "в", "г"). Замість кульових опор зазвичай застосовуються циліндричні шарніри. Подібні стержні слід рахувати шарнірно-опертими при вигині їх в площині, перпендикулярній до осі шарнірів; при викривленні ж в площині цих осей кінці стержнів слід вважати жорстко закріпленими (з урахуванням зауважень, приведених нижче для жорстко закріплених кінців).

У конструкціях дуже часто зустрічаються стиснуті стержні, кінці яких приклепані або приварені до інших елементів, часто ще з додаванням в місці прикріплення листів фасонів. Таке закріплення, проте, важко вважати жорстким закріпленням, оскільки частини конструкції, до яких прикріплені ці стержні, самі можуть не бути абсолютно жорсткими.

Тим часом, достатньо можливості вже невеликого повороту опорного перерізу в жорсткому закріпленні, щоб воно опинилося в умовах, дуже близьких до шарнірного. Тому на практиці неприпустимо розраховувати такі стержні, як стійки з абсолютно жорстко закріпленими кінцями. Лише в тих випадках, коли має місце дуже надійне закріплення кінців, допускається невелике (відсотків на 10—20) зменшення вільної довжини стержня.

Нарешті, на практиці зустрічаються стержні, що опираються на сусідні елементи по всій площині опорних поперечних перетинів. Сюди відносяться дерев'яні стійки, окремо поставлені металеві колони, притягнуті болтами до фундаменту, і т.п. При ретельному конструюванні опорного черевика і з'єднання його з фундаментом можна вважати ці стержні такими, що мають жорстко закріплений кінець. Сюди ж відносяться могутні колони з циліндричним шарніром при розрахунку їх на вигин в площині осі шарніра. Звичайно ж важко розраховувати на надійне і рівномірне прилягання плоского, кінцевого перетину стиснутого стержня до опори. Тому вантажопідйомність

таких стійок звичайно мало перевищує вантажопідйомність стержнів з шарнірно-опертими кінцями.

14.4. Межі застосування формули Ейлера і побудова повного графіка критичних напружень

Здавалося б, що одержані в попередніх параграфах результати вирішують задачу перевірки стиснутого стержня на стійкість і залишається вибрати лише коефіцієнт запасу k_y . Проте це далеко не так. Найближче ж вивчення числових величин, отриманих за формулою Ейлера, показує, що вона дає правильні результати лише у певних межах.

У таблиці 14.1. приведені величини критичних напружень, обчислених при різних значеннях гнучкості для сталі Ст3, яка, як правило використовується в металевих конструкціях.

Графічно залежність σ_k від λ , розрахована за формулою (14.12) представлена на рис.14.5. Ця залежність представляється гіперболічною кривою, так званою «гіперболою Ейлера». При використанні цієї кривої треба враховувати, що формула (14.12) одержана за допомогою інтегрування диференціального рівняння зігнутої осі балки, тобто в припущенні, що напруження в стержні у момент втрати стійкості не перевищують межі пропорційності.

Критичні напруження σ_k .

Таблиця 14.1.

Значення гнучкості $\lambda = \frac{\mu l}{i}$	Критичні напруження σ_k при $E=2 \cdot 10^5$ МПа
150	$\sigma_k = \frac{\pi^2 \cdot 2 \cdot 10^5}{(150)^2} = 87,7$ (МПа)
100	$\sigma_k = \frac{\pi^2 \cdot 2 \cdot 10^5}{(100)^2} = 200$ (МПа)
80	$\sigma_k = \frac{\pi^2 \cdot 2 \cdot 10^5}{(80)^2} = 330$ (МПа)
50	$\sigma_k = \frac{\pi^2 \cdot 2 \cdot 10^5}{(50)^2} = 800$ (МПа)

Отже, ми не маємо права користуватися величинами критичних напружень, обчислених за формулою Ейлера, якщо вони виходять більшими за цю межу для даного матеріалу. Інакше кажучи, формула Ейлера може бути застосована лише при дотриманні умови: або

$$\frac{\pi^2 EJ}{\lambda^2} \leq \sigma_{ny} \quad (14.17)$$

Якщо з нерівності (14.17) виразити гнучкість λ , то умова можливості використання формули Ейлера одержить інший вигляд:

$$\lambda_n \geq \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{\text{мц}}}} . \quad (14.18)$$

Підставляючи відповідні значення модуля пружності і межі пропорційності для даного матеріалу, знаходимо найменше значення гнучкості, при якій ще можна користуватися формулою Ейлера. Для сталі 3 межу пропорційності може бути прийнято рівною $\sigma_{\text{мц}} = 200 \text{ МПа}$, тому, як видно з таблиці 14.1. і з формули (14.18) для стержнів з цього матеріалу можна користуватися формулою Ейлера лише при гнучкості

$$\lambda_n \geq \sqrt{\frac{\pi^2 2 \cdot 10^5}{200}} \approx 100 ,$$

тобто більшої, ніж 100.

Для сталі 5 при $\sigma_{\text{мц}} = 300 \text{ МПа}$ формула Ейлера може бути застосована при гнучкості $\lambda \geq 85$; для чавуну — при $\lambda \geq 80$, для сосни — при $\lambda \geq 110$ і т.д. Якщо на рис. 14.5. провести горизонтальну лінію з ординатою, рівною $\sigma_{\text{мц}} = 200 \text{ МПа}$, то вона розітне гіперболу Ейлера на дві частини; користуватися можна лише нижньою частиною графіка, що характеризує поведінку порівняно тонких і довгих стержнів, втрата стійкості яких відбувається при напруженнях, не вищих за межу пропорційності.

Теоретичне рішення, одержане Ейлером, виявилось здатним до застосування на практиці лише для дуже обмеженої категорії стержнів, а саме, тонких і довгих, з великою гнучкістю. Тим часом, в конструкціях дуже часто зустрічаються стержні з малою гнучкістю. Спроби використовувати формулу Ейлера для обчислення критичних напружень і перевірки стійкості при малих гнучкостях приводили іноді до вельми серйозних катастроф, та й досліди над стиском стержнів показують, що при критичних напруженнях, більших від межі пропорційності, дійсні критичні сили є значно меншими від визначених за формулою Ейлера.

Таким чином, треба знайти спосіб обчислення критичних напружень і для тих випадків, коли вони перевищують межу пропорційності матеріалів, наприклад, для стержнів з м'якої сталі при гнучкостях від 0 до 100.

Необхідно зразу ж відзначити, що в даний час найважливішим джерелом для встановлення критичних напружень за межею пропорційності, тобто за умов малих і середніх гнучкостей, є результати експериментів. Є спроби і теоретичного рішення цієї задачі, але вони швидше вказують шлях до подальших досліджень, ніж дають підстави для практичних розрахунків.

Перш за все треба виділити стержні з малою гнучкістю, (від 0 приблизно до 30—40) у них довжина порівняно невелика по відношенню до розмірів поперечного перетину. Наприклад, для стержня круглого перетину гнучкості 20 відповідає відношення довжини до діаметру, рівне 5. Для таких стержнів важко

говорити про явище втрати стійкості прямолінійної форми всього стержня в цілому в тому значенні, як це має місце для тонких і довгих стержнів.

Ці короткі стержні виходитимуть з ладу головним чином за рахунок того, що напруження стиску в них досягатимуть межі текучості σ_m (для пластичного матеріалу) або межі міцності σ_s (для крихкого матеріалу). Тому для коротких стержнів, до гнучкості приблизно $30 \div 40$, критичні напруження будуть рівні, або трохи нижчі (за рахунок певного викривлення осі стержня, що все ж таки має місце), відповідно або σ_m (сталь), або σ_s (чавун, дерево).

Таким чином, маємо два граничні випадки роботи стиснутих стержнів: короткі стержні, які втрачають вантажопід'ємність в основному за рахунок руйнування матеріалу від стиску, і довгі, для яких втрата вантажопід'ємності викликається порушенням стійкості прямолінійної форми стержня. Кількісна зміна співвідношення довжини і поперечних розмірів стержня змінює і весь характер явища руйнування. Загальним залишається лише раптовість появи критичного стану в розумінні раптового різкого зростання деформацій.

У стиснутих стержнях великої гнучкості, для яких може бути застосована формула Ейлера, після досягнення силою P критичного значення зазвичай спостерігається різке зростання деформацій. До цього моменту прогини, як правило, збільшуються із зростанням навантаження, але залишаються незначними. Теоретично можна б було чекати, що до критичної сили стержень залишатиметься прямим; проте ряд неминучих на практиці обставин — початкова кривизна стержня, деякий ексцентриситет навантаження, місцеві перенапруження, неоднорідність матеріалу — викликають невеликі прогини і при стискаючих силах, менших за критичні.

Подібний же характер має і залежність укорочень від напружень при стиску коротких стержнів; має місце та ж раптовість зростання деформацій при певній величині напружень (коли $\sigma = \sigma_m$).

Залишається тепер розглянути поведінку стиснутих стержнів при середніх величинах гнучкості, наприклад для сталевих стержнів при гнучкостях від 40 до 100; з подібними значеннями гнучкостей інженер найчастіше зустрічається на практиці.

За характером руйнування ці стержні наближаються до категорії тонких і довгих стержнів; вони втрачають свою прямолінійну форму і руйнуються при явищах значного бічного вигинання. При досліді для них можна наголосити на наявності явно вираженої критичної сили в «ейлеровому» значенні; критичні напруження виходять вище за межу пропорційності і нижче за межу текучості для пластичних і межу міцності для крихких матеріалів.

Проте втрата прямолінійної форми і зменшення критичних напружень у порівнянні з короткими стержнями, для стержнів середньої гнучкості пов'язані з такими ж явищами втрати міцності матеріалу, які викликають втрату вантажопід'ємності в коротких стержнях. Тут комбінуються і вплив довжини, що знижує величину критичних напружень, і вплив значного зростання деформацій матеріалу при напруженнях за межею пропорційності.

Експериментальне визначення критичних сил для стиснутих стержнів проводилося неодноразово як у нас, так і за кордоном. Особливо значний дослідний матеріал зібрав проф. Ф. Ясинський, що склав таблицю критичних (руйнуючих) напружень залежно від гнучкості для цілого ряду матеріалів, що поклало початок сучасним методам розрахунку стиснутих стержнів на стійкість.

На підставі одержаного дослідного матеріалу можна вважати, що при критичних напруженнях, менших межі пропорційності, всі експерименти підтверджують формулу Ейлера для будь-якого матеріалу.

Для стержнів середньої і малої гнучкості були запропоновані різні емпіричні формули, що показують, що критичні напруження при таких гнучкостях змінюються за лінійним законом розподілу:

$$\sigma_k = a - b\lambda \quad , \quad (14.19)$$

де a і b — коефіцієнти, залежні від матеріалу, а $\lambda = \frac{\mu l}{i}$ — гнучкість стержня.

Для литого заліза Ясинській одержав: $a = 338,7 \text{ МПа}$, $b = 1,487 \text{ МПа}$. Для сталі 3 при гнучкостях від $\lambda = 40$ до $\lambda = 100$ коефіцієнти a і b можуть бути прийняті: $a = 336,0 \text{ МПа}$; $b = 1,47 \text{ МПа}$. Для дерева (сосна): $a = 29,3 \text{ МПа}$, $b = 0,194 \text{ МПа}$.

Дані про коефіцієнти “а” і “b” для інших матеріалів приводяться в довідниках. Іноді зручні емпіричні формули, що дають для непружної області зміну критичних напружень за законом квадратної параболи; до них відноситься формула

$$\sigma_k = \sigma_0 - a\lambda^2 \quad . \quad (14.20)$$

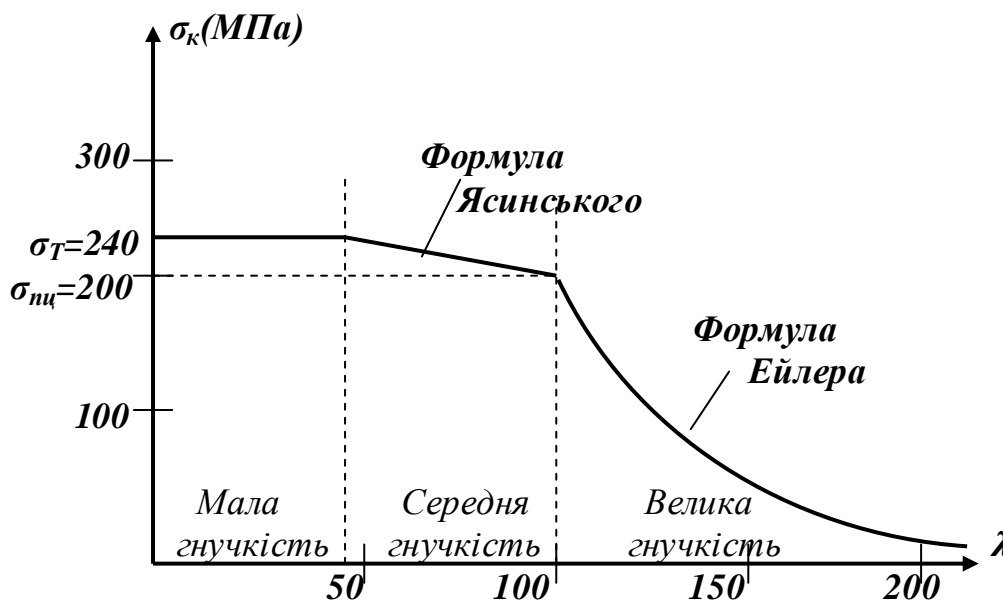


Рис.14.5. Ілюстрація меж застосування формули Ейлера та формули Ясинського

Тут при $\lambda = 0$ рахують $\sigma_k = \sigma_0 = \sigma_m$ для пластичного і $\sigma_k = \sigma_0 = \sigma_e$ для крихкого матеріалу; коефіцієнт a , підібраний з умови плавного сполучення з гіперболою Ейлера, має значення:

для сталі з межею текучості	$\sigma_m = 280,0 \text{ МПа}$	$a = 0,009 \text{ МПа}$
сосни » міцності	$\sigma_e = 300$	$a = 0,008$
чавуну » »	$\sigma_e = 4200$	$a = 0,44$

За наявності приведених тут даних може бути побудований повний графік критичних напруг (залежно від гнучкості) для .любого матеріалу. На рис.14.5. приведений такий графік для будівельної сталі з межею текучості $\sigma_m = 240,0 \text{ МПа}$ і межею пропорційності $\sigma_{m\pi} = 200 \text{ МПа}$.

Графік складається з трьох частин: гіперболи Ейлера при $\lambda > 100$, похилої прямої при $40 \leq \lambda \leq 100$ і горизонтальної, або слабко похилої, прямої при $\lambda \leq 40$. Подібні ж графіки можна побудувати, комбінуючи формулу Ейлера з результатами експериментів, і для інших матеріалів.

Таким чином, можна вважати, що задача визначення критичних напружень для стержнів будь-якої гнучкості вирішена з достатньою для практичних цілей точністю.

14.5. Перевірка стиснутих стержнів на стійкість

Раніше відзначалось, що для стиснутих стержнів повинно бути проведено дві перевірки: на міцність $\sigma = \frac{F}{A} \leq [\sigma]$, де $[\sigma] = \frac{\sigma_0}{k_0}$;

та на стійкість $\sigma = \frac{F}{A_{op}} \leq [\sigma_y]$, де $[\sigma_y] = \frac{\sigma_k}{k_y}$.

Величина критичного напруження σ_k знайдена вище; для встановлення напруження, що допускається на стійкість, нам залишається тепер вибрати тільки коефіцієнт запасу k . В інженерній практиці цей коефіцієнт коливається для сталі в межах від 1,8 до 3,0. Коефіцієнт запасу на стійкість вибирається вище за основний коефіцієнт запасу міцності k_0 , який вибирається для сталі, як правило, в межах $1,5 \div 2$.

Це пояснюється наявністю ряду обставин, неминучих на практиці (початкова кривизна, ексцентриситет дії навантаження, неоднорідність матеріалу і т. д.) і майже не відображаються на роботі конструкції при інших видах деформації (кручення, згин, розтяг). Для стиснутих же стержнів, зважаючи на можливість втрати стійкості, ці обставини можуть сильно понизити вантажопід'ємність стержня. Для чавуну коефіцієнт запасу коливається від 5,0 до 5,5, для дерева — від 2,8 до 3,2.

Щоб встановити зв'язок між допустимим напруженням на стійкість $[\sigma_y]$ і напруженням, що допускається на міцність $[\sigma]$, візьмемо їх відношення:

$$\frac{[\sigma_y]}{[\sigma]} = \frac{\sigma_k k_0}{k_y \sigma_0} \quad \text{або} \quad [\sigma_y] = \frac{\sigma_k}{\sigma_0} \cdot \frac{k_0}{k_y} [\sigma].$$

Позначаючи $\varphi = \frac{\sigma_k}{\sigma_0} \cdot \frac{k_0}{k_y},$ (14.21)

одержимо: $[\sigma_y] = \varphi [\sigma];$ (14.22)

тут φ — коефіцієнт зменшення основного напруження, що допускається, для стиснутих стержнів.

Маючи графік залежності σ_k від λ для даного матеріалу, знаючи $\sigma_n = \sigma_m$ або $\sigma_n = \sigma_e$, і вибравши коефіцієнти запасу на міцність k_0 і на стійкість k_y , можна скласти таблиці значень коефіцієнта φ функції від гнучкості. Такі дані приводяться в технічних умовах на проектування споруд; вони зведені в таблицю 14.2.

Користуючись цією таблицею, можна провести підбір перерізу стиснутого стержня. Оскільки величина площі перерізу залежить від $[\sigma_y]$, а це напруження у свою чергу через коефіцієнт φ пов'язане з гнучкістю стержня λ , тобто з формою і розмірами його перерізу, то підбір доводиться здійснювати шляхом послідовних наближень в такому, наприклад, порядку.

Вибираємо форму перерізу і задаємося його розмірами; обчислюємо якнайменший радіус інерції і гнучкість; знаходимо в таблиці коефіцієнт φ

Залежність коефіцієнтів зменшення основного допустимого напруження φ від матеріала та гнучкості λ .

Таблиця 14.2.

Гнучкість $\lambda = \frac{\mu l}{i}$	Значення коефіцієнта зменшення основного допустимого напруження φ для				
	сталі марок 4, 3, 2, ОС	сталі марки 5	сталі СПК	чавуну	дерева
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
10	0,99	0,98	0,97	0,97	0,99
20	0,96	0,95	0,95	0,91	0,97
80	0,94	0,92	0,91	0,81	0,93
40	0,92	0,89	0,87	0,69	0,87
50	0,89	0,86	0,83	0,57	0,80
60	0,86	0,82	0,79	0,44	0,71
70	0,81	0,76	0,72	0,34	0,60
80	0,75	0,70	0,65	0,26	0,18
90	0,69	0,62	0,55	0,20	0,38
100	0,60	0,51	0,43	0,16	0,31

110	0,52	0,43	0,35	—	0,25
120	0,45	0,36	0,30	—	0,22
140	0,40	0,33	0,26	—	0,18
140	0,36	0,29	0,23	—	0,16
150	0,32	0,26	0,21	—	0,14
160	0,29	0,24	0,19	—	0,12
170	0,23	0,21	0,17	—	0,11
180	0,23	0,19	0,15	—	0,10
190	0,21	0,17	0,14	—	0,09
300	0,19	0,16	0,14	—	0,08

та обчислюємо напруження, що допускається, на стійкість $[\sigma_y] = \varphi[\sigma]$

порівнюємо дійсне напруження $\sigma = \frac{F}{A_{\sigma p}}$ з величиною $[\sigma_y]$; якщо умову

стійкості:

$$\sigma = \frac{F}{A_{\sigma p}} \leq \varphi[\sigma] \quad (14.23)$$

не задоволено, або задоволено з великим запасом, міняємо розміри перерізу і повторюємо розрахунок.

Звичайно, остаточно вибраний перетин повинен задовольняти і умові

міцності:

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq [\sigma].$$

У практичних розрахунках умова стійкості іноді записується так:

$$\sigma_p = \frac{F}{\varphi A_{\sigma p}} \leq [\sigma].$$

У лівій частині σ_p є розрахунковим (умовним) напруженням.

14.6. Приклад розрахунку стиснутого стержня на стійкість

Потрібно підібрати двотавровий перетин стійки з одним жорстко защемленим кінцем, а другим вільним, що стискається силами $F = 0,4 \text{ МН}$; довжина стійки $l = 1,5 \text{ м}$. Основне напруження, що допускається $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ (рис.14.6.).

Оскільки в умові стійкості $\sigma_p = \frac{F}{\varphi A_{\sigma p}} \leq [\sigma]$

нам не відоме ні $A_{\sigma p}$, ні φ , однією з цих величин необхідно задатися. Прийmemo для першого наближення $\varphi = 0,5$. В цьому випадку необхідна площа поперечного перерізу стержня буде рівна

$$A_{\sigma p} \geq \frac{F}{\varphi[\sigma]} \quad \text{або} \quad A_{\sigma p} = \frac{0,4}{0,5 \cdot 160} = 50 \cdot 10^{-4} (\text{м}^2)$$

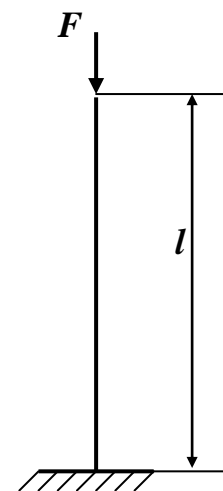


Рис.14.6. Схема навантаження

За сортаментом вибираємо двотавр № 24, з площею $A = 52,6 \text{ см}^2$.
Найменший радіус інерції перерізу

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{A}} = 2,38 \text{ (см)} .$$

Відповідна гнучкість стійки

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{2 \cdot 150}{2,38} = 126 .$$

Коефіцієнт φ за інтерполяцією між значеннями його з таблиці 14.2 для $\lambda = 120$ і $\lambda = 130$ дорівнює $\varphi = 0,43$. Розрахунковим напруженням буде:

$$\sigma_p = \frac{F}{\varphi \cdot A} = \frac{0,4}{0,43 \cdot 52,6 \cdot 10^{-4}} = 177 \text{ (МПа)} > 160$$

Перенапруження складає: $\frac{177 - 160}{160} \cdot 100 = 10,7\%$

Спробуємо двотавр № 27, а. $A = 54,6 \text{ см}^2$; $i_{\min} = 2,51 \text{ см}$; найбільша його гнучкість $\lambda = \frac{2 \cdot 150}{2,51} = 120$. Оскільки коефіцієнт $\varphi = 0,45$, та розрахункове напруження

$$\sigma_p = \frac{F}{\varphi A} = \frac{0,4}{0,45 \cdot 54,6 \cdot 10^{-4}} = 162,5 \text{ (МПа)}$$

Перенапруження складає тепер $\frac{162,5 - 160}{160} \cdot 100 = 1,5\%$, що є допустимим.

14.7. Вибір типу перерізу і матеріалу

14.7.1. Вибір типу перерізу.

Так як в опорі стержнів подовжньому згину (порушенню стійкості) основну роль відіграє гнучкість стержня, а отже, величина найменшого радіусу інерції перерізу, то дуже істотним є питання не тільки про *величину площі поперечного перерізу* стержня, як при розрахунку на міцність, але і про *форму поперечного перерізу*.

Якщо приведена довжина стержня при можливому викривленні в обох головних площинах буде різною, то і головні моменти інерції теж доцільно вибрати різними з таким розрахунком, щоб коефіцієнти φ були в обох випадках однаковими.

Далі необхідно прагнути отримання при даній площі найбільших центральних моментів інерції. Для цього необхідно розмістити матеріал перерізу по можливості далі від центру ваги. Обом поставленим умовам цілком задовольняє, наприклад, трубчастий перетин (рис.14.7.“а”), який дуже часто застосовується для стиснутих колон і стійок.

Нижня межа товщини стінок такого перерізу визначається або можливістю конструктивного виконання відливання (чавун), або тим, щоб при роботі стержня не відбулося місцевих деформацій тонкої стінки — її викривлення.

Для запобігання таких, місцевих пошкоджень, щоб забезпечити при роботі стержня збереження прийнятої форми перерізу (кільце), усередині трубчастого стержня розташовують систему посилень, наприклад, на деякій відстані одну від другої ставлять так звані діафрагми, що додають жорсткість тонкостінному профілю (Рис. 14.7."б"). Взагалі при правильному конструюванні стиснутих стержнів пристрій додаткових кріплень грає вельми велику роль.

Деякі види перетинів, що чудово чинять опір вигину в одній площині, як це буває при роботі балок, виявляються дуже не вигідними при застосуванні їх для стиснутих стержнів; такими, наприклад, є двотавровий перетин, перетин з двох швелерів, стінки яких розташовані впритул одна до іншої (Рис. 14.7."в").

Невигідність подібних перетинів при роботі на подовжній вигин обумовлена великою різницею у величинах їх головних моментів інерції. Щоб уникнути цього недоліку, можна розсунути обидві половинки перерізу з двох швелерів для того, щоб примусити всі перетини працювати як одне ціле - їх з'єднують за допомогою так званих сполучних ґрат (Рис. 14.8).

Необхідною умовою безпечної роботи таких складових стержнів

є пристрій достатньо жорсткого кріплення (ґрати, планки), щоб дійсно заставити обидві половини працювати сумісно, як один цілий стержень; тільки в цьому випадку ми матимемо право вводити в розрахунок момент інерції відносно однієї осі. Якщо ж два могутні швелери скріпляти дуже слабкими ґратами, то вони не зможуть примусити їх працювати спільно).

Кожна половина стержня працюватиме самостійно, стійкість її виявиться у багато разів меншою стійкості стержня, в якому обидві половини є одним цілим. Недостатня увага до пристрою надійних кріплень в складових стержнях була причиною серйозних катастроф (руйнування Квебекського моста в Америці).

При конструюванні складового стержня відстань b , на яку треба розсунути обидві половини стержня, визначається, тим, щоб моменти інерції щодо обох головних осей y і z були приблизно рівні. Зазвичай навіть прагнуть момент інерції щодо осі, перпендикулярної до площини-ґрати, зробити дещо

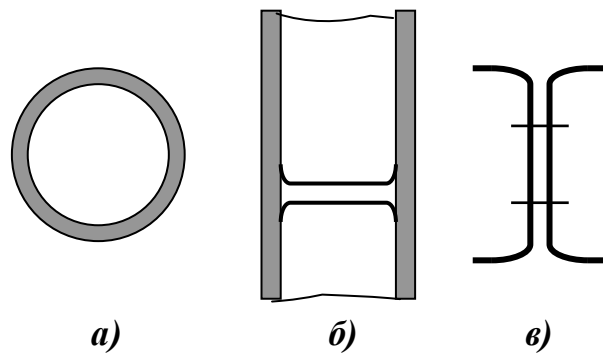


Рис.14.7. Аналіз доцільності використання деяких перерізів: а)- кільце; б)- місцеве підсилення; в)- комбінація швелерів

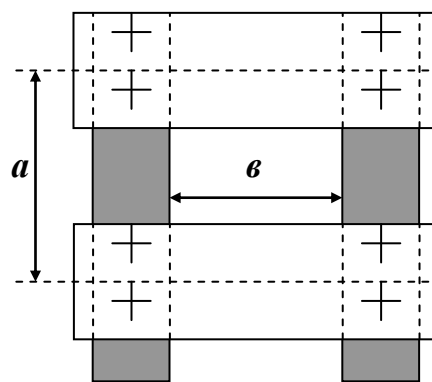


Рис.14.8. Сполучені ґрати

більшим, оскільки грати не можуть забезпечити спільну роботу обох половин стержня так само добре, начебто перетин був одне ціле.

14.6.2. Вибір матеріалу.

Що стосується вибору матеріалу для стиснутих стержнів, це обумовлюється наступними міркуваннями. Поки критичні напруження не перевершують межі пропорційності матеріалу, єдиною механічною характеристикою, що визначає здатність стержня зберігати стійкість, є модуль пружності E .

Тим часом для стержнів середньої і особливо малої гнучкості величина критичних напружень залежить в значній мірі від межі текучості або межі міцності матеріалу. Цими обставинами і слід керуватися при виборі матеріалу для стиснутих стержнів великої і малої гнучкості.

Так, наприклад, застосування спеціальних сортів сталі підвищеної міцності для тонких і довгих стиснутих стержнів не має значення, оскільки модуль E для всіх сортів сталі приблизно один і той же.

Навпаки, застосування високоякісних сталей виявиться дуже вдалим для стержнів з критичними напруженнями, що перевищують межу пропорційності, бо для таких стержнів підвищення межі текучості викличе зростання критичних напружень, а отже, підвищить опір втраті стійкості. На рис.14.9. зображено наближене розташування графіків залежності σ_k від гнучкості для маловуглецевої сталі і сталі підвищеної якості з межею текучості $\sigma_m = 300 \text{ МПа}$.

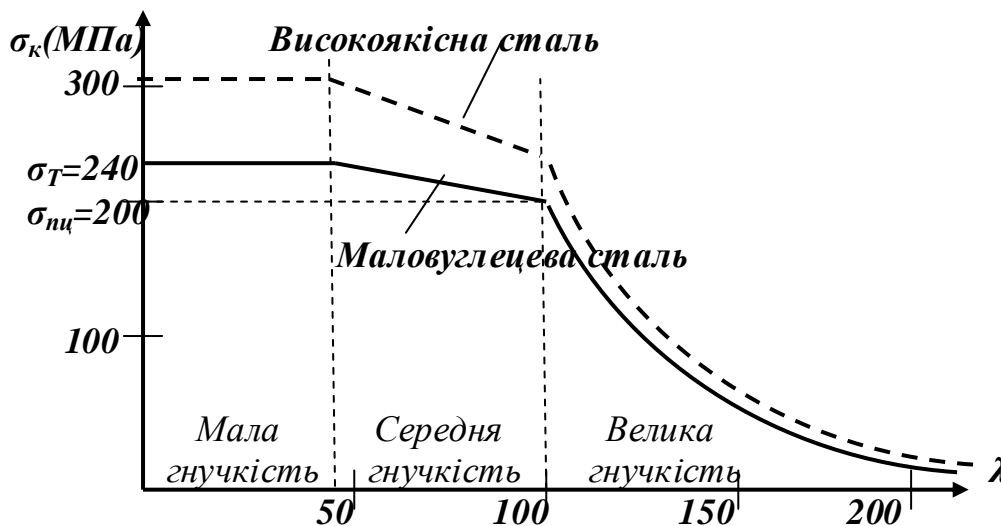


Рис.14.9. Вибір критичних напружень для різних сортів сталей

З графіків видно, що критичні, а отже, і допустимі напруження для обох сортів сталі будуть однаковими для стержнів з гнучкістю $\lambda > 100$. І, навпаки, вони істотно відрізняться для стержнів з меншими гнучкостями.

Заняття 6. Лекція 3. Тема 15. Динаміка. Тема 16. Опір матеріалів дії повторно-змінних напружень

Введення. Врахування сил інерції. Обчислення напружень при рівноприскореному русі. Розрахунок кільця, що обертається (обід маховика). Обчислення напружень при коливаннях. Власні коливання. Коливання за наявності збурюючої сили.

Явище втомленості матеріалів. Методи визначення межі витривалості. Симетричні та несиметричні цикли. Діаграми втомленості. Діаграма граничних напружень

15.1. Врахування сил інерції та коливань. Введення

Дотепер ми вирішували основну задачу опору матеріалів, визначали розміри поперечних перерізів частин конструкції і вибирали для них матеріал лише при *статичній* дії навантажень.

Статична дія навантажень має місце, коли при передачі тиску від однієї частини конструкції на іншу (або при дії об'ємних сил) механічний рух цих частин не змінюється з часом. У цьому випадку кожний елемент конструкції знаходиться в рівновазі під дією зовнішніх навантажень і напружень.

Постійність руху характеризується тим, що швидкість даних деталей і кожної їх частини не змінюється — відсутнє прискорення частинок цих елементів. Наявність же прискорення частинок даного тіла або сумісних з ним деталей характеризує вже дію *динамічного навантаження*. Так, тиск землі на підпірну стінку буде статичним навантаженням, оскільки ні стінка, ні земляна маса не рухаються, — швидкість їх постійна і рівна нулю.

Так само статичною буде дія вантажу, що піднімається, на канат при постійній швидкості підйому вантажу. Але ця дія буде вже динамічною, якщо вантаж піднімається з прискоренням. Під дією динамічного навантаження знаходяться шатуни парових машин і двигунів внутрішнього згорання, оскільки окремі елементи їх рухаються зі змінною швидкістю. Як інший приклад конструкції, що працює в умовах динамічного навантаження, можна привести фундамент машини, яка має частини, що обертаються, розташовані позацентрово щодо осі обертання, — вони відчуватимуть відцентрове прискорення; можна вказати, також, на фундамент і шток парового молота, оскільки бойок молота при куванні втрачає свою швидкість за дуже короткий період часу, що пов'язано з наданням йому вельми великих прискорень від'ємного знаку.

Вже з цих прикладів видно, що на практиці ми можемо зустрічатися з різними видами прискорення даної деталі або дотичних з нею тіл; воно може бути постійним за величиною і напрямком або тільки за напрямком; може бути знакозмінним.

При змінних і знакозмінних напруженнях ми зустрічаємося з явищем руйнування від *тріщини*, що поступово розвивається, — з явищем *втоми*. При

різкій зміні швидкості руху елемента конструкції, коли, наприклад, має місце явище удару, може виявитися *крихкість* в таких матеріалах, які при статичній дії навантажень вважалися пластичними. Тому при перевірці міцності деталей конструкції, що піддаються дії динамічних навантажень, доводиться цікавитися впливом цих навантажень не тільки на величину напружень в деталі, але і на здатність матеріалу чинити опір.

Вплив прискорень точок деталей конструкції на напружений стан матеріалу може бути врахований таким чином. Якщо якесь тіло рухається з прискоренням, то це значить, що на нього передаються (до нього прикладені) сили від інших тіл; за законом рівності дії і протидії воно передає на ці тіла реакції, рівні прикладеним силам і протилежно спрямовані, так звані сили інерції. Це міркування може бути застосовано також і до кожного елемента тіла, що рухається з прискоренням - цей елемент передаватиме на прилеглі частини матеріалу зусилля, рівні силі інерції цього елемента.

Таким чином, при прискореному русі частин конструкції в них виникають додаткові цілком реальні напруження, які еквівалентні статичним напруженням, викликаним силами інерції; від кожного елемента стержня на сусідні частини матеріалу передаватимуться такі напруження, нібито до нього була прикладена відповідна сила інерції.

Звідси одержуємо практичне правило для визначення напружень в частині конструкції, точки якої мають прискорення: треба обчислити ці прискорення і на додаток до зовнішніх сил, що діють на даний елемент конструкції, навантажити його відповідними силами інерції. Далі слід вести розрахунок так, як ніби на об'єкт, що досліджується, діє статичне навантаження.

Тут треба розрізняти три випадки:

1. Якщо величина і розташування зовнішніх сил, прикладених до даного елемента, не залежать від його деформацій, якщо ці деформації не змінюють характеру руху стержня, то прискорення його точок обчислюються за правилами кінематики твердого тіла, і облік динамічних дій зводиться до додаткового статичного навантаження відповідними силами інерції. Це має місце в більшості практично важливих випадків (за винятком удару).
2. Якщо при цьому прискорення змінюватиметься, то, як правило, виникнуть коливання даної частини конструкції, які можуть в деяких випадках привести до резонансу, що пов'язано з різким збільшенням деформацій і напружень. Ці напруження можуть досягати вельми великої величини і додаватимуться до тих, які враховуються шляхом введення в розрахунок статичного навантаження силами інерції.
3. Можуть бути випадки (удар), коли величина прискорень, а значить, і відповідних сил інерції залежатиме від деформації даних елементів; у цьому випадку при обчисленні сил інерції доводиться використовувати і дані опору матеріалів.

Спосіб перевірки міцності для кожного з випадків покажемо на прикладах.

15.2. Обчислення напружень при рівноприскореному русі

Рішення задачі про перевірку міцності при динамічних навантаженнях почнемо з найпростішого випадку, коли точки даної частини конструкції мають постійне прискорення, що не викликає коливань; прикладом візьмемо рівноприскорений підйом вантажу Q , підвішеного на сталевому тросі площею A ; об'ємна вага матеріалу троса рівна γ ; вантаж підіймається з прискоренням a

(рис.15.1). Знайдемо напруження в довільному перерізі на відстані x від нижнього кінця троса. "Розріжемо" трос в цьому перерізі і розглянемо нижню відсічену частину. Вона рухатиметься вгору з прискоренням a ; значить, на неї від верхньої частини троса передаватиметься крім сили, що врівноважує її вагу, ще направлена вгору сила, рівна добутку її маси на прискорення a , тобто $\frac{Q + \gamma Ax}{g} a$, де g - прискорення сили тяжіння.

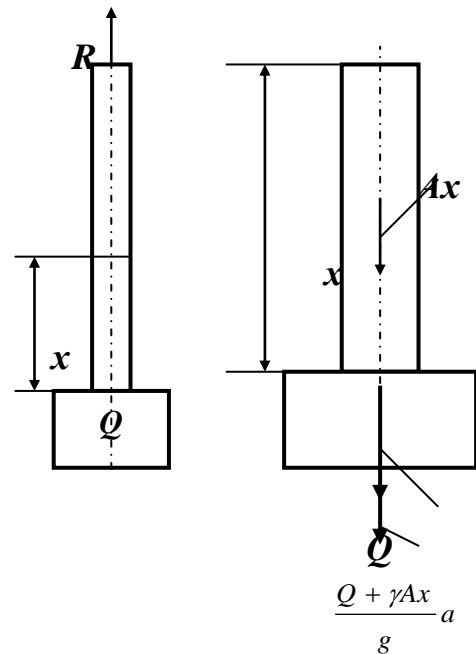


Рис.15.1. Навантаження троса

За законом рівності дії і протидії на верхню частину від нижньої передаватиметься така ж сила, але направлена вниз.

Таким чином, динамічні напруження σ_d , що діють по виділеному перерізу на нижню частину, врівноважуватимуть не тільки статичне навантаження $Q + \gamma Ax$, але і додаткову силу $\frac{Q + \gamma Ax}{g} a$; щоб обчислити ці напруження σ_d , треба розглянути рівновагу виділеної нижньої частини під дією статичного навантаження $Q + \gamma Ax$ і сили інерції $\frac{Q + \gamma Ax}{g} a$, спрямованої вниз (рис.15.1). Тоді

$$\sigma_d = \frac{Q + \gamma Ax}{A} + \frac{Q + \gamma Ax}{gA} a = \frac{Q + \gamma Ax}{A} \left(1 + \frac{a}{g} \right),$$

де дріб $\frac{Q + \gamma Ax}{A}$ є статичним напруженням σ_c в проведеному перерізі; тому

$$\sigma_d = \sigma_c \left(1 + \frac{a}{g} \right). \quad (15.1)$$

Тобто динамічне напруження дорівнює статичному, помноженому на коефіцієнт $(1 + \frac{a}{g})$. Ця величина $(1 + \frac{a}{g})$ називається *динамічним коефіцієнтом* K_d :

$$\sigma_d = K_d \sigma_c . \quad (15.2)$$

Такий вид формули для динамічних напружень пояснює, чому ми, головним чином, надавали увагу обчисленню напружень при статичній дії навантаження - в дуже багатьох випадках динамічні напруження можуть бути виражені через статичні шляхом множення на відповідний динамічний коефіцієнт.

Умова міцності набуде вигляду:

$$\sigma_{d \max} = \sigma_{c \max} \left(1 + \frac{a}{g} \right) = K_d \sigma_c \leq [\sigma] .$$

Звідси

$$\sigma_{c \max} \leq \frac{[\sigma]}{1 + \frac{a}{g}} = \frac{[\sigma]}{K_d} . \quad (15.3)$$

Таким чином, можна у ряді випадків *динамічний розрахунок замінити статичним*, знизивши тільки величину допустимого напруження, на динамічний коефіцієнт K_d .

Так поступають в тих випадках, коли при розрахунку виявляється важким теоретичне визначення динамічного коефіцієнта, і доводиться користуватися його значеннями, одержаними з експериментів. Так само, наприклад, враховується динамічність тимчасового навантаження, що діє на мости.

15.3. Розрахунок кільця, що обертається (обід маховика)

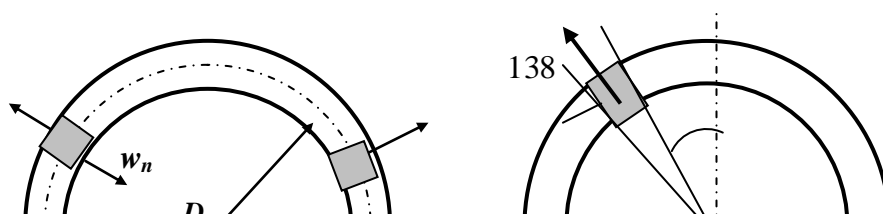
Як другий приклад розглянемо обчислення напружень у кільці постійного перерізу, що швидко обертається (рис 15.2а). З відомим наближенням в подібних умовах, якщо нехтувати впливом спиць, знаходиться обід маховика.

Позначимо через A — площу поперечного перерізу кільця; γ — об'ємну вагу матеріалу; n — число обертів в одиницю часу; ω — кутову швидкість обертання; D — діаметр осі кільця.

Виділимо елемент кільця завдовжки ds . При обертанні кільця цей елемент рухається по колу з постійною кутовою швидкістю ω .

Кутове прискорення ε рівне нулю, тому тангенціальне прискорення елемента дорівнює $\omega_t = \varepsilon \frac{D}{2} = 0$; радіальне ж (доцентрове) прискорення

елементу рівне $\omega_n = \frac{\omega^2 D}{2}$ і спрямовано до центру кільця.



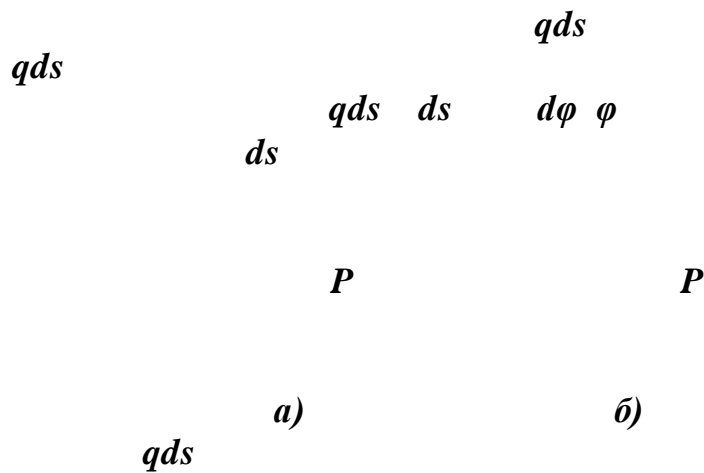


Рис. 15.2. Розподіл сил у кільці, що обертається: а) ціле кільце; б) навантаження в перерізі

Щоб обчислити напруження σ_δ , треба до кожного виділеного елементу кільця прикласти його силу інерції. Вона спрямована назовні і рівна

$$\omega_n \frac{F\gamma}{g} ds = \frac{F\gamma}{g} \frac{\omega^2 D}{2} ds = qds,$$

де q — інтенсивність сил інерції на одиницю довжини обода. Таким чином, в кільці розвинуться такі напруження, неначе воно було завантажено радіальним навантаженням інтенсивності q на одиницю довжини (рис.15.2б). Зусилля P , що розтягують обід, дорівнюють :

$$P = \frac{Dq}{2}.$$

Напруження σ_δ рівне:

$$\sigma_\delta = \frac{P}{F} = \frac{Dq}{2F} = \frac{DF\gamma}{2gF} \cdot \frac{\omega^2 D}{2} = \frac{\gamma\omega^2 D^2}{4g} = \frac{\gamma v^2}{g},$$

де $v = \omega \frac{D}{2}$ — колова швидкість точок кільця. Таким чином напруження в ободі маховика залежить лише від об'ємної ваги матеріалу і лінійної швидкості частин ободу. Щоб оцінити можливу величину цих напружень, зробимо підрахунок при певних реальних числових даних:

$$n = 360 \text{ об / хв}; \quad D = 4 \text{ м}; \quad \gamma = 75 \text{ кН / м}^3$$

Кутова швидкість в секунду $\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{2\pi \cdot 360}{60} = 12\pi$; напруження дорівнює:

$$\sigma_\delta = \frac{\gamma\omega^2 D^2}{4g} = \frac{75 \cdot 144 \pi^2 \cdot 16}{4 \cdot 9,81} = 43,5 \cdot 10^3 \text{ (кН / м}^2\text{)} = 43,5 \text{ (МПа)}$$

Це досить вагома величина.

15.4. Обчислення напружень при коливаннях

15.4.1. Власні коливання

Пружна система, виведена яким-небудь шляхом з рівноваги, приходить в коливальний рух. Коливання відбуваються біля положення пружної рівноваги, при якій в навантаженій системі мали місце статичні деформації δ_c і відповідні їм статичні напруження p_c (σ_c або τ_c —в залежності від виду деформації). При коливаннях до статичних деформацій додаються динамічні, що залежать від виду коливального руху і від величини розмаху (амплітуди) коливання. У зв'язку з цим змінюються і напруження p_c . Таким чином, при розрахунку системи, що коливається, на міцність необхідно вміти обчислювати динамічні добавки до статичних деформацій і відповідних їм напружень.

У багатьох випадках характер коливань системи може бути визначений якою-небудь однією величиною (однією координатою). Такі системи називаються системами з одним ступенем свободи. Це можуть бути, наприклад, розтягнута або стиснута незначної ваги пружина з вантажем на кінці, що скоює поздовжні коливання; невеликої (порівняно з вантажем Q) власної ваги балка, зображена на рис 15.4., що коливається в напрямі, перпендикулярному до її осі, і т.п.

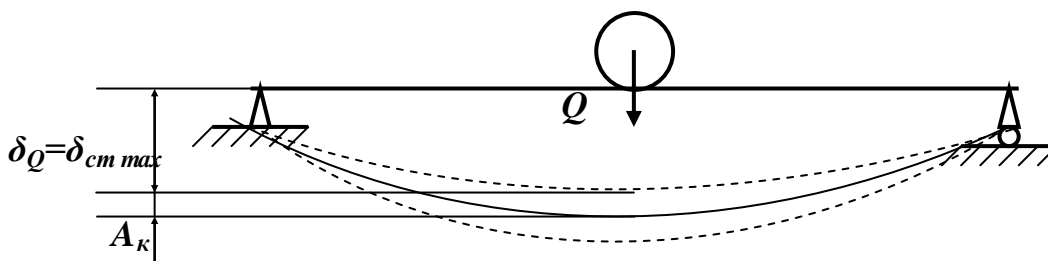


Рис. 15.4. Коливання пружної системи з одним ступенем свободи

При коливаннях систем з одним ступенем свободи повні деформації системи в якому-небудь перетині можуть бути знайдені шляхом складання статичної деформації з додатковою деформацією при коливаннях. Для перевірки міцності системи, очевидно, необхідно знайти найбільш небезпечне січення з найбільшою в процесі коливань сумарною величиною деформації. У найпростіших випадках для цього буде потрібно скласти найбільшу статичну деформацію $\delta_{c \max}$ з найбільшою амплітудою коливань A_k , тобто

$$\delta_d = \delta_{c \max} + A_k = \delta_{c \max} \left(1 + \frac{A_k}{\delta_{c \max}} \right) = K_d \delta_{c \max} . \quad (15.4)$$

Поки система деформується в межах пружності, напруження пропорційні деформаціям. Тому:

$$p_d = p_c \left(1 + \frac{A_k}{\delta_{c \max}} \right) = K_d p_c ,$$

$$\text{Де} \quad K_{\delta} = 1 + \frac{A_{\kappa}}{\delta_{c \max}} \quad (15.5)$$

— коефіцієнт динамічності при коливаннях.

Умова міцності в цьому випадку повинна мати такий вигляд:

$$p_{\delta} = K_{\delta} p_c \leq [p] \quad (15.6)$$

Таким чином, як при врахуванні сил інерції, що не змінюють свого напрямку, задача знаходження динамічних напружень і перевірки міцності при коливаннях може бути зведена до визначення статичних напружень і коефіцієнта динамічності K_{δ} . Оскільки останній залежить від величини A_{κ} , то потрібно вміти визначати найбільше значення амплітуди коливань в різних випадках.

Як відомо, диференціальне рівняння руху вантажу Q , що коливається, у разі вільних коливань можна представити у вигляді рівняння рівноваги, в якому окрім зовнішньої сили (вага вантажу Q) і сили пружного опору системи враховується також і сила інерції:

$$\frac{Q}{g} x'' + P - Q = \frac{Q}{g} x'' + P_1 = \frac{Q}{g} x'' + cx = 0 \quad (15.7)$$

Тут x — координата, що повністю визначає положення вантажу Q під час коливань; P — повний пружний опір системи при коливаннях; $P - Q = P_1$ — так звана поновлююча сила (додаткове пружне зусилля, що виникає в системі в результаті переміщення точки додатку вантажу Q на відстань x при коливаннях), яку в межах пружності можна вважати пропорційній координаті x ($P_1 = cx$); c — коефіцієнт пропорційності, що є зусиллям, необхідним для того, щоб викликати рівну одиниці статичну деформацію системи у напрямі дії вантажу Q . Якщо статична деформація від вантажу Q рівна δ_Q , то

$$c = \frac{Q}{\delta_Q}.$$

Розв'язок рівняння (15.7) приводить до таких формул для обчислення частоти власних коливань ω_0 і періоду t_0 вільних коливань:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{gc}{Q}} = \sqrt{\frac{g}{\delta_Q}} \quad \text{та} \quad t_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{\delta_Q}{g}}.$$

Вільні коливання невагомго тіла є простими гармонійними коливаннями з частотою (періодом), що дорівнює частоті (періоду) коливань математичного маятника, довжина якого дорівнює статичній деформації системи від вантажу Q . Так, наприклад, якщо вантаж Q розтягує призматичний стержень:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\Delta l}} = \sqrt{\frac{gEF}{Ql}}.$$

При вигині балки на двох шарнірних опорах вантажем Q посередині прольоту

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{f_{\max}}} = \sqrt{\frac{48 EJg}{Ql^3}}.$$

І так далі.

15.4.2. Коливання за наявності збурюючої сили

Якщо на пружну систему, окрім вантажу Q і сили пружного опору системи P , в тому ж напрямі діє періодично змінна збурююча сила S і сила опору середовища R , то диференціальне рівняння руху вантажу Q при коливаннях також може бути представлено у вигляді рівняння рівноваги, подібного рівнянню (15.7):

$$\frac{Q}{g}x'' + P - Q - S + R = \frac{Q}{g}x'' + P_1 - S + R = \frac{Q}{g}x'' + cx - S + R = 0 \quad (15.8)$$

Силу опору середовища R на практиці в досить великому числі випадків можна вважати пропорційною першому ступеню швидкості коливального руху, $R = rx'$. Якщо збурююча сила S змінюється за синусоїдальним законом:

$$S = H \sin \omega t,$$

де $H = S_{\max}$; а ω — частота збурюючої сили, то рівняння (15.8) може бути переписано так:

$$\frac{Q}{g}x'' + rx' + cx = H \sin \omega t. \quad (15.9)$$

Тут $n = \frac{rg}{2Q}$ — так званий коефіцієнт загасання коливань, а ω_0 — знайдена вище частота вільних коливань системи, що виникають як за відсутності збурюючої сили S , так і сили опору R .

Рішення рівняння (15.9) приводить до такого виразу для амплітуди A_k вимушених коливань за наявності сил опору:

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{H}{\frac{Q}{g}\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2) + 4n^2\omega^2}} = \frac{gH}{Q\omega_0^2} \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right]^2 + \left(\frac{n}{\omega_0}\right)^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right]^2 + \left(\frac{n}{\omega_0}\right)^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}. \end{aligned} \quad (15.10)$$

Тут

$$\frac{gH}{Q\omega_0^2} = \frac{gH}{Q} \cdot \frac{\delta_Q}{g} = \frac{H}{Q} \delta_Q = \delta_H$$

— статична деформація системи від найбільшої величини збурюючої сили S ($S_{\max} = H$).

Відношення амплітуди вимушених коливань A_k до величини деформації δ_H називається коефіцієнтом наростання коливань β :

$$\beta = \frac{A_k}{\delta_H} = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + 4\left(\frac{n}{\omega_0}\right)^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}. \quad (15.11)$$

Таким чином, формула (15.5) для динамічного коефіцієнта K_δ приймає тепер такий вигляд:

$$K_\delta = 1 + \frac{A_k}{\delta_{c \max}} = 1 + \frac{\delta_H}{\delta_Q} \beta. \quad (15.12)$$

У цьому виразі не врахована амплітуда власних коливань системи, яка може мати певне істотне значення лише на самому початку процесу коливань; при наявності сил опору вона досить швидко зменшується з часом.

На рис.15.5. приведені графіки зміни коефіцієнта наростання коливань β залежно від величини відношення $\frac{\omega}{\omega_0}$ при різних значеннях коефіцієнта загасання коливань n (відношення $\frac{n}{\omega_0}$).

Якщо частота зміни збурюючої сили близька до частоти вільних коливань системи, тобто $\frac{\omega}{\omega_0} \approx 1$ і, якщо величина коефіцієнту згасання коливань порівняно невелика, то знаменники формул (15.7) і (15.11) для A_k і β будуть дуже малими, амплітуда коливань і коефіцієнт наростання коливань будуть дуже великими (рис.15.5). У цьому випадку навіть невелика збурююча сила може викликати високі напруження (явище резонансу). Із збільшенням сил опору явище резонансу стає все менш помітним. Помітимо, проте, що сили опору значно зменшують величину амплітуди вимушених коливань тільки поблизу від резонансу $\left(0,75 \leq \frac{\omega}{\omega_0} \leq 1,25\right)$; при інших величинах відношення $\frac{\omega}{\omega_0}$ вплив сил опору незначний.

З формул (15.10), (15.11) і (15.18) і рис.15.5. видно, що якщо частота ω зміни збурюючої сили S дуже мала, то амплітуда коливань наближається до величини δ_H ; коефіцієнт наростання коливань прямує до одиниці і найбільші напруження в системі можуть бути обчислені як статичні напруження від вантажу Q і найбільшого значення збурюючої сили $S(S_{\max} = H)$. При дуже великій частоті зміни збурюючої сили S амплітуда коливань і коефіцієнт наростання коливань прямують до нуля, вантаж Q можна розглядати як

нерухомий; тому найбільше напруження в системі дорівнює статичному напруженню від вантажу Q .

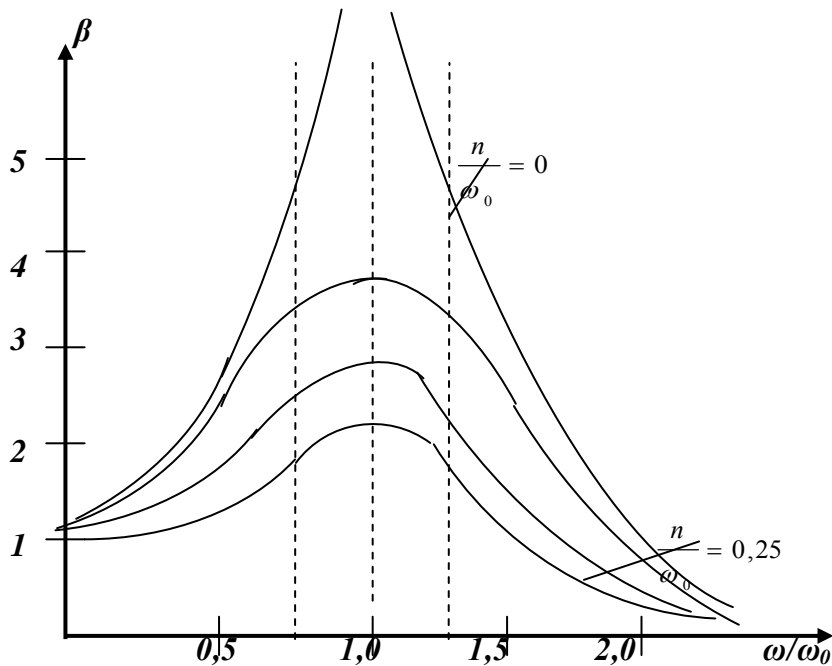


Рис.15.5. Залежність коефіцієнта наростань коливання β від співвідношення частот власних та вимушених коливань

Ця обставина має дуже велике практичне значення; вона використовується при конструюванні різного роду погашувачів коливань, сейсмографів, вібрографів і інших приладів. У машинобудуванні амортизатори, що оберігають основи машин від зусиль, що виникають при коливаннях, підбираються так, щоб частота власних коливань машини на амортизаторах була *значно меншою* від частоти зміни збурюючої сили.

16.1. Явище «втомленості» матеріалів

Опір матеріалів дії навантажень, змінних в часі за величиною або за величиною і знаком, істотно відрізняється від опору дії статичного навантаження. При цьому під дією змінних навантажень елементи конструкцій руйнуються за значно меншими рівнями напружень, ніж під дією статичних навантажень. Типовим прикладом деталі, що знаходиться під дією змінних навантажень, є шток поршневої машини, знак напружень в якому змінюється відповідно до зміни напрямку руху поршня.

Практикою встановлено, що якщо елемент конструкції багато разів піддавати змінному навантаженню певного рівня, то після деякого числа змін напружень в ньому з'явиться тріщина, яка поступово розвиватиметься. Врешті-решт деталь руйнуватиметься, не маючи при цьому помітних залишкових деформацій навіть у тому випадку, коли її матеріал високо пластичний.

Число циклів до появи першої тріщини і до повного руйнування стержня буде тим більше, чим менше напруження. Характерно, що руйнування матеріалу під дією повторно змінних навантажень може відбутися при напруженнях, нижчих від межі текучості. Руйнування матеріалу під дією повторно змінних напружень називається *руйнуванням від втомленості (втоми)*.

Взагалі ж втомленістю (або втомою) матеріалів (зокрема, металів) називають явище руйнування в результаті поступового накопичування в них пошкоджень, що приводять до виникнення втомної тріщини при багатократному повторенні навантажень.

Здатність металів чинити опір руйнуванню при дії повторно змінних напружень називається *витривалістю* матеріалу.

Вивчення питань утомленості в опорі матеріалів має надзвичайно велике значення. Такі відповідальні деталі, як осі залізничних вагонів, колінчасті вали, шатуни двигунів, веслувальні гвинти, клапанні пружини, повітряні гвинти, поршневі пальці і багато інших деталей, виходять з ладу головним чином внаслідок руйнувань втомного характеру.

Втомне руйнування спостерігається за наявності однієї з наступних двох особливостей додатку навантаження:

- 1) багатократного додатку навантаження одного знака, наприклад періодичного, що змінюється від нуля до максимуму (рис.16.1а);
- 2) багатократного повторення навантаження, що періодично змінюється не тільки за величиною, але і за знаком (знакозмінного навантаження), коли на витривалість матеріалу одночасно впливають і повторність, і змінність навантаження. При цьому розрізняють зміну навантаження за симетричним циклом (рис.16.1б) й зміну навантаження за несиметричним циклом (рис.16.1в,г).

Для руйнування від втомленості недостатньо змінності напружень. Необхідно також, щоб напруження мали певну величину.

Максимальне напруження, при якому матеріал здатний чинити опір, не руйнуючись, при будь-якому довільно великому числі повторень змінних напружень, називається межею витривалості або межею втомленості.

Злам деталі від втомленості має характерний вигляд. На ньому майже завжди можна спостерігати дві зони. Одна з них гладка, притерта, утворена внаслідок поступового розвитку тріщини; інша — грубозерниста, утворилася при остаточному зламі послабленого розвинутою тріщиною перерізу деталі. Ця зона у крихких деталей має крупнокристалічну, а у в'язких — волокнисту будову.

Розглянемо хоча б дещо спрощено механізм явища втомленості. Всі метали, що використовуються в техніці, є полікристалічними речовинами, що складаються з окремих зерен і не представляють з себе того однорідного моноліту, яким вважають матеріал згідно основним гіпотезам опору матеріалів.

Зерна технічних металів є сукупністю кристалів, які мають неправильну огранку, їх звичайно називають кристалітами.

Полікристалічність матеріалу і неминуча його неоднорідність призводять до того, що під дією тих або інших навантажень в окремих зернах виникають перенапруження і створюються можливості появи мікротріщин. При цьому у разі напружень, викликаних статичними навантаженнями, подібні мікротріщини не є небезпечними. Якщо ж напруження змінні в часі, то має місце тенденція до розвитку мікротріщин, що приводить зрештою до втомного зламу деталі.

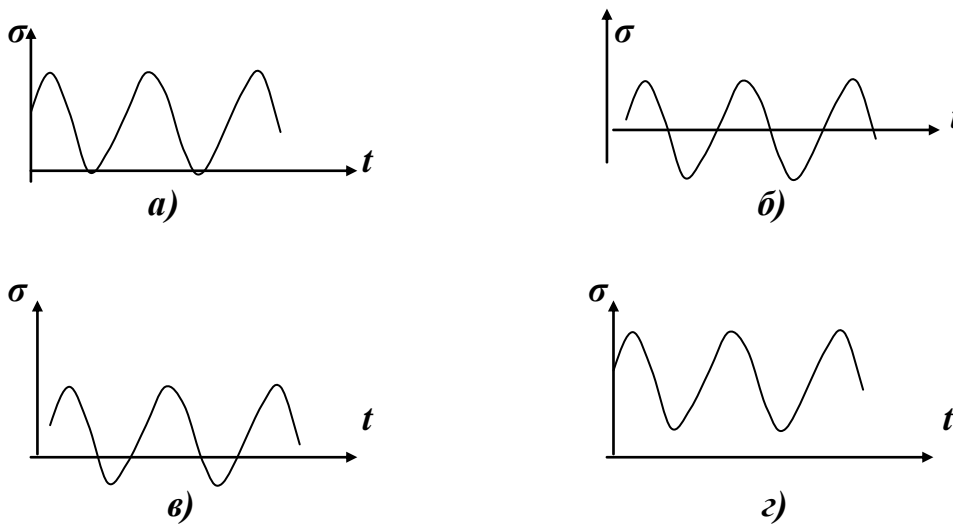


Рис.16.1. Види циклів: а) – пульсуючий; б) – симетричний; в, з) – несиметричні з різним коефіцієнтом асиметрії

Окрім вказаної гіпотези, існує і дещо інший підхід до пояснення фізичної природи явища втомленості. Зокрема, виникнення втомних тріщин можна пояснити вичерпанням здатності кристалічних зерен чинити опір зсуву.

Зерна більшості металів складаються з ряду елементарних кубиків з розмірами сторін $3 \cdot 10^{-8} - 6 \cdot 10^{-8} \text{ см}$. Кубики, в свою чергу, складаються з системи взаємодіючих між собою атомів, розташованих в строго певному для даного матеріалу порядку, утворюючи так звані просторові атомні ґратки. Форма і розміри елементів останньої залежать від сил взаємодії атомів і визначають характерні властивості даної речовини.

Деформація матеріалу зазвичай пов'язана із спотворенням кристалічних ґраток і зміною міжатомних відстаней. При цьому у разі невеликих напружень взаємодія між атомами не порушується і при подальших розвантаженнях вказані викривлення ґраток зникають. Якщо ж напруження великі, то в кристалічних зернах пластичних матеріалів по деяким площинам, які зветься площинами ковзання кристаліта, відбуваються незворотні зсуви. Зсунуті один щодо другого групи атомів вже не утворюють єдиних атомних ґраток. Нове утворення, що вийшло при цьому, виявляється більш міцним в результаті посилення площин ковзання всередині окремих зерен. Тепер для його руйнування потрібне більше зусилля.

Проте зміцнення при зсувах супроводить знеміцнення (розрихлення). Тому процес зсуву обов'язково супроводжується появою зон, де атомні зв'язки порушуються, а нові не створюються. Проявляється це в тому, що створюються найдрібніші мікротріщини, кожна з яких за певних умов (наприклад, при сусідстві декількох зерен, ослаблених тріщиною) може з'явитися причиною та місцем зародження і розвитку втомної тріщини, що приводить зрештою до руйнування від втомленості.

Таким чином, можна сказати, що механізм утворення тріщин при повторно-змінних навантаженнях вельми складний і не може вважатися повністю вивченим.

З безперечних положень теорії втомленості можна відзначити наступні:

1) процеси, що проходять при повторно-змінних навантаженнях в металі, носять різко виражений місцевий характер;

2) з двох видів напруження — нормальних і дотичних, домінуючий вплив на процеси втомленості, до створення першої мікротріщини включно, мають дотичні напруження, що викликають пластичні зсуви і руйнування.

Розвиток втомної тріщини, поза сумнівом, може прискорюватись за наявності розтягуючих напружень як у пластичних, так і, особливо, у малопластичних і крихких матеріалів типу чавуну, в яких поява тріщини відриву значно підвищує чутливість до розтягуючих напружень.

Утворення тріщин частіше за все спостерігається в зернах, що лежать ближче до поверхні деталі. Пояснюється це тим, що поверхневі шари матеріалу до певної міри мають сліди пошкоджень різними технологічними операціями при обробці деталі (внутрішні напруження, сліди механічної обробки), не кажучи вже про ті випадки, коли зовнішні шари при повторно-тимчасових навантаженнях знаходяться під впливом найбільших напружень (при згині і крученні).

Межу витривалості визначають експериментально. Вона залежить від цілого ряду факторів, зокрема, від форми і розмірів деталі, способу її обробки, стану поверхні деталі, виду напруженого стану (розтяг—стиск, кручення, згин і т. п.), закону зміни навантаження в часі при випробуваннях і т.п.

При розгляді в опорі матеріалів дії змінних напружень в більшості випадків інженерної практики передбачається, що ці напруження є періодичними функціями часу $p = f(t)$ з періодом, рівним T .

Сукупність всіх значень напружень за час одного періоду називається циклом (рис. 16.2а).

На втомну міцність в основному впливають максимальні p_{\max} і мінімальні p_{\min} напруження циклу. Окрім них в опорі матеріалів вводять поняття постійного, або середнього, напруження циклу p_c (рис. 16.2б):

$$p_c = \frac{p_{\max} + p_{\min}}{2} \quad (16.1)$$

і поняття про амплітуду p_a циклу, що характеризує змінність напруження:

$$p_a = \frac{P_{\max} - P_{\min}}{2}. \quad (16.2)$$

Середнє напруження може бути як додатнім, так і від'ємним, амплітуда ж циклу визначається абсолютною величиною (без врахування знака). Відповідно до виразів (16.1) і (16.2) $P_{\max} = p_c + p_a$; $P_{\min} = p_c - p_a$.

Подвоєна величина амплітуди коливань напружень називається *розмахом циклу*. Відношення мінімального напруження циклу до максимального з врахуванням знаків цих напружень називається *характеристикою циклу або коефіцієнтом асиметрії циклу* і позначається буквою r , тобто

$$r = \frac{P_{\min}}{P_{\max}}. \quad (16.3)$$

Найнебезпечнішим є так званий *симетричний цикл*, коли $P_{\max} = -P_{\min}$ і $p_c = 0$, при якому

$$r = \frac{P_{\min}}{P_{\max}} = -1.$$

Межа втомленості при симетричному циклі є мінімальною для даного виду деформації і позначається через p_{-1} . У разі напруження, що змінюється від нуля до максимуму, тобто при *нульовому, або пульсуючому*, циклі, коли $P_{\min} = 0$,

$$r = \frac{0}{P_{\max}} = 0;$$

а межа втомленості, відповідна даному циклу, позначається через p_0 .

При $p = const$, тобто коли діє постійне статичне навантаження,

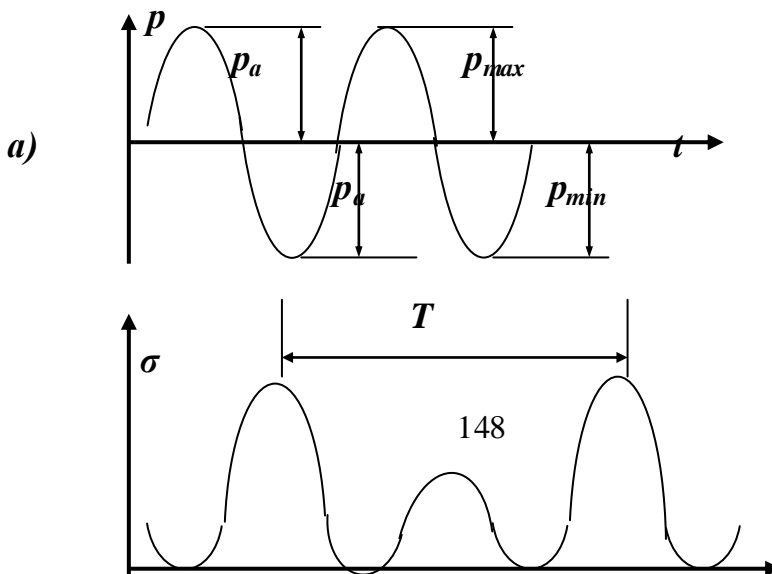
$$P_{\max} = -P_{\min} = p$$

і характеристика циклу

$$r = \frac{P_{\min}}{P_{\max}} = \frac{p}{p} = 1.$$

В найзагальнішому випадку межу витривалості, одержану при характеристиці циклу r , позначають p_r , межу витривалості, одержану при якомусь певному значенні r , припустимо при $z = -0,5$, позначають відповідно

$p_{-0,5}$.



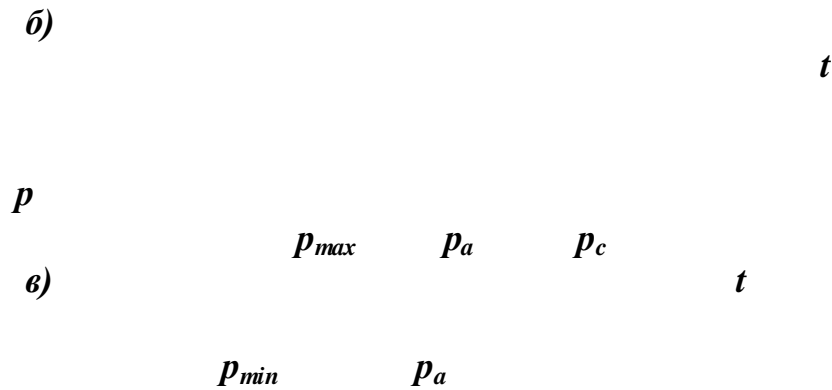


Рис.16.2. Характеристики циклів: а) – симетричного; б,в) – несиметричних

Цикли, що мають однакові характеристики r , називаються *подібними*. Характеристика циклу, або коефіцієнт асиметрії, може мінятися від $-\infty$ до $+\infty$.

Очевидно, для повної думки про характер дії циклічного навантаження окрім характеристики циклу r повинно бути відомо хоча б *максимальне* або *мінімальне напруження циклу*.

На закінчення помітимо, що в окремих випадках, коли мова буде йти про нормальні або дотичні напруження (в першому випадку при циклічному розтягуванні — стиску або згині, в другому при циклічному крученні) буква p в прийнятих вище позначеннях повинна бути замінена відповідно на σ або на τ при збереженні відповідних індексів. Так, наприклад, при циклічному розтягуванні — стиску або згині замість p_{\max} , p_{\min} , p_c і p_a повинні відповідно фігурувати σ_{\max} , σ_{\min} , σ_c і σ_a , тоді межа втомленості при характеристиці циклу r позначатиметься σ_r , а, наприклад, при симетричному циклі, тобто при $r = -1$, буде σ_{-1} . У разі кручення з циклічною зміною напруження характерні напруження циклу відповідно позначатимуться через τ_{\max} , τ_{\min} , τ_c і τ_a , а межа витривалості — через τ_r , τ_{-1} т.д.

16.2. Методи визначення межі витривалості

16.2.1. Діаграми втомленості

Щоб визначити межу витривалості того або іншого матеріалу, потрібно на відповідній випробувальній машині випробувати партію зразків з даного матеріалу в кількості не менше 6~12 шт. Для цього частіше за все беруть гладкі циліндричні зразки діаметром 7 — 10 мм.

Межі витривалості матеріалу при вибраній характеристиці циклу r , зрозуміло, будуть різними залежно від виду деформації, при якій випробовують зразки, тобто в залежності від того, при змінних напруженнях розтягу — стиску, змінному крученні, згині або в умовах складного напруженого стану їх випробовують. Тому, ставлячи перед собою мету отримання межі витривалості, слід наперед вказати, при якому виді деформації і характері зміни напруження за цикл, вимагається визначити межу витривалості.

Відповідно до поставлених вимог вибирають необхідну випробувальну машину. В принципі при випробуванні за умов згину ця машина представляє з себе схематично пристрій, схожий на токарний верстат з двома шпинделями, осі яких розташовані під певним кутом (що регулюється) одна до другої. Крім того ця машина обов'язково повинна мати лічильник циклів.

В лабораторних умовах симетричний цикл здійснити найпростіше. При обертанні зразка його зовнішні волокна сприйматимуть поперемінно то розтяг (коли вони розташовані знизу), то стиск (при повороті зразка на 180°).

Число обертів за хвилину найпоширеніших втомних машин зазвичай ~ 3000 об/хв. (частота 50 Гц). Тому випробування на втомленість з метою отримання межі витривалості вимагає тривалого часу, обчислюваного тижнями безперервної роботи машини. За останній час у багатьох випадках при дослідженні витривалості матеріалів і конструктивних деталей застосовують більш швидкохідні машини— 100 ...500 Гц, а в деяких випадках і 20000 Гц (ультразвукові частоти). В останньому випадку для випробування потрібні тільки десятки хвилин.

При випробуванні партії зразків з метою отримання межі витривалості необхідно давати такі навантаження на окремі зразки, щоб вони руйнувалися, витримавши різне число циклів навантаження.

Обробка одержаних експериментальних даних, зазвичай, супроводжується побудовою кривої утомленості, яка в літературі часто називається кривою Веллера (рис. 16.3.).

А. Веллер (1819-1914) – фундатор наукового дослідження втомленості матеріалів, Ним створені перші машини для випробування опору різних матеріалів повторно змінним навантаженням.

Криву втомленості будують по точках в координатах числа циклів N і напруження P_{\max} . Кожному зразку, що руйнувався, на діаграмі відповідає одна точка з координатами N (число циклів до руйнування) і P_{\max} (напруження), тобто крива втомленості є функцією $P_{\max} = f(N)$

Порядок встановлення навантажень на зразки, що випробовуються, в більшості випадків приймають спадаючим, тобто на перший зразок дають навантаження, що значно перевищує межу витривалості, а навантаження на

подальші зразки поступово знижують. Зрозуміло, кожний з менш навантажених зразків витримуватиме все більше і більше число циклів. Може бути прийнятий інший порядок встановлення навантажень.

Будуючи криву втомленості за точками, які дали зразкі, що руйнувалися, легко переконатися, що, наприклад, при випробуванні сталі (рис.16.3, крива 1), при високому рівні напруження крива круто падає, а в міру зниження їх крутизна зменшується і крива асимптотично наближається до деякої горизонтальної прямої, що відсікає на осі ординат відрізок, величиною якого і визначається межа витривалості. Ордината точки на кривій, де остання практично починає співпадати з вказаною асимптотою, відповідає такому напруженню, при якому зразок не буде руйнуватися, пройшовши число циклів, відповідне наперед заданій величині, так званій базі випробування N_0 .

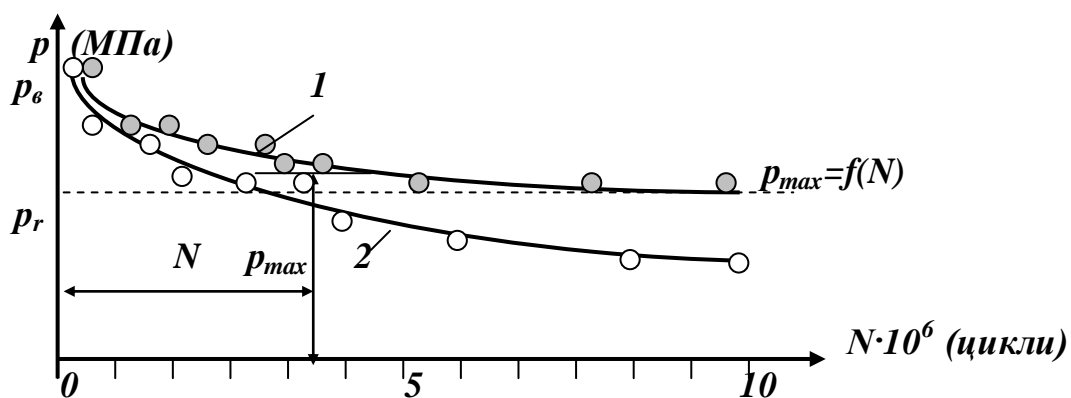


Рис.16.3. Графіки випробувань для визначення межі витривалості при симетричному циклі

Неважко зрозуміти, що за базу випробування N_0 якраз і приймають те число циклів, при якому правий кінець кривої втомленості проходить практично паралельно осі абсцис. Виходячи з цього, базою випробування на витривалість називається найбільше число повторно-змінних навантажень, істотне перевищення якого не повинно приводити до втомних руйнувань зразка, що випробується при даному напруженні.

Для чорних металів (сталі, чавуну і т. п.) за базу випробувань, зазвичай, приймають 10 млн. циклів, а для кольорових (мідь, алюмінію і т. і.) — число, в 5 — 10 разів більше. З розгляду характеру втомної кривої для кольорових металів (рис.16.3, крива 2) видно, що на великій ділянці вона спадає вельми поступово, тому і доводиться в даному випадку за базу випробування приймати більше число циклів. Взагалі для таких металів можна говорити тільки про деяку умовну межу втомленості.

Умовною межею втомленості називають максимальне напруження, при якому не відбувається руйнування за умов здійснення певного, наперед заданого, числа циклів, відповідного тій або іншій прийнятій базі випробування.

У зв'язку з тим, що за кривою втомленості, побудованій в координатах $N - p$, або, що те ж саме, $N - \sigma$ (рис.16.4а), часто важко визначити межу

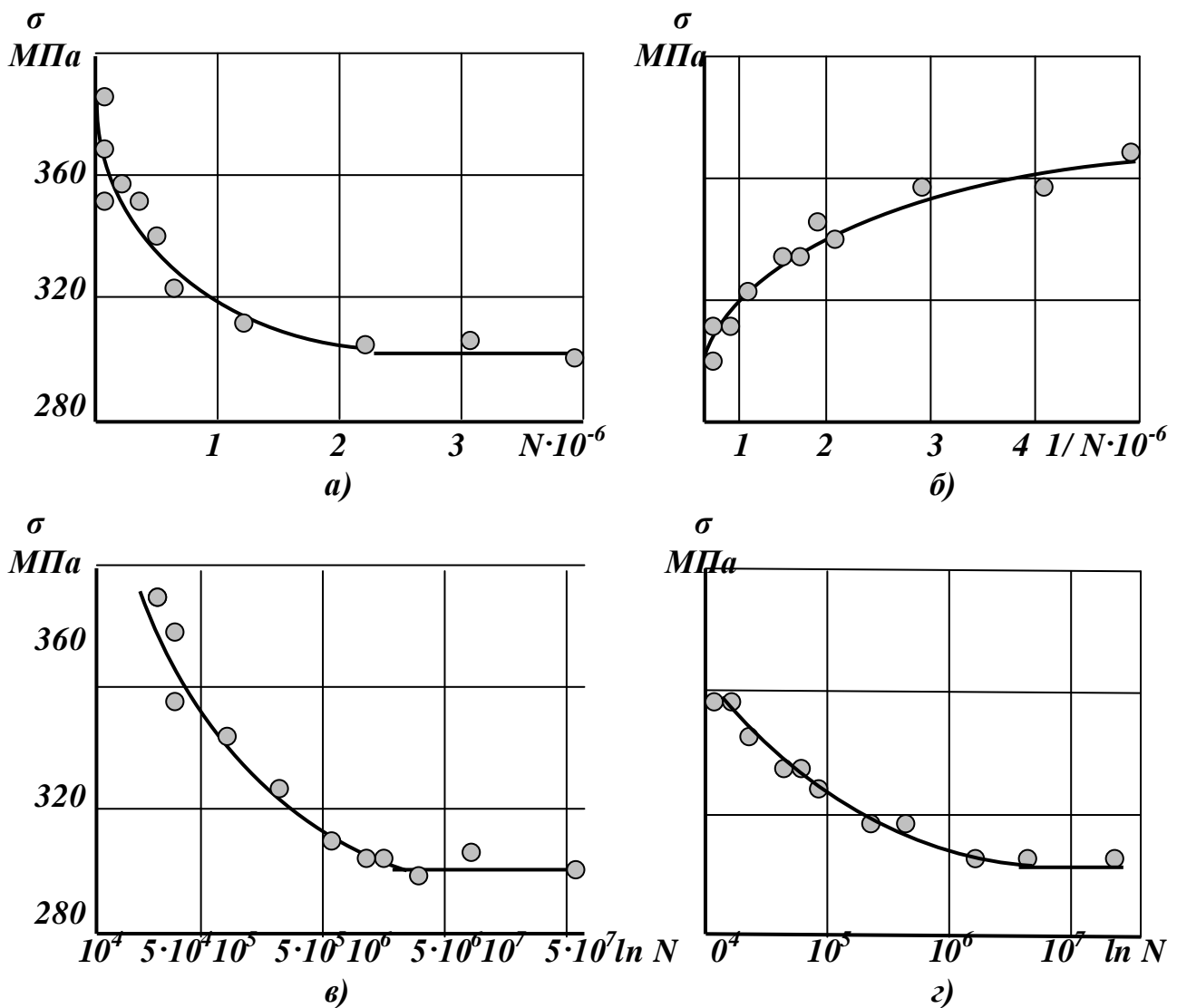


Рис.16.4. Криві втомленості: а) – в координатах $N - \sigma$; б) – в координатах

$1/N \cdot 10^6 - \sigma$; в) – в координатах $\ln N - \sigma$; г) – в координатах $\ln N - \ln \sigma$
 витривалості, застосовують два інші способи побудови діаграм втомленості.

Перший спосіб полягає в тому, що по осі абсцис відкладають величину, зворотну числу циклів (рис.16.4б). Межу втомленості тоді визначають як ординату в місці перетину кривої втомленості з віссю напруження.

Другий спосіб заснований на представленні результатів випробувань в напівлогарифмічних (рис.16.4в) або логарифмічних (рис.16.4г) координатах. Як видно з креслення, критерієм визначення межі втомленості тут є перелом кривої.

На закінчення відзначимо, що, згідно чисельним експериментальним даним, для деяких матеріалів можна помітити певні співвідношення між межами витривалості при різних видах деформації і, зокрема, між межами витривалості при згині σ_{-1}^i , крученні τ_{-1}^i і розтягу σ_{-1}^0 при симетричних циклах.

Для гладких зразків ці співвідношення приблизно дорівнюють: для сталі $\sigma_{-1}^0 = 0,7\sigma_{-1}^i$; для чавуну $\sigma_{-1}^0 = 0,65\sigma_{-1}^i$; для сталей і легких сплавів $\tau_{-1}^i = 0,55\sigma_{-1}^i$; для чавуну $\tau_{-1}^i = 0,8\sigma_{-1}^i$.

Маючи величину тимчасового опору σ_{σ} , межі витривалості сталі при симетричному циклі можна приблизно знайти по наступних емпіричних співвідношеннях відповідно для розтягу— стиску, згину і кручення:

$$\sigma_{-1}^0 = 0,28 \sigma_{\sigma}; \quad \sigma_{-1}^0 = 0,40 \sigma_{\sigma}; \quad \tau_{-1} = 0,22 \sigma_{\sigma}. \quad (16.4)$$

Для кольорових металів спостерігається менш стійке співвідношення між межею втомленості і тимчасовим опором; згідно дослідним даним, в цьому випадку $\sigma_{-1}^0 = (0,24 \div 0,50) \sigma_{\sigma}$.

16.2.2. Діаграми граничних напружень

Щоб охарактеризувати здатність опору матеріалу дії змінних напружень з різною асиметрією циклу, будують так звану діаграму граничних напружень (рис.16.5). В ній по осі абсцис відкладають середнє напруження циклу σ_c , а по осі ординат — найбільше σ_{\max} і найменше σ_{\min} напруження циклу (діаграма Сміта). Їх граничні значення $\sigma_{r_{\max}}, \sigma_{r_{\min}}, \sigma_c$ визначаються за даною характеристикою циклу дослідним шляхом в результаті побудови кривих втомленості.

Зазвичай починають з симетричного циклу ($r = -1$). Граничним напруженням в цьому випадку буде межа витривалості σ_{-1} . Отже

$$\sigma_{-1_{\max}} = \sigma_{-1}; \quad \sigma_{-1_{\min}} = -\sigma_{-1}; \quad \sigma_{-1_c} = 0.$$

Цьому циклу на діаграмі відповідають точки A і A' на осі ординат.

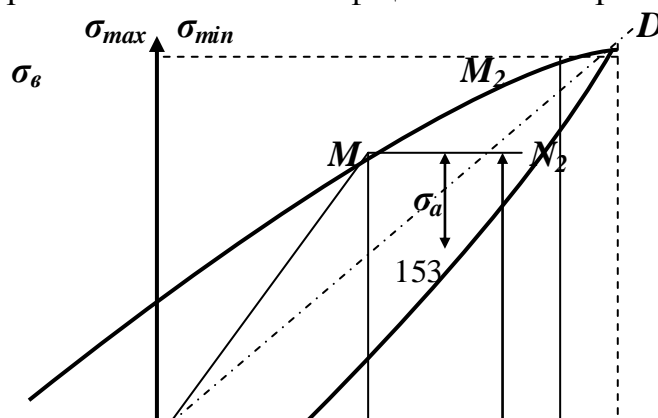
Випробувавши партію зразків з даного матеріалу при певному значенні характеристики циклу $r = \sigma_{\min} / \sigma_{\max}$, визначимо найбільше і найменше значення

напружень, при яких матеріал працює на межі витривалості σ_r , тобто

$$\sigma_{r_{\max}} = \sigma_r; \quad \sigma_{r_{\min}} = r \sigma_r; \quad \sigma_{r_c} = \frac{\sigma_{r_{\max}} + \sigma_{r_{\min}}}{2}.$$

Нанесемо на діаграму точки M і N , абсциса яких рівна σ_{r_c} а ординати — відповідно $\sigma_{r_{\max}}$ і $\sigma_{r_{\min}}$. Поступаючи подібним чином для ряду інших значень r , одержуємо точки M_1, N_1, M_2, N_2 .

Сполучаємо лініями всі точки, що зображують максимальні і мінімальні граничні напруження циклів. Очевидно права крайня точка діаграми (точка D) відповідає циклу, при якому $\sigma_{\max} = \sigma_{\min} = \sigma_c$, $r = 1$ - тобто статичному навантаженню. Граничним напруженням в цьому випадку є межа міцності матеріалу. Отже, абсциса і ордината точки D рівні межі міцності матеріалу. Таким чином, ординати точок лінії AD відповідають межам витривалості матеріалу при різних значеннях коефіцієнта асиметрії циклів.



узгоджуються з експериментальними даними.

Для дослідження дійсної поведінки матеріалу за умов складного напруженого стану, наприклад при поєднанні згину з крученням, використовують спеціальні випробувальні машини, що дозволяють одночасно навантажувати зразок змінними згинаючими і крутними моментами.

За наслідками випробувань, одержаними при різних поєднаннях змінних σ і τ , будують діаграми в координатах $\sigma_a - \tau_a$ або у відносних величинах σ_a / σ_{-1} і τ_a / τ_{-1} . Точки таких діаграм визначають напружені стани, що характеризуються величинами σ_a і τ_a при складному напруженому стані. Типова діаграма для конструкційних сталей, побудована за експериментальними даними, показана на рис. 16.8. (крива 1).

Вона відповідає дузі кола. Для високоміцних сталей і чавунів експериментальні криві ближче до еліптичних дуг (рис. 16.8, крива 2)

У разі симетричного циклу з дотриманням синхронності і синфазності напруження, умова міцності в амплітудах головних напружень відповідно до гіпотези найбільших дотичних напружень запишеться так:

$$(\sigma_1)_a - (\sigma_3)_a = \sigma_{-1}.$$

Виходячи з теорії міцності енергії формоутворення, умову міцності можна записати у вигляді:

$$[(\sigma_1)_a - (\sigma_2)_a]^2 + [(\sigma_2)_a - (\sigma_3)_a]^2 + [(\sigma_3)_a - (\sigma_1)_a]^2 = 2\sigma_{-1}^2. \quad (16.5)$$

Для складного напруженого стану, що характеризується сумісною дією розтягу і кручення або згину і кручення, поправкою на співвідношення величин

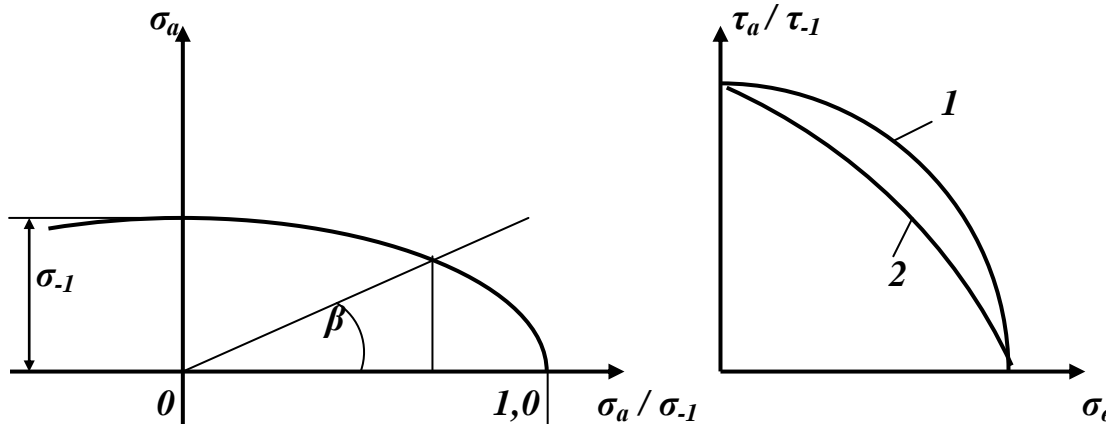


Рис. 16.7. Діаграма граничних напружень у координатах $\sigma_c - \sigma_a$ (діаграма Хейя)

Рис. 16.8. Діаграма граничних напружень у випадку складного напруженого стану

меж витривалості умова міцності виражається так:

$$\sqrt{\sigma_a^2 + \left(\frac{\sigma_{-1}}{\tau_{-1}}\right)^2 \tau_a^2} \leq \sigma_{-1}. \quad (16.6)$$

Остання умова співпадає з раніше приведеною експериментально одержаною залежністю, що характеризується в координатах σ_a / σ_{-1} ; τ_a / τ_{-1} дугою кола.

Заняття 7. Практичне заняття 4. Продовження теми 15 (Динамічні навантаження)

Елементарна теорія удару. Основні положення. Загальний метод обчислення напружень при ударі. . Окремі випадки обчислення напружень і перевірки міцності при ударі. Випадок поздовжнього удару. Згинаючий удар. Удар, що скручує. Напруження в стержнях змінного перерізу при ударі. Практичні висновки з одержаних результатів. Механічні властивості матеріалів при ударі

15.5. Елементарна теорія удару. Основні положення

Явище удару спостерігається у тому випадку, коли швидкість даної частини конструкції або частин, що до неї дотикаються змінюється в дуже короткий період часу.

При забиванні палей вантаж падає з деякої висоти на верхній торець палі і занурює її в ґрунт; баба зупиняється майже миттєво, виконуючи удар. Аналогічні явища відбуваються при куванні; удар сприймають і виріб, що кується і шток молота з бойком, оскільки останній дуже швидко зупиняється при зіткненні з виробом. Під час удару між обома деталями, що співударяються, виникає вельми великий взаємний тиск. Швидкість ударяючого тіла за дуже короткий проміжок часу змінюється і в окремому випадку падає до нуля; тіло зупиняється. Значить, на нього від деталі, що ударяється, передаються дуже великі прискорення, спрямовані у бік, зворотній його руху, тобто передається реакція P_0 , яка дорівнює добутку маси вдаряючого тіла на це прискорення.

Позначаючи це прискорення через a , можна написати, що реакція $P_0 = \frac{Q}{g}a$, де Q вага ударяючого тіла. По закону рівності дії та протидії на частину конструкції, що ударяється, передається така ж сила, але спрямована в протилежний бік (рис.15.6). Ці сили і викликають напруження в обох тілах.

Таким чином, в частині конструкції, що ударяється, виникають такі напруження, неначе до неї була прикладена сила інерції ударяючого тіла; ми можемо обчислити ці напруження розглядаючи силу інерції P_0 як статичне навантаження нашої конструкції. Ускладнення полягає в обчисленні цієї сили інерції. Тривалості удару, тобто величини того проміжку часу, в перебігу якого відбувається падіння швидкості до нуля, ми не знаємо. Тому залишається невідомою величина прискорення a , а отже, і сили P_0 . Таким чином, хоча обчислення

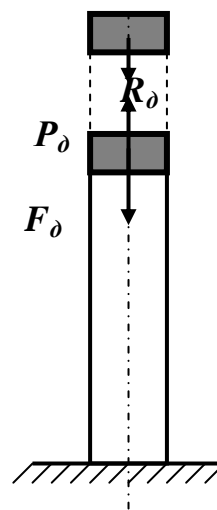


Рис.15.6. Сили в перерізі, що виникають при ударі

напружень при ударі є частковим випадком задачі обліку сил інерції, проте для обчислення сили P_0 пов'язаних з нею напружень і деформацій тут доводиться застосовувати інший метод і користуватися законом збереження енергії.

При ударі відбувається дуже швидко перетворення одного виду енергії в іншій: кінетична енергія ударяючого тіла перетворюється в потенціальну енергію деформації. Виражаючи цю енергію в функції сили P_0 або напружень, або деформацій, дістаємо можливість обчислити ці величини.

15.6. Загальний метод обчислення напружень при ударі

А. Припустимо, що дуже жорстке тіло A вагою Q , деформацією якого можна нехтувати, падаючи з деякої висоти H , ударяє по іншому тілу B , що спирається на пружну систему C (рис.15.7.). В окремому випадку це може бути падіння вантажу на кінець призматичного стержня, інший кінець якого закріплений (поздовжній удар), падіння вантажу на балку, що лежить на опорах (згинаючий удар), і т.п.

Протягом дуже короткого проміжку часу пружна система C отримає деяку деформацію. Позначимо через δ_0 переміщення тіла B (місцевою деформацією якого нехтуватимемо) в напрямі удару. В згаданих окремих випадках при поздовжньому ударі за переміщення δ_0 , відповідно, потрібно оцінювати

поздовжню деформацію стержня Δl_0 , при згинаючому ударі — прогин балки f_0 в перетині, що ударяється, і т.п. У результаті удару в системі C виникнуть напруження p_0 (σ_0 або τ_0 — залежно від виду деформації).

Вважаючи, що кінетична енергія T ударяючого тіла повністю переходить в потенціальну енергію U_0 деформації пружної системи, можемо написати:

$$T = U_0 \quad (15.12)$$

Оскільки до моменту закінчення деформації ударяюче тіло пройде шлях $H + \delta_0$, то його запас енергії вимірюватиметься проведеною їм роботою A_0 і буде рівний:

$$T = A_0 = Q(H + \delta_0) \quad (15.13)$$

Обчислимо тепер U_0 . При статичній деформації потенціальна енергія U_0 чисельно рівна половині добутку діючої сили на відповідну деформацію

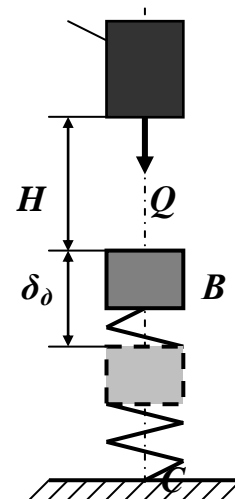


Рис.15.7. Переміщення при ударі

$$U_c = \frac{1}{2} Q \delta_c . \quad (15.14)$$

Статична деформація δ_c в перетині, що ударяється, може бути обчислена за законом Гука, який в загальному вигляді можна записати так:

$$\delta_c = Q : c \quad \text{або} \quad Q = c \delta_c .$$

Тут c — деякий коефіцієнт пропорційності (званий іноді жорсткістю системи); він залежить від властивостей матеріалу, форми і розмірів тіла, виду деформації і положення перетину, що ударяється. Так, при простому розтягу або стиску

$$\delta_c = \Delta l_c = \frac{Ql}{EA} \quad \text{і} \quad c = \frac{EA}{l} ; \quad \text{при} \quad \text{згині} \quad \text{балки, шарнірно закріпленої по кінцях,}$$

$$\text{зосередженою силою} \quad Q \quad \text{посередині прольоту} \quad \delta_c = f_{c \max} = \frac{Ql^3}{48 EJ} \quad \text{і} \quad c = \frac{48 EJ}{l^3} .$$

Таким чином, формула (15. 14) може бути переписана так:

$$U_c = \frac{1}{2} Q \delta_c = \frac{c}{2} \delta_c^2 .$$

В основу цієї формули встановлено дві передумови:

а) справедливість закону Гука та

б) поступове — від нуля до остаточного значення — зростання сили Q , напружень p_c і пропорційних їм деформацій δ_c .

Досліди з визначенням модуля пружності за спостереженнями над пружними коливаннями стержнів показують, що і при динамічній дії навантажень закон Гука залишається в силі, і модуль пружності зберігає свою величину. Що стосується характеру наростання напружень і деформацій, то і при ударі деформація відбувається, хоча і швидко, але не миттєво; δ_o поступово зростає протягом дуже короткого проміжку часу від нуля до кінцевого значення; паралельно зростанню деформацій зростають і напруження p_o .

Реакція системи c на дію вантажу Q (назвемо її P_o), є наслідком розвитку деформації δ_o ; вона зростає пропорційно δ_o від нуля до кінцевої, максимальної величини і, якщо напруження p_o не перевершують межі пропорційності матеріалу, пов'язана з нею законом Гука:

$$\delta_o = P_o : c .$$

де c — згаданий вище коефіцієнт пропорційності, що зберігає своє значення і при ударі.

Таким чином, обидві передумови для правильності формули (15.14) приймаються і при ударі. Тому можна вважати, що вид формули для U_o при ударі буде тою ж самою, що і при статичному навантаженні системи силою інерції P_o , тобто

$$U_o = \frac{1}{2} P_o \delta_o = \frac{c}{2} \delta_o^2 = \frac{Q}{2c} \delta_o^2 . \quad (15.15)$$

(Тут враховано, що по попередньому $c = Q : \delta_c$) Підставляючи значення t і U_o в рівняння (15.12), одержуємо:

$$Q(H + \delta_o) = \frac{Q}{2c} \delta_o^2 \quad (15.16)$$

або

$$\delta_o^2 - 2\delta_c \delta_o - 2H\delta_c = 0. \quad (15.17)$$

Звідси

$$\delta_o = \delta_c \pm \sqrt{\delta_c^2 + 2H\delta_c}$$

або, утримуючи перед радикалом для визначення найбільшої величини деформації системи у напрямі удару знак плюс, одержуємо:

$$\delta_o = \delta_c \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_c}} \right] = K_o \delta_c. \quad (15.18)$$

Оскільки напруження і зусилля за законом Гука пропорційні деформації, то

$$p_o = p_c \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_c}} \right] = K_o p_c \quad (15.19)$$

і

$$P_o = Q \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_c}} \right] = K_o Q. \quad (15.20)$$

З цих формул видно, що величина динамічних деформацій, напружень і зусиль залежать від величини статичної деформації, тобто від жорсткості і поздовжніх розмірів тіла, що ударяється; нижче це додатково буде показано на окремих прикладах. Величина

$$K_o = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_c}} \quad (15.21)$$

у даному випадку є динамічним коефіцієнтом.

Замінюючи у формулі (15.21) H на $\frac{v^2}{2g}$, де v — швидкість ударяючого тіла в початковий момент удару, одержуємо:

$$K_o = 1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{g\delta_c}}. \quad (15.22)$$

Крім того, оскільки

$$\frac{2H}{\delta_c} = \frac{QH}{\frac{1}{2}Q\delta_c} = \frac{T_o}{U_c},$$

де $T_o = QH$ — енергія ударяючого тіла до моменту початку удару, то й вираз для динамічного коефіцієнта може бути представлений ще і у такому вигляді:

$$K_{\delta} = 1 + \sqrt{1 + \frac{T_0}{U_c}} \quad (15.23)$$

В. Якщо у формулах (15.18) і (15.19) покласти $h = 0$, тобто просто раптово прикладений вантаж Q ; то $\delta_{\delta} = 2\delta_c$ і $p_{\delta} = 2p_c$ - при раптовому додатку сили Q деформації і напруження удвічі більше, ніж при статичній дії тієї ж сили.

Навпаки, якщо висота падіння вантажу h (або швидкість v) велика в порівнянні з деформацією δ_c , то в підкорінному виразі формул (15.18) — (15.22) можна нехтувати одиницею в порівнянні з величиною відношення $\frac{2H}{\delta_c}$.

Тоді для δ_{δ} і p_{δ} виходять вирази:

$$\delta_{\delta} = \delta_c \left(1 + \sqrt{\frac{2H}{\delta_c}} \right) \quad \text{і} \quad p_{\delta} = p_c \left(1 + \sqrt{\frac{2H}{\delta_c}} \right) \quad (15.24)$$

При дуже великій величині відношення $\frac{2H}{\delta_c}$ можна нехтувати і одиницею, що стоїть перед коренем, тобто написати:

$$\delta_{\delta} = \delta_c \sqrt{\frac{2H}{\delta_c}} \quad \text{і} \quad p_{\delta} = p_c \sqrt{\frac{2H}{\delta_c}} \quad (15.25)$$

Динамічний коефіцієнт в цьому випадку визначається за формулою:

$$K_{\delta} = \sqrt{\frac{2H}{\delta_c}} = \sqrt{\frac{T_0}{U_c}} \quad (15.26)$$

Необхідно відзначити, що тоді як нехтування одиницею в підкорінному виразі допустимо вже при $\frac{2H}{\delta_c} \geq 10$ (похибка наближених формул буде не більшою від 5%), нехтування ж одиницею, що стоїть перед коренем, допустима лише при дуже великій величині відношення $\frac{2H}{\delta_c}$. Так, наприклад, для того, щоб наближені формули (15.25) і (15.26) давали похибку не більше 10%, відношення $\frac{2H}{\delta_c}$ повинне бути більшим від 110.

Формули $\delta_{\delta} = K_{\delta}\delta_c$ і $p_{\delta} = K_{\delta}p_c$ з яких K_{δ} виражається через $\frac{T_0}{U_c}$ (15.23), можуть бути використані також для вирішення задачі про зустрічний удар тіл, що рухаються з деякою швидкістю, при визначенні напружень в циліндрі двигуна внутрішнього згорання, викликаних різким підвищенням тиску газу при згорянні паливної суміші і ін. На цій підставі їх можна вважати загальними формулами для розрахунку на удар.

Узагальнюючи сказане вище, можна намітити наступний загальний метод рішення задач по визначенню напружень при ударі. Застосовуючи закон збереження енергії, треба:

- 1) обчислити кінетичну енергію ударяючого тіла T ;
- 2) обчислити потенціальну енергію U_0 тіл, що сприймають удар, під навантаженням їх силами інерції при ударі; потенціальна енергія повинна бути виражена через напруження (σ_0, τ_0) в якому-небудь перетині, через деформацію (видовження, прогин) або через силу інерції P_0 ударяючого тіла;
- 3) порівняти величини U_0 і T і з одержаного рівняння знайти або безпосередньо динамічні напруження, або деформацію, а потім, вистовуючи закон Гука, напруження або силу P_0 і відповідні їй динамічні напруження і деформації.

Описаний загальний прийом розрахунку на удар припускає, що вся кінетична енергія ударяючого тіла цілком переходить в потенціальну енергію деформації пружної системи. Це припущення не є точним. Кінетична енергія падаючого вантажу частково перетворюється на теплову енергію і енергію непружної деформації основи, на яку спирається система.

Разом з тим при високих швидкостях удару деформація за час удару не встигає розповсюдитися на весь об'єм тіла, що ударяється, і в місці удару виникають значні місцеві напруження, що іноді перебільшують межу текучості матеріалу. Так, наприклад, при ударі свинцевим молотком по сталевій балці велика частина кінетичної енергії перетворюється на енергію місцевих деформацій. Подібне ж явище може мати місце навіть і у тому випадку, коли швидкість удару мала, але жорсткість або маса конструкції, що вдаряється, велика.

Вказані випадки відповідають великим величинам дробу $\frac{2H}{\delta_c}$. Тому можна сказати, що описаний вище метод розрахунку можна застосовувати, поки дріб $\frac{2H}{\delta_c}$ не перевищує певної величини. Більш точні дослідження показують, що помилка не перевищує 10%, якщо $\frac{2H}{\delta_c} \leq 100$. Оскільки цей дріб може бути представлений у вигляді відношення $\frac{T_0}{U_c}$ (див. вище), то можна сказати, що висловлений метод може бути застосований, поки енергія удару перевищує не більше ніж в 100 разів потенціальну енергію деформації, відповідну статичному навантаженню конструкції вагою ударяючого вантажу. Врахування маси тіла, що ударяється, при ударі дозволяє дещо розширити межі застосування цього методу в тих випадках, коли маса тіла, що ударяється, велика.

Більш точна теорія удару викладається в курсах теорії пружності.

15.7. Окремі випадки обчислення напружень та перевірки міцності при ударі

15.7.1. Випадок поздовжнього удару

Вид виведених вище формул показує, які великі якісні відмінності веде за собою кількісна зміна часу дії сили на тіло.

Розглянемо деякі випадки удару при найпростіших деформаціях. При цьому для знаходження коефіцієнта динамічності застосуємо основні формули (15.21) і (15.23).

Для визначення δ_o , p_o і P_o , використовуємо залежності:

$$\delta_o = K_o \delta_c ; \quad p_o = K_o p_c ; \quad P_o = K_o Q .$$

У разі поздовжнього розтягуючого або стискаючого удару (рис. 15.8)

$$\delta_c = \Delta l_c = \frac{Ql}{EA} ; \quad p_c = \sigma_c = \frac{Q}{A} ;$$

$$U_c = \frac{Q^2 l}{2EA} = \frac{\sigma_c^2 Al}{2E} = \frac{\Delta l_c^2 EA}{2l} .$$

Для обчислення динамічного коефіцієнта K_o може бути вибране один з наступних виразів:

$$K_o = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_c}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2T_0 EA}{Q^2 l}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2T_0 E}{\sigma_c^2 Al}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2T_0 l}{\Delta l_c^2 EA}} . \quad (15.27)$$

Після цього без ускладнень обчислюються Δl_o , σ_o і P_o .

Наближена формула для обчислення коефіцієнтів динамічності та напружень в даному випадку одержує такий вигляд:

$$K_o = \frac{1}{\sigma_c} \sqrt{1 + \frac{2T_0 E}{Al}} \quad \text{і} \quad \sigma_o = \sigma_c K_o \sqrt{\frac{2T_0 E}{Al}} . \quad (15.28)$$

Відмітимо, що, як при статичному, так і при динамічному навантаженні напруження в стиснутому стержні залежить від величини стискаючої сили і від площі поперечного перетину стержня.

Але при статичній дії вантажу Q сила, що передається на стержень, рівна Q і не залежить від розмірів і матеріалу стержня, при ударі ж величина сили P_o , що викликає напруження в стержні, залежить від прискорення, що передається від тіла, що ударяється, на ударяюче, тобто від величини проміжку часу, протягом якого змінюється швидкість ударяючого тіла.

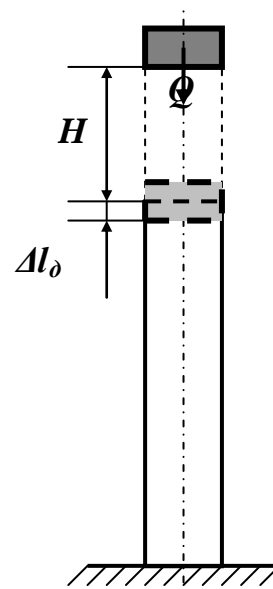


Рис.15.8. Поздовжній удар

У свою чергу цей проміжок часу залежить від величини динамічної поздовжньої деформації Δl_0 , від податливості стержня. Чим ця величина більше, тобто чим менше модуль E і чим більше довжина стержня l , тим більше тривалість удару, менше прискорення і менше тиск P_0 .

Таким чином, при рівномірному розподілі напружень, однаковому в усіх перетинах стержня, динамічне напруження зменшуватиметься із збільшенням площі поперечного перетину стержня і із збільшенням його податливості (тобто із збільшенням довжини і зменшенням модуля пружності E), саме тому пом'якшують удар ресори і пружини, розташовані між деталями, що вдаряються. Все це і відображають приведені вище формули. Зокрема, виходячи з формул (15.28), з відомим наближенням можна вважати, що *при поздовжньому ударі величина напружень залежить вже не від площі, а від об'єму стержня.*

Знайшовши за формулами (15.19) і (15.27) або (15.28) величину динамічного напруження, можемо написати умову міцності у вигляді

$$\sigma_0 \leq [\sigma_0], \quad (15.29)$$

де $[\sigma_0]$ —допустима величина нормальних напружень при ударі, яка дорівнює для пластичного матеріалу $[\sigma_0] = \frac{\sigma_m}{k_0}$. Величину коефіцієнта запасу k_0 можна б було вибрати рівній величині основного коефіцієнта запасу k_0 при статичній дії навантажень, оскільки динамічність навантаження вже відображена у формулах (15.27) і (15.28); проте, зважаючи на деяке спрощення висловленого методу розрахунку, цей коефіцієнт приймають дещо підвищеним — до 2. Крім того, зазвичай, в цих випадках застосовують матеріал більш високої якості (стосовно однорідності і пластичних властивостей).

15.7.2. Згинаючий удар.

При згині величина статичної деформації δ_c , балки f_c , що є статичним прогином, в місці удару, залежить від схеми навантаження і умов закріплення балки.

Так наприклад, для балки з прольотом l , шарнірно закріпленої по кінцях, що отримує посередині прольоту удар від падаючого з висоти H вантажу Q (рис.15.9а)

одержуємо:

$$\delta_c = f_{c \max} = \frac{Ql^3}{48 EJ};$$

$$P_c = \sigma_{c \max} = \frac{Ql}{4W};$$

$$U_c = \frac{Qf_{c \max}}{2} = \frac{Q^2 l^3}{96 EJ}.$$

Для консолі, що отримує удар від вантажу Q , що падає на вільний кінець консолі (рис. 15.9б).

$$\delta_c = f_{c \max} = \frac{Ql^3}{3EJ};$$

$$p_c = \sigma_{c \max} = \frac{Ql}{W};$$

$$U_c = \frac{Qf_{c \max}}{2} = \frac{Q^2 l^3}{6EJ}.$$

Підставляючи у формулу для коефіцієнта динамічності K_δ значення $\delta_c = f_{c \max}$ або U_c ,

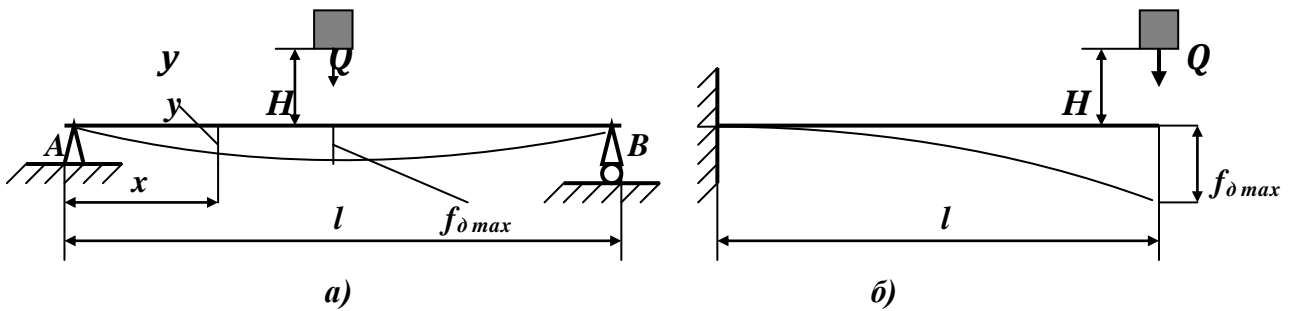


Рис.15.9. Удар при згині: а) на двохопорній балці; б) на консолі

знаходимо K_δ , а потім і величину динамічних напружень і деформацій. Так наприклад, у разі балки на двох опорах при обчисленні динамічного напруження $\sigma_{\delta \max}$ маємо таку формулу:

$$\sigma_{\delta \max} = K_\delta \sigma_{c \max} = \frac{Ql}{4W} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{96T_0 EJ}{Q^2 l^3}} \right]. \quad (15.30)$$

Умова міцності (15.29) в цьому випадку запишеться таким чином:

$$\sigma_{\delta \max} = \frac{Ql}{4W} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{96T_0 EJ}{Q^2 l^3}} \right] \leq [\sigma_\delta] = \frac{\sigma_m}{k_\delta}. \quad (15.31)$$

Наближені формули для обчислення f_δ і σ_δ у разі удару по балці на двох опорах (рис.15.9а) отримають такий вигляд:

$$f_{\delta \max} = K_\delta f_{c \max} = f_{c \max} \sqrt{\frac{T_0}{U_c}} = \frac{Ql^3}{48EJ} \sqrt{\frac{96T_0 EJ}{Q^2 l^3}} = \sqrt{\frac{T_0 l^3}{24EJ}}. \quad (15.32)$$

$$\sigma_{\delta \max} = K_\delta \sigma_{c \max} = \frac{Ql}{4W} \sqrt{\frac{96T_0 EJ}{Q^2 l^3}} = \sqrt{\frac{6T_0 EJ}{W^2 l}}. \quad (15.33)$$

Аналогічні вирази для $f_{\text{д max}}$ і $\sigma_{\text{д max}}$ виходять і у випадку удару по консолі (рис.15.9б). Маючи на увазі, що

$$J = i^2 F, W = \frac{J}{z_{\text{max}}}$$

$$i \quad \frac{J}{W^2} = \left(\frac{z_{\text{max}}}{i} \right)^2 \frac{1}{A},$$

можемо представити формулу (15.33) також і в такому вигляді;

$$\sigma_{\text{д max}} = \frac{z_{\text{max}}}{i} \sqrt{\frac{6T_0 E}{Al}}. \quad (15.34)$$

З наближеної формули (15.34) видно, що динамічні напруження при згині балки залежать від модуля пружності матеріалу, об'єму балки, форми її поперечного перетину (відношення $\frac{z_{\text{max}}}{i}$), а також від схеми навантаження і умов закріплення балки (в даному випадку в підкорінному виразі стоїть $6T_0$; для балок, інакше завантажених і закріплених, числовий коефіцієнт біля T_0 буде іншим). Таким чином, в балці прямокутного перетину висотою h і шириною b , поставленій на ребро або покладеній плоско, найбільші напруження при ударі будуть однакові і рівні (за наближеною формулою):

$$\sigma_{\text{д max}} = \sqrt{\frac{18T_0 E}{Al}},$$

оскільки в обох випадках

$$\frac{z_{\text{max}}}{i} = \frac{\frac{h}{2}}{\sqrt{\frac{bh^3}{12bh}}} = \frac{\frac{b}{2}}{\sqrt{\frac{hb^3}{12bh}}} = \sqrt{3}.$$

Як відомо, при однаковому статичному навантаженні найбільші напруження в балці, встановленій плоско, будуть у відношенні $\frac{h}{b}$ більше, ніж напруження в балці, поставленій на ребро. Сказане вище, зрозуміло, є справедливим лише до тих пір, поки явище удару відбувається в межах пружності.

Опір балок ударним навантаженням залежить і від моменту опору і від жорсткості балки. Чим більше податливість (здатність балки деформуватися), тим більшу *живу силу удару* вона може прийняти при одних і тих же напруженнях, що допускаються. Найбільші прогини балка дає у тому випадку, коли у всіх її перетинах найбільші напруження будуть однаковими, тобто якщо це буде балка рівного опору; такі балки при одному й тому ж напруженні, що допускається, дають більші прогини, ніж балки постійного перетину, і тому можуть поглинати велику енергію удару. Тому ресори, як правило, і роблять у формі балок рівного опору.

15.7.3. Удар, що скручує

Розглянемо тепер задачу визначення напружень при ударі, що скручує. Якщо вал, що обертається, раптово зупиняється гальмуванням одного з його кінців, а на іншому його кінці на нього передається жива сила маховика T_0 , що скручує вал, то напруження також можуть бути визначені вказаним вище методом. Вал скручуватиметься двома парами сил (сили інерції маховика і сили гальмування) з моментом M .

У даному випадку:

$$\delta_c = \varphi_c = \frac{Ml}{GJ_p}, \quad p_c = \tau_{c \max} = \frac{M}{W_p}$$

і

$$U_c = \frac{M^2 l}{2GJ_p} = \frac{\tau_{c \max}^2 l W_p^2}{2GJ_p} = \frac{\varphi_{c \max}^2 GJ_p}{2l},$$

тому

$$\delta_\delta = \varphi_\delta = K_\delta \varphi_c = \varphi_c \sqrt{\frac{T_0}{U_c}} = \sqrt{\frac{2T_0 l}{GJ_p}}$$

і

$$p_\delta = \tau_{\delta \max} = K_\delta \tau_{c \max} = \tau_{c \max} \sqrt{\frac{T_0}{U_c}} = \sqrt{\frac{2T_0 GJ_p}{l W_p^2}} = 2 \sqrt{\frac{T_0 l G}{Al}},$$

оскільки

$$J_p = \frac{\pi r^4}{2}, \quad W_p = \frac{\pi r^3}{2} \quad \text{та} \quad \frac{J_p}{W_p^2} = \frac{2}{\pi r^2} = \frac{2}{A}.$$

Маючи на увазі, що жива сила маховика T_0 дорівнює

$$T_0 = \frac{J_0}{2} \omega^2,$$

де J_0 — момент інерції маси маховика, а ω — кутова швидкість, можна написати:

$$\tau_{\delta \max} = \omega \sqrt{\frac{2J_0 G}{Al}}. \quad (15.35)$$

Відзначимо, що і при ударі, що скручує, найбільші напруження залежать від модуля пружності і від об'єму валу.

15.8. Напруження в стержнях змінного перерізу при ударі

Вище показано, що для зниження напружень при поздовжньому ударі слід збільшувати об'єм стержня. Проте треба пам'ятати, що це правильно лише для того випадку, коли площа перерізу стержня по його довжині не змінюється, — напруження у всіх перетинах однакові.

Інші результати отримаємо, якщо різні ділянки довжини стержня матимуть неоднакову площу поперечного перетину (рис.15.10). Згідно (15.27) або (15.28) витікає, що динамічне напруження при поздовжньому ударі залежить і від площі поперечного перетину стержня, і від його податливості - здатності деформуватися. Найбільші напруження в стержні з виточкою (рис.15.10а), таким чином, визначатимуться величиною найменшої площі (в місці виточки) і податливістю стержня, яка залежить від деформацій вже всього стержня, а не тільки його ослабленої частини.

Зниження напружень в цьому випадку може бути досягнуте двома шляхами. Можна збільшити площу в самому ослабленому місці (якщо конструкція це дозволяє) — повернутися до стержня одного діаметра d_1 (рис.15.10б); в цьому випадку ми збільшуємо площу і у меншій мірі зменшуємо податливість. Сила інерції трохи зростає, але в більшій степені зростає площа в ослабленому перетині, і напруження знизяться.

Проте, як правило, цей (перший) шлях не може бути застосованим, бо конструкція може вимагати збереження виточки. Тоді для підвищення міцності стержня необхідно збільшити його податливість, зменшуючи площу його перетину в потовщеній частині. Якщо ми виконаємо весь стержень діаметром d_2 (рис.15.10в), то цим значно збільшимо податливість стержня, зменшимо

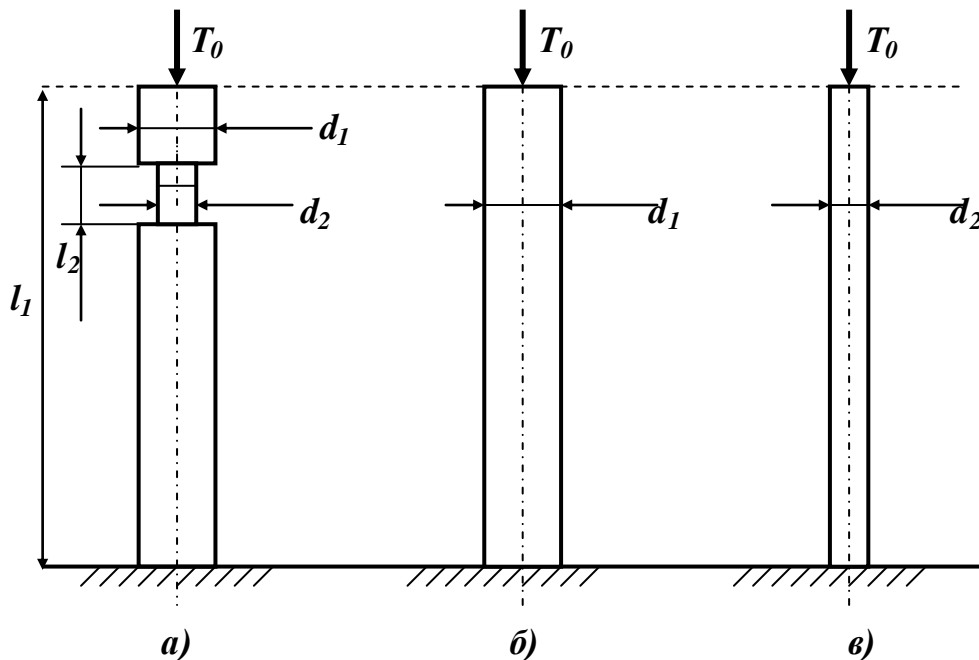


Рис.15.10. Стержні: а) - змінного; та б) і в) – постійного поперечних перерізів

силу P_0 і динамічне напруження. Таким чином, зниження напружень може бути досягнуте двома шляхами, що ведуть до вирівнювання динамічних напружень, — збільшенням об'єму шляхом усунення виточки і зменшенням об'єму за рахунок зменшення площі потовщеної частини.

Ці висновки легко перевірити розрахунком. Визначимо найбільші динамічні напруження, викликані одним і тим же поздовжнім ударом із запасом енергії $T_0 = QH$ для трьох стержнів, показаних на рис.15.10а,б,в. Площа потовщеної частини стержня "а" назвемо A_1 а більш тонкої - A_2 позначимо $\frac{A_2}{A_1} = q$ і $\frac{l_2}{l_1} = p$. Напруження в стержнях знайдемо за наближеними формулами (15.25) і (15.28). Найбільше динамічне напруження в стержні "а" за формулою (15.25):

$$P_0 = \sigma_a = \sigma_c = \sqrt{\frac{2H}{\Delta l_c}} = \sigma_2 \sqrt{\frac{2H}{\Delta l_c}} = \frac{Q}{A_2} \sqrt{\frac{2H}{\Delta l_c}} = \sqrt{\frac{2T_0 Q}{A_2^2 \Delta l_c}}.$$

Оскільки:

$$\Delta l_c = \frac{Q}{EA_2} + \frac{Q(l_1 - l_2)}{EA_1} = \frac{Ql_1}{EA_2} [p + q(1 - p)],$$

то:

$$\sigma_a = \sqrt{\frac{2T_0 Q}{A_2^2 \frac{Ql_1}{EA_2} [p + q(1 - p)]}} = \sqrt{\frac{2T_0 Q}{A_1 l_1 q [p + q(1 - p)]}}.$$

Напруження в стержнях постійного перерізу б) і в) знайдемо за формулою (15. 28):

$$\sigma_b = \sqrt{\frac{2T_0 E}{A_1 l_1 q}} \quad \text{та} \quad \sigma_v = \sqrt{\frac{2T_0 E}{A_2 l_1}} = \sqrt{\frac{2T_0 E}{A_1 q l_1}}.$$

Оскільки::

$$[p + q(1 - p)] < q < 1, \quad \text{то} \quad \sigma_a > \sigma_b > \sigma_v.$$

Так, якщо $\frac{d_2}{d_1} = 0,8$, а $\frac{l_2}{l_1} = 0,1$ то $q = 0,64$, $p = 0,1$, то в цьому випадку

обчислення дають: $\sigma_a = 1,52 \sigma_b$; $\sigma_v = 0,82 \sigma_a = 1,25 \sigma_b$. Таким чином, наявність виточки, що зменшує діаметр на 20% на одній десятій довжини стержня, викликає підвищення напружень на 50%, але, якщо тепер надати цьому стержню мінімальну площу по всій довжині, то напруження знизяться приблизно на 20%.

Хоча ці підрахунки і зроблені за наближеними формулами, знайдені таким шляхом співвідношення між σ_a , σ_b і σ_v виявляються достатньо близькими до тих, які можуть бути одержані за більш точною формулою (15.8), якщо енергія удару T_0 не дуже мала.

15.9. Практичні висновки з одержаних результатів

Результати приведених вище підрахунків мають величезне практичне значення. Перш за все вони показують, що **характер опору стержнів удару якісно значно відрізняється від опору їх статичної деформації**. Потовщення

однієї половини стержня при статичному стиску не викликає змін напружень в перерізах іншої половини; при ударі ж воно *підвищує* їх. Місцеве зменшення площі поперечного перетину на *невеликій* довжині стержня викликає *різке* підвищення напружень.

Для зниження напружень треба прагнути, головним чином, до збільшення податливості стержня шляхом збільшення його довжини, додавання буферної пружини, заміни матеріалу іншим, з більш низьким модулем пружності, вирівнювання площ поперечних перерізів. Ефективним може виявитися вирівнювання площ поперечних перетинів за *найменшою*.

Тому при конструюванні стержнів, що працюють на удар, треба добиватися постійної площі перерізу по всій довжині стержня; місцеві *потовщення* допустимі лише на невеликих ділянках довжини; ***місцеві ж виточки невеликої довжини вкрай небажані***. Якщо за таких умов не вдається сконструювати достатньо міцний стержень, необхідно подовження стержня або рівномірне збільшення площі його поперечного перетину.

Як приклад можна привести болт, що передає від однієї частини конструкції на іншу розтягуючий удар. Конструкція, показана на рис.15.11а, гірше чинитиме опір удару, так як ділянка болта з нарізкою, що має менший діаметр, працюватиме як виточка. Більша частина енергії удару поглинатиметься частиною болта, що має нарізку. Руйнування болта вельми ймовірне.

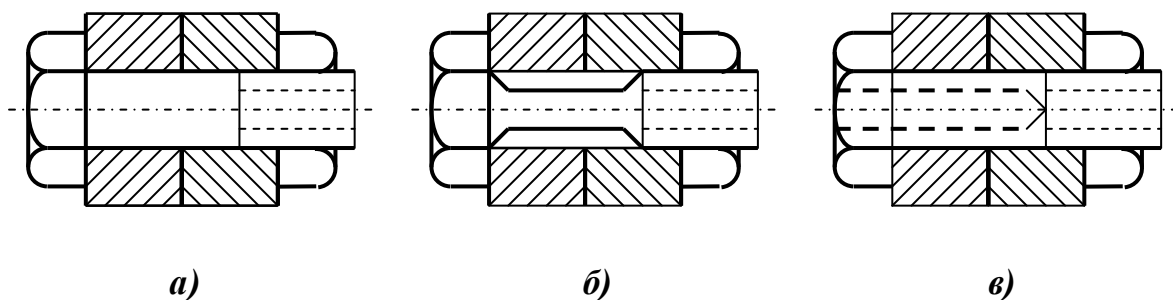


Рис.15.11. Різні конфігурації болтів:

***а) – болт, де різьбова частина має меншу площу поперечного перерізу;
б),в) – болти, в яких зменшено площу поперечного перерізу не різьбової частини***

Для поліпшення конструкції треба примусити весь об'єм болта ^і більш менш рівномірно поглинати енергію удару; для цього треба зробити його площу усюди (або майже усюди) рівній площі за внутрішнім діаметром нарізки. Цього можна досягти або обточуванням тіла болта (рис.15.11б), або висвердлюванням в ньому каналу (рис.15.11в).

Як приклад збільшення опору болтів шляхом їх подовження, можна привести конструкцію, зображену на рис.15.12а, б.

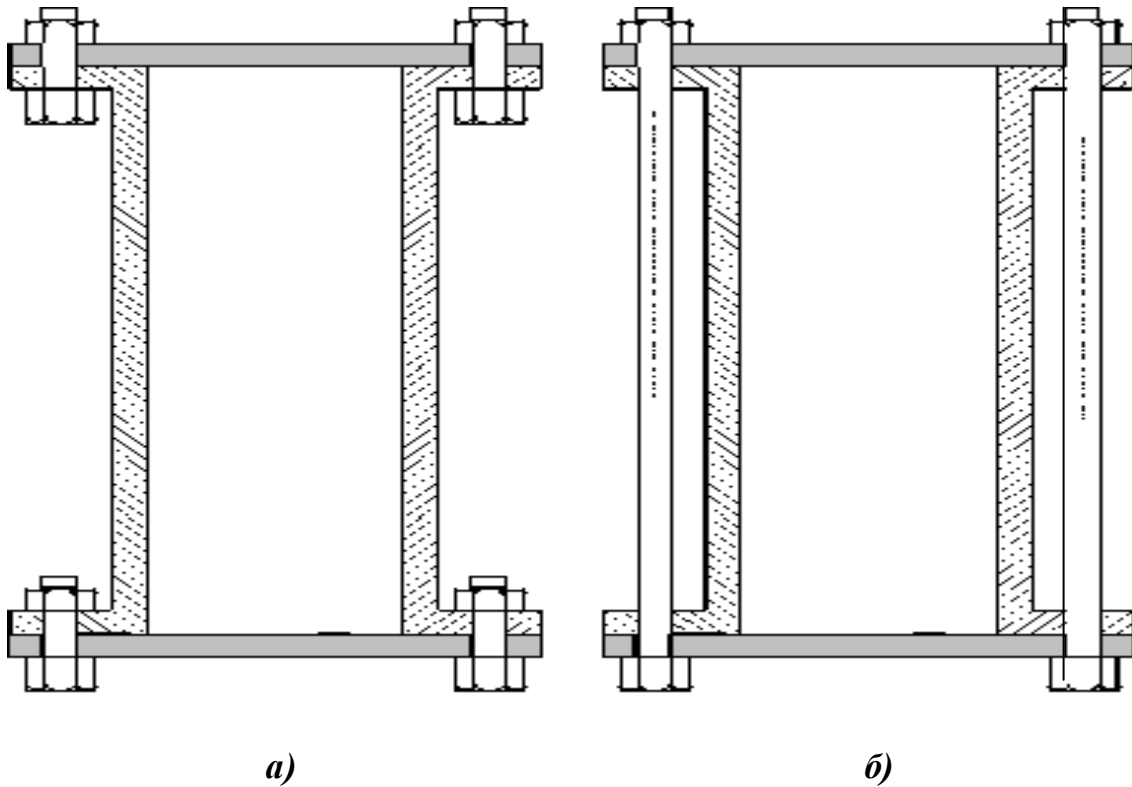


Рис.15.12. Конструкції скріплені:
а) – короткими болтами; б) – довгими шпільками

Кришки циліндра бурового інструменту іноді витримують сильні удари поршня. Короткі болти, що прикріплюють кришку до циліндра по варіанту рис.15.12а, давали обрив. Вихід був знайдений шляхом подовження болтів по варіанту рис.15.12б.

15.10. Механічні властивості матеріалів при ударі

Для перевірки властивості матеріалу чинити опір ударним навантаженням застосовують дослідження, що передбачає ударне навантаження при згині – визначення ударної в'язкості надрізаних зразків. Ці дослідження проводять на маятникових копрах. На рис. 15.13. показаний зразок, що використовується при дослідженнях, та напрям удару маятника (розміри задані в мм).

Різниця висот положення маятника до і після удару дозволяє обчислити роботу U , проведenu для руйнування зразка.

Ударною в'язкістю матеріалу K_C називають величину роботи, затраченої на руйнування зразка, віднесenu до площі поперечного перерізу зразка в місці надрізу.

$$K_C = \frac{U}{A} = \frac{G(h_1 - h_2)}{A} \quad (15.36)$$

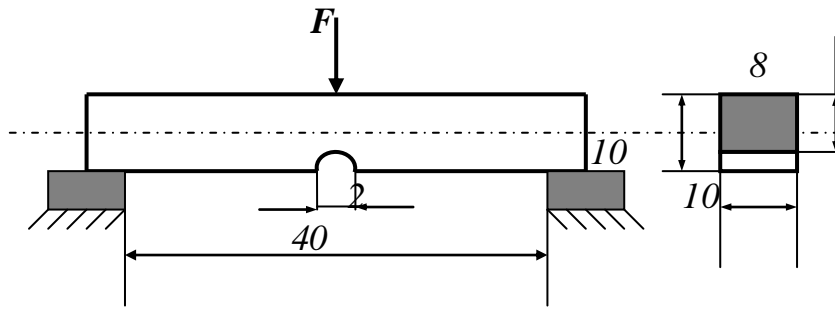


Рис. 15.13. Зразок для випробовування на ударну в'язкість

де G – вага маятника, h_1 та h_2 – початкова та кінцева висоти положення маятника.

Хоча дані про ударну в'язкість не можуть бути використані при розрахунку на міцність, вони дозволяють оцінити таку особливість матеріалу, як його схильність до крихкості при динамічних навантаженнях за умов складного напруженого стану в зоні надрізу, і вирішити питання про можливість застосування того чи іншого матеріалу для певних режимів роботи. Саме в таких умовах працює велика кількість деталей машин, що мають отвори, шпоночні канавки і т.п.

Низька ударна в'язкість є основою для відбракування матеріалу. Сталі, що використовуються для виготовлення деталей, що працюють при динамічних навантаженнях, повинні мати ударну в'язкість не менше від $8 \cdot 10^5 - 8 \cdot 10^6$ (Дж/м²).

Ударна в'язкість однієї й тієї ж сталі залежить від її структури, причому цю залежність неможливо визначити при статичних дослідженнях. У табл. 15.1. приведені результати визначення ударної в'язкості для дрібнозернистої та крупнозернистої сталі марки Ст2 (0,15% вуглецю). Ці сталі мають майже однакові пластичні властивості при статичних дослідженнях, але при ударних навантаженнях їхні властивості різко відрізняються.

Порівнювальні характеристики сталей

Таблиця 15.1.

Матеріал	σ_s (МПа)	δ	Ψ	Ударна в'язкість (Дж/м ²)
		(%)		
Ст2 дрібнозерниста	375	35,3	72,2	$13,1 \cdot 10^5$
Ст2 крупнозерниста	345	36,9	66,7	$2,6 \cdot 10^5$

При низьких температурах більшість чорних металів стають крихкими. Знижується також і їх ударна в'язкість. Для таких металів проводилися випробування на удар з одночасним зниженням температури. При цьому була визначена критична температура крихкості – температура, при якій виникає різке зменшення ударної в'язкості матеріалу.

Критична температура крихкості для різних матеріалів є різною. Нижче цієї температури метал стає непридатним для роботи при динамічних навантаженнях.

Слід відмітити, що ударна крихкість може виникати і при підвищених температурах. Наприклад, ударна в'язкість вуглецевих сталей в значній мірі зменшується в межах температур 200 – 550 °С.

15.10. Приклад розрахунку напружень при ударному навантаженні балки

Визначити максимальні нормальні напруження в сталевій двотавровій балці, на яку з висоти

Прийняти: $E = 2 \cdot 10^8$ кПа

$$Q = 20 \text{ кН};$$

$$l = 4 \text{ м};$$

$$h = 0,1 \text{ м}$$

$$\text{№ 20: } I_0 = 1840 \text{ см}^4 = 1840 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4;$$

$$W_0 = 184 \text{ см}^3 = 184 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

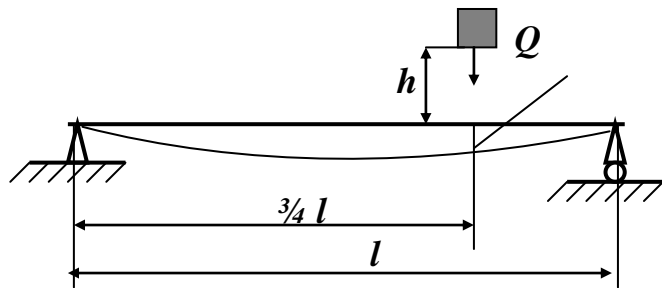


Рис.1. Схема навантаження балки

Рішення задачі

Для розв'язку задачі використаємо залежність між напруженнями при статичній ($\sigma_{ст.}$) та динамічній ($\sigma_{д}$) постановках задач:

$$\sigma_{д} = \sigma_{ст.} K_{д},$$

де $K_{д}$ – коефіцієнт динамічності, який при ударі обчислюється за формулою:

$$K_{д} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{ст}}};$$

де $\delta_{ст}$ – переміщення в місці удару від статичного навантаження величиною Q .

Розрахуємо спочатку напруження, яке виникне при статичному прикладанні сили Q .

$$\sigma_{ст \max} = \frac{M_{\max}}{W_0}.$$

Для цього побудуємо епюри згинаючих моментів від статичного

навантаження Q (рис.2а,б).

Реакції R_A та R_B обчислимо, використовуючи рівняння статички та записуючи суми моментів сил відносно опор: $M(x)$;

$$\sum M_A = Q \cdot \frac{3}{4}l - R_B \cdot l = 0.$$

Звідки $R_B = \frac{3}{4}Q = 15$ (кН).

$$\sum M_B = Q \cdot \frac{1}{4}l - R_A \cdot l = 0.$$

Звідки $R_A = \frac{1}{4}Q = 5$ (кН).

Зробимо перевірку,

записуючи суму сил в проекції на вертикальну вісь:

$$\sum y = R_A + R_B - Q = 5 + 15 - 20 = 0.$$

Перевірка показала правильність обчислення реакцій. Побудуємо епюру $M(x)$ (рис.2,б).

Максимальний момент

$$M_{max} = R_A \cdot \frac{3}{4}l = 5 \cdot \frac{3}{4} \cdot 4 = 15 \text{ (кН}\cdot\text{м)}.$$

Тоді
$$\sigma_{ст max} = \frac{M_{max}}{W_0} = \frac{15}{184 \cdot 10^{-6}} \approx 81,5 \cdot 10^3 \text{ (кПа)} = 81,5 \text{ (МПа)}.$$

Тепер розрахуємо коефіцієнт динамічності K_d . Для цього треба обчислити переміщення $\delta_{ст}$ в місці удару від статичного навантаження величиною Q . З причини дуже простих епюр моментів, краще за все в даному випадку використати спосіб Верещагіна.

Побудуємо допоміжну балку (рис.2в), навантажимо її одиничною силою $F=I$ в перерізі, де на основній балці знаходимо прогин та побудуємо епюру згинаючих моментів $M'(x)$, використовуючи те, що реакції на опорах цієї балки, знаходяться аналогічно тому, як це робиться на основній балці. Знаходимо площі епюр ω_1 та ω_2 моментів для основної балки $M(x)$ та координати їх центрів ваги (у трикутників центри ваги знаходяться на $1/3$ висоти, рахуючи від основи) та проектуємо їх на епюру моментів для допоміжної балки $M'(x)$.

Отримуємо значення M'_{C1} та M'_{C2} . Використовуємо формулу Верещагіна для випадку балки, що має дві ділянки:

$$\begin{aligned} \delta_{ст} &= \frac{1}{EI} (\omega_1 \cdot M'_{C1} + \omega_2 \cdot M'_{C2}) = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \frac{3Ql}{16} \frac{3l}{4} \frac{2}{3} \frac{3l}{16} + \frac{1}{2} \frac{3Ql}{16} \frac{l}{4} \frac{2}{3} \frac{3l}{16} \right) = \\ &= \frac{3Ql^3}{EI \cdot 16 \cdot 4 \cdot 16} (3 + 1) = \frac{3 \cdot 20 \cdot 4^3}{256 \cdot 2 \cdot 10^8 \cdot 1840 \cdot 10^{-8}} \approx 3,05 \cdot 10^{-3} \text{ (м)}. \end{aligned}$$

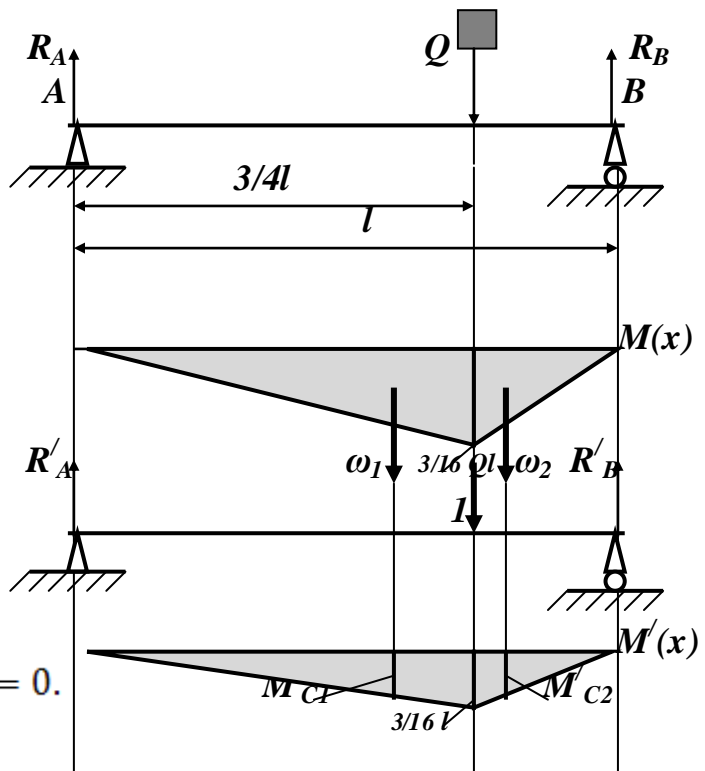


Рис.2. Епюри згинаючих моментів
а) вид основної балки; б) епюра $M(x)$
в) вид допоміжної балки;
г) епюра $M'(x)$

Підставимо цей результат у вираз для K_d :

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 0,1}{3,05 \cdot 10^{-3}}} = 9,16.$$

Тепер обчислюємо найбільші динамічні напруження, що виникають в балці:

$$\sigma_{\max \text{ д}} = \sigma_{\max \text{ ст}} \cdot K_d = 81,5 \cdot 9,16 = 746,54 \text{ (МПа)}.$$

Це значення напруження значно перевищує не тільки границю текучості ($\sigma_T = 240$ МПа), яку прийнято рахувати небезпечним напруженням для пластичних матеріалів, але й границю міцності для звичайної мало вуглецевої сталі ($\sigma_s = 400$ МПа). І, хоча, це напруження носить миттєвий характер, його не можна залишати по за увагою. Слід зменшити або висоту падіння, або вантаж Q , або змінити параметри балки та знову провести розрахунки.

ВИКОРИСТАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Беляев Н.М. Сопротивление материалов. 15-е изд.– М.: Наука, 1976. – 607с.
2. Дарков А.В., Шпиро Г.С. Сопротивление материалов. – М.: Высшая школа, 1975.– 654с.
3. Писаренко Г.С. и др. Сопротивление материалов. 5-е изд., перераб. и доп.– К.:Вища школа, Головне видавництво, 1986. – 775с.
4. Посацький С.Л. Опір матеріалів. – Львів: Видавництво Львівського університету, 1973. – 403с.
5. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. – М.: Наука, 1979. – 559с.
6. Боголюбов А.Н. Математики механики. Биографический справочник. – К.:Наукова думка, 1983. – 639с.
7. Мильніков О.В. Опір матеріалів. Тернопіль: Видавництво ТДТУ імені Івана Пулюя, 2005.– 212с.

Зміст

Передмова.....	3
Заняття 1. Лекція 1. Тема 1. Основні поняття Опору матеріалів.....	5
1.1. Вступ.....	5
1.2. Задачі опору матеріалів.....	6
1.3. Коротка історична довідка.....	7
1.4. Основні поняття опору матеріалів.....	8
1.4.1. Основні гіпотези опору матеріалів.....	8
1.4.2. Класифікація тіл, що приймається в опорі матеріалів.....	10
1.4.3. Поняття про деформації.....	11
1.4.4. Сили та їх класифікація.....	11
Заняття 2. Лекція 2. Закінчення теми 1 (Вступ). Тема 2. Розтяг стиск.	
Тема 3. Механічні характеристики конструкційних матеріалів..	13
1.4.5. Умови рівноваги.....	13
1.4.6. Напруження.....	15
1.5. Прості види деформацій.....	17
Тема 2. Розтяг - стиск.....	17
2.1. Внутрішні сили та напруження при розтягу-стиску.....	18
2.2. Деформації при розтягу-стиску.....	19
2.3. Коефіцієнт Пуассона.....	20
Тема 3. Механічні характеристики конструкційних матеріалів.	21
3.1. Діаграма розтягу для пластичних матеріалів.....	21
3.2. Діаграма напружень.....	23
3.3. Реальна діаграма напружень.....	24
3.4. Діаграма розтягу для крихких матеріалів.....	25
3.5. Діаграми стиску для пластичних і крихких матеріалів.....	26
3.6. Твердість.....	26
3.7. Порівнювальні характеристики пластичних та крихких матеріалів.....	27
3.8. Основні положення для вибору коефіцієнта запасу міцності та допустимих напружень.....	27
3.8.1. Загальні положення.....	27
Заняття 3. Практичне заняття 1. Тема 2. Розтяг – стиск. Розрахунки на міцність.....	30
Задача 1.....	30
Задача 2.....	31
Задача 3.....	33
Заняття 4. Лекція 3. Тема 5. Складний напружений стан Тема 6.	
Геометричні характеристики плоских перерізів.....	34
5.1. Лінійний напружений стан. Напруження на площадках, розташованих під кутом до осі стержня.....	35
5.2. Плоский напружений стан.....	36
5.2.1. Пряма задача (аналітичні виведення).....	36

5.2.2. Круги Мора (пряма задача).....	39
5.2.3. Круги Мора (обернена задача).....	40
5.2.4. Обернена задача (аналітичні виведення).....	41
5.3. Октаедричні напруження.....	42
5.4. Об'ємний напружений стан.....	43
5.4.1. Узагальнений закон Гука.....	43
5.4.2. Об'ємна деформація.....	43
5.5. Теорії міцності.....	44
Тема 6. Геометричні характеристики плоских перерізів.....	48
6.1. Класифікація геометричних характеристик перерізів.....	49
6.1.1. Площа.....	49
6.1.2. Статичний момент площі відносно осі.....	49
6.1.3. Моменти інерції площ.....	50
6.1.4. Моменти опору.....	51
6.1.5. Радіус інерції.....	52
Заняття 5. Лекція 4. Геометричні характеристики плоских перерізів (продовження). Тема 7. Чистий зсув. Кручення.....	52
6.2. Перетворення моментів інерції.....	52
6.1.6. Перетворення моментів інерції при паралельному перенесенні осей.....	52
6.1.7. Перетворення моментів інерції при повороті осей.....	54
6.1.8. Головні осі інерції. Головні моменти інерції.....	55
6.2. Обчислення моментів інерції та опору для деяких характерних перерізів.....	57
6.2.1. Прямокутник.....	57
6.2.2. Трикутник.....	57
6.2.3. Круг.....	58
6.2.4. Кільце.....	59
6.3. Визначення моментів інерції, опору та інших геометричних характеристик для прокатних профілів (двотаври, швелери, кутники тощо).....	60
Тема 7. Чистий зсув. Кручення.....	60
7.1. Чистий зсув, напруження, умова міцності.....	60
7.1.1. Приклад розрахунку на міцність заклепкового з'єднання.....	61
7.2. Деформації, закон Гука при зсуві, модуль пружності II роду...	62
7.3. Кручення.....	64
7.4. Внутрішні силові фактори при крученні. Напруження. Критерій міцності.....	64
7.5. Деформації при крученні. Закон Гука. Умова жорсткості.....	67
Заняття 6. Практичне заняття 2. Тема 6. Геометричні характеристики плоских перерізів.....	68
Задача 1.....	68
Заняття 7. Практичне заняття 3. Тема 7. Кручення.....	71
Приклад розрахунку вала на міцність та жорсткість.....	71

Заняття 8. Лекція 11. Тема 8. Згин.....	74
8.1. Типи опор балок.....	74
8.2. Внутрішні силові фактори при згині.....	75
8.3. Диференціальні залежності між силовими факторами при згині	77
8.4. Побудова епюр перерізуючих сил Q і згинаючих моментів M ...	78
8.4.1. Правила контролю та рекомендації при побудові епюр Q	
і M	78
8.4.2. Приклад побудови епюр перерізуючих сил Q і	
згинаючих моментів M	80
Заняття 9. Практичне заняття 4. Продовження теми 8 (Згин).....	82
8.5. Нормальні напруження при згині. Умова міцності при згині за	
нормальними напруженнями.....	83
Приклад розрахунку балки на міцність за нормальними	
напруженнями.....	84
II семестр. Заняття 1. Тема 10. Складний опір.....	87
10.1. Складний згин. Косий згин.....	87
9.1.1. Визначення напружень при косому згині. Умова	
міцності.....	87
9.1.2. Визначення переміщень при косому згині.....	90
10.2. Сумісна дія згину та розтягу (або стиску). Згин за умов дії	
поздовжніх та поперечних сил.....	90
10.3. Позацентровий стиск (розтяг).....	92
10.3.1. Напруження при позацентровому стиску (розтягу).	
Розрахунок на міцність.....	92
10.3.2. Ядро перерізу.....	94
Заняття 2. Практичне заняття 1. Продовження теми 10 (Складний опір)	96
10.4. Сумісна дія згину та кручення.....	96
10.5. Застосування теорій міцності для оцінки напруженого стану	
при сумісній дії згину та кручення.....	97
10.6. Приклад розрахунку еквівалентного моменту при сумісній дії	
згину та кручення.....	98
Заняття 3. Лекція 2. Тема 11. Загальні теореми опору матеріалів.....	101
11.1. Лінійна пружна система.....	101
11.2. Принцип можливих переміщень.....	102
11.3. Теорема про взаємність робіт (Теорема Бетті).....	103
11.4. Теореми Лагранжа и Кастильяно.....	103
11.5. Інтеграл переміщень (інтеграл Мора).....	105
11.6. Графоаналітичний спосіб розрахунку інтеграла переміщень	
(спосіб Верещагіна).....	105
Заняття 4. Практичне заняття 2. Продовження теми 11 (Загальні	
теореми опору матеріалів). Застосування спрощеного	
інтеграла Мора та способу Верещагіна для визначення	
переміщень при згині.....	107
11.7. Аналіз застосування спрощеного інтеграла Мора.....	107

11.8. Приклад використання спрощеного інтеграла Мора для обчислення переміщень при згині.....	108
11.9. Порядок використання формули Верещагіна для обчислення переміщень при згині.....	109
11.10. Приклад використання формули Верещагіна для обчислень переміщень при згині.....	110
11.10.1. Тестова задача.....	110
11.10.2. Знаходження переміщень у більш складному випадку.....	111
Заняття 5. Практичне заняття 3. Тема 14. Стійкість. Поздовжній стиск стержнів.....	114
14.1. Поняття про стійкість стиснутих стержнів.....	114
14.2. Формула Ейлера для критичної сили.....	117
14.3. Вплив способу закріплення кінців стержня.....	121
14.4. Межі застосування формули Ейлера і побудова повного графіка критичних напружень.....	124
14.5. Перевірка стиснутих стержнів на стійкість.....	129
14.6. Приклад розрахунку стиснутого стержня на стійкість.....	131
14.7. Вибір типу перетину і матеріалу.....	132
14.7.1. Вибір типу перетину.....	132
14.7.2. Вибір матеріалу.....	133
Заняття 6. Лекція 3. Тема 15. Динаміка. Тема 16. Опір матеріалів дії повторно-змінних напружень.....	134
15.1. Врахування сил інерції та коливань. Введення.....	134
15.2. Обчислення напружень при рівноприскореному русі.....	136
15.3. Розрахунок кільця, що обертається.....	138
15.4. Обчислення напружень при коливаннях.....	139
15.4.1. Власні коливання.....	139
15.4.2. Коливання за наявності збурюючої сили.....	141
16.1. Явище «втомленості» матеріалів.....	144
16.2. Методи визначення межі витривалості.....	149
16.2.1. Діаграми втомленості.....	149
16.2.2. Діаграми граничних напружень.....	152
Заняття 7. Практичне заняття 4. Продовження теми 15 (Динамічні навантаження).....	156
15.5. Елементарна теорія удару. Основні положення.....	156
15.6. Загальний метод обчислення напружень при ударі.....	157
15.7. Окремі випадки обчислення напружень та перевірки міцності при ударі.....	162
15.7.1. Випадок поздовжнього удару.....	162
15.7.2. Згинаючий удар.....	163
15.7.3. Удар, що скручує.....	166
15.8. Напруження в стержнях змінного перерізу при ударі.....	166
15.9. Практичні висновки з отриманих результатів.....	168

15.10. Механічні властивості матеріалів при ударі.....	170
15.11. Приклад розрахунку напружень при ударному навантаженні балки.....	172
Використана література.....	175