

Міністерство освіти і науки України  
Національний університет водного господарства та природокористування

На правах рукопису



**ЦВЕТКОВА ТЕТЯНА ПАВЛІВНА**

УДК 532.72:532.546:539.217:519.63

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПЕРЕНЕСЕННЯ СОЛЕЙ ПРИ  
ФІЛЬТРАЦІЇ ТА ВОЛОГОПЕРЕНЕСЕННІ У  
НАСИЧЕНО-НЕНАСИЧЕНИХ ҐРУНТОВИХ СЕРЕДОВИЩАХ**

01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи

Дисертація на здобуття наукового ступеня

кандидата технічних наук

Науковий керівник:

**Власюк Анатолій Павлович,**

доктор технічних наук, професор

Рівне – 2016

## ЗМІСТ

ВСТУП		7
Розділ 1	МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ПЕРЕНЕСЕННЯ СОЛЕЙ ТА ВОЛОГОПЕРЕНЕСЕННЯ В ОБЛАСТЯХ ПОВНОГО ТА НЕПОВНОГО НАСИЧЕННЯ	14
1.1	Актуальність питання сумісної фільтрації сольових розчинів та вологоперенесення у насичених та ненасичених ґрунтах	14
1.2	Короткий огляд наукової літератури з математичного моделювання процесів перенесення солей при фільтрації ґрунтових вод у насичених та вологоперенесенні у ненасичених ґрунтових середовищах	18
1.3	Математичне моделювання процесів перенесення солей при фільтрації ґрунтових вод у насичених та вологоперенесенні у ненасичених ґрунтах	20
1.4	Початкові та граничні умови до крайових задач математичної фізики. Умови спряження на межі контакту областей повного та неповного насичення	32
1.5	Математичне моделювання процесів фільтрації сольових розчинів та вологоперенесення з урахуванням осмотичних явищ	34
1.6	Висновки до Розділу 1	36
Розділ 2	МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ОДНОВИМІРНИХ ЗАДАЧ ПЕРЕНЕСЕННЯ СОЛЕЙ ПРИ ФІЛЬТРАЦІЇ ТА ВОЛОГОПЕРЕНЕСЕННІ У НАСИЧЕНО-НЕНАСИЧЕНИХ ҐРУНТАХ	38
2.1	Математичне моделювання процесу перенесення солей при вологоперенесенні	38
2.1.1	Постановка задачі та її математична модель	38
2.1.2	Чисельний розв'язок задачі	40
2.1.3	Результати чисельних експериментів та їх аналіз	43

2.2	Математичне моделювання перенесення солей при фільтрації ґрунтових вод та вологоперенесенні у насичено-ненасичених ґрунтах в лінійній та нелінійній постановках	45
2.2.1	Постановка задачі	46
2.2.2	Математична модель задачі у лінійному випадку	47
2.2.2.1	Чисельний метод розв'язування задачі	49
2.2.2.2	Результати чисельних експериментів та їх аналіз	53
2.2.3	Математична модель задачі у нелінійному випадку	61
2.2.3.1	Чисельний метод розв'язування задачі	63
2.2.3.2	Результати чисельних експериментів та їх аналіз	68
2.3	Висновки до Розділу 2	76
Розділ 3	МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПЕРЕНЕСЕННЯ СОЛЕЙ ПРИ ФІЛЬТРАЦІЇ ТА ВОЛОГОПЕРЕНЕСЕННІ В НАСИЧЕНО-НЕНАСИЧЕНИХ ҐРУНТАХ У ДВОВИМІРНОМУ ВИПАДКУ	79
3.1	3.1 Математичне моделювання перенесення солей при сумісній фільтрації та вологоперенесенні у насичено-ненасиченому ґрунтовому масиві з рухомою вільною поверхнею	79
3.1.1	Постановка задачі	79
3.1.2	Математичне моделювання процесу перенесення солей при фільтрації ґрунтових вод у насиченому пористому середовищі з рухомою вільною межею	80
3.1.2.1	Постановка задачі фільтрації	80
3.1.2.2	Математична модель задачі у фізичній області	81
3.1.2.3	Математична модель задачі у змінних $\xi, \eta$	82
3.1.2.4	Обчислювальний алгоритм побудови чисельного конформного відображення криволінійного чотирикутника на параметричний прямокутник	87

3.1.2.5	Обчислювальний алгоритм розв'язування задачі фільтрації	98
3.1.3	Математичне моделювання процесу перенесення солей у насиченому ґрунтовому середовищі	100
3.1.3.1	Постановка задачі перенесення солей	100
3.1.3.2	Математична модель задачі у фізичній області	100
3.1.3.3	Математична модель задачі у змінних $\xi, \eta$	102
3.1.3.4	Чисельний алгоритм розв'язування задачі	103
3.1.4	Математичне моделювання процесу перенесення солей при вологоперенесенні у ненасиченому ґрунтовому середовищі	106
3.1.4.1	Постановка задачі вологоперенесення	106
3.1.4.2	Математична модель задачі у фізичній області	107
3.1.4.3	Математична модель задачі у змінних $\xi, \eta$	108
3.1.4.4	Обчислювальний алгоритм побудови чисельного конформного відображення криволінійного чотирикутника на параметричний прямокутник	109
3.1.4.5	Чисельний алгоритм розв'язування задачі вологоперенесення	112
3.1.5	Постановка задачі перенесення солей у ненасиченому ґрунтовому середовищі	114
3.1.5.1	Математична модель задачі у фізичній області	115
3.1.5.2	Математична модель задачі у змінних $\xi, \eta$	116
3.1.5.3	Чисельний алгоритм розв'язування задачі перенесення солей	118
3.1.5.4	Результати чисельних експериментів та їх аналіз	121
3.2	Математичне моделювання масоперенесення солей при сумісній фільтрації та вологоперенесенні у насичено-ненасиченому ґрунтовому масиві при його зволоженні	133
3.2.1	Постановка задачі	133

3.2.2	Математичне моделювання процесу перенесення солей при фільтрації ґрунтових вод та вологоперенесенні у насиченому та ненасиченому ґрунтовому середовищі при наявній вільній поверхні	135
3.2.2.1	Математична модель задачі в області повного насичення	135
3.2.2.2	Математична модель задачі в області неповного насичення	136
3.2.3	Чисельний метод розв'язування задачі	137
3.2.4	Результати чисельних експериментів та їх аналіз	138
3.3	Математичне моделювання перенесення солей при нестационарній фільтрації та вологоперенесенні у насичено-ненасичених ґрунтах	148
3.3.1	Постановка задачі	148
3.3.2	Математична модель задачі перенесення солей при нестационарній фільтрації в області повного насичення	149
3.3.2.1	Чисельний метод розв'язування задачі нестационарної фільтрації	150
3.3.2.2	Чисельний метод розв'язування задачі солеперенесення	152
3.3.3	Математична модель задачі перенесення солей при вологоперенесенні у ненасиченому ґрунтовому середовищі	155
3.3.3.1	Чисельний метод розв'язування задачі вологоперенесення	156
3.3.3.2	Чисельний метод розв'язування задачі перенесення солей	158
3.3.4	Результати чисельних експериментів та їх аналіз	162
3.4	Висновки до Розділу 3	179

ВИСНОВКИ	181
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	183
ДОДАТКИ	207

## ВСТУП

**Актуальність теми.** Зміни водного режиму унаслідок дії багаторічних, циклічних, природно-кліматичних чинників та в результаті дії несприятливих техногенних умов впливають на гідродинамічний, фізико-хімічний, біохімічний, тепловий режим поверхневих і підземних вод, що у низці випадків призводить до розвитку небезпечних гідрогеологічних процесів: підтоплення територій, промислових майданчиків, сільськогосподарських земель, забруднення ґрунтових вод та засолення родючих ґрунтів, просідання ґрунтових масивів та обвальні процеси, спровоковані надмірним зволоженням і підтопленням ділянок схилів, внаслідок зміни гідрогеологічних умов – пониження рівня ґрунтових вод. Розвиток перерахованих явищ може привести до катастрофічних екологічних наслідків, що впливають на соціально-побутові умови мешкання людей і представляють загрозу для їх здоров'я і життя.

Однією з причин погіршення якості земельних ресурсів є засолення ґрунтів хлоридами, сульфатами, та карбонатами, що призводить до погіршення корисних властивостей та родючості ґрунту.

Засолення ґрунту може бути обумовлене природним надходженням солей з атмосферними опадами, з ґрунтових і поверхневих вод та нераціональним зрошенням через високе підняття мінералізованих вод внаслідок порушення водного балансу ґрунту.

Для запобігання кризових ситуацій необхідно прогнозувати протікання процесів перенесення солей за фільтрації ґрунтових вод, що описують поширення забруднення ґрунтових вод, засолення родючих ґрунтів, та вологоперенесення – дослідження динаміки переміщення вологи в ненасичених ґрунтах, адже визначення напорів води в ґрунтах є важливим завданням при встановленні кількості водних ресурсів у засушливих регіонах та проектуванні дренажних і зрошувальних систем.

З метою зменшення або уникнення засоленості ґрунтів застосовують гідромеліоративні заходи, які включають створення дренажних систем, через які відбувається відведення сольових розчинів. Тому необхідні ґрунтовні

дослідження процесу поширення солей під дією гідродинамічних процесів фільтрації, вологоперенесення та роботи гідротехнічних об'єктів. Взаємозв'язок цих процесів приводить до побудови досить складних математичних моделей, що представляють нелінійні крайові задачі математичної фізики, що відкриває можливість проведення чисельних експериментів для розробки нових технічних рішень.

В літературі досліджувалися процеси вологоперенесення без урахування масоперенесення. Процес масоперенесення розглядався лише при фільтрації ґрунтових вод, а процес вологоперенесення – без урахування масоперенесення окремо в насичених та ненасичених ґрунтових середовищах. Тому побудова математичних моделей процесу перенесення солей з урахуванням процесів фільтрації сольових розчинів та вологоперенесення у насичено-ненасичених ґрунтах є важливим та актуальним науковим завданням.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.** Робота виконана в рамках планів наукових досліджень Національного університету водного господарства та природокористування, результати дисертаційної роботи отримані в рамках науково-дослідних тем: «Математичне та комп'ютерне моделювання впливу природних та техногенних факторів на стан ґрунтових основ енергетичних об'єктів» (2007-2009 р.р., №ДР 0107U004173); «Математичне та комп'ютерне моделювання фізико-хімічних процесів підземної гідродинаміки під впливом природних, техногенних і соціальних факторів» (2010-2012 р.р., №ДР 0110U000816); «Математичне та комп'ютерне моделювання фізико-хімічних процесів підземної гідродинаміки під впливом природних, техногенних і соціальних факторів» (2013-2015 р.р., №ДР 0113U004052). У рамках виконання цих науково-дослідних робіт автором проведено математичне моделювання процесу перенесення сольових розчинів при фільтрації та вологоперенесенні у насичено-ненасичених ґрунтах.

**Мета і задачі дослідження.** Метою роботи є побудова нових математичних моделей процесу перенесення сольових розчинів з урахуванням процесів фільтрації та вологоперенесення в областях насичено-ненасиченого



грунту, знаходження чисельних розв'язків відповідних крайових задач в областях складної геометричної форми та наявними вільними поверхнями.

Для досягнення мети розв'язано такі задачі:

- побудовано математичну модель взаємозв'язаних процесів перенесення солей, фільтрації та вологоперенесення у насичено-ненасичених ґрунтових середовищах з рухомою внутрішньою поверхнею контакту ґрунтових масивів та на її основі сформульовано контактні-крайові задачі у лінійних та нелінійних випадках;
- узагальнено побудовану математичну модель масоперенесення сольових розчинів при фільтрації та вологоперенесенні в ґрунті на урахування осушення та зволоження насичено-ненасичених ґрунтових середовищ під дією систематичного дренажу;
- модифіковано методи скінченних різниць з використанням чисельних методів конформних відображень для розв'язання контактні-крайових задач масоперенесення солей при фільтрації та вологоперенесенні у насичено-ненасичених ґрунтах з вільною поверхнею ґрунтових вод;
- розроблено різницеві схеми, обчислювальні алгоритми для чисельного розв'язання контактні-крайових задач та на цій основі розроблено комплекс програм для дослідження взаємозв'язаних процесів перенесення солей, фільтрації та вологоперенесення з рухомою та нерухомою внутрішніми поверхнями контакту насичено-ненасичених ґрунтових середовищ;
- проведено чисельні експерименти та встановлено закономірності взаємозв'язаних процесів перенесення сольових розчинів, вологоперенесення у ненасичених ґрунтах, процесів фільтрації та вологоперенесення у насичено-ненасичених ґрунтових середовищах з вільною поверхнею ґрунтових вод.

*Об'єкт дослідження:* процеси перенесення сольових розчинів з урахуванням фільтрації підземних вод та вологоперенесення в насичено-ненасичених ґрунтах.

*Предмет дослідження:* математичні моделі процесів перенесення сольових розчинів з урахуванням фільтрації підземних вод та вологоперенесення у насичено-ненасичених ґрунтах.

**Методи досліджень.** Для побудови математичних моделей використано підходи механіки пористого середовища, теорій фільтрації та дифузії, аналітичної хімії. Для знаходження наближених розв'язків крайових задач використано методи скінченних різниць з використанням чисельних методів конформних відображень, метод прогонки, ітераційний метод Гауса-Зейделя, які було модифіковано для розв'язання систем лінійних та нелінійних диференціальних рівнянь параболічного, еліптичного типів в областях з криволінійними межами.

**Наукова новизна одержаних результатів** полягає в наступному:

- вперше побудовано нелінійну математичну модель взаємозв'язаних процесів перенесення солей, фільтрації ґрунтових вод та вологоперенесення у насичено-ненасичених ґрунтових середовищах з рухомою границею контакту насичених та ненасичених ґрунтових масивів з урахуванням залежностей коефіцієнтів систем рівнянь від концентрації, напорів та осмосу в одновимірних та двовимірних випадках;
- узагальнено розроблену математичну модель взаємозв'язаних процесів перенесення солей, фільтрації та вологоперенесення у насичено-ненасичених ґрунтових середовищах на процес перенесення сольових розчинів під дією плоско-вертикальної безнапірної стаціонарної фільтрації сольового розчину до горизонтального систематичного дренажу при наявній рухомій вільній поверхні ґрунтових вод;
- вперше модифіковано чисельні методи скінченних різниць з використанням чисельних методів конформних відображень шляхом їх адаптації до розв'язання нелінійних контактнo-крайових задач солеперенесення, фільтрації і вологоперенесення в областях з криволінійними межами та за наявної рухомої або нерухомої внутрішньої поверхні контакту;

- вперше встановлено закономірності процесу солеперенесення при вологоперенесенні у ненасичених ґрунтах, за фільтрації, вологоперенесення та осмосу у насичено-ненасичених ґрунтових середовищах за наявної рухомої або нерухомої внутрішньої поверхні контакту ґрунтових масивів, що містять дренаж в якості осушувального або зволожувального елемента дренажної системи.

**Практична цінність роботи.** Проведені в дисертаційній роботі дослідження розрахунку полів напорів води, п'єзометричних напорів, концентрації сольових розчинів в насичено-ненасичених ґрунтах можуть бути використані при проектуванні та будівництві дренажних, зрошувальних систем, запобігання підтоплення територій, прогнозування поширення забруднень та засолення родючих ґрунтів.

Результати даної дисертаційної роботи впроваджено при складанні завдань на проектування та будівництво меліоративних систем Рівненським обласним управлінням водних ресурсів.

Одержані результати дисертаційних досліджень теоретичного і практичного характеру впроваджені в навчальному процесі при підготовці спецкурсів «Чисельні методи математичної фізики», «Теорія систем та математичне моделювання» для студентів Національного університету водного господарства та природокористування МОН України за спеціальністю «Прикладна математика».

**Достовірність результатів** забезпечується строгими теоретичними викладками при побудові математичної моделі взаємозв'язаних процесів перенесення солей, фільтрації та вологоперенесення у насичено-ненасичених ґрунтах, коректністю і строгістю формулювання фізично обґрунтованих постановок задач, застосуванням достатньо обґрунтованих та апробованих підходів механіки пористого середовища, теорій фільтрації та дифузії, аналітичної хімії та методів скінченних різниць з використанням чисельних методів конформних відображень, використання сучасних чисельних методів і

засобів обчислювальної техніки, а також узгодженням окремих результатів з відомими у літературі теоретичними та експериментальними даними.

**Особистий внесок здобувача.** Всі теоретичні та прикладні результати, що складають зміст дисертаційної роботи, отримані автором самостійно. У роботах, опублікованих у співавторстві, здобувачеві належать: дослідження взаємозв'язаних процесів масоперенесення, фільтрації та вологоперенесення [58, 39, 73], побудова одновимірних математичних моделей перенесення сольових розчинів з урахуванням процесів фільтрації та вологоперенесення у лінійних [63, 179] та нелінійних випадках [56, 66], дослідження впливу осмотичних явищ на солеперенесення у насичено-ненасичених ґрунтах [41, 179], дослідження протікання процесу перенесення сольових розчинів [44, 81] з урахуванням рухомої вільної поверхні [50, 59], у випадку осушення [53, 65] та зволоження ґрунтових масивів [80, 81] під дією систематичного дренажу, встановлення впливу нестационарної фільтрації [42, 69] та вологоперенесення [43, 61] на солеперенесення у насичено-ненасичених ґрунтах, у шаруватих ґрунтах [69, 79], побудова обчислювальних алгоритмів та розв'язування відповідних крайових задач [59, 78, 80], проведення чисельних експериментів [48, 80, 209] та аналіз отриманих результатів [59, 72].

**Апробація результатів дослідження.** Основні результати дисертації доповідались й обговорювались на міжнародних та вітчизняних конференціях: XII, XV міжнародних наукових конференціях ім. академіка М. Кравчука (Київ, 2008, 2014); XVI, XVIII, XX, XXIII, XXIV, XXV міжнародних конференціях «Прогнозування та прийняття рішень в умовах невизначеності» (Київ-Рівне, 2008; Ялта, 2010; Ялта, 2011; Брно, Чеська Республіка, 2012; Мукачево, 2014; Чеський Рудолец, Чехія, 2014; Східниця, 2015); XV, XVI, XIX, XX, XXI всеукраїнських наукових конференціях «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики» (Львів, 2008, 2009, 2013-2015); VI міжнародній науковій конференції «Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації» (Кам'янець-Подільський, 2014); міжнародній науковій конференції «Сучасні проблеми математичного моделювання та

обчислювальних методів» (Рівне, 2015); науково-практичних конференціях професорсько-викладацького складу Національного університету водного господарства та природокористування (Рівне, 2008-2015 р.р.).

В повному обсязі робота доповідалася на розширеному засіданні кафедри прикладної математики Національного університету водного господарства та природокористування; міжкафедральному науковому семінарі факультету прикладної математики та інформатики Львівського національного університету ім. Івана Франка; науковому семінарі кафедри системного аналізу та теорії прийняття рішень Київського національного університету ім. Тараса Шевченка; науковому семінарі «Математичне моделювання та обчислювальні методи» Тернопільського національного технічного університету ім. Івана Пулюя.

**Публікації.** За темою дисертаційної роботи опубліковано 25 наукових праць, у тому числі: 9 статей у наукових фахових виданнях з технічних наук, з них 1 у зарубіжному науковому виданні, яке входить до наукометричних баз, 16 публікацій в матеріалах міжнародних та національних конференціях, 1 працю опубліковано без співавторів.

**Структура та обсяг роботи.** Дисертація складається зі вступу, трьох розділів, висновків, списку використаних джерел із 217 найменувань на 24 сторінках, додатків на 2 сторінках. Обсяг роботи становить 209 сторінок, в тому числі основного тексту 145 сторінок.

Користуючись нагодою, хочу висловити щире подяку своєму науковому керівнику Анатолію Павловичу Власюку – доктору технічних наук, професору, завідувачу кафедрою інформаційних систем та обчислювальних методів Міжнародного економіко-гуманітарного університету імені академіка Степана Дем'янчука за цінні поради та увагу до роботи.

# РОЗДІЛ 1

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ПЕРЕНЕСЕННЯ СОЛЕЙ ТА ВОЛОГОПЕРЕНЕСЕННЯ В ОБЛАСТЯХ ПОВНОГО ТА НЕПОВНОГО НАСИЧЕННЯ

### 1.1 Актуальність питання сумісної фільтрації сольових розчинів та вологоперенесення у насичених та ненасичених ґрунтах

При проектуванні та експлуатації гідромеліоративних систем на зрошуваних (осушуваних) територіях з метою отримання кращих врожаїв в сільському господарстві та для покращення ресурсів самих ґрунтів, великого значення набувають питання дослідження водно-сольового режиму ґрунтів і ґрунтових вод при сумісних процесах в ґрунтах: фільтрації сольових розчинів в насиченій області та вологоперенесення в області неповного насичення. З цією метою на меліоративних територіях застосовують як наземне, так і підземне зрошення для стабілізації зрошувальної вологи і внесення добрив в кореневий шар ґрунту та зменшення їх винесення в ґрунтові води.

Однією з причин погіршення якості земельних ресурсів є засолення ґрунтів хлоридами ( $\text{NaCl}$ ,  $\text{KCl}$ ,  $\text{CaCl}_2$ ,  $\text{MgCl}_2$ ), сульфатами ( $\text{CaSO}_4$ ,  $\text{MgSO}_4$ ,  $\text{Na}_2\text{SO}_4$ ,  $\text{K}_2\text{SO}_4$ ), карбонатами ( $\text{CaCO}_3$ ,  $\text{MgCO}_3$ ,  $\text{NaHCO}_3$ ,  $\text{Na}_2\text{CO}_3$ ), які потрапляють в ґрунт природнім шляхом з атмосферними опадами, з ґрунтових та поверхневих вод, з високими дозами мінеральних добрив і хімічних засобів захисту рослин, під час нераціонального зрошення через високе підняття мінералізованих вод внаслідок порушення водного балансу ґрунту та зрошенням забрудненою водою, з промисловими та побутовими відходами, що призводить до погіршення корисних властивостей та родючості ґрунту.

Для запобігання небезпечних ситуацій (засолення ґрунтів, забруднення ґрунтових вод, підтоплення територій) необхідно прогнозувати протікання процесів перенесення солей за фільтрації ґрунтових вод, що описують процеси поширення забруднення ґрунтових вод, засолення родючих ґрунтів, та

вологоперенесення – дослідження динаміки переміщення вологи в ненасичених ґрунтах.

З метою зменшення або уникнення засоленості ґрунтів застосовують гідромеліоративні заходи, які включають створення дренажних систем, за допомогою яких відбувається відведення сольових розчинів та надмірної ґрунтової вологи або нагнітання води. Зокрема, застосовують систематичний дренаж (вертикальний, горизонтальний), який представляє собою систему вертикальних або горизонтальних дрен-накопичувачів рідини, розташованих паралельно (рис. 1.1, 1.2).

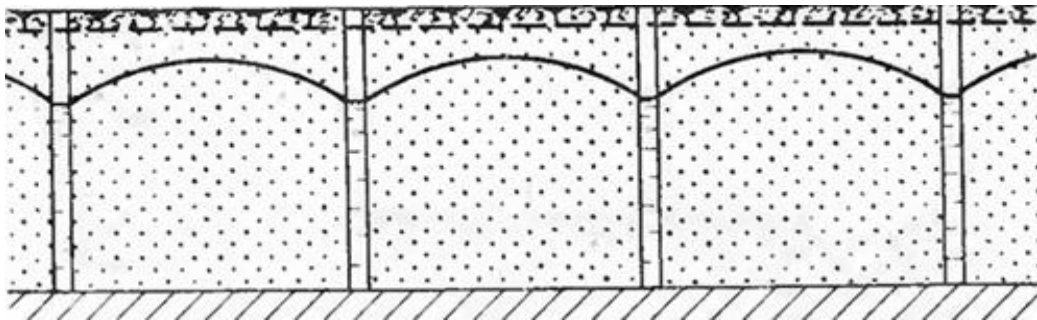


Рис. 1.1. Систематичний дренаж вертикального типу [212]

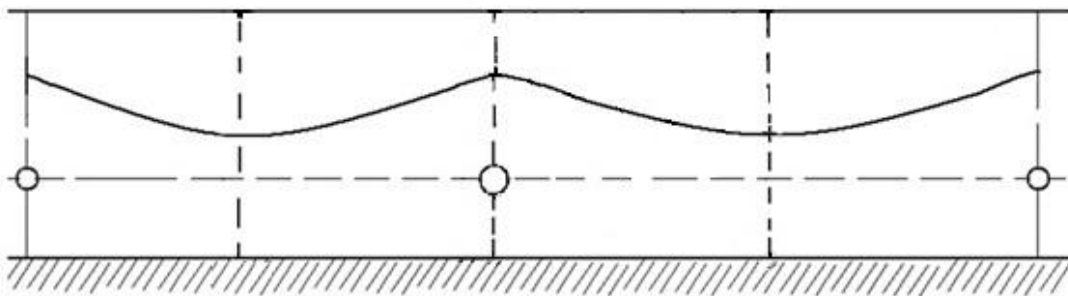


Рис. 1.2. Систематичний дренаж горизонтального типу [80]

Дані системи дренажу, як спеціальні осушувальні системи, забезпечують відведення зайвої води та сольових розчинів з ґрунту (нагнітання рідини) до необхідної осушувальної (зволожувальної) норми. Тому освоєння засолених ґрунтів вимагає дослідження протікання процесів солеперенесення в ґрунтових масивах.

Нестача вологи в агросекторі поповнюється зрошенням або підґрунтовим зволоженням за допомогою гідромеліоративних зрошувальних систем різного

типу. Для цього використовують гідромеліоративні зрошувальні системи, що забезпечують забір води з джерела для зрошення (рис. 1.3).



Рис. 1.3. Зрошувальні системи [214]

У випадку нераціонального зрошення забрудненою водою сольові розчини та забруднюючі речовини потрапляють в ґрунт та знижують його продуктивність, що потребує дослідження ступеня засоленості зрошувальних ґрунтів. Тому необхідні ґрунтовні дослідження процесу поширення солей під дією гідродинамічних процесів фільтрації, вологоперенесення та роботи гідротехнічних об'єктів.

Можливості рисосіяння відкрилися в Україні після будівництва великих зрошувальних систем насамперед на засолених землях в районах Причорномор'я та Присивашся (Дунай-Дністровська, Татарбунарська, Каховська) (рис. 1.4) [217].



Рис. 1.4. Каховська зволожувальна система



При вирощуванні рису використовують полив затопленням, при якому порушується структура ґрунту, зменшується пористість та аерація, поживні речовини разом з водою, що фільтрується вимивається вглиб та переходить у важкодоступну форму, а також може піднятися рівень ґрунтових вод (РГВ) та існує ризик вторинного засолення (рис. 1.4).



Рис. 1.4. Рисова карта [216]

Проблеми засолення та осолонцювання ґрунтів ускладнюють експлуатацію зволожувальних систем. Серед заходів запобігання цим негативним процесам – дотримання зрошувальних норм, зменшення фільтрації води зі зрошувальної мережі.

Зміни водного режиму унаслідок дії природно-кліматичних чинників та несприятливих техногенних умов впливають на гідродинамічний, фізико-хімічний, біохімічний, тепловий режим поверхневих і підземних вод, що у низці випадків може призвести до розвитку небезпечних гідрогеологічних процесів: підтоплення територій, промислових майданчиків, сільсько-господарських земель, забруднення ґрунтових вод та засолення родючих ґрунтів, пониження рівня ґрунтових вод внаслідок зміни гідрогеологічних умов.

Заслуговують також великої уваги питання моделювання гідродинамічних процесів в зонах повного та неповного насичення внаслідок зміни в часі положення вільної поверхні розділу цих зон в ґрунтових огорожувальних

дамбах при роботі гідроакумуючих електростанцій, оскільки рівень води у верхній водоймі є змінним.

Також актуальними є ці питання про роботі відкачувальних або нагнітальних свердловин в результаті зміни вільної поверхні ґрунтових вод.

Таким чином, великої уваги заслуговує клас задач по математичному та комп'ютерному моделюванню вищевказаних процесів у насичених та ненасичених ґрунтах, а саме: задачі масоперенесення при фільтрації ґрунтових вод описують процеси поширення забруднень, засолення та очищення родючих ґрунтів, вологоперенесення – динаміку руху вологи в насичених і ненасичених ґрунтах, визначення напорів води в ґрунтах для встановлення кількості водних ресурсів в засушливих регіонах, проектування дренажних та зрошувальних систем.

## **1.2 Короткий огляд наукової літератури з математичного моделювання процесів перенесення солей при фільтрації ґрунтових вод у насичених та вологоперенесенні у ненасичених ґрунтових середовищах**

Дослідження процесів перенесення солей при фільтрації ґрунтових вод у насичених та вологоперенесенні у ненасичених ґрунтах є важливим для управління водними ресурсами та прогнозування їх протікання. Взаємозв'язок цих процесів приводить до побудови досить складних математичних моделей, що представляють нелінійні крайові задачі математичної фізики.

В літературі досліджувалися процеси вологоперенесення без урахування масоперенесення. Процес масоперенесення розглядався лише при фільтрації ґрунтових вод, а процес вологоперенесення – без урахування масоперенесення окремо в насичених та ненасичених ґрунтових середовищах. Тому побудова математичних моделей процесу перенесення солей з урахуванням одночасних процесів фільтрації сольових розчинів та вологоперенесення у насичено-ненасичених ґрунтах є важливим та актуальним науковим завданням.

Питанням масоперенесення присвячені роботи [1, 30-36, 94-97, 107-114, 119, 123, 130-135, 138, 139, 142, 148-150, 152, 168, 170, 183, 199, 200]. Зокрема, в даний час достатньо добре розроблена теорія фільтрації і масоперенесення у водонасичених ґрунтах. Задачі масоперенесення при фільтрації підземних вод у водонасичених ґрунтах досліджували: М.М. Веригін, А.В. Ликов, Ю.А. Михайлов, В.М. Ніколаєвський, В.М. Булавацький, В.І. Лаврик, І.І. Ляшко, С.І. Ляшко, В.В. Скопецький, В.С. Дейнека, А.П. Власюк, А.Я. Бомба, Я.Г. Савула, Г.А. Шинкаренко, Є.Я. Чапля, О.Ю. Чернуха, Б.В. Гера, М.М. Біляєв, І.В. Бейко, П.М. Мартинюк, О.П. Остапчук, О.М. Степанченко, А. Darcy, J. Bear, K. Eriksson, A.D. Nield та ін. [14, 17, 20-24, 39, 85, 74, 77, 82, 83, 108-114, 120-124, 125, 159, 180-182, 185, 192-194, 200-202].

Теорія масоперенесення у ненасичених ґрунтах розвинена у роботах М.М. Веригіна, І.В. Сергієнка, В.С. Дейнеки, В.В. Скопецького, І.І. Ляшка, Е.С. Childs, J. Simunek, M.T. Van Genuchten та ін. [30-36, 94-96, 120-123, 167-169, 195-198, 205, 208].

Процеси масоперенесення з урахуванням консолідації ґрунтів розглянуті в роботах А.П. Власюка, П.М. Мартинюка, М.Р. Петрика, В.О. Богаєнка, Ж. Фрессара [10-12, 20, 82, 83, 148-150, 170, 203].

Теоретичні основи вологоперенесення в ґрунтах закладені в роботах С.Ф. Авер'янова, М.М. Веригіна, П.І. Ковальчука, А.П. Ліхацевича, О.Я. Олійника, В.Л. Полякова, М.М. Рекса, Е.С. Childs, А. Darcy, J. Simunek, L.A. Richards та ін. [1, 2, 30-36, 103, 104, 142, 156, 157, 195-200, 205].

Експериментальні дослідження коефіцієнтів і параметрів фільтрації сольових розчинів та вологоперенесення механічних характеристик ґрунтів проведені в роботах М.Т. Кузла, А.П. Власюка, В.Й. Пастушенка [77, 105].

Питання ймовірності надійності експлуатації гідротехнічних споруд на осушувально-зрошувальних територіях досліджені в роботах Ц.Є. Мірцхулави, І.І. Науменка, В.А. Гурина, Д.В. Стефанишина [174].

Однак, в розглянутих вище роботах процес перенесення солей розглядався лише при фільтрації чистої води або домінував лише процес вологоперенесення

без урахування перенесення солей в насичених та ненасичених ґрунтових середовищах.

У зв'язку з цим, метою даної роботи є побудова нових математичних моделей процесів сумісного перенесення солей в ґрунтах при фільтрації у насиченій області та вологоперенесенні в області неповного насичення.

### **1.3 Математичне моделювання процесів перенесення солей при фільтрації ґрунтових вод у насичених та вологоперенесенні у ненасичених ґрунтах**

При моделюванні процесу масоперенесення солей в пористих середовищах при фільтрації підземних вод параметри фільтрації та масопереносу (коефіцієнт фільтрації, коефіцієнт конвективної дифузії, пористість) вважалися постійними. У зв'язку з цим масоперенесення розчинених у воді речовин в основному вивчався на фоні фільтраційного потоку підземних вод, причому замість фільтрації розчину розглядалась фільтрація чистої води. Проте ряд практичних задач (поширення забруднень в ґрунтових масивах, фільтрація сольових розчинів із водосховищ, добування корисних копалин із надр шляхом їх вилуговування, промивання засолених і забруднених земель та ін.) показали неадекватність існуючих математичних моделей процесам, перерахованим вище. Як впливає з аналізу проведених експериментальних досліджень фільтрації різних розчинів в піщаних та глинистих ґрунтах, коефіцієнт фільтрації, а отже, швидкість фільтрації, коефіцієнт конвективної дифузії, пористість можуть значно змінюватися в залежності від зміни концентрації розчинених у воді речовин в області фільтрації [11, 19, 20, 25, 31, 33, 40, 43, 50, 78-80, 107, 115, 116, 128, 140, 145, 150, 153, 158, 181].

В даний час інтенсивного розвитку енергетики та інших галузей промисловості великого значення набувають проблеми, пов'язані з стійкістю гідротехнічних та енергетичних об'єктів, надійністю та безпекою їх експлуатації. В багатьох випадках експлуатація останніх відбувається при

фільтрації підземних вод в їх основах, в яких знаходяться дисперсно розчинені солі або залягають у вигляді окремих включень, пластів тощо. Тому великої уваги в даний час заслуговують питання розробки, дослідження і впровадження методів моделювання для розв'язання задач підземного масопереносу при фільтрації підземних вод. Зокрема, науково обґрунтовані розрахунки необхідні при вивченні складних фільтраційних ситуацій руху ґрунтових вод в обхід гідроспоруд, через земляні греблі, при притоці до дренажів та котлованів. Також аналогічні розрахунки виникають в задачах міграції забруднень, при прогнозі гідрохімічного режиму ґрунтів та ґрунтових вод, при зрошенні, промивках чи осушенні земель, в класі задач, пов'язаних з вивченням процесів розчинення та вимивання солей і карстових порід, які залягають в основах гідротехнічних та енергетичних споруд у вигляді окремих пластів, або сольових включень. При цьому розглянуті сольові включення моделюють процеси розчинення, вимивання та винесення солей і карстових порід в межах моделей абсолютно непроникного та сильно проникного тіл.

Моделі масоперенесення базуються на наступних припущеннях [4, 31, 32, 78, 110-113, 121,122, 126, 153, 181]:

- 1) фільтрація описується узагальненим законом Дарсі;
- 2) рідина вважається нестискуваною, а пористе середовище недеформівним (фільтрація в жорсткому режимі);
- 3) рідина займає частину пористого простору, а іншу частину – волога.
- 4) досліджується перенесення таких мігрантів, наявність яких в розчині не здійснює суттєвого впливу на його масу, в'язкість та інші гідродинамічні характеристики;
- 5) процеси масоперенесення вивчаються при ізотермічних умовах.

Моделювання перенесення мігрантів в підземних водах базується на розв'язку системи диференціальних рівнянь теорії фільтрації і гідрогеохімічної міграції, до складу якої входять рівняння руху і збереження маси рідини, що фільтрується, рівняння руху і збереження маси мігрантів, які знаходяться в розчині, і рівняння, що описують процеси фізико-хімічної взаємодії між

розчином і фільтруючим пористим середовищем. Перенесення мігранта в ґрунтових водах обумовлюється спільною дією сукупності фізичних процесів, серед яких в першу чергу виділимо конвективне перенесення, молекулярну дифузію і фільтраційну дисперсію. Конвективне перенесення являє собою переміщення мігруючої речовини безпосередньо разом з потоком ґрунтових вод. Як правило, це є найбільш суттєва форма переносу.

*Математична модель задачі перенесення солей при фільтрації ґрунтових вод у насичених ґрунтах*

Процес масопереносу розчинів у недеформованих ґрунтових масивах можна описати такою системою диференціальних рівнянь [16, 19, 20, 31, 32, 92, 106, 107, 110, 115, 141, 153, 160, ]:

- фільтрації розчинів з врахуванням осмотичних явищ

$$\vec{V}(x, y, c) = -k(x, y, c) \cdot \text{grad } h \pm v(x, y, c) \text{grad } c, \quad \text{div } \vec{V} = 0.$$

- конвективної дифузії розчинів забруднюючих речовин

$$\text{div}(D(x, y, c) \cdot \text{grad}(c)) - c \cdot \text{div}(\vec{V}(x, y, c)) = \sigma \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial N}{\partial t};$$

- масообміну

$$\frac{\partial N}{\partial t} = f(c, N, C_*, N_*, \gamma_1, \dots, \gamma_n)$$

при відповідних крайових умовах на межі області фільтрації

$$l_1 h(x, y, t) \Big|_{S_T} = \tilde{H}(x, y, t);$$

$$l_2 c(x, y, t) \Big|_{S_T} = \tilde{C}(x, y, t);$$

$$h(x, y, 0) = H_0(x, y);$$

$$c(x, y, 0) = C_0(x, y).$$

Тут:  $c(x, y, t)$ ,  $N(x, y, t)$  – масові концентрації солей у рідкій та твердій фазах відповідно;  $C_*$ ,  $N_*$  – масові концентрації солей в умовах рівноваги;  $V(x, y, c)$  – швидкість фільтрації сольового розчину;  $v(x, y, c)$  – коефіцієнт осмосу;  $\sigma$  –

пористість ґрунту;  $k(x,y,c)$  – коефіцієнт фільтрації, залежність якого від концентрації сольових розчинів встановлена експериментально;  $h = \frac{P}{\rho \cdot g} \pm y$  – гідростатичний напір,  $P$  – тиск,  $\rho$  – густина сольового розчину,  $g$  – прискорення вільного падіння,  $y$  – вертикальна координата, знак „-” – вісь  $Oy$  направлена вгору, „+” – направлена вниз;  $D(x,y,c) = D_m + \lambda |V(x,y,c)|$  – коефіцієнт конвективної дифузії, де  $D_m$  – коефіцієнт молекулярної дифузії,  $\lambda$  – параметр гідродинамічної дисперсії;  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  – константи швидкості масообміну;  $t$  – час;  $C_0(x,y), H_0(x,y)$  – розподіли концентрації та напору по області  $\Omega$  в початковий момент часу;  $\Omega$  – двовимірна область (криволінійний чотирикутник або область зв’язності  $\geq 1$ ), в якій протікають процеси перенесення солей при фільтрації ґрунтових вод.

Наведені вище диференціальні оператори  $l_1 h(x,y,t)|_{S_T}, l_2 c(x,y,t)|_{S_T}$  в крайових умовах на межі області фільтрації задають відповідно граничні умови для напору та концентрації солей на бічній поверхні  $S_T$  циліндра  $Q_T = \Omega \times (0, T)$ .

Крайова задача є системою двох квазілінійних диференціальних рівнянь параболічного типу, які доповнені відповідними початковими та граничними умовами для шуканих функцій  $h(x,y,t), c(x,y,t), N(x,y,t)$ . Система рівнянь є частковим випадком більш загальної системи квазілінійних параболічних рівнянь другого порядку, існування та єдність розв’язку якої досліджено в роботах [82]. Тому, на основі отриманих в наукових джерелах результатів при відповідних вимогах на коефіцієнти рівнянь, класичний розв’язок крайової задачі існує та єдиний.

*Математична модель задачі солеперенесення при вологоперенесенні в ненасиченому ґрунтовому масиві*

Перенесення солей в області неповного насичення описується наступним рівнянням [120, 121, 125, 138, 158, 171]:

$$\frac{\partial(\omega c)}{\partial t} = \text{div}[D(v) \text{grad} c - \omega m^{-1} v c] - \frac{\partial N}{\partial t}, \quad (1.18)$$

де  $\frac{\partial N}{\partial t} = f(m, c, N)$ ,  $m$  – пористість,  $c$  – концентрація сольового розчину,

$D = [D_x, D_y, D_z]$  – діагональна матриця коефіцієнтів конвективної дифузії,  $v$  – швидкість руху рідини під тиском  $p$  за законом Дарсі.

Для концентрації можуть задаватись граничні умови одного з трьох типів [31, 50, 51, 78, 93, 95, 109, 120, 126, 141, 150, 151, 156, 181]

- першого роду

$$c|_{\Gamma_i} = \tilde{C}(x, y, t),$$

- другого роду (умова швидкого виносу забруднень)

$$\frac{\partial c}{\partial n} \Big|_{\Gamma_i} = 0,$$

де  $\frac{\partial c}{\partial n}$  – похідна в напрямку зовнішньої нормалі до межі області;

- третього роду (умова Данквертса):

$$\left( D \frac{\partial c}{\partial n} - V_n (c - \tilde{C}) \right) \Big|_{\Gamma_i} = 0,$$

де  $\tilde{C}$  – концентрація розчинених речовин на виході або вході фільтраційного потоку,  $V_n$  – нормальна складова вектора швидкості фільтрації.

Якщо одна з сторін  $\Gamma_i$  ( $i = \overline{1,4}$ ) області  $\Omega$  є непроникною, то

$$(V, n) \Big|_{\Gamma_i} = 0,$$

де  $n = (n_x, n_y)$ ,  $n_x, n_y$  – напрямні косинуси вектора зовнішньої нормалі до межі  $\Gamma_i$ ,  $(V, n)$  – скалярний добуток. Граничні умови для концентрації розчину

забруднюючих речовин на непроникній стороні  $\Gamma_i$  ( $i = \overline{1,4}$ ) залежать від того, чим дана непроникність зумовлена. Якщо непроникність  $\Gamma_i$  зумовлена заляганням пласту солі, то для концентрації задається гранична умова першого роду



$$c|_{\Gamma_i} = C_m$$

або більш строга балансова гранична умова  $\left( D \frac{\partial c}{\partial n} + \left[ \frac{D}{\delta} - V_n \right] \cdot c \right) |_{\Gamma_i} = \frac{D \cdot C_m}{\delta}$ , де

$\delta$  – товщина дифузійного примежового шару, що утворюється в околі фронту розчинення,  $C_m$  – концентрація граничного насичення.

Якщо непроникність зумовлюється заляганням кам'яного пласта або ґрунту з набагато меншим коефіцієнтом фільтрації, то для концентрації задається умова непроникності

$$\frac{\partial c}{\partial n} |_{\Gamma_i} = 0.$$

### *Математичне моделювання процесу вологоперенесення в ненасичених ґрунтових середовищах*

Нормальний розвиток рослин і ґрунтових мікроорганізмів неможливий без достатньої кількості вологи. Вода є терморегулюючим чинником, забезпечує протікання хімічних, фізико-хімічних і біологічних процесів, обумовлює фізико-механічні властивості ґрунтів, а також прояв деяких негативних процесів: ерозія, винесення з верхніх шарів живильних елементів.

Ґрунтова волога утримується ґрунтом з різною силою, характеризується неоднаковою рухливістю, володіє різними властивостями. Пересування або утримання вологи пояснюється дією сил різної природи, таких як сорбційні, осмотичні, гравітаційні [1, 31, 34, 96, 101, 102, 134, 135, 139, 158].

Вільна волога не пов'язана з ґрунтовими частинками, силами тяжіння і пересувається під дією капілярних і гравітаційних сил, розділяючись на капілярну і гравітаційну. Розрізняють три форми вільної вологи: підвішену капілярну, підперту гравітаційну і вільну гравітаційну. Для підвішеної капілярної вологи характерним є відсутність гідрологічного зв'язку з постійним або тимчасовим водоносним горизонтом, підперта гравітаційна волога

утримується через близьке залягання ґрунтових вод, що підпирають знизу воду в капілярах і більш крупних порах ґрунту, а вільна гравітаційна волога знаходиться переважно в крупних порах ґрунту і пересувається виключно під впливом сили тяжіння.

**Вологість  $w$**  оцінює кількісний вміст води в ґрунті. Чисельно вологість ґрунтів виражають відношенням маси води, заповнюючої пори, до маси сухого ґрунту в частках одиниці або у відсотках від маси сухого ґрунту.

Різноманітні форми ґрунтової вологи визначають наступні водні властивості ґрунтів: вологоємність, водопроникність, водопідіймальна здатність [101, 102].

**Вологоємність** – здатність ґрунту вміщати і утримувати певну кількість води. Залежно від сил, що утримують вологу в ґрунті, розрізняють максимальну адсорбційну, гігроскопічну, капілярну, найменшу і повну вологоємність.

**Повній вологоємності** відповідає повне насичення ґрунту водою. Такий стан ґрунтів виникає при заляганні ґрунтових вод у поверхні, коли на водотривкому шарі збираються гравітаційні води, заповнюючи всі пори ґрунту над водозбором або сколюючись в пониженні водотривкого шару.

Неповному водонасиченню відповідає область з від’ємним тиском рідини.

Задачі розрахунку вологоперенесення в ненасиченому пористому середовищі виникають при прогнозуванні процесів перерозподілу вологи в ґрунті, при зрошенні та дренажуванні, при дослідженні переносу забруднюючих речовин у верхніх шарах ґрунтів тощо.

У ненасиченому середовищі значна частина пор заповнена повітрям. Ступінь насиченості пористого середовища характеризується вологістю. З врахуванням остаточної вологості  $\theta_r$ , яка визначається водою, гігроскопічно пов’язаною з кістяком пористого середовища, відносна безрозмірна вологість  $\bar{\theta}$  дорівнює [101, 102, 120, 121, 138, 156].

$$\bar{\theta} = \frac{\theta - \theta_r}{\theta_{\max} - \theta_r}. \quad (1.1)$$

Водний потенціал (всмоктуючий тиск)  $\psi$  формально визначається як робота, яку потрібно виконати з одиницею кількості води в рівноважній системі «пористе середовище – вода» при її русі до резервуара води, що знаходиться в стандартному стані при тій же температурі. Водний потенціал дорівнює нулю на рівні води в п'єзометрі. Нижче цього рівня  $\psi$  завжди позитивний і зростає зі збільшенням глибини, навіть якщо вологість не змінюється. Складовими водного потенціалу є потенціал тиску  $\psi_p$ , осмотичний потенціал  $\psi_s$ , каркасний потенціал  $\psi_m$ . Каркасний потенціал  $\psi_m$ , обумовлений адсорбційними силами каркаса пористого середовища. У насиченому ґрунті  $\psi_m$  теоретично дорівнює нулю, однак на практиці  $\psi_m$  навіть у водонасиченому ґрунті може мати невелике від'ємне значення.

Гравітаційний потенціал  $\psi_z$  являє собою різницю висот розглянутої точки і точки відліку, і не залежить від властивостей ґрунту. Рівень відліку вибирається довільно, тому практичний інтерес представляє лише різниця потенціалів між двома точками. Гравітаційний потенціал  $\psi_z$  разом з водним потенціалом  $\psi$  дає сумарний водний потенціал  $\Phi = \psi + \psi_z$ .

В ізотермічних умовах вода тече від ділянок з високим сумарним водним потенціалом до ділянок з низьким потенціалом. Внаслідок цього можлива ситуація, коли вода тече в напрямку, протилежному до напрямку сили тяжіння, наприклад, при інтенсивному випаровуванні, коли вода підіймається з нижніх, зволжених, до верхніх, сухих шарів ґрунту. Потік води утворюється за рахунок градієнта водного потенціалу, а не градієнта вологості. Тому потенціал є неперервною функцією глибини навіть у шаруватому середовищі. Разом з тим на границях між шарами з різними властивостями спостерігається різкий розрив вологості.

Гідравлічна провідність  $K$  у ненасиченому ґрунті головним чином залежить від його вологості:  $K$  зменшується на кілька порядків від значення коефіцієнта фільтрації при водонасиченні  $\theta_{\max}$  до гранично низьких значень при

остаточній вологості  $\theta_r$ . Тому практично важливим є визначення співвідношень між вологістю  $\theta$ , всмоктуючим тиском  $\psi$  та гідравлічною провідністю  $K$ , тобто залежностей:  $\psi = \psi(\theta)$  та  $K = K(\psi)$ . Для цього використовуються емпіричні формули або функції у табличному вигляді. Внаслідок гістерезису в ненасиченому середовищі ці залежності можуть суттєво відрізнятися для випадків насичування та осушення, хоча для дослідження цього ефекту потрібні досить точні виміри.

Згідно з класичною моделлю вологоперенесення рух рідини може бути описаний аналогом закону Дарсі [101, 102, 121, 171, 156]:

$$\vec{V} = -K \cdot \text{grad}\varphi, \quad \varphi = \frac{\psi}{\rho g} + z, \quad (1.2)$$

де  $\varphi$  – сумарний водний потенціал;  $\vec{V}$  – швидкість вологоперенесення;  $K$  – коефіцієнт гідравлічної провідності,  $K = K(\psi)$ ,  $\psi$  – всмоктуючий тиск.

Аналогічно насиченій зоні виводиться рівняння нерозривності ненасиченого потоку:

$$\text{div}(\rho \vec{V}) = -\frac{\partial \theta}{\partial t}, \quad (1.3)$$

де  $\rho$  – густина рідини,  $\theta$  – вологість пористого середовища. Підставляючи (1.2) до (1.3), одержимо рівняння Річардса:

$$\text{div}(K(\psi) \text{grad } \Phi) = \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (1.4)$$

або, з урахуванням внутрішніх джерел та стоків (відбір вологи коренями рослин чи системами дренажу, зрошення тощо) інтенсивністю  $Q$ :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( K \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( K \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( K \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) - \frac{\partial K}{\partial z} + Q = \frac{\partial \theta}{\partial t}. \quad (1.5)$$

Дану задачу можна розв'язати за допомогою підстановки відносно тиску, або вологості  $\theta$ . Перший спосіб дає рівняння відносно  $\psi$ :

$$\text{div}(K(\psi) \text{grad}\varphi) - \frac{\partial K(\theta)}{\partial z} + Q = c(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad (1.6)$$

де  $c(\psi) = \partial\theta / \partial\psi$  – вологоємність ненасиченого середовища. Цей спосіб дозволяє моделювати процес вологоперенесення одночасно і в насиченому, і в ненасиченому ґрунті, оскільки за допомогою співвідношення (1.2) легко перейти від тиску  $\psi$  до потенціалу  $\varphi$ .

Заміна відносно вологості приводить до наступного рівняння:

$$\operatorname{div}(D(\theta)\operatorname{grad}\theta) - \frac{\partial K(\theta)}{\partial z} + Q = \frac{\partial\theta}{\partial t}, \quad (1.7)$$

де  $D(\theta) = K(\theta)\partial\psi / \partial\theta$  – дифузійність пористого середовища.

При моделюванні вологоперенесення в початковий момент часу задається вологість або тиск, виходячи з розподілу вологості за вертикаллю. На границях, як правило, задаються умови першого або третього роду: тиск або потік води (інфільтрація чи випаровування).

Моделювання вологоперенесення ускладнюється істотною нелінійністю цього процесу, що проявляється в тому, що параметри середовища ( $K, \psi$ ) змінюються залежно від вологості та температури. Тому надійні результати розрахунків переносу вологи і розчинених речовин у ненасиченому пористому середовищі можуть бути отримані тільки шляхом чисельного моделювання.

Основними моделями руху рідини в ненасиченому середовищі є [101, 102, 121, 171, 156]:

- модель руху рідини на основі вологоперенесення з вираженням через п'єзометричний напір;
- модель руху рідини на основі теорії вологоперенесення з вираженням через вологість.

Розглянемо детальніше першу модель.

Основні співвідношення, що описують процес руху вологи в насичено-ненасичених ґрунтах на основі теорії вологоперенесення, отримані багатьма авторами [1, 2, 30-36, 101, 102, 120, 121, 157, 158, 171], виходячи із загальних законів механіки суцільного ґрунтового середовища. При виводі цих

співвідношень припускається, що рух рідини підкоряється закону Дарсі, тиск газової фази відкритої системи рівний атмосферному.

Співвідношення, що описують рух рідини в ненасичених ґрунтах, подаються у вигляді:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\operatorname{div} v + f, \quad (1.8)$$

$$v = -K(W)\operatorname{grad}h, \quad (1.9)$$

де  $v$  – швидкість руху рідини;  $W$  – об’ємна вологість,  $W = W(P)$ ;  $P = p / \rho g$  – висота тиску;  $p$  – тиск рідини;  $\rho$  – густина рідини;  $g$  – прискорення вільного падіння;  $f$  – функція джерела;  $K = K(W)$  – коефіцієнт вологоперенесення.

В області повного вологонасичення  $P > 0$ , в області неповного водонасичення  $P < 0$ , ізолінія  $P = 0$  є лінією розділу насиченої і ненасиченої областей.

Для дослідження руху вологи в насичено-ненасиченому середовищі достатньо розглянути систему рівнянь (1.8), (1.9), яка з врахуванням залежності  $K = K(W) = K(W(P)) = \tilde{K}(h)$  дозволяє отримати наступне нелінійне рівняння параболічного типу:

$$\mu(h)\frac{\partial h}{\partial t} = \operatorname{div}(K(h)\operatorname{grad}h) + f, \quad (1.10)$$

де  $\mu(h) \equiv 0$  при  $W = W_{\max}$ ;  $\mu(h) = \frac{\partial W}{\partial h}$  при  $P < 0$ .

Для повної математичної постановки задачі вологоперенесення необхідно задати розподіл напору  $h$  в початковий момент часу  $t = t_0$ :

$$h(x, y, t_0) = h_0(x, y), \quad (1.11)$$

а також крайові умови одного з типів на кожному відрізку границі розглядуваної області.

Варто відмітити, що даним процесам притаманне явище гістерезису. Проте, при невеликих швидкостях вологоперенесення і малих змінах висоти тиску вологи гістерезис практично не спостерігається.

При розв'язанні задачі вологоперенесення дуже часто залежність коефіцієнта вологоперенесення від вологості  $W$  задається у вигляді

$$K(W) = K(x, y) \left( \frac{W - W_{\min}}{W_{\max} - W_{\min}} \right)^\alpha, \quad (1.12)$$

де  $W_{\max}, W_{\min}, \alpha$  – параметри, різні для різних типів ґрунтів,  $\alpha = 3 \div 5$ .

В деяких випадках залежність коефіцієнта вологоперенесення від вологості подається у вигляді:

$$K(W) = K(x, y) (W / W_{\max})^3 \quad (1.13)$$

або

$$K(W) = K(x, y) \exp\{-\alpha(W_{\max} - W)\}, \quad (1.14)$$

де  $\alpha = 20 \div 70$ .

Ряд авторів [121, 125, 156, 161] застосовує явне представлення коефіцієнта вологоперенесення в залежності від всмоктуючого тиску:

$$K(W(p)) = K(x, y) (1 + a(-P)^\alpha), \quad (1.15)$$

де параметри  $a, \alpha$  визначаються експериментально.

Також розглядається залежність вологості від висоти тиску у вигляді:

$$W = a_1 P + b_1, \quad (1.16)$$

де  $a_1, b_1$  – визначаються експериментально,  $P$  – висота тиску.

Математична модель руху рідини на основі теорії вологоперенесення з вираженням через вологість задається наступними припущеннями: рух рідини підчиняється закону Дарсі; тиск газової фази рівний атмосферному, рух однорідної нестискуваної відбувається під дією капілярних та гравітаційних сил.[121, 125]. З врахуванням вищесказаного, рівняння для насичення ґрунту вологою  $\omega$  має вигляд

$$\frac{\partial(\rho\omega)}{\partial t} = \text{div}[\rho k(\omega) \text{grad}h] - f_0, \quad (1.17)$$

де  $h$  – гідравлічний потенціал (напір), зв'язаний з тиском залежністю

$$h = p\rho^{-1}g^{-1} + z,$$

де  $z$  – вертикальна координата;  $\rho$  – густина рідини;  $g$  – прискорення вільного падіння;  $k(\omega)$  – коефіцієнт водопроникності;  $f_0$  – функція джерела, що залежить від координат, часу, вологості, чи їх комбінації.

Рівняння (1.17) є рівнянням параболічного типу, для розв'язання якого необхідно знати гідрофізичні характеристики ґрунту, тобто, залежності  $\omega(h)$  і  $k(\omega)$ , які визначаються експериментально.

Вологість  $\omega$  є неоднозначною функцією тиску, яка може приймати в залежності від реальних умов будь-яке значення між двома граничними кривими, що утворюють гістерезисну петлю.

#### **1.4 Початкові та граничні умови до крайових задач математичної фізики. Умови спряження на межі контакту областей повного та неповного насичення**

Розглянемо граничні умови у випадку фільтрації в області  $\Omega$  з межею  $\Gamma$ . Межу пористого середовища будемо називати *дренованою*, якщо на ній забезпечений безперешкодний відтік рідини. У протилежному випадку межа вважається *непроникною*. Граничні умови задаються наступним чином [31, 50, 51, 95, 126, 156, 171, 181]:

1. якщо межа  $\Gamma$  *дренована*, то на ній для функції напору  $h(x, y, z)$  задається гранична умова *першого роду*

$$h(x, y, z)|_{\Gamma} = H_1(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \Gamma,$$

де  $H_1(x, y, z)$  – відома функція;

2. межа  $\Gamma$  – *непроникна*. Тоді потік рідини через неї відсутній. В результаті маємо

$$V_n|_{\Gamma} = 0, \text{ звідки } \left. \frac{\partial h}{\partial n} \right|_{\Gamma} = 0,$$



де  $V_n$  – швидкість фільтрації вздовж зовнішньої нормалі до межі  $\Gamma$ ,  $\frac{\partial}{\partial n}$  – похідна по зовнішній нормалі. Отже, отримуємо граничну умови *другого роду*.

Граничні умови, якими доповнюється рівняння вологоперенесення, залежать від фізичного змісту явищ, які відбуваються на межі областей [31, 50, 51, 125, 156, 181]:

1) якщо  $\Gamma$  – *депресійна крива*, то

$$\varphi(x, y, z, t) \Big|_{\Gamma} = 0,$$

2) якщо  $\Gamma$  – *непроникна межа*, то

$$V_n \Big|_{\Gamma} = 0, \text{ звідки } \frac{\partial h}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = 0.$$

Проводячи заміну  $h(x, y, z, t) = -\varphi(x, y, z, t) + z$ , отримаємо граничну умову для функції  $\varphi$ .

3. Якщо  $\Gamma$  – *межа контакту з атмосферою*, то

$$-k \frac{\partial h}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = \beta(Q \Big|_{\Gamma} - Q_{\text{АТМ}}),$$

де  $\beta$  – коефіцієнт пропорційності, що характеризує інтенсивність випаровування. Якщо існує залежність  $\varphi = \varphi(Q)$ , то маємо  $Q = Q(\varphi)$ . Тоді з вищенаведеної граничної умови маємо

$$-k \frac{\partial h}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = \beta(Q(\varphi) \Big|_{\Gamma} - Q_{\text{атм}}).$$

Якщо  $\beta \rightarrow 0$ , то маємо умову непроникності

$$-k \frac{\partial h}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = 0.$$

Якщо  $\beta \rightarrow \infty$ , то маємо умову миттєвого випаровування

$$Q(\varphi) \Big|_{\Gamma} = Q_{\text{атм}}.$$

Розглянемо умови спряження на межі  $\Gamma$  розділу зон повного та неповного насичення. Вважаємо, що на межі  $\Gamma$  виконуються умови спряження ідеального

контакту. Тобто, з фізичної точки зору, різниці між полями шуканих функцій та їх потоками рівні нулю. Отже,

$$h|_{\Gamma_{\Omega_1}} - h|_{\Gamma_{\Omega_2}} = 0.$$

Або

$$h|_{\Gamma} - (-\varphi + y)|_{\Gamma} = 0.$$

Використовуючи закони Дарсі та Дарсі-Клюта для потоків, маємо

$$k \frac{\partial h}{\partial n} \Big|_{\Gamma} - k(\varphi) \frac{\partial(-\varphi + y)}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = 0.$$

### **1.5 Математичне моделювання процесів фільтрації сольових розчинів та вологоперенесення з урахуванням осмотичних явищ**

На даний час значно зріс техногенний вплив внаслідок людської діяльності на навколишнє середовище. Зокрема, спостерігається забруднення ґрунтів та підземних вод відходами виробництва. Та і в самих природних умовах зустрічаються поклади солей, які знаходяться нижче водоносних горизонтів. Відомо, що глинисті ґрунти мають властивості напівнепроникних мембран. Тому в нерівномірно засолених глинистих ґрунтах можуть спостерігатись аномальні тиски, які спричиняються осмотичними явищами.

*Осмоз* – рух рідини за рахунок градієнта концентрації сольових розчинів.

В літературі [50, 51, 159] наводяться результати експериментальних досліджень найбільш характерних проявів осмосу та основні закономірності для осмотичної фільтрації та осмотичного тиску в ґрунтах, а також наведено пояснення природи явища осмосу. Зокрема вказується, що осмотичні властивості зв'язний ґрунтів можуть бути виражені в одновимірному випадку наступною залежністю:

$$v_c = v \frac{\partial c}{\partial x},$$

де  $v_c$  – швидкість фільтрації, зумовленої хімічним осмосом,  $v$  – коефіцієнт осмосу,  $c$  – концентрація сольового розчину.

Відмічається спостереження нормальної осмотичної фільтрації, коли розчинник (вода) рухається від зони з меншою концентрацією сольового розчину до зони з більшою концентрацією сольового розчину та аномальної осмотичної фільтрації (протилежної до нормальної). Також вказується, що для деяких ґрунтів при малих концентраціях електролітів спостерігається фільтрація, напрямлена в сторону меншої концентрації солі. Швидкість даної фільтрації закономірно збільшується зі збільшенням концентрації солі до 10%, а потім зменшується, і при 20% спостерігається нормальна осмотична фільтрація.

Врахування аномальної та нормальної осмотичної фільтрації визначається через запис закону у вигляді

$$v_c = \pm v \frac{\partial c}{\partial x}.$$

Недоліком такого запису є те, що тут можна врахувати або лише нормальну, або лише аномальну осмотичні фільтрації. В більш загальному випадку, коефіцієнт хімічного осмосу буде залежати від концентрації солей. Тому з урахуванням осмотичних явищ рівняння фільтрації солевих розчинів прийме вигляд [30-35, 82, 83]

$$\vec{V}(x, y, c) = -k(x, y, c) \cdot \text{grad } h \pm v(x, y, c) \text{grad } c.$$

Рівняння вологоперенесення при наявності осмосу є наступним

$$\text{div}(k(c, h) \cdot \text{grad } h) - v(c) \text{grad } c = \mu(h) \text{grad } h.$$

Наведені рівняння фільтрації та вологоперенесення при наявності осмосу входять у загальну математичну модель перенесення солей при сумісній фільтрації ґрунтових вод у насичених ґрунтах та вологоперенесенні у ненасичених ґрунтових середовищах.

## 1.6 Висновки до Розділу 1

Для отримання кращих врожаїв в сільському господарстві та для покращення ресурсів ґрунтів необхідним є дослідження водно-сольового режиму ґрунтів та ґрунтових вод при сумісних процесах фільтрації сольових розчинів у насичених ґрунтах та вологоперенесенні у ненасичених ґрунтових середовищах.

З цією метою застосовують гідромеліоративні заходи, які включають створення дренажних систем, за допомогою яких відбувається відведення сольових розчинів та надмірної ґрунтової вологи або нагнітання води. Визначення напорів води в ґрунтах є важливим завданням при встановленні кількості водних ресурсів у засушливих регіонах та проектуванні дренажних та зрошувальних систем.

Таким чином, великої уваги заслуговує клас задач по математичному та комп'ютерному моделюванню вищевказаних процесів у насичених та ненасичених ґрунтах.

Провівши огляд наукової літератури з математичного моделювання перенесення солей при фільтрації та вологоперенесенні у насичених та ненасичених ґрунтах, встановлено, що дослідження процесів солеперенесення здійснювалося окремо в областях повного та неповного водонасичення без урахування процесу вологоперенесення. Тому питання впливу вологоперенесення на процес масоперенесення недостатньо досліджені. Також в розглянутих вище роботах процес перенесення солей розглядався лише при фільтрації чистої води або домінував лише процес вологоперенесення без урахування перенесення солей в насичених та ненасичених ґрунтових середовищах.

З метою адекватного опису гідродинамічних процесів процес перенесення солей потрібно розглядати з врахуванням фільтрації ґрунтових вод та вологоперенесення сумісно у насичено-ненасичених ґрунтах. Таке комплексне дослідження вимагає побудови нелінійних математичних моделей, які

описують процес перенесення солей при фільтрації в насичених ґрунтах, та перенесення солей при вологоперенесенні у ненасичених ґрунтових середовищах. На внутрішній межі контакту областей задаються відповідні умови спряження ідеального контакту.

Розглянуті фізичні закони, що описують досліджувані процеси у ґрунтових середовищах, дозволяють здійснити побудову математичних моделей, на основі наведених диференціальних рівнянь, та адекватно описати процес перенесення солей при сумісній фільтрації та вологоперенесенні у насичено-ненасичених ґрунтах для вирішення важливих задач підземної гідродинаміки.

## РОЗДІЛ 2

### МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ОДНОВИМІРНИХ ЗАДАЧ ПЕРЕНЕСЕННЯ СОЛЕЙ ПРИ ФІЛЬТРАЦІЇ ТА ВОЛОГОПЕРЕНЕСЕННІ У НАСИЧЕНО-НЕНАСИЧЕНИХ ҐРУНТАХ

#### 2.1 Математичне моделювання процесу перенесення солей при вологоперенесенні

##### 2.1.1 Постановка задачі та її математична модель

З метою дослідження впливу процесу вологоперенесення на процес масоперенесення солей розглянемо задачу перенесення солей з урахуванням вологоперенесення в ненасиченому ґрунтовому середовищі.

На поверхню ґрунту попадають атмосферні опади і поливи. В зв'язку з цим на деякій глибині  $l$  від поверхні землі утворюється вільна поверхня рівня ґрунтових вод (РГВ), яка вважається нерухомою (рис. 2.1).

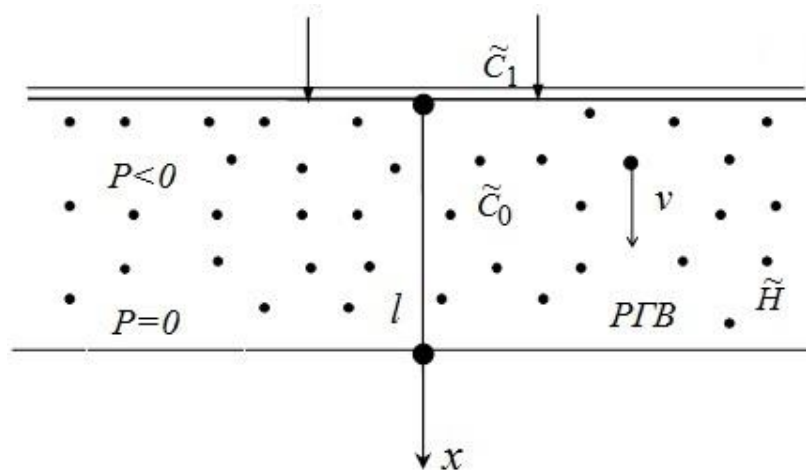


Рис. 2.1. Перенесення солей в області неповного насичення ґрунту

Також на поверхню ґрунту може поступати сольовий розчин з атмосферними опадами або за рахунок інших факторів з концентрацією  $\tilde{C}_1$ . Розподіл концентрації в області неповного насичення –  $\tilde{C}_0$ .

Потрібно дослідити процес розподілу напорів води з урахуванням концентрації сольових розчинів та встановити вплив вологоперенесення на

процес перенесення солей, вплив перенесення солей з урахуванням осмосу на вологоперенесення у ненасиченому ґрунтовому середовищі.

Математична модель задачі перенесення солей при вологоперенесенні з урахуванням осмотичних явищ в ненасиченому ґрунтовому середовищі в одновимірному нелінійному випадку описується системою диференціальних рівнянь вигляду [63, 65, 71, 77, 81, 178]

$$\frac{\partial}{\partial x} D(c) \frac{\partial c}{\partial x} - v_x \frac{\partial c}{\partial x} - \gamma(c - C^*) = \sigma \frac{\partial c}{\partial t}, \quad x \in (0; l), \quad t > 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (k(c, h) \frac{\partial h}{\partial x}) - \nu \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = \mu(h) \frac{\partial h}{\partial t}, \quad x \in (0; l), \quad t > 0 \quad (2.2)$$

$$v_x = -k(c, h) \frac{\partial h}{\partial x} + \nu \frac{\partial c}{\partial x}, \quad x \in (0; l) \quad (2.3)$$

при таких крайових умовах для концентрації сольових розчинів  $c(x, t)$  та напорів води  $h(x, t)$ :

$$c(x, 0) = \tilde{C}_0(x), \quad c(0, t) = \tilde{C}_1(t), \quad c(l, t) = \tilde{C}_2(t), \quad x \in (0; l), \quad 0 < t < t_1, \quad (2.4)$$

$$h(x, 0) = \tilde{H}_0(t), \quad h(0, t) = \tilde{H}_1(t), \quad h(l, t) = \tilde{H}_2(t), \quad x \in (0; l), \quad 0 < t < t_1. \quad (2.5)$$

Тут:  $c(x, t)$  – концентрація сольового розчину,  $D(c)$  – коефіцієнт конвективної дифузії,  $\gamma$  – коефіцієнт інтенсивності масообміну,  $C^*$  – коефіцієнт граничного насичення сольового розчину,  $\sigma$  – пористість ґрунту,  $k(c, h)$  – коефіцієнт

водопроникності,  $h = P - x$  – напір води,  $P = \frac{p}{\rho g}$  – висота тиску,  $p$  – тиск,

$\rho$  – густина сольового розчину,  $g$  – прискорення вільного падіння,  $v_x$  –

швидкість вологоперенесення,  $\mu(h) = \frac{\partial \omega}{\partial h}$  – вологоємність ґрунту,  $\omega$  –

вологість;  $\nu$  – коефіцієнт осмосу,  $t$  – час.

Диференціальне рівняння (2.1) описує перенесення солей. (2.2) – рівняння вологоперенесення в області неповного насичення ( $P < 0$ ). Рівняння (2.3) виражає узагальнений закон Дарсі на випадок вологоперенесення сольових

розчинів. (2.4), (2.5) – крайові умови для концентрації сольових розчинів та напорів вологи відповідно.

### 2.1.2 Чисельний розв’язок задачі

Для отримання чисельного розв’язку поставленої задачі (2.1)-(2.5) використаємо методом скінченних різниць [87, 163, 164, 166-168]. Здійснимо побудову обчислювального алгоритму розв’язування задач вологоперенесення (2.2), (2.5) та перенесення солей (2.1), (2.3), (2.4).

Для знаходження чисельного розв’язку задачі (2.2), (2.4) застосуємо неявну різницеву схему [87, 163, 164, 166-168], згідно якої різницева схема даної задачі має вигляд [178]

$$\frac{1}{h_1} \left[ a_{i+1}^k \frac{H_{i+1}^{k+1} - H_i^{k+1}}{h_1} - a_i^k \frac{H_i^{k+1} - H_{i-1}^{k+1}}{h_1} \right] - \nu \frac{C_{i+1}^{k+1} - 2C_i^{k+1} + C_{i-1}^{k+1}}{h_1^2} = \mu_i^k \frac{H_i^{k+1} - H_i^k}{\tau}, \quad (2.6)$$

де  $a_i^k = 0.5(K(H_i^k, C_i^k) + K(H_{i-1}^k, C_{i-1}^k))$ ,  $a_{i+1}^k = 0.5(K(H_{i+1}^k, C_{i+1}^k) + K(H_i^k, C_i^k))$ ,

$$\mu_i^k = \text{arg} \left( 1 - \frac{2h_2}{H_{i+1}^j - H_{i-1}^j} \right), \quad i = \overline{1, n-1}, \quad k = \overline{0, K-1}.$$

Згрупувавши подібні члени згідно (2.6), отримаємо

$$H_{i-1}^{k+1} \frac{a_i^k}{h_1^2} - H_i^{k+1} \frac{a_{i+1}^k + a_i^k}{h_1^2} + \frac{\mu_i^k}{\tau} + H_{i+1}^{k+1} \frac{a_{i+1}^k}{h_1^2} = -\frac{\mu_i^k}{\tau} H_i^k + \nu \frac{C_{i+1}^{k+1} - 2C_i^{k+1} + C_{i-1}^{k+1}}{h_1^2}. \quad (2.7)$$

Розв’язок різницевої схеми (2.7) знайдемо за методом прогонки [99, 131, 132, 146, 162, 168]. Для цього представимо дану різницеву схему у прогоночному вигляді:

$$a_1 H_{i-1}^{k+1} - c_1 H_i^{k+1} + b_1 H_{i+1}^{k+1} = -f_1, \quad (2.8)$$

де  $a_1 = \frac{a_i^k}{h_1^2}$ ,  $b_1 = \frac{a_{i+1}^k}{h_1^2}$ ,  $c_1 = \frac{a_{i+1}^k + a_i^k}{h_1^2} + \frac{\mu_i^k}{\tau}$ ,  $f_1 = \frac{\mu_i^k}{\tau} H_i^k - \nu \frac{C_{i+1}^k - 2C_i^k + C_{i-1}^k}{h_1^2}$ ,

$i = \overline{1, n-1}$ ,  $k = \overline{0, K-1}$ .

Умови застосування методу прогонки виконані, а саме:

$$a_1 \neq 0, \quad b_1 \neq 0, \quad |c_1| > |a_1| + |b_1|.$$



Тоді розв'язок (2.8) за методом прогонки шукатимемо у вигляді

$$H_i^{k+1} = \alpha_{i+1}^1 H_{i+1}^{k+1} + \beta_i^1, \quad (2.9)$$

де  $\alpha_{i+1}^1 = \frac{b_1}{c_1 - \alpha_i a_1}$ ,  $\beta_{i+1}^1 = \frac{a_1 \beta_i + f_1}{c_1 - \alpha_i a_1}$ ,  $\alpha_1^1 = 0$ ,  $\beta_1^1 = \tilde{H}_1^{k+1}$ ,  $i = \overline{1, n-1}$ ,  $k = \overline{0, K-1}$ .

Запишемо рівняння (2.1) у вигляді

$$D(c) \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial D(c)}{\partial x} \frac{\partial c}{\partial x} - V_x \frac{\partial c}{\partial x} - \gamma(c - C_*) = \sigma \frac{\partial c}{\partial t}$$

або 
$$D(c) \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - \left( V_x - \frac{\partial D(c)}{\partial x} \right) \frac{\partial c}{\partial x} - \gamma(c - C_*) = \sigma \frac{\partial c}{\partial t}.$$

Таким чином, рівняння перенесення солей набуде вигляду

$$D(c) \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - V'_x \frac{\partial c}{\partial x} - \gamma(c - C_*) = \sigma \frac{\partial c}{\partial t}, \quad (2.10)$$

де  $V'_x = V_x - \frac{\partial D(c)}{\partial x}$ .

Для розв'язання задачі масоперенесення солей (2.10), (2.2), (2.3) застосуємо монотонну різницеву схему [131, 132, 166-168, 178, 188].

Монотонна різницева схема поставленої задачі має вигляд

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_2} \left( \mu_{i2} d_{i+1}^k \frac{C_{i+1}^{k+1} - C_i^{k+1}}{h_2} - \mu_{i1} d_i^k \frac{C_i^{k+1} - C_{i-1}^{k+1}}{h_2} \right) + r_{i+}^k \frac{C_{i+1}^{k+1} - C_i^{k+1}}{h_2} + r_{i-}^k \frac{C_i^{k+1} - C_{i-1}^{k+1}}{h_2} + f_i^k = \\ = \sigma \frac{C_i^{k+1} - C_i^k}{\tau}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

де  $d_i^k = \frac{D(x_i, C_i^k) + D(x_{i-1}, C_{i-1}^k)}{2}$ ,  $d_{i+1}^k = \frac{D(x_{i+1}, C_{i+1}^k) + D(x_i, C_i^k)}{2}$ ,

$$r_{i+}^k = 0,5(V(x_i, C_i^k) + |V(x_i, C_i^k)|) \geq 0, \quad r_{i-}^k = 0,5(V(x_i, C_i^k) - |V(x_i, C_i^k)|) \leq 0,$$

$$V(x_i, C_i^k) = r_{i+}^k + r_{i-}^k, \quad f_i^k = -\gamma(C_i^k - C_*), \quad \mu_{i1}^k = \frac{1}{1 + \frac{0,5h|r_i^k|}{d_i^k}}, \quad \mu_{i2}^k = \frac{1}{1 + \frac{0,5h|r_i^k|}{d_{i+1}^k}},$$

$$i = \overline{1, n-1}, \quad k = \overline{0, K-1};$$

$$C_i^0 = C_0(ih_2), \quad C_0^{k+1} = C_1((k+1) \cdot \tau), \quad C_n^{k+1} = C_2((k+1) \cdot \tau), \quad i = \overline{0, n-1}, \quad k = \overline{0, K-1}.$$

Звівши подібні члени в (2.11), отримаємо

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1}{h_2^2} (d_i^k \mu_{i1}^k + d_{i+1}^k \mu_{i2}^k) + \frac{|r_i^k|}{h_2} + \frac{\sigma}{\tau} \right) C_i^{k+1} = \\ & = \frac{1}{h_2} \left( \frac{d_i^k \mu_{i1}^k}{h_2} - r_{i-}^k \right) C_{i-1}^{k+1} + \frac{1}{h_2} \left( \frac{d_{i+1}^k \mu_{i2}^k}{h_2} + r_{i+}^k \right) C_{i+1}^{k+1} + \frac{\sigma}{\tau} C_i^k + f_i^k. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Для отримання чисельного розв'язку побудованої різницевої схеми використаємо метод прогонки. Для цього представимо різницеву схему (2.12) в прогоночному вигляді

$$a_2 C_{i-1}^{k+1} - c_2 C_i^{k+1} + b_2 C_{i+1}^{k+1} = -f_2, \quad (2.13)$$

$$\text{де } a_2 = \frac{1}{h_2} \left( \frac{d_i^k \mu_{i1}^k}{h_2} - r_{i-}^k \right), \quad b_2 = \frac{1}{h_2} \left( \frac{d_{i+1}^k \mu_{i2}^k}{h_2} + r_{i+}^k \right), \quad c_2 = \frac{1}{h_2^2} (d_i^k \mu_{i1}^k + d_{i+1}^k \mu_{i2}^k) + \frac{|r_i^k|}{h_2} + \frac{\sigma}{\tau},$$

$$f_2 = \frac{\sigma}{\tau} C_i^k - \gamma (C_i^k - C^*), \quad i = \overline{1, n-1}, \quad k = \overline{0, K-1}.$$

$$C_0^{k+1} = \chi_1 \tilde{C}_1^{k+1} + \mu_1, \quad C_n^{k+1} = \chi_2 \tilde{C}_{n-1}^{k+1} + \mu_2, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad k = \overline{0, K-1}.$$

Умови застосування методу прогонки виконані, а саме:

$$a_2 \neq 0, \quad b_2 \neq 0, \quad |c_2| > |a_2| + |b_2|, \quad |\chi_1| \leq 1, \quad |\chi_2| \leq 1.$$

Тоді чисельний розв'язок (2.13) за методом прогонки знаходимо у вигляді [99, 131, 132, 146, 162, 168]

$$C_i^{k+1} = \alpha_{i+1}^2 C_{i+1}^{k+1} + \beta_i^2,$$

$$\text{де } \alpha_{i+1}^2 = \frac{b_2}{c_2 - \alpha_i^2 a_2}, \quad \beta_{i+1}^2 = \frac{a_2 \beta_i^2 + f_2}{c_2 - \alpha_i^2 a_2}, \quad \alpha_1^2 \equiv \chi_2 \equiv 0, \quad \beta_1^2 \equiv \tilde{C}_1, \quad i = \overline{1, n-1},$$

$$k = \overline{0, K-1}.$$

Умови стійкості методу прогонки виконані, а саме:

$$0 \leq \alpha_i \leq 1, \quad \beta_i \geq 0.$$

Для обрахунків концентрації сольових розчинів використаємо наступну різницеву схему:

$$V_i^{k+1} = -k_i^k \frac{H_{i+1}^k - H_{i-1}^k}{2h_2} + \nu \frac{C_{i+1}^k - C_{i-1}^k}{2h_2}, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad k = \overline{0, K-1}.$$

### 2.1.3 Результати чисельних експериментів та їх аналіз

Для реалізації побудованого чисельного алгоритму поставленої задачі розроблено програмний комплекс (пакет програм) в інтегрованому середовищі візуально-подійного програмування Microsoft Visual Studio Express на мові програмування C#, який функціонує на довільній стандартній конфігурації персонального комп'ютера з операційною системою Windows-98/2000/XP... Використані програмні засоби є безкоштовними для академічного використання.

Програма являє собою багатовіконний додаток, кожне вікно якого містить результати розв'язання відповідних крайових задач. Результати представлено у табличному та графічному виглядах, що дає можливість провести чисельні експерименти та зробити аналіз отриманих результатів досліджень.

Результати програмної реалізації та чисельні експерименти проведені при сталих граничних і початкових умовах з такими вхідними даними [43, 156,

$$178]: \quad T = 360 \text{ діб}, l = 15 \text{ м}, \sigma = 0.5, \gamma = 0,0065 \text{ доба}^{-1}, \lambda = 0,1 \text{ м},$$

$$C^* = 350 \text{ г/літр}, \tilde{C}_0 = 10 \text{ г/літр}, \tilde{C}_1 = 0 \text{ г/літр}, \tilde{C}_2 = 0 \text{ г/літр}, H_1 = 7 \text{ м},$$

$$H_2 = 20 \text{ м}, \nu = 2,8 \cdot 10^{-5} \text{ м}^5/\text{кг} \cdot \text{доба};$$

$$k(c) = 0.0002c^6 - 0.00088c^5 + 0.162c^4 - 1.3194c^3 + 3.9229c^2 + 0.0223c + 18.187,$$

$$c \in [0,1]; k_2(h_2) = \frac{a_1}{b_1 + \rho^\alpha} = \frac{a_1}{b_1 + [\rho g(h-x)]^2}, a_1 = 1, b_1 = 1, \alpha = 1, \rho = 1000 \text{ кг/м}^3,$$

$$g = 9,8 \text{ м/с}^2; D(c) = D_m + \lambda |V(x,c)|, D_m = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{добу}, \lambda = 0,1 \text{ м}.$$

В результаті розв'язання задачі вологоперенесення та вологоперенесення з урахуванням процесу перенесення солей отримали розподіл напорів вологи в даній області (рис. 2.2, 2.3). Також знайдено розподіл напорів вологи з урахуванням явища осмосу на різних часових шарах. Порівняльні графіки отриманих результатів мають вигляд (рис. 2.4)

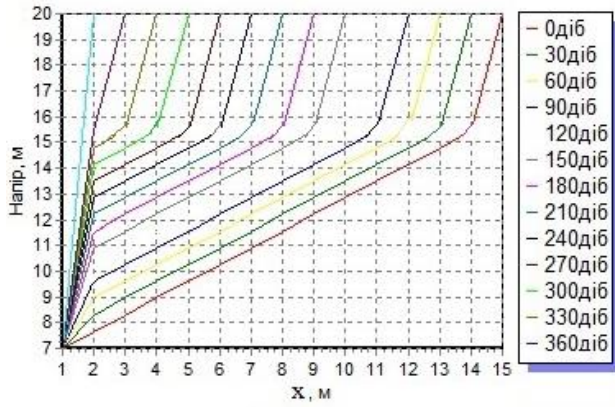


Рис. 2.2. Розподіл напорів води

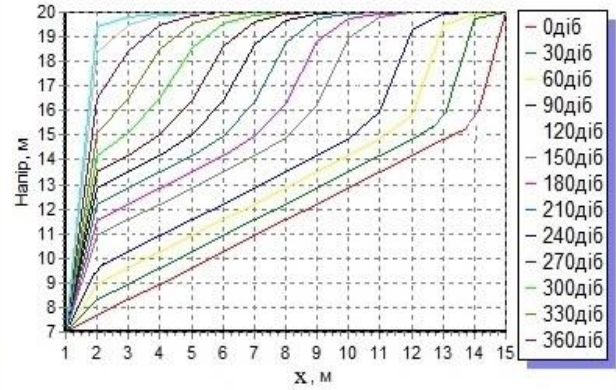


Рис. 2.3. Розподіл напорів води з урахуванням концентрації солей

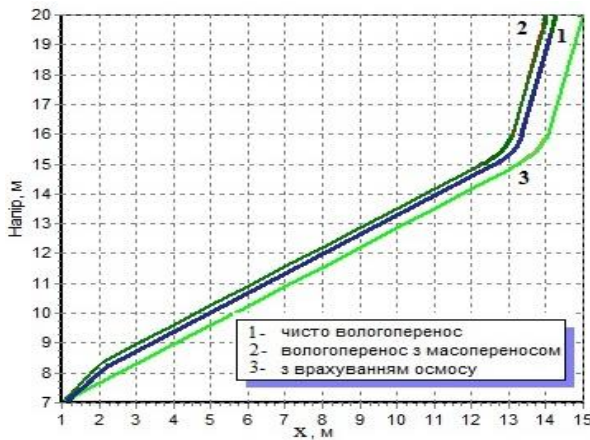
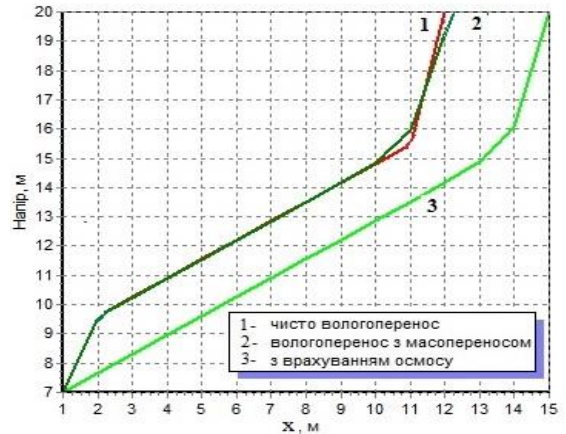


Рис. 2.4. Розподіл напорів води (1) з урахуванням концентрації солей (2) та осмосу при  $T=30$  діб та  $T=360$  діб



Знайшовши розв'язок задачі вологоперенесення, знайдено розв'язок задачі перенесення солей при вологоперенесенні та з урахуванням осмосу на різних часових шарах (рис. 2.5).

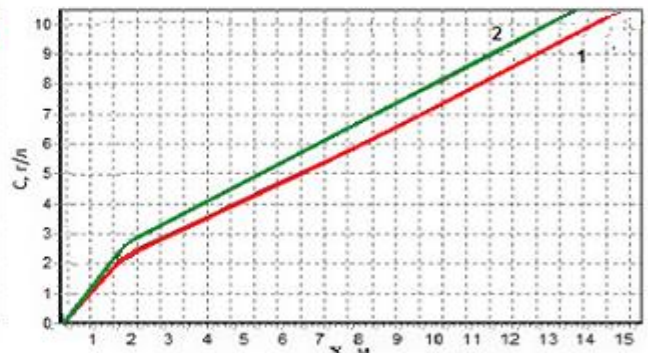
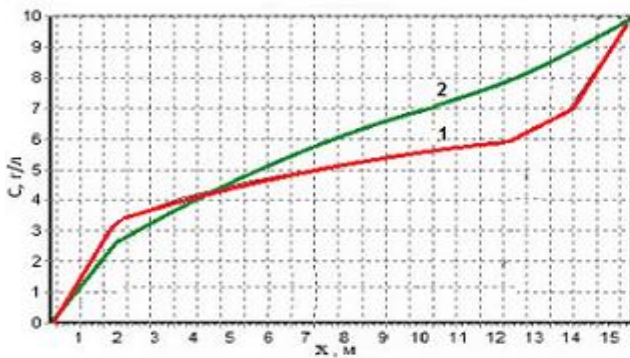


Рис. 2.5. Розподіл концентрації солей з урахуванням напорів води (1) та осмосу (2) при  $T=30$  діб та  $T=360$  діб

На основі аналізу отриманих результатів можна зробити наступні висновки:

- розподіл напорів води зростає з глибиною та часом при потраплянні сольових розчинів на поверхню ґрунтового масиву (рис. 2.2);
- з впливом концентрації солей розподіл води збільшується з глибиною та часом по всій області вологоперенесення на 1-3% (рис. 2.3);
- розподіл напорів води з урахуванням концентрації солей та осмосу зменшується на 3-5% порівняно з результатами задачі без урахування осмотичних явищ (рис. 2.4);
- розподіл концентрації сольових розчинів при вологоперенесенні та осмосі набуває більших значень, порівняно з результатами задачі без урахування осмосу, при цьому розподіл концентрації солей зростає пропорційно до вибору коефіцієнта осмосу або осмотичної функції; з часом розподіл концентрації солей стабілізується і поступово спадає (рис. 2.5).

## **2.2 Математичне моделювання перенесення солей при фільтрації ґрунтових вод та вологоперенесенні у насичено-ненасичених ґрунтах в лінійній та нелінійній постановках**

Переміщення води та солей у насичених та ненасичених ґрунтах унаслідок дії природно-кліматичних чинників, несприятливих техногенних умов можуть привести до розвитку небезпечних гідрогеологічних процесів: підтоплення територій, забруднення ґрунтових вод та засолення родючих ґрунтів. Дані процеси відбуваються внаслідок процесу переносу порової рідини, який впливає на перенесення солей, та процесу вологоперенесення – переміщення води в ненасичених ґрунтах.

Тому великої уваги в даний час заслуговують питання розробки, дослідження і впровадження методів моделювання для розв'язання задач перенесення солей при фільтрації, що відкриває можливість проведення

чисельних експериментів при виробленні нових технічних рішень для запобігання небезпечних ситуацій.

Вирішенням даних проблем присвячені роботи [1, 31, 32, 36, 89, 107, 109, 116, 121, 126, 136, 140, 153, 156, 171, 173, 175, 192, 198, 200], в яких розглянуто та розвинуто теоретичні основи процесів масоперенесення у насичених, ненасичених ґрунтах та вологоперенесення. Однак, в вищезгаданих роботах дані процеси розглядалися окремо в областях повного і неповного насичення; домінували лише процеси вологоперенесення без урахування масоперенесення.

Розглянемо сумісно задачу масоперенесення солей як у водонасичених, так і у водоненасичених ґрунтових середовищах в одновимірному лінійному та нелінійному випадках. Для більш повного опису вказаних процесів в математичних моделях задач враховано наявність осмотичних явищ [8, 10].

Оскільки, найбільш поширеними солями в агросекторі є хлориди, які потрапляють в ґрунт природнім шляхом або з високими дозами мінеральних добрив і хімічних засобів захисту рослин, тому дослідження процесу перенесення солей проведено для NaCl.

### 2.2.1 Постановка задачі

Проведемо дослідження процесу перенесення солей при сумісній фільтрації та вологоперенесенні в насичено-ненасиченому ґрунті.

На поверхню ґрунту попадають атмосферні опади і поливи. В зв'язку з цим, на деякій глибині  $l_1$  від поверхні землі утворюється вільна поверхня рівня ґрунтових вод (РГВ), яка є межею контакту областей повного та неповного насичення, і яка вважається нерухомою. На глибині  $l_2$  є фронт промочування, який для простоти будемо вважати нерухомим (рис. 2.6).

Таким чином, в ґрунтовому масиві сформувалося дві області: I – область неповного насичення  $G_1$  – між поверхнею землі і вільною поверхнею; II – область повного насичення  $G_2$  – між вільною поверхнею та фронтом промочування. Крім того, на поверхню ґрунту може потрапляти сольовий

розчин з атмосферними опадами або за рахунок інших факторів з концентрацією  $\tilde{C}_1$ . Розподіл концентрації в області неповного насичення –  $\tilde{C}_0$ , в області повного насичення –  $\tilde{C}_2$ .

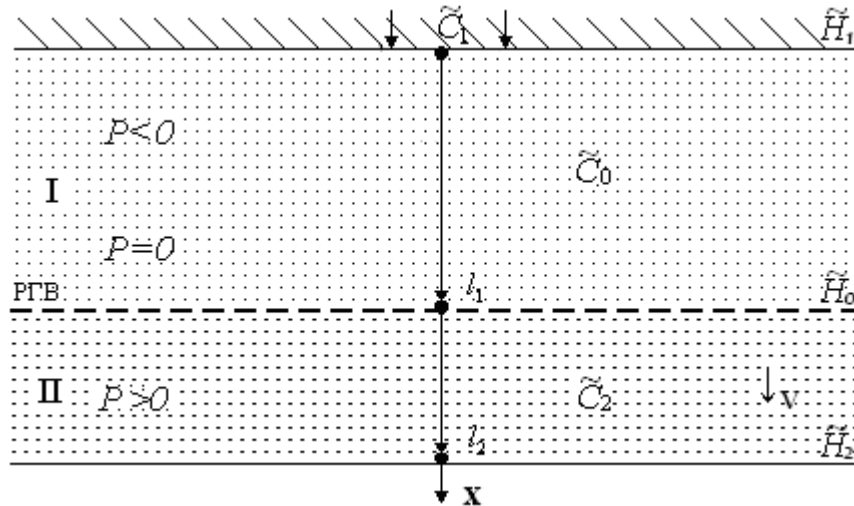


Рис. 2.6. Перенесення солей в областях повного і неповного насичення

Потрібно розрахувати напір води в області неповного насичення, розподіл п'єзометричних напорів в області повного насичення, поля розподілу концентрації сольових розчинів в обох областях водонасичення та сумісно в насичено-ненасиченій області; дослідити вплив осмосу на процес масоперенесення солей в ґрунтовому середовищі.

### 2.2.2 Математична модель задачі у лінійному випадку

Математична модель контактної-крайової задачі взаємозв'язаних процесів перенесення солей, фільтрації та вологоперенесення

- в області неповного насичення  $G_1$  має вигляд [49, 58-60, 72, 73]

$$\frac{\partial \left( D_1 \frac{\partial c_1}{\partial x} \right)}{\partial x} - v_1 \frac{\partial c_1}{\partial x} - \gamma_1 (c_1 - C_1^*) = \sigma_1 \frac{\partial c_1}{\partial t}, \quad x \in \Omega_1, \quad t > 0, \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k_1 \frac{\partial h_1}{\partial x} \right) - v_1 \frac{\partial^2 c_1}{\partial x^2} = \mu \frac{\partial h_1}{\partial t}, \quad x \in \Omega_1, \quad t > 0, \quad (2.15)$$

$$v_1 = -k_1 \frac{\partial h_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial c_1}{\partial x}, \quad x \in \Omega_1 \quad (2.16)$$

за таких початкових та граничних умов для концентрації солей  $c_1(x,t)$ :

$$c_1(x,0) = \tilde{C}_0^1(x), \quad c_1(0,t) = \tilde{C}_1^1(t), \quad x \in (0;l_1), \quad 0 < t < t_1 \quad (2.17)$$

та напору вологи  $h_1(x,t)$

$$h_1(x,0) = \tilde{H}_0^1(x), \quad h_1(0,t) = \tilde{H}_1^1(t), \quad x \in (0;l_1), \quad 0 < t < t_1; \quad (2.18)$$

- в області повного насичення  $G_2$  є наступною [49, 58-60, 72, 73]:

$$\frac{\partial \left( D_2 \frac{\partial c_2}{\partial x} \right)}{\partial x} - v_2 \frac{\partial c_2}{\partial x} - \gamma_2 (c_2 - C_2^*) = \sigma_2 \frac{\partial c_2}{\partial t}, \quad x \in \Omega_2, \quad t > 0, \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial \left( k_2 \frac{\partial h_2}{\partial x} - v_2 \frac{\partial c_2}{\partial x} \right)}{\partial x} = 0, \quad x \in \Omega_2, \quad (2.20)$$

$$v_2 = -k_2 \frac{\partial h_2}{\partial x} + v_2 \frac{\partial c_2}{\partial x}, \quad x \in \Omega_2. \quad (2.21)$$

Рівняння (2.19)-(2.21) доповнюються крайовими умовами для концентрації солей  $c_2(x,t)$

$$c_2(x,0) = \tilde{C}_0^2(x), \quad c_2(l_2,t) = \tilde{C}_2^2(t), \quad x \in (0;l_2), \quad 0 < t < t_1 \quad (2.22)$$

та п'єзометричних напорів  $h_2(x,t)$

$$h_2(x,0) = \tilde{H}_0^2(x), \quad h_2(0,t) = \tilde{H}_2^2(t), \quad h_2(l_2,t) = \tilde{H}_2^2(t), \quad x \in (0;l_2), \quad 0 < t < t_1. \quad (2.23)$$

На межі контакту областей повного та неповного насичення (РГВ) задаються умови спряження для напору та концентрації солей відповідно

$$h_1|_G = h_2|_G, \quad c_1|_G = c_2|_G, \quad \left( D_1 \frac{\partial c_1}{\partial n} - v_1 c_1 \right) \Big|_G = \left( D_2 \frac{\partial c_2}{\partial n} - v_2 c_2 \right) \Big|_G. \quad (2.24)$$

В рівняннях (2.14)-(2.24) використані такі позначення:  $c_1(x,t)$ ,  $c_2(x,t)$  – концентрації сольових розчинів в областях неповного і повного насичення відповідно;  $D_1$ ,  $D_2$  – коефіцієнти конвективної дифузії;  $C_1^*$ ,  $C_2^*$  – коефіцієнти граничного насичення сольових розчинів;  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  – пористості ґрунту областей неповного та повного насичення відповідно;  $h_1(x,t)$  – напір вологи,  $h_2(x,t)$  –



п'єзометричний напір;  $\nu_1, \nu_2$  – коефіцієнти осмосу;  $H$  – висота нависання рідини.

### 2.2.2.1 Чисельний метод розв'язування задачі

Для знаходження чисельного розв'язку поставленої контактної-крайової задачі (2.14)-(2.24) використаємо метод скінченних різниць. Знайдемо розв'язок задачі в областях повного, неповного насичення та їх сумісний розв'язок в області насичено-ненасиченого ґрунтового середовища.

Для знаходження чисельного розв'язку задачі вологоперенесення (2.15), (2.18) застосуємо неявну різницеву схему [87, 163, 164, 166-168], яка для рівняння (2.15) має вигляд [72]

$$k_1 \frac{H_{li-1}^{k+1} - 2H_{li}^{k+1} + H_{li+1}^{k+1}}{h_1^2} - \nu_1 \left( \frac{C_{li+1}^{k+1} - 2C_{li}^{k+1} + C_{li-1}^{k+1}}{h_1^2} \right) = \mu_i \frac{H_{li}^{k+1} - H_{li}^k}{\tau}, \quad (2.25)$$

де  $\mu_i = \alpha \rho g \left( 1 - \frac{2 \cdot h}{H_{li+1}^k - H_{li-1}^k} \right)$ ,  $i = \overline{1, n-1}$ ,  $i = \overline{0, K-1}$ .

Для знаходження розв'язку (2.25) використаємо метод прогонки [99, 131, 132, 146, 162, 168]. Тоді різницєва схема в прогоночному вигляді є наступною:

$$a_1 C_{li-1}^{k+1} - c_1 C_{li}^{k+1} + b_1 C_{li+1}^{k+1} = -f_1, \quad (2.26)$$

де  $a_1 = \frac{k_1}{h_1^2}$ ,  $b_1 = \frac{k_1}{h_1^2}$ ,  $c_1 = \frac{\mu_i}{\tau} + \frac{2k_1}{h_1^2}$ ,  $f_1 = \frac{\mu_i}{\tau} H_{li}^k - \frac{\nu_1}{h_1^2} (C_{li+1}^k - 2C_{li}^k + C_{li-1}^k)$ ,

$i = \overline{1, n-1}$ ,  $i = \overline{0, K-1}$ .

Таким чином, згідно (2.26) розв'язок задачі вологоперенесення за методом прогонки знайдемо у вигляді

$$H_{li}^{k+1} = \alpha_{i1}^1 H_{li+1}^{k+1} + \beta_{i+1}^1, \quad (2.27)$$

де  $\alpha_{i+1}^1 = \frac{b_1}{c_1 - \alpha_i^1 a_1}$ ,  $\beta_{i+1}^1 = \frac{a_1 \beta_i^1 + f_1}{c_1 - \alpha_i^1 a_1}$ ,  $\alpha_1^1 = 0$ ,  $\beta_1^1 = \tilde{H}_1^1$ ,  $i = \overline{1, n-1}$ ,  $k = \overline{0, K-1}$ .

Для знаходження розв'язку задачі перенесення солей (2.14), (2.16), (2.17) в області неповного насичення використаємо монотонну різницєву схему [72, 131, 132, 166-168, 188].

Різницева схема рівняння (2.14) має вигляд

$$D_1 \frac{C_{li+1}^{k+1} - 2C_{li}^{k+1} + C_{li-1}^{k+1}}{h_1^2} - v_1 \left( \frac{C_{li+1}^{k+1} - C_{li}^{k+1}}{h_1} \right) - \gamma_1 (C_{li}^{k+1} - C_1^*) = \sigma_1 \frac{C_{li}^{k+1} - C_{li}^k}{\tau}. \quad (2.28)$$

Згідно (2.28) монотонна різницева схема має наступний вигляд:

$$\eta_i^{k+1} \frac{C_{li+1}^{k+1} - 2C_{li}^{k+1} + C_{li-1}^{k+1}}{h_1^2} + (r^+)_i^{k+1} \left( \frac{C_{li+1}^{k+1} - C_{li}^{k+1}}{h_1} \right) + (r^-)_i^{k+1} \left( \frac{C_{li+1}^{k+1} - C_{li}^{k+1}}{h_1} \right) - \gamma_1 (C_{li}^{k+1} - C_1^*) = \sigma_1 \frac{C_{li}^{k+1} - C_{li}^k}{\tau}, \quad (2.29)$$

$$\text{де } \eta_i^{k+1} = \frac{1}{1 + 0,5 \cdot h_1 \cdot |r_{li}^k|}, \quad (r^+)_i^{k+1} = \frac{-V_{li}^{k+1} + |V_{li}^{k+1}|}{2} \geq 0, \quad (r^-)_i^{k+1} = \frac{-V_{li}^{k+1} + |V_{li}^{k+1}|}{2} \leq 0,$$

$$r_i^{k+1} = (r^+ + r^-); \quad C_i^0 = C_0(ih_2), \quad C_0^{k+1} = C_1((k+1) \cdot \tau), \quad C_n^{k+1} = C_2((k+1) \cdot \tau), \quad i = \overline{1, n-1}, \\ k = \overline{0, K-1}.$$

Розв'язок монотонної різницевої схеми для задачі масоперенесення солей (2.19) знайдемо за методом прогонки [99, 131, 132, 146, 162, 168]. Рівняння (2.29) в прогоночному вигляді наступне:

$$a_2 C_{li-1}^{k+1} - c_2 C_{li}^{k+1} + b_4 C_{li+1}^{k+1} = -f_2, \quad (2.30)$$

$$\text{де } a_2 = \frac{\tau}{\sigma_1} \left( \frac{2\eta_i^{k+1}}{h_1^2} - \frac{(r^-)_i^{k+1}}{h_1} \right), \quad b_2 = \frac{\tau}{\sigma_1} \left( \frac{2\eta_i^{k+1}}{h_1^2} - \frac{(r^+)_i^{k+1}}{h_1} \right),$$

$$c_2 = \frac{\tau}{\sigma_1} \left( \frac{2\eta_i^{k+1}}{h_1^2} + \frac{(r^+)_i^{k+1} - (r^-)_i^{k+1}}{h_1} + \gamma_1 \right), \quad f_2 = \frac{\sigma}{\tau} C_{li}^k + \gamma_1 C_1^*, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad k = \overline{0, K-1}.$$

Таким чином, розв'язок задачі (2.30) знайдемо у вигляді

$$C_{li}^{k+1} = \alpha_{i+1}^2 C_{li+1}^{k+1} + \beta_{i+1}^2,$$

$$\text{де } \alpha_{i+1}^2 = \frac{b_2}{c_2 - \alpha_i^2 a_2}, \quad \beta_{i+1}^2 = \frac{a_2 \beta_i^2 + f_2}{c_2 - \alpha_i^2 a_2}, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad k = \overline{0, K-1}, \quad \alpha_1^2 = 0, \quad \beta_1^2 = \tilde{C}_1^1.$$

Різницеве рівняння для обчислення швидкості вологоперенесення (2.16) має наступний вигляд:

$$V_i^{k+1} = -k_i^k \frac{H_{i+1}^k - H_{i-1}^k}{2h_1} + v_i \frac{C_{i+1}^k - C_{i-1}^k}{2h_1}, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad k = \overline{0, K-1}.$$

Для знаходження розв'язку задачі фільтрації (2.20), (2.23) застосуємо неявну різницеву схему [99, 131, 132, 146, 162, 168].

Розкривши дужки в (2.20), отримаємо

$$k_2 \frac{\partial^2 h_2}{\partial x^2} - v_2 \frac{\partial^2 c_2}{\partial x^2} = 0. \quad (2.31)$$

Тоді неявна різницєва схема для рівняння (2.31) має вигляд

$$\frac{k_2}{h_2^2} [H_{2i+1}^{k+1} - 2H_{2i}^{k+1} + H_{2i-1}^{k+1}] = \frac{v_2}{h_2^2} [C_{2i+1}^{k+1} - 2C_{2i}^{k+1} + 2C_{2i-1}^{k+1}], \quad i = \overline{1, n-1}, \quad i = \overline{0, K-1}. \quad (2.32)$$

Для знаходження розв'язку задачі фільтрації застосуємо метод прогонки [99, 131, 132, 146, 162, 168]. Для цього запишемо різницєву схему (2.32) в прогоночному вигляді:

$$a_3 H_{2i-1}^{k+1} - c_3 H_{2i}^{k+1} + b_3 H_{2i+1}^{k+1} = -f_3, \quad (2.33)$$

$$\text{де } a_3 = \frac{k_2}{h_2^2}, \quad b_3 = \frac{k_2}{h_2^2}, \quad c_3 = \frac{2k_1}{h_2^2}, \quad f_3 = \frac{v_2}{h_1^2} [C_{1i+1}^{k+1} - 2C_{1i}^{k+1} + C_{1i-1}^{k+1}], \quad i = \overline{1, n-1}, \quad k = \overline{0, K-1}.$$

Таким чином, згідно методу прогонки розв'язок задачі фільтрації (2.33) знаходимо у вигляді

$$H_{2i}^{k+1} = \alpha_{i+1}^3 H_{2i+1}^{k+1} + \beta_{i+1}^3,$$

$$\text{де } \alpha_{i+1}^3 = \frac{b_3}{c_3 - \alpha_{i+1} a_3}, \quad \beta_{i+1}^3 = \frac{a_3 \beta_i^3 + f_3}{c_3 - \alpha_i^3 a_3}, \quad \alpha_1^3 = 0, \quad \beta_1^3 = \tilde{H}_2^1, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad k = \overline{0, K-1}.$$

Чисельний розв'язок задачі масоперенесення солей в області повного насичення (2.19), (2.21), (2.22) знайдемо аналогічно до розв'язування задачі в області неповного насичення, використавши монотонну різницєву схему [72, 131, 132, 166-168, 188].

Різницєва схема диференціального рівняння (2.19) має вигляд

$$\sigma_2 \frac{C_{2i}^{k+1} - C_{2i}^k}{\tau} = D_2 \frac{H_{2i+1}^{k+1} - 2H_{2i}^{k+1} + H_{2i-1}^{k+1}}{h_2^2} - v_2 \left( \frac{C_{2i+1}^{k+1} - C_{2i}^{k+1}}{h_2} \right) - \gamma_2 (C_{2i}^{k+1} - C_2^*). \quad (2.34)$$

Монотонна різницєва схема (2.34) є наступною:

$$\begin{aligned} \sigma_1 \frac{C_{1i}^{k+1} - C_i^k}{\tau} = \eta_i^{j+1} \frac{H_{1i+1}^{k+1} - 2H_i^{k+1} + H_{1i-1}^{k+1}}{h_1^2} + (r^+)_i^{k+1} \left( \frac{C_{1i+1}^{k+1} - C_{1i}^{k+1}}{h_1} \right) + \\ + (r^-)_i^{k+1} \left( \frac{C_{1i}^{k+1} - C_{1i-1}^{k+1}}{h_1} \right) - \gamma_1 (C_{1i}^{k+1} - C_1^*), \end{aligned} \quad (2.35)$$

де  $\eta_i^{k+1} = \frac{1}{1 + 0,5 \cdot h_2 \cdot |r_i^k|}$ ,  $r_i^{k+1} = (r^+ + r^-)$ ,  $(r^+)_i^{k+1} = \frac{-V_{2i}^{k+1} + |V_{2i}^{k+1}|}{2} \geq 0$ ,

$$(r^-)_i^{k+1} = \frac{-V_{2i}^{k+1} + |V_{2i}^{k+1}|}{2} \leq 0, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad k = \overline{0, K-1}.$$

Для знаходження розв'язку (2.35) застосуємо метод прогонки. Для цього запишемо дану різницеву схему в прогоночному вигляді

$$a_4 C_{2i-1}^{k+1} - c_4 C_{2i}^{k+1} + b_4 C_{2i+1}^{k+1} = -f_4, \quad (2.36)$$

де  $a_4 = \frac{\tau}{\sigma_2} \left( \frac{2\eta_i^{k+1}}{h_2^2} - \frac{(r^-)_i^{k+1}}{h_2} \right)$ ,  $b_4 = \frac{\tau}{\sigma_2} \left( \frac{2\eta_i^{k+1}}{h_2^2} - \frac{(r^+)_i^{k+1}}{h_2} \right)$ ,

$$c_4 = \frac{\tau}{\sigma_2} \left( \frac{2\eta_i^{k+1}}{h_2^2} + \frac{(r^+)_i^{k+1} - (r^-)_i^{k+1}}{h_2} + \gamma_2 \right), \quad f_4 = \frac{\sigma_2}{\tau} C_{2i}^k + \gamma_2 C_2^*, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad k = \overline{0, K-1}.$$

Тоді розв'язок задачі (2.36) знаходимо у вигляді

$$C_{2i}^{k+1} = \alpha_{i+1}^4 C_{2i+1}^{k+1} + \beta_{i+1}^4,$$

де  $\alpha_{i+1}^4 = \frac{b_i}{c_4 - \alpha_i^4 a_4}$ ,  $\beta_{i+1}^4 = \frac{a_4 \beta_i^4 + f_4}{c_4 - \alpha_i^4 a_4}$ ,  $\alpha_1^4 = 0$ ,  $\beta_1^4 = \tilde{C}_2^2$ ,  $i = \overline{1, n-1}$ ,  $k = \overline{0, K-1}$ .

Різницеве рівняння для обчислення швидкості фільтрації (2.21) має наступний вигляд:

$$V_i^{k+1} = -k_i^k \frac{H_{i+1}^k - H_{i-1}^k}{2h_2} + v_2 \frac{C_{i+1}^k - C_{i-1}^k}{2h_2}, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad k = \overline{0, K-1}.$$

Згідно умов спряження, заданих на межі контакту двох областей, знайдено розв'язок задачі масоперенесення солей на вільній поверхні за методом прогонки [72, 99, 131, 132, 146, 162, 168] у вигляді

$$C_i^{k+1} = \alpha_{i+1} C_{i+1}^{k+1} + \beta_{i+1}, \quad (2.37)$$

де

$$\alpha_{i+1} = \begin{cases} \frac{b_i}{c_i - a_i \alpha_i}, & i = \overline{0, n_s - 1}, \\ \frac{D_{n_s}^k}{(D_{n_s+1}^k - v_{n_s+1}^k) + (D_{n_s}^k - v_{n_s}^k)(1 - \alpha_{n_s})}, & i = n_s, \\ \frac{b_i}{c_i - a_i \alpha_i}, & i = \overline{n_s + 1, n - 1}. \end{cases}$$

$$\beta_{i+1} = \begin{cases} \frac{a_i \beta_i + f_i}{c_i - a_i \alpha_i}, & i = \overline{0, n_s - 1}, \\ \frac{D_{n_s}^k \beta_i}{(D_{n_s+1}^k - v_{n_s+1}^k) + (D_{n_s}^k - v_{n_s}^k)(1 - \alpha_{n_s})}, & i = n_s, \\ \frac{a_i \beta_i + c_i + s_i}{c_i - a_i \alpha_i}, & i = \overline{n_s + 1, n - 1}; \end{cases}$$

$\alpha_1 = 0$ ,  $\beta_1 = \tilde{C}_1^1(t)$ ,  $n_s$  - значення координати на вільній поверхні.

Умови застосування методу прогонки та умови стійкості даного методу виконані.

Таким чином, обчислювальний алгоритм розв'язування задачі перенесення солей при фільтрації та вологоперенесення у насичено-ненасиченому ґрунтовому середовищі побудовано повністю.

### 2.2.2.2 Результати чисельних експериментів та їх аналіз

Для знаходження чисельного розв'язку задачі перенесення солей при фільтрації та вологоперенесенні у насичено-ненасичених ґрунтах розроблено програмний комплекс у середовищі візуально-подійного, об'єктно-орієнтованого програмування Microsoft Visual Studio Express на мові програмування C#, який функціонує на довільній стандартній конфігурації персонального комп'ютера з операційною системою Windows-98/2000/XP... . Використані програмні засоби є безкоштовними для академічного використання.

Створена комплексна програма чисельного розв'язування задачі включає розв'язування задачі перенесення солей в областях неповного та повного

насичення та знаходження її сумісного розв'язку в насичено-ненасиченому ґрунтовому середовищі. На основі програмної реалізації задачі проведено серію чисельних експериментів, що дало можливість провести аналіз отриманих результатів для різних вхідних даних задачі та детально дослідити процеси масоперенесення при фільтрації та вологоперенесенні в насичено-ненасичених ґрунтових середовищах.

Розв'язок задачі знайдено при наступних вихідних даних [43,120, 135, 145, 156, 171, 181]:  $T = 360$  діб,  $l_1 = 1$  м,  $l_2 = 0,5$  м,  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0,4$ ,  $\gamma = 0,0065$  доба<sup>-1</sup>,  $k_1 = k_2 = 2,3$  м/добу,  $H_1^1 = 1,4$  м,  $H_2^1 = 0,05$  м,  $H_1^2 = 1,8$  м,  $H_2^2 = 1,4$  м,  $\lambda = 0,1$  м  $C^* = 350$  г/літр,  $\tilde{C}_0 = 0$  г/літр,  $\tilde{C}_1 = 0$  г/літр,  $\tilde{C}_2 = 10$  г/літр,  $D_m = 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/добу,  $\nu_1 = \nu_2 = 2,8 \cdot 10^{-5}$  м<sup>5</sup>/кг·доба,  $\rho = 1000$  кг/м<sup>3</sup>.

Результатом розв'язання задачі масоперенесення солей в області неповного насичення є знаходження значень розподілу напорів води та концентрації солей в даній області водонасичення.

Графічне представлення значень розподілу напорів води має вигляд (рис. 2.7)

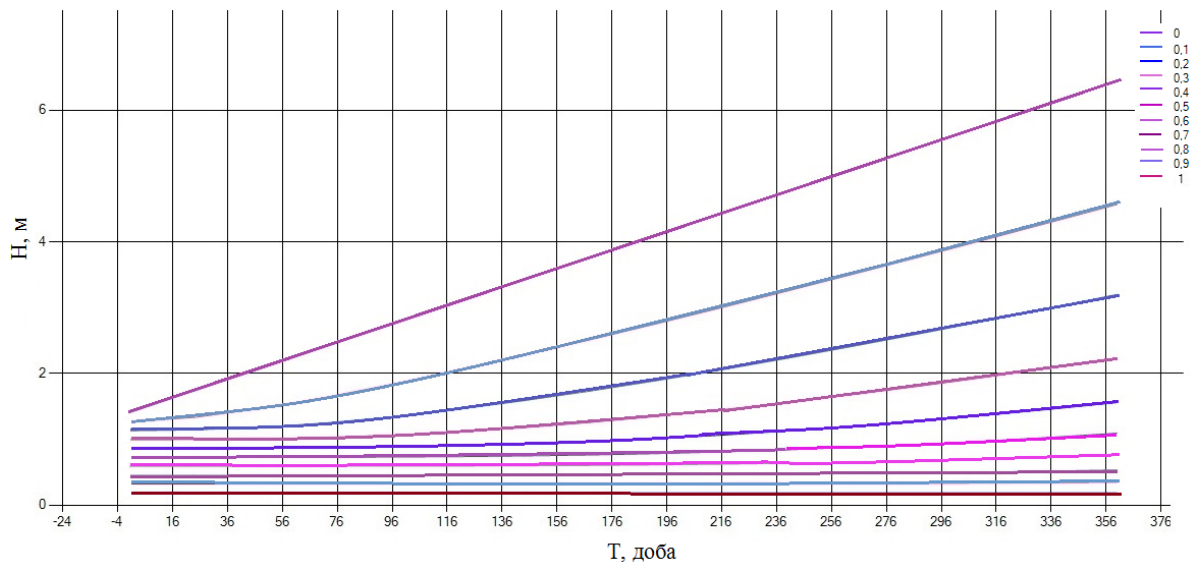


Рис. 2.7. Розподіл напорів води

За результатами розв'язку задачі вологоперенесення знайдено розв'язок задачі перенесення солей. Графічне представлення поля розподілу концентрації

солевих розчинів з часом та з глибиною в ненасиченому ґрунтовому середовищі має вигляд (рис. 2.8)

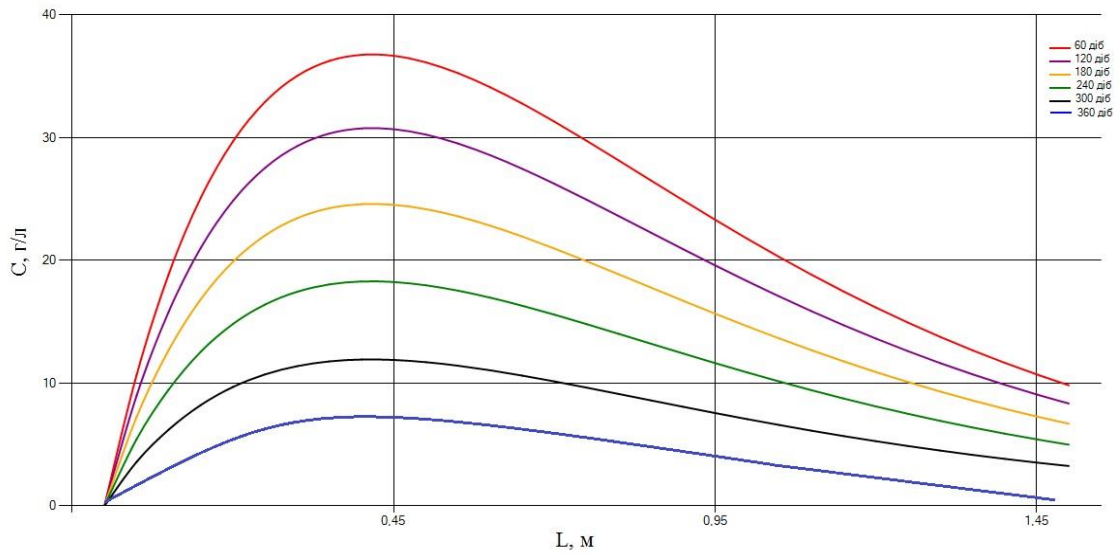


Рис. 2.8. Розподіл концентрації солей в області неповного насичення

Знайдено розв'язок задачі перенесення солей при фільтрації ґрунтових вод в області повного насичення ґрунту. В результаті чого отримано розподіл п'єзометричних напорів та концентрації солей (рис. 2.9, 2.10).

В результаті розв'язання задач перенесення солей в областях неповного та повного насичення, знайдено розв'язок даної задачі на внутрішній межі контакту областей повного та неповного насичення – вільній поверхні (РГВ), який представлено на рис. 2.11.

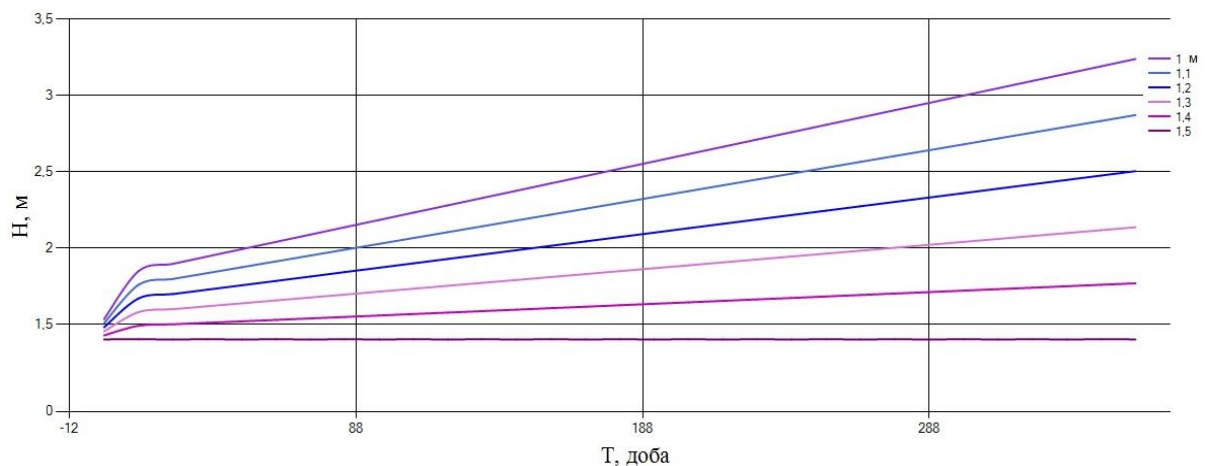


Рис. 2.9. Розподіл п'єзометричних напорів

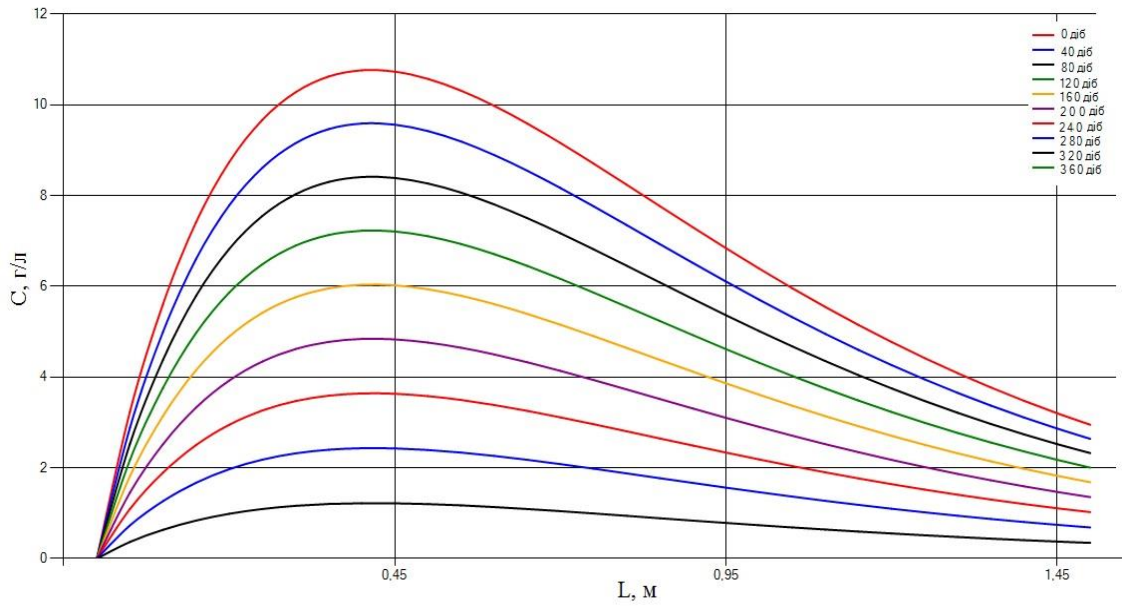


Рис. 2.10. Розподіл концентрації солей в області повного насичення

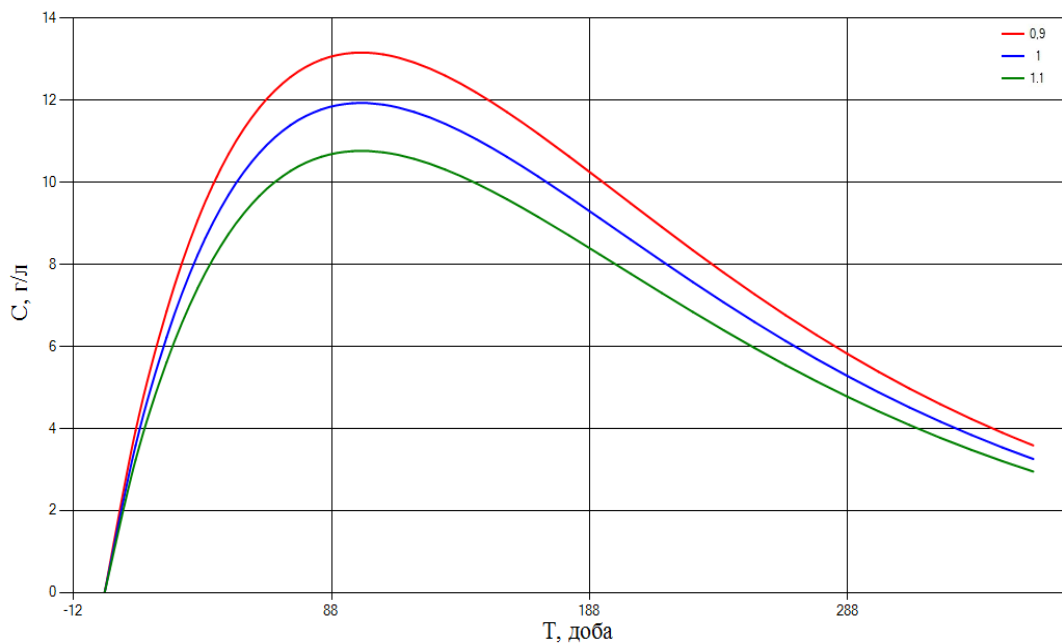


Рис. 2.11. Розподіл концентрації солей на РГВ

Важливою особливістю даної задачі є знаходження сумісного розв'язку задачі перенесення солей в областях повного та неповного насичення. Графік розподілу концентрації солей в області насичено-ненасиченого ґрунту має вигляд (рис. 2.12)



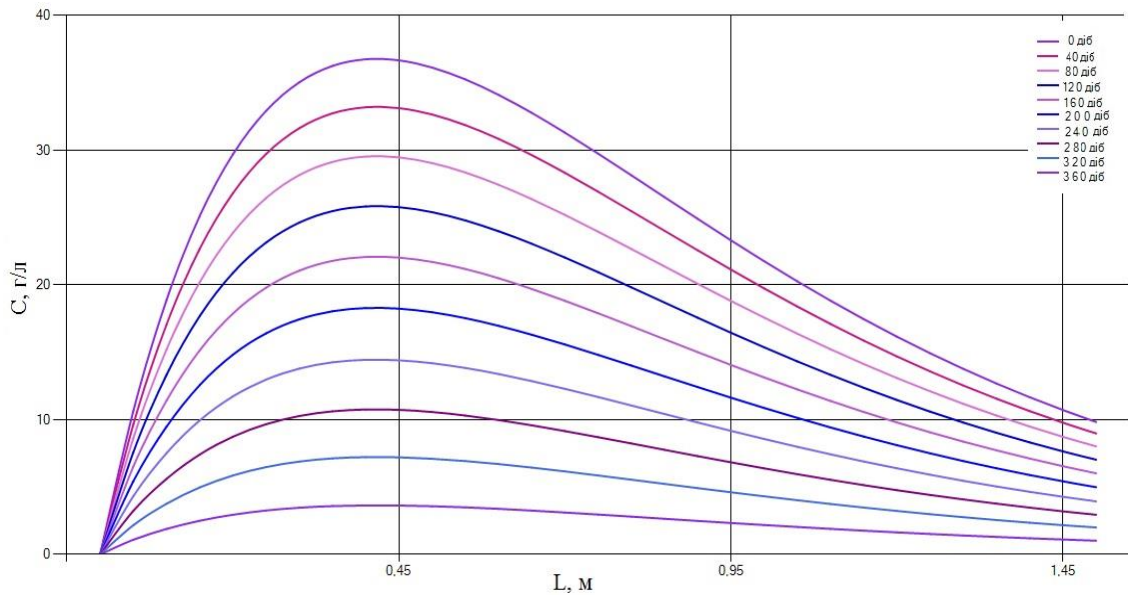


Рис. 2.12. Розподіл концентрації солей у насичено-ненасиченому ґрунті

В результаті проведених чисельних експериментів отримано зміну розподілу концентрації солей в області насичено-ненасиченого ґрунту з часом та при різних значеннях коефіцієнтів дифузії  $D$ , інтенсивності масообміну  $\gamma$ , пористості ґрунту  $\sigma$ , коефіцієнта фільтрації  $k$  та встановлено вплив коефіцієнта осмосу  $\nu$  на процес розподілу концентрації солей.

При різних значеннях коефіцієнта дифузії  $D$  розподіл концентрації зазнає незначних змін (рис. 2.13).

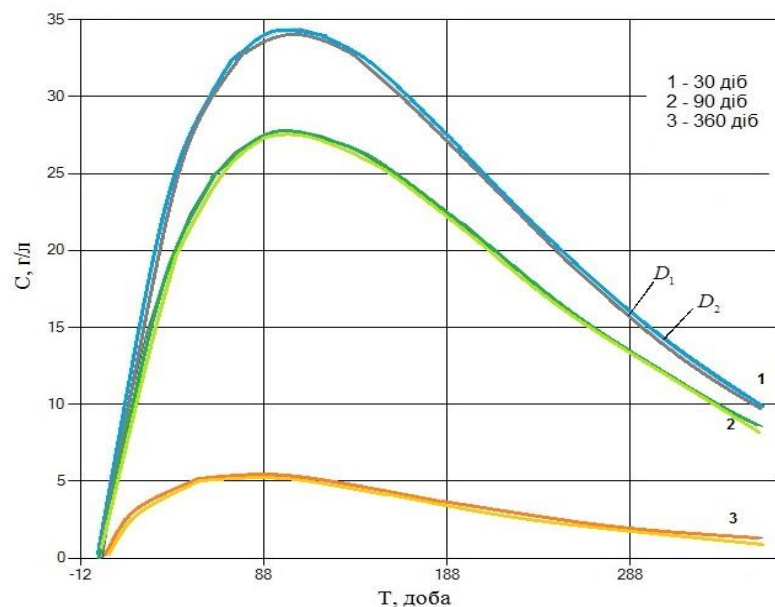


Рис 2.13. Розподіл концентрації солей ( $D_1 = 0,01$ ,  $D_2 = 0,2$ )

Розподіл концентрації солей при різних значеннях коефіцієнта інтенсивності масообміну  $\gamma$  має вигляд (рис. 2.14)

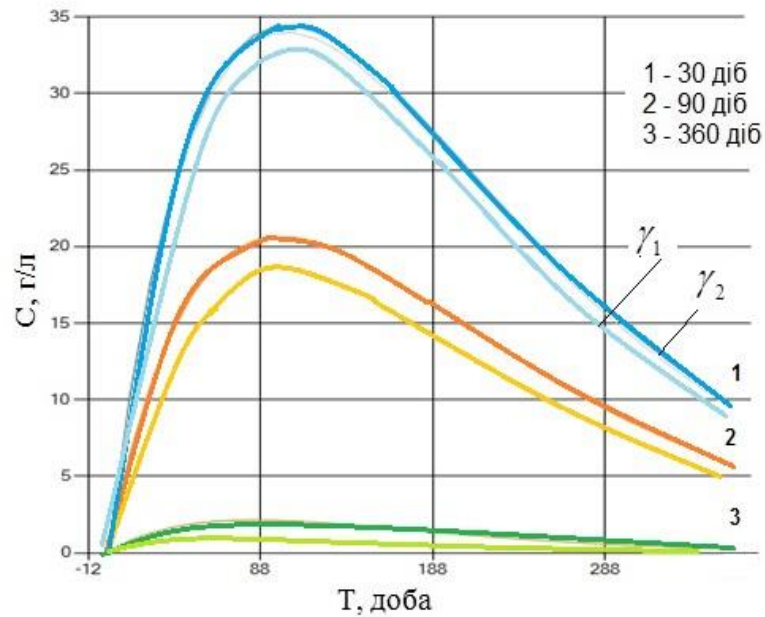


Рис. 2.14. Розподіл концентрації солей ( $\gamma_1 = 0.0065$ ,  $\gamma_2 = 0.065$ )

Демонстрація впливу коефіцієнта фільтрації  $k$  на концентрацію солей представлена на рис. 2.15.

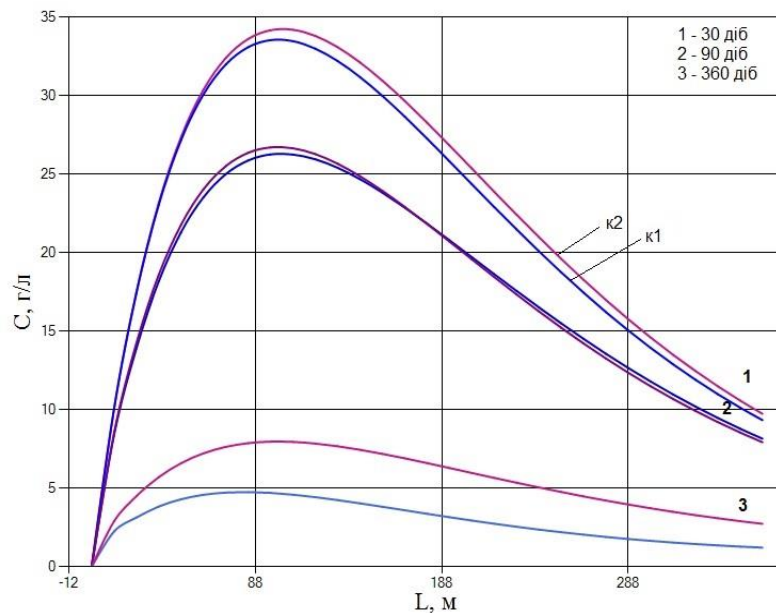


Рис. 2.15. Розподіл концентрації солей ( $k_1 = 0.2$ ,  $k_2 = 2$ )

Розподіл концентрації солей при різних значеннях коефіцієнта пористості ґрунту  $\sigma$  має вигляд (рис. 2.16)

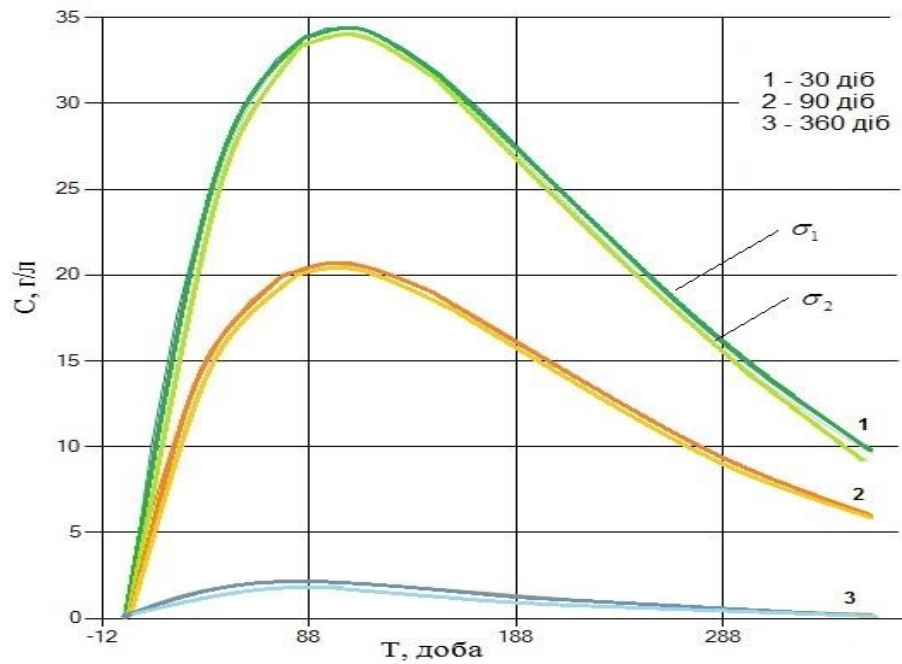


Рис. 2.16. Розподіл концентрації ( $\sigma_1 = 0.04, \sigma_2 = 0.4$ )

Розподіл концентрації солей з урахуванням (червоний колір) та без урахування осмосу (зелений колір) має вигляд (рис. 2.17).

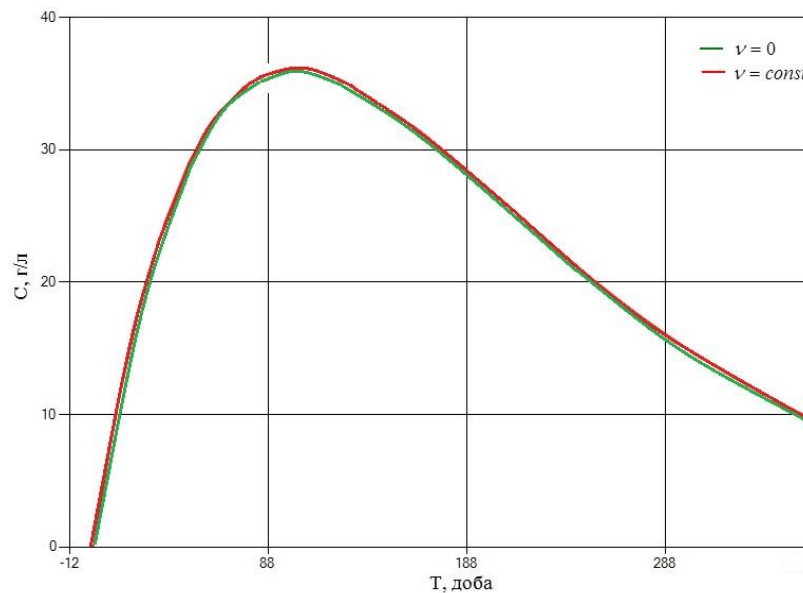


Рис. 2.17. Розподіл концентрації солей осмосу ( $v_1 = 0, v_2 = 0.00028$ )

На основі аналізу отриманих результатів програмної реалізації та проведених чисельних експериментів встановлено наступне:

- розподіл напору вологи зменшується з часом, набуваючи найменших значень на максимальному часовому шарі ( $T = 360 \text{ діб}$ ); напір вологи зростає по всій області вологоперенесення, набуваючи найбільших значень в околі вільної поверхні (рис. 2.7);

- графік розподілу поля концентрації сольових розчинів в області неповного насичення (рис. 2.8) демонструє те, що розподіл концентрації солей найбільших значень набуває в першій третині часового проміжку, в подальшому – розподіл концентрації солей зменшується з часом, що пояснюється поступовим перенесенням солей в область повного насичення ґрунту; значення розподілу концентрації солей монотонно спадають по всій області вологоперенесення, набуваючи найменших значень на вільній поверхні;

- розподіл п'єзометричного напору в області повного насичення зменшується з часом; значення напору рідини поступово спадають та стабілізуються з глибиною пористого середовища (рис. 2.9);

- розподіл концентрації солей зменшується з часом та з глибиною, набуваючи менших значень в порівнянні з розподілом концентрації в області неповного насичення (рис. 2.10);

- рис. 2.11 демонструє процес розподілу концентрації солей на внутрішній межі контакту областей повного та неповного насичення – вільній поверхні. З глибиною розподіл концентрації зменшується, набуваючи найменших значень в околі вільної поверхні. З початком області повного насичення концентрація солей продовжує зменшуватися.

На основі результатів розв'язування задач перенесення солей в областях повного та неповного насичення знайдено їх спільний розв'язок в області насичено-ненасиченого ґрунту. Розподіл концентрації солей в області насичено-ненасиченого ґрунтового середовища з глибиною та з часом зменшується (рис. 2.12).

В результаті проведення серії чисельних експериментів при різних вхідних даних встановлено наступні результати: при різних значеннях коефіцієнтів дифузії ( $D_1 = 0,01, D_2 = 0,2$ ) (рис. 2.13) та інтенсивності масообміну ( $\gamma_1 = 0,0065, \gamma_2 = 0,065$ ) (рис. 2.14) розподіл концентрації солей на різних часових шарах з глибиною змінюється несуттєво, зі збільшенням даних коефіцієнтів розподіл концентрації зростає.

Значно інтенсивніше на розподіл концентрації солей впливає зміна коефіцієнта фільтрації ( $k_1 = 0.2, k_2 = 2$ ) – зі збільшенням даного коефіцієнта фільтрації швидкість фільтрації зростає, що впливає на швидке вимивання солей з пористого середовища (рис. 2.15). Зі збільшенням коефіцієнта пористості ґрунту ( $\sigma_1 = 0.04, \sigma_2 = 0.4$ ) концентрація солей спадає і інтенсивніше перерозподіляється по області фільтрації (рис. 2.16).

З урахуванням звичайного осмосу розподіл концентрації зростає (рис. 2.17); осмотичні явища впливають на розподіл концентрації солей пропорційно до вибору коефіцієнта осмосу – зі збільшенням даного коефіцієнта розподіл концентрації солей зростає.

### 2.2.3 Математична модель задачі у нелінійному випадку

Розглянемо математичну модель контактної-крайової задачі масоперенесення солей за фільтрації та вологоперенесення при наявній вільній поверхні ґрунтових вод в області насичено-несиченого ґрунту у нелінійному випадку [45, 52, 54, 57, 66, 71], описаної в п. 2.2.1, яка для області неповного насичення  $G_1$  має вигляд

$$\frac{\partial \left( D_1(c_1) \frac{\partial c_1}{\partial x} \right)}{\partial x} - v_1 \frac{\partial c_1}{\partial x} - \gamma_1(c_1 - C_1^*) = \sigma_1 \frac{\partial c_1}{\partial t}, \quad x \in \Omega_1, \quad t > 0, \quad (2.38)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (k_1(c_1, h_1) \frac{\partial h_1}{\partial x}) - v_1(c_1) \frac{\partial c_1}{\partial x} = \mu(h_1), \quad x \in \Omega_1, \quad t > 0, \quad (2.39)$$

$$v_1 = -k_1(c_1, h_1) \frac{\partial h_1}{\partial x} + v_1(c_1) \frac{\partial c_1}{\partial x}, \quad x \in \Omega_1. \quad (2.40)$$

Диференціальні рівняння (2.38), (2.40) доповнюються наступними крайовими умовами для концентрації солей  $c_1(x,t)$ :

$$c_1(x,0) = \tilde{C}_0^1(x), \quad c_1(0,t) = \tilde{C}_1^1(t), \quad x \in (0;l_1), \quad 0 < t < t_1; \quad (2.41)$$

для напору вологи  $h_1(x,t)$ :

$$h_1(x,0) = \tilde{H}_0^1(x), \quad h_1(0,t) = \tilde{H}_1^1(t), \quad x \in (0;l_1), \quad 0 < t < t_1. \quad (2.42)$$

В області повного насичення  $G_2$  математична модель задачі описується наступною системою диференціальних рівнянь:

$$\frac{\partial \left( D_2(c_2) \frac{\partial c_2}{\partial x} \right)}{\partial x} - v_2 \frac{\partial c_2}{\partial x} - \gamma_2(c_2 - C_2^*) = \sigma_2 \frac{\partial c_2}{\partial t}, \quad x \in \Omega_2, \quad t > 0, \quad (2.43)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k_2(c_2, h_2) \frac{\partial h_2}{\partial x} \right) - v_2(c_2) \frac{\partial c_2}{\partial x} = 0, \quad x \in \Omega_2, \quad (2.44)$$

$$v_2 = -k_2(c_2, h_2) \frac{\partial h_2}{\partial x} + v_2(c_2) \frac{\partial c_2}{\partial x}, \quad x \in \Omega_2 \quad (2.45)$$

за таких крайових умов для концентрації солей  $c_2(x,t)$ :

$$c_2(x,0) = \tilde{C}_0^2(x), \quad c_2(l_2,t) = \tilde{C}_2^2(t), \quad x \in (0;l_2), \quad 0 < t < t_1 \quad (2.46)$$

та для п'єзометричних напорів  $h_2(x,t)$

$$h_2(x,0) = \tilde{H}_0^2(x), \quad h_2(0,t) = \tilde{H}_2^2(t), \quad h_2(l_2,t) = \tilde{H}_2^2(t), \quad x \in (0;l_2), \quad 0 < t < t_1. \quad (2.47)$$

На вільній поверхні задані умови спряження для напору та концентрації відповідно

$$h_1|_G = h_2|_G, \quad c_1|_G = c_2|_G, \quad \left( D_1(c_1) \frac{\partial c_1}{\partial n} - v_1 c_1 \right) \Big|_G = \left( D_2(c_2) \frac{\partial c_2}{\partial n} - v_2 c_2 \right) \Big|_G. \quad (2.48)$$

В рівняннях (2.38)-(2.48) використані такі позначення:  $c_1(x,t)$ ,  $c_2(x,t)$  – концентрації сольових розчинів,  $D_1(c_1)$ ,  $D_2(c_2)$  – коефіцієнти конвективної дифузії,  $k_1(c_1, h_1)$ ,  $k_2(c_2, h_2)$  – коефіцієнти фільтрації,  $v_1$ ,  $v_2$  – швидкості вологоперенесення та фільтрації;  $C_1^*$ ,  $C_2^*$  – коефіцієнти граничного насичення сольового розчину,  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  – коефіцієнти інтенсивності масообміну;  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  –

пористості ґрунтових середовищ;  $h_1$  – напір води;  $h_2$  – напір рідини (п’єзометричний напір),  $v_1(c_1)$ ,  $v_2(c_2)$  – осмотичні функції.

Диференціальні рівняння (2.38), (2.43) описують масоперенесення солей в областях повного ( $P > 0$ ) та неповного ( $P < 0$ ) насичення відповідно. (2.39), (2.44) – рівняння вологоперенесення та фільтрації; (2.40), (2.45) – швидкості вологоперенесення та фільтрації з урахуванням хімічного осмосу. Умови (2.41), (2.42), (2.46), (2.47) – крайові умови для концентрації солей та напорів, задані на межах областей повного та неповного насичення. (2.48) – умова спряження, задана на внутрішній межі контакту областей повного та неповного насичення [30-36, 101, 102, 157, 158].

### 2.2.3.1 Чисельний метод розв’язування задачі

Для знаходження чисельний розв’язку поставленої задачі використаємо метод скінченних різниць [163, 164, 166-168].

Чисельний розв’язок задачі вологоперенесення (2.39), (2.42) застосуємо неявну різницеву схему [87, 163, 164, 166-168], яка у випадку звичайного осмосу ( $v_1 = const$ ) прийме вигляд

$$\frac{1}{h_1^2} (b_{i+1}^k (H_{1,i+1}^{k+1} - H_{1,i}^{k+1}) - b_i^j (H_{1,i}^{k+1} - H_{1,i-1}^{k+1}) - v_1 (C_{1,i+1}^k - 2C_{1,i}^k + C_{2,i-1}^k)) = \mu_i^k \frac{H_{1,i}^{k+1} - H_{1,i}^k}{\tau}, \quad (2.49)$$

де  $b_i^k = 0.5(K(H_i^k, C_i^k) + K(H_{i-1}^k, C_{i-1}^k))$ ,  $b_{i+1}^j = 0.5(K(H_{i+1}^k, C_{i+1}^k) + K(H_i^k, C_i^k))$ ,

$$\mu_i^k = \text{arg} \left( 1 - \frac{2h_1}{H_{i+1}^k - H_{i-1}^k} \right), \quad i = \overline{1, n-1}, \quad k = \overline{0, K-1}.$$

У випадку хімічного осмосу ( $v_1 = v_1(c_1)$ ) різницєва схема рівняння вологоперенесення (2.39) є наступною:

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_1^2} (b_{i+1}^k (H_{1,i+1}^{k+1} - H_{1,i}^{k+1}) - b_i^k (H_{1,i}^{k+1} - H_{1,i-1}^{k+1})) - \frac{1}{h_1} \left( Z_{i+1}^k \frac{C_{1,i+1}^{k+1} - C_{1,i}^{k+1}}{h_1} - Z_i^k \frac{C_{1,i}^{k+1} - C_{1,i-1}^{k+1}}{h_1} \right) = \\ = \frac{\mu_i^k}{\tau} (H_{1,i}^{k+1} - H_{1,i}^k), \end{aligned} \quad (2.50)$$

де  $Z_{i+1}^k = 0,5(u_1(C_{i+1}^k) + u_1(C_i^k))$ ,  $Z_i^k = 0,5(u_1(C_i^k) + u_1(C_{i-1}^k))$ ,  $i = \overline{1, n-1}$ ,  $k = \overline{0, K-1}$ .

Розв'язок різницевих схем (2.49), (2.50) знайдемо за методом прогонки [99, 131, 132, 146, 162, 168]. Для цього запишемо дані різницеві схеми в прогоночному вигляді

$$a_1 H_{1,i-1}^{k+1} - c_1 H_{1,i}^{k+1} + b_1 H_{1,i+1}^{k+1} = -f_1, \quad (2.51)$$

де  $a_1 = \frac{b_i^k}{h_1^2}$ ,  $b_1 = \frac{b_{i+1}^k}{h_1^2}$ ,  $c_1 = \frac{b_{i+1}^k + b_i^k}{h_1^2}$ ,  $i = \overline{1, n-1}$ ,  $k = \overline{0, K-1}$ ;

при  $v_2 = const$  коефіцієнт  $f_1$  має вигляд

$$f_1 = \frac{v_1}{h_1^2} (C_{1,i+1}^k - 2C_{1,i}^k + C_{1,i-1}^k), \quad i = \overline{1, n-1}, \quad k = \overline{0, K-1};$$

При  $v_1 = v_1(c_1)$  коефіцієнт  $f_1$  наступний:

$$f_1 = \frac{1}{h_1} \left( Z_{i+1}^k \frac{C_{1,i+1}^{k+1} - C_{1,i}^{k+1}}{h_1} - Z_i^k \frac{C_{1,i}^{k+1} - C_{1,i-1}^{k+1}}{h_1} \right), \quad i = \overline{1, n-1}, \quad k = \overline{0, K-1}.$$

Тоді на основі (2.51) та методу прогонки чисельний розв'язок задачі вологоперенесення знаходимо у вигляді

$$H_{1,i}^{k+1} = \alpha_{i+1}^1 H_{1,i+1}^{k+1} + \beta_{i+1}^1, \quad (2.52)$$

де  $\alpha_{i+1}^1 = \frac{b_1}{c_1 - \alpha_i^1 a_1}$ ,  $\beta_{i+1}^1 = \frac{a_1 \beta_i^1 + f_1}{c_1 - \alpha_i^1 a_1}$ ,  $\alpha_1 = 0$ ,  $\beta_1 = \tilde{H}_1^1$ ,  $i = \overline{1, n-1}$ ,  $k = \overline{0, K-1}$ .

Для розв'язування задачі масоперенесення солей (2.38), (2.40), (2.41) використаємо монотонну різницеву схему [131, 132, 166-168], яка для рівняння (2.38) має наступний вигляд [66]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_1} \left( \eta_{i1}^k d_{i+1}^{j+1} \frac{C_{1,i+1}^{k+1} - C_{1,i}^{k+1}}{h_1} - \eta_{i1}^k d_i^{k+1} \frac{C_{1,i}^{k+1} - C_{1,i-1}^{k+1}}{h_1} \right) + \frac{r_{i+}^k}{h_1} (C_{1,i+1}^{k+1} - C_{1,i}^{k+1}) + \frac{r_{i-}^k}{h_1} (C_{1,i}^{k+1} - C_{1,i-1}^{k+1}) - \\ - \gamma_1 (C_{1,i}^{k+1} - C_1^*) = \sigma_1 \frac{C_{1,i}^{k+1} - C_{1,i}^{k1}}{\tau}, \end{aligned} \quad (2.53)$$

де  $d_i^k = 0,5(D(x_i, C_{1,i}^k) + D(x_{i-1}, C_{1,i-1}^k))$ ,  $d_{i+1}^k = 0,5(D(x_{i+1}, C_{1,i+1}^k) + D(x_i, C_{1,i}^k))$ ,

$V(x_i, C_i^k) = r_{i+}^k + r_{i-}^k$ ,  $r_{i+}^j = \frac{-V(x_i, C_{1,i}^k) + |V(x_i, C_{1,i}^k)|}{2} \geq 0$ ,  $r_{i-}^j = \frac{-V(x_i, C_{1,i}^k) - |V(x_i, C_{1,i}^k)|}{2} \leq 0$ .



Згідно методу прогонки, розв'язок (2.53) має вигляд

$$a_2 C_{1,i-1}^{k+1} - c_2 C_{1,i}^{k+1} + b_2 C_{1,i+1}^{k+1} = -f_2, \quad (2.54)$$

$$\text{де } a_2 = \frac{1}{h_1} \left( \frac{d_i^k \eta_{i1}^k}{h_1} - r_{i-}^k \right), \quad b_2 = \frac{1}{h_1} \left( \frac{d_{i+1}^k \eta_{i2}^k}{h_1} + r_{i+}^k \right), \quad c_2 = \frac{1}{h_1^2} (d_i^k \eta_{i1}^k + d_i^k \eta_{i2}^k) + \frac{|r_i^k|}{h_1} + \frac{\sigma_1}{\tau},$$

$$f_2 = \gamma_1 (C_{1,i}^{k+1} - C_1^*), \quad i = \overline{1, n-1}, \quad k = \overline{0, K-1}.$$

На основі (2.54) чисельний розв'язок задачі перенесення солей в області неповного насичення знаходимо у вигляді

$$C_{1,i}^{k+1} = \alpha_{i+1}^2 C_{1,i+1}^{k+1} + \beta_{i+1}^2, \quad (2.55)$$

$$\text{де } \alpha_{i+1}^2 = \frac{b_2}{c_2 - \alpha_i^2 a_2}, \quad \beta_{i+1}^2 = \frac{a_2 \beta_i^2 + f_2}{c_2 - \alpha_i^2 a_2}, \quad \alpha_1 = 0, \quad \beta_1 = \tilde{C}_1^1(t), \quad i = \overline{1, n-1}, \quad k = \overline{0, K-1}.$$

Значення швидкостей вологоперенесення (2.40) при  $v_1 = const$  та  $v_1 = v_1(c_1)$  обчислюються за наступними різницевиими схемами:

$$V_i^{k+1} = -k_{1,i}^k \left( \frac{H_{1,i+1}^k - H_{1,i-1}^k}{2h_1} + v_1 \frac{C_{1,i+1}^k - C_{1,i-1}^k}{2h_1} \right), \quad (2.56)$$

$$V_i^{k+1} = -k_{1,i}^k \left( \frac{H_{1,i+1}^k - H_{1,i-1}^k}{2h_1} + \frac{1}{h_1} \left( Z_{i+1}^k \frac{C_{1,i+1}^{k+1} - C_{1,i}^{k+1}}{h_1} - Z_i^k \frac{C_{1,i}^{k+1} - C_{1,i-1}^{k+1}}{h_1} \right) \right), \quad (2.57)$$

де  $Z_{i+1}^k = 0,5(v(C_{i+1}^k) + v(C_i^k))$ ,  $Z_i^k = 0,5(v(C_i^k) + v(C_{i-1}^k))$ ,  $i = \overline{1, n-1}$ ,  $k = \overline{0, K-1}$ .

Знайдемо чисельний розв'язок задачі перенесення солей в області повного насичення [66].

Для знаходження розв'язку задачі фільтрації сольових розчинів (2.44), (2.47), використаємо неявну різницеву схему, яка при  $v_2 = const$  має наступний вигляд:

$$\frac{1}{h_2^2} (b_{i+1}^k (H_{2,i+1}^{k+1} - H_{2,i}^{k+1}) - b_i^k (H_{2,i}^{k+1} - H_{2,i-1}^{k+1}) - v_2 (C_{2,i+1}^k - 2C_{2,i}^k + C_{2,i-1}^k)) = 0, \quad (2.58)$$

де  $b_i^k = 0,5(K(H_i^k, C_i^k) + K(H_{i-1}^k, C_{i-1}^k))$ ,  $b_{i+1}^k = 0,5(K(H_{i+1}^k, C_{i+1}^k) + K(H_i^k, C_i^k))$ ,  $i = \overline{1, n-1}$ ,  $k = \overline{0, K-1}$ .

При  $v_2 = v(c_2)$  неявна різницева схема набуде вигляду

$$\frac{1}{h_2^2} \left( b_{i+1}^k (H_{2,i+1}^{k+1} - H_{2,i}^{k+1}) - b_i^k (H_{2,i}^{k+1} - H_{2,i-1}^{k+1}) \right) - \frac{1}{h_2} \left( Z_{i+1}^k \frac{C_{2,i+1}^{k+1} - C_{2,i}^{k+1}}{h_2} - Z_i^k \frac{C_{2,i}^{k+1} - C_{2,i-1}^{k+1}}{h_2} \right) = 0. \quad (2.59)$$

де  $Z_{i+1}^k = 0,5(v_2(C_{i+1}^k) + v_2(C_i^k))$ ,  $Z_i^k = 0,5(v_2(C_i^k) + v_2(C_{i-1}^k))$ ,  $i = \overline{1, n-1}$ ,  $k = \overline{0, K-1}$ .

Розв'язок різницевих схем (2.58), (2.59) знайдемо за методом прогонки. Для цього запишемо дані різницеві схеми у прогоночному вигляді

$$a_3 H_{2,i-1}^{k+1} - c_3 H_{2,i}^{k+1} + b_2 H_{2,i+1}^{k+1} = -f_3, \quad (2.60)$$

де  $a_3 = \frac{b_i^k}{h_2^2}$ ,  $b_3 = \frac{b_{i+1}^k}{h_2^2}$ ,  $c_3 = \frac{b_{i+1}^k + b_i^k}{h_2^2}$ ,  $f_3 = \frac{v_2}{h_2^2} (C_{2,i+1}^k - 2C_{2,i}^k + C_{2,i-1}^k)$  при

$$v_2 = \text{const}, \quad f_3 = \frac{1}{h_2} \left( Z_{i+1}^k \frac{C_{2,i+1}^k - C_{2,i}^k}{h_2} - Z_i^k \frac{C_{2,i}^k - C_{2,i-1}^k}{h_2} \right) \text{ при } v_2 = v_2(c_2), \quad i = \overline{1, n-1},$$

$k = \overline{0, K-1}$ .

Таким чином, розв'язок задачі фільтрації сольових розчинів, згідно (2.60) та методу прогонки [99, 131, 132, 146, 162] знаходимо у вигляді

$$H_{2,i}^{k+1} = \alpha_{i+1}^3 H_{2,i+1}^{k+1} + \beta_{i+1}^3, \quad (2.61)$$

де  $\alpha_{i+1}^3 = \frac{b_3}{c_3 - \alpha_i^3 a_3}$ ,  $\beta_{i+1}^3 = \frac{a_3 \beta_i^3 + f_3}{c_3 - \alpha_i^3 a_3}$ ,  $\alpha_1 = 0$ ,  $\beta_1 = H_2^2$ ,  $i = \overline{1, n-1}$ ,  $k = \overline{0, K-1}$ .

Для знаходження чисельного розв'язку задачі перенесення солей (2.43), (2.45), (2.46) застосуємо монотонну різницеву схему [39, 40, 131, 132, 166-168, 188], яка для рівняння (2.43) має вигляд

$$\begin{aligned} \sigma_2 \frac{C_{2,i}^{k+1} - C_{2,i}^{k1}}{\tau} &= \frac{1}{h_2} \left( \eta_{i2}^k d_{i+1}^{k+1} \frac{C_{2,i+1}^{k+1} - C_{2,i}^{k+1}}{h_2} - \eta_{i1}^j d_i^{j+1} \frac{C_{2,i}^{k+1} - C_{2,i}^{k+1}}{h_2} \right) + \\ &+ \frac{r_{i+}^k}{h_2} (C_{2,i+1}^{k+1} - C_{2,i}^{k+1}) + \frac{r_{i-}^k}{h_2} (C_{2,i}^{k+1} - C_{2,i-1}^{k+1}) - \gamma_2 (C_{2,i}^{k+1} - C_2^*), \end{aligned} \quad (2.62)$$

де  $d_i^k = 0,5(D(x_i, C_{2,i}^k) + D(x_{i-1}, C_{2,i-1}^k))$ ,  $d_{i+1}^k = 0,5(D(x_{i+1}, C_{2,i+1}^k) + D(x_i, C_{2,i}^k))$ ,

$$r_{i+}^k = \frac{-V(x_i, C_{2,i}^k) + |V(x_i, C_{2,i}^k)|}{2} \geq 0, \quad r_{i-}^k = \frac{-V(x_i, C_{2,i}^k) - |V(x_i, C_{2,i}^k)|}{2} \leq 0,$$

$$V(x_i, C_i^k) = r_{i+}^k + r_{i-}^k, \quad \eta_{i1}^k = \frac{1}{1 + \frac{0,5h_2|r_i^k|}{d_i^k}}, \quad \eta_{i2}^k = \frac{1}{1 + \frac{0,5h_2|r_i^k|}{d_{i+1}^k}}, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad k = \overline{0, K-1}.$$

Розв'язок різницевої схеми (2.62) знайдемо методом прогонки [99, 131, 132, 146, 162]. Для цього запишемо дану різницеву схему у прогнотичному вигляді

$$a_4 C_{2,i-1}^{k+1} - c_4 C_{2,i}^{k+1} + b_4 C_{2,i+1}^{k+1} = -f_4, \quad (2.63)$$

де  $a_4 = \frac{1}{h_2} \left( \frac{d_i^k \eta_{i1}^k}{h_2} - r_{i-}^k \right)$ ,  $b_4 = \frac{1}{h_2} \left( \frac{d_{i+1}^k \eta_{i2}^k}{h_2} + r_{i+}^k \right)$ ,  $c_4 = \frac{1}{h_2} (d_i^k \eta_{i1}^k + d_i^k \eta_{i2}^k) + \frac{|r_i^k|}{h_2} + \frac{\sigma_2}{\tau}$ ,

$$f_4 = \gamma_2 (C_{2,i}^{k+1} - C_2^*), \quad i = \overline{1, n-1}, \quad k = \overline{0, K-1}.$$

Розв'язок задачі масоперенесення солей на РГВ (2.48) знайдено методом прогонки у вигляді (2.37).

Умови застосування методу прогонки та умови стійкості даного методу виконані.

Швидкість фільтрації (2.45) при  $v_2 = const$  обчислюємо за формулою

$$V_i^{j+1} = -k_{2,i}^j \left( \frac{H_{2,i+1}^j - H_{2,i-1}^j}{2h_2} + v_1 \frac{C_{2,i+1}^j - 2C_{2,i}^j + C_{2,i-1}^j}{h_2^2} \right), \quad i = \overline{1, n-1}, \quad k = \overline{0, K-1}. \quad (2.64)$$

У випадку  $v_2 = v_2(c_2)$  використаємо наступну різницеву схему:

$$V_i^{j+1} = -k_{2,i}^j \left( \frac{H_{1,i+1}^j - H_{1,i-1}^j}{2h_2} + \frac{1}{h_2} \left( Z_{i+1}^j \frac{C_{i+1}^{j+1} - C_i^{j+1}}{h_2} - Z_i^j \frac{C_i^{j+1} - C_{i-1}^{j+1}}{h_2} \right) \right), \quad (2.65)$$

де  $Z_{i+1}^j = 0,5(v_2(C_{i+1}^j) + v_2(C_i^j))$ ,  $Z_i^j = 0,5(v_2(C_i^j) + v_2(C_{i-1}^j))$ ,  $i = \overline{1, n-1}$ ,  $k = \overline{0, K-1}$ .

Таким чином, алгоритм розв'язування задачі перенесення солей при фільтрації та вологоперенесенні у насичено-ненасиченому ґрунтовому середовищі у нелінійному випадку побудовано повністю.

### 2.2.3.2 Результати чисельних експериментів та їх аналіз

Обчислювальні алгоритми знаходження чисельного розв'язку задачі програмно реалізовані за допомогою розробленого програмного комплексу, який дозволяє отримати чисельні результати у графічному та табличному виглядах, провести чисельні експерименти.

Розв'язок задачі знайдено при наступних вхідних даних [43, 120, 135, 145, 156, 171, 181]:  $T = 360$  діб,  $l_1 = 10$  м,  $l_2 = 15$  м,  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0,4$ ,  $\gamma = 0,0065$  доба<sup>-1</sup>,  $C^* = 350$  г/літр,  $\tilde{C}_0 = 0$  г/літр,  $\tilde{C}_1 = 0$  г/літр,  $\tilde{C}_2 = 10$  г/літр,  $H_1^1 = 1,4$  м,  $H_2^1 = 0,1$  м,  $H_1^2 = 1,8$  м,  $H_2^2 = 1,4$  м,  $\nu_1 = \nu_2 = 2,8 \cdot 10^{-5}$  м<sup>5</sup>/кг·доба,  $\lambda = 0,1$  м,  $D_m = 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/добу,  $\lambda = 0,1$  м,  $\rho = 1000$  кг/м<sup>3</sup>,  $g = 9,8$  м/с<sup>2</sup>.

Для неповного насичення ґрунту коефіцієнт вологоємності має вигляд

$$\mu(h) = \frac{\partial \omega}{\partial h} = \frac{\partial(a\rho g(h+x)+b)}{\partial h} = a\rho g \left(1 + \frac{\partial x}{\partial h}\right) = a\rho g \left(1 + \frac{1}{\frac{\partial h}{\partial x}}\right),$$

де  $h = \frac{p}{\rho g} - x$  – гідравлічний потенціал (напір),  $p = \rho g(h-x)$  – тиск рідини,  $a = 1$

,  $b = 1$  – константи, визначені експериментально [171];

В якості коефіцієнта фільтрації взято наступну функціональну залежність [43]:

$$k_2(c_2, h_2) = k_2(c_2) + k_2(h_2),$$

де  $k_2(c_2) = 0.0002c^6 - 0.0088c^5 + 0.162c^4 - 1.3194c^3 + 3.9229c^2 + 0.0223c + 18.87$ ,

$c \in [0; 1]$  - безрозмірна величина;

$$k_2(h_2) = \frac{a_1}{b_1 + \rho^\alpha} = \frac{a_1}{b_1 + [\rho g(h-x)]^2},$$

де  $a_1 = 1$ ,  $b_1 = 1$ ,  $\alpha = 1$  визначаються експериментально [51, 120, 171].

За коефіцієнт конвективної дифузії взято функцію  $D(c) = D_m + \lambda|V(x, c)|$  [144, 156, 171, 181].

Початкові та граничні умови для задач вологоперенесення та солції мають вигляд  $h(x,0) = \frac{H_1 - H_2}{l_2} x + H_2$ ,  $h(0,t) = H_2 e^{0.01t}$ ,  $h(l_2,t) = H_2$ .

За початкові та граничні умови для задачі перенесення солей взято наступні:  $c(x,0) = 0$ ,  $c(0,t) = 10e^{-0.1t}$ ,  $c(l_2,t) = 0$ .

Результатом розв'язання задачі перенесення солей при вологоперенесенні в області неповного насичення є знаходження значень розподілу напорів води та концентрації солей в даній області вологоперенесення. Оскільки в математичній моделі враховано явище осмосу, то приведемо результати розв'язків задач при звичайному та хімічному осмосі та без його урахування.

В результаті розв'язання задачі вологоперенесення з урахуванням осмосу та без його урахування отримали наступні графіки розподілу напорів води (рис. 2.18, 2.19):

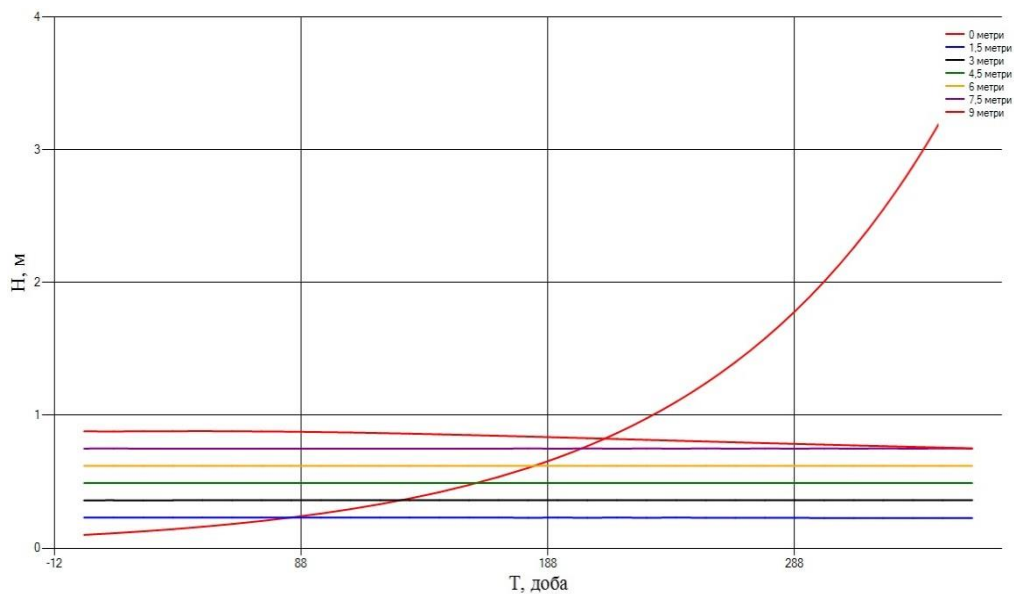


Рис. 2.18. Розподіл напорів води без урахування осмосу

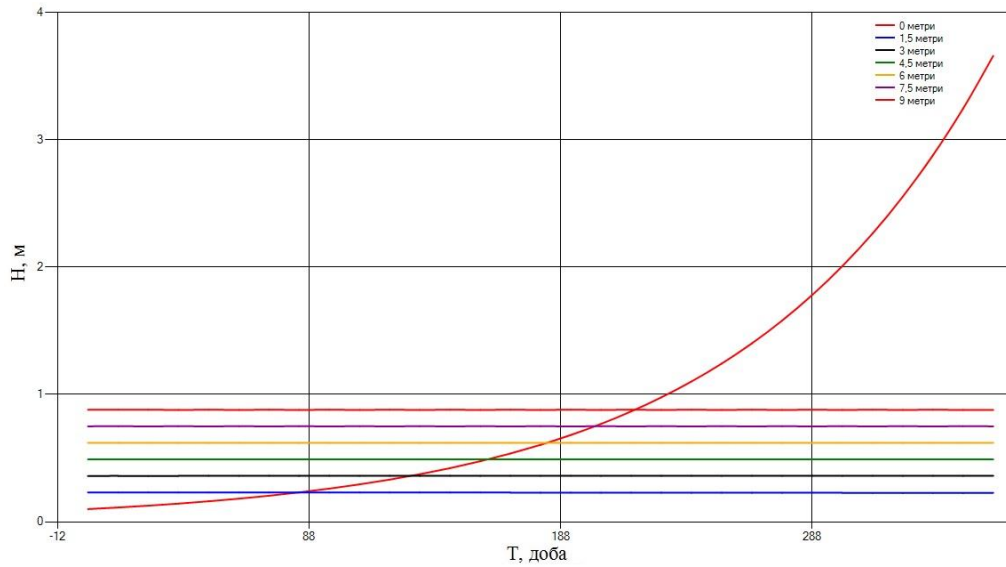


Рис. 2.19. Розподіл напорів води з урахуванням осмосу

Розподіл концентрації солей з урахуванням звичайного ( $v_1 = const$ ), хімічного осмосу ( $v_1 = v_1(c_1)$ ) та без його урахування ( $v_1 = 0$ ) в даній області водонасичення має вигляд (рис. 2.20-2.22)

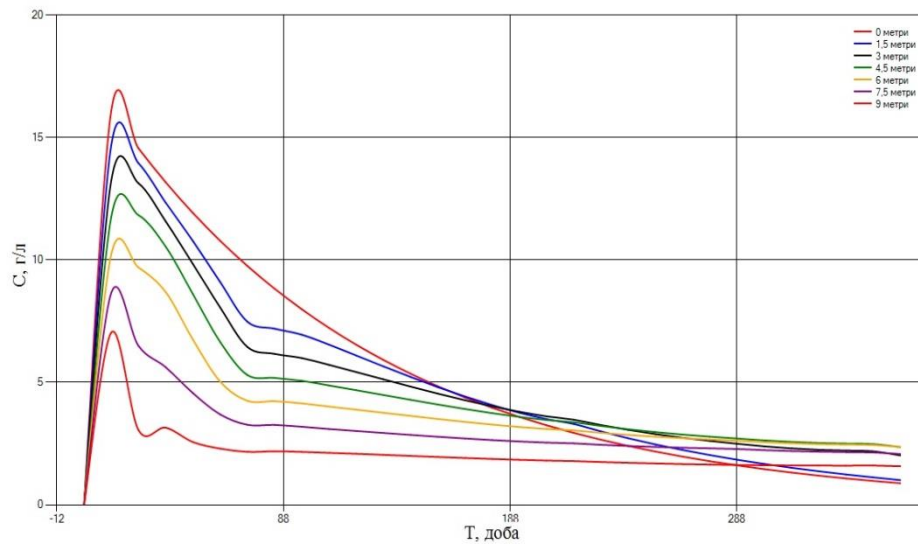


Рис. 2.20. Розподіл концентрації солей без урахування осмосу ( $v_1 = 0$ )

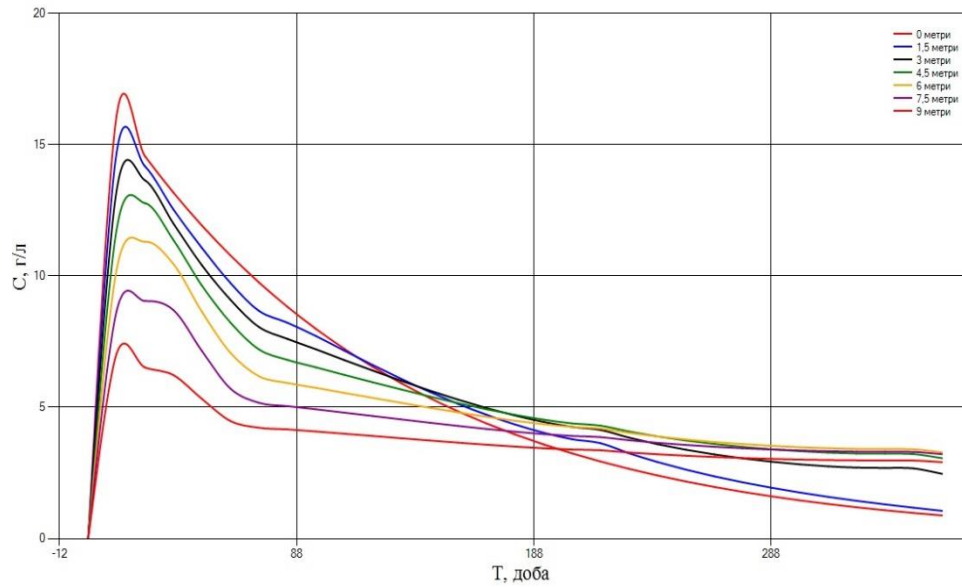


Рис. 2.21. Розподіл концентрації солей при звичайному осмосі ( $v_1 = const$ )

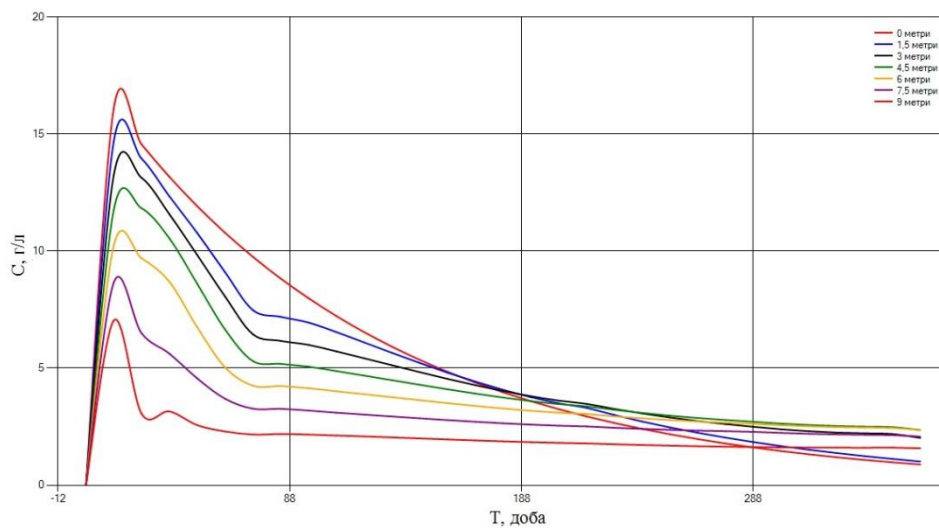


Рис. 2.22. Розподіл концентрації солей при хімічному осмосі ( $v_1 = v_1(c_1)$ )

Розв'язавши задачу в області неповного насичення, знайдено розв'язок задачі перенесення солей при фільтрації сольових розчинів в області повного насичення з урахуванням та без урахування явища осмосу.

В результаті розв'язання задачі фільтрації отримали наступні розподіли п'єзометричних напорів (рис. 2.23, 2.24):

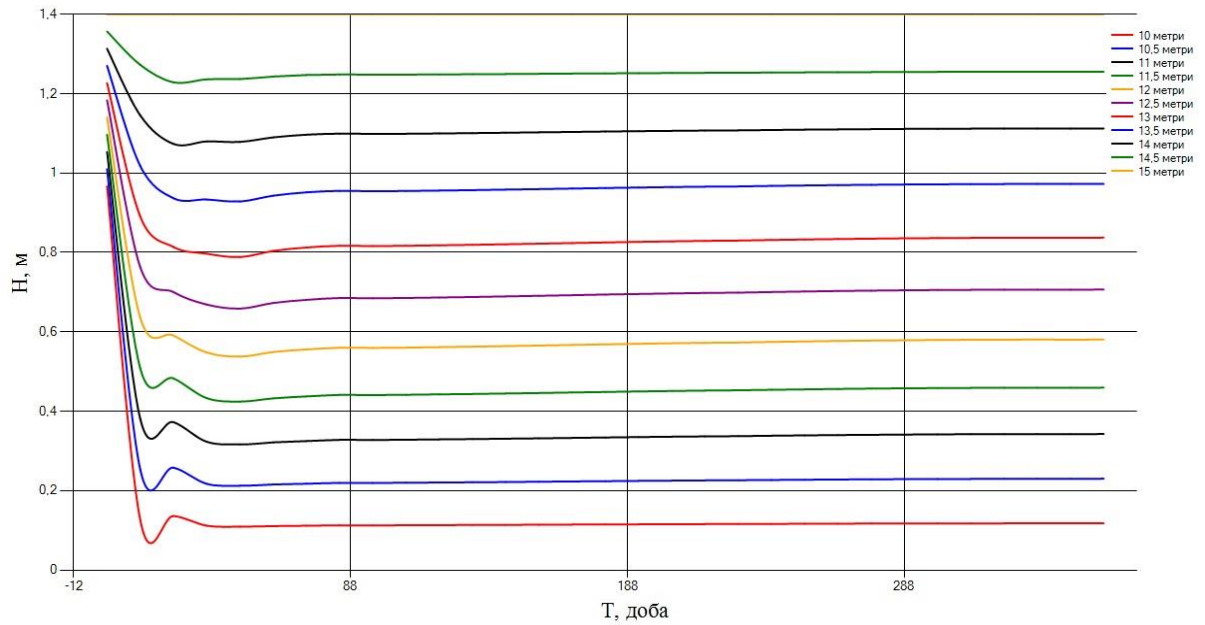


Рис. 2.23. Розподіл п'єзометричних напорів без урахування осмосу ( $u_2 = 0$ )

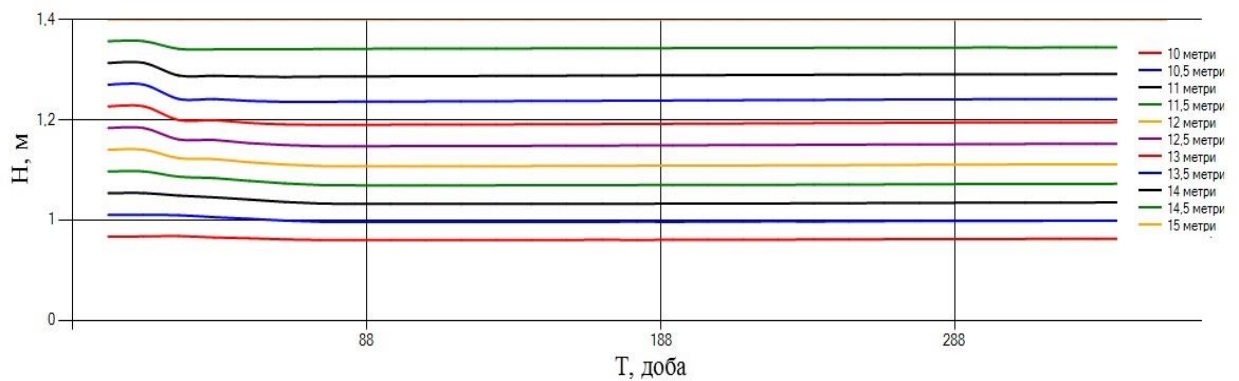


Рис. 2.24. Розподіл п'єзометричних напорів з урахуванням осмосу

В результаті розв'язання задачі перенесення солей при фільтрації сольових розчинів отримано наступні графіки розподілу концентрації сольових розчинів (рис. 2.25-2.27):



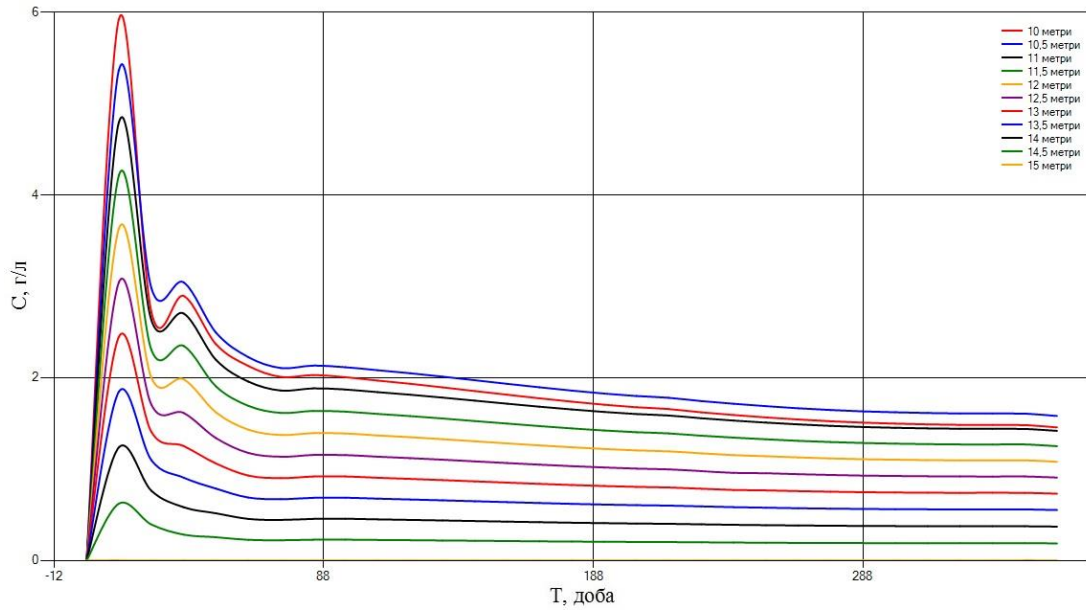


Рис. 2.25. Розподіл концентрації солей без урахування осмосу ( $v_2 = 0$ ) в насиченому ґрунті

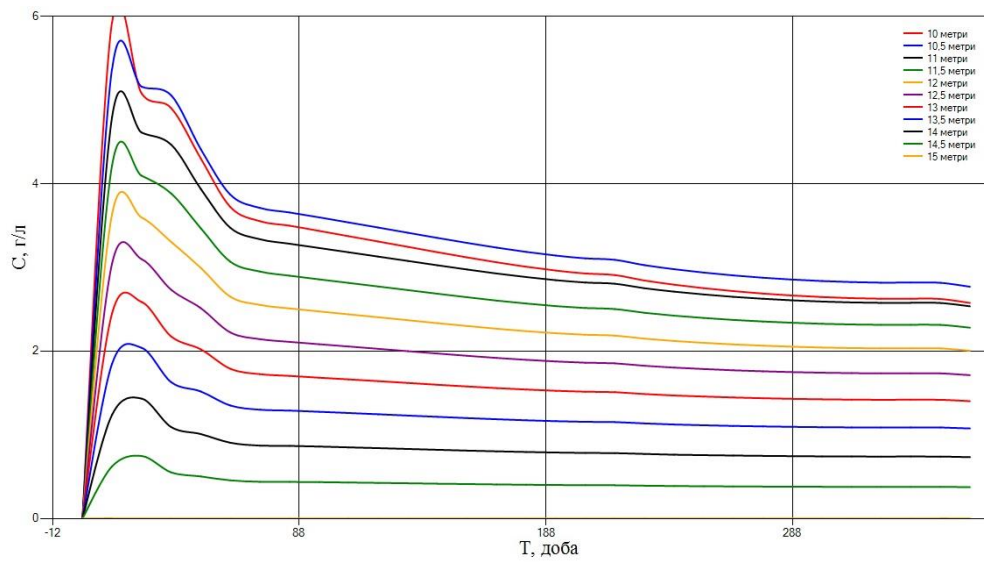


Рис. 2.26. Розподіл концентрації солей з урахуванням звичайного осмосу ( $v_2 = const$ ) в насиченому ґрунті

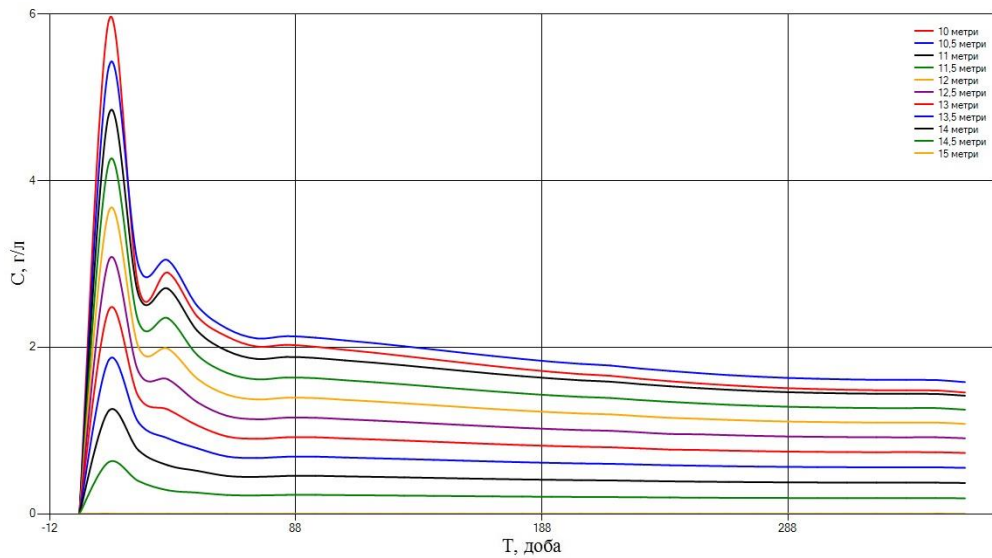


Рис. 2.27. Розподіл концентрації солей з урахуванням хімічного осмосу ( $v_2 = v_2(c_2)$ ) в насиченому ґрунті

Результатом розв'язання задачі перенесення солей на вільній поверхні є графік (рис. 2.28), який демонструє розподіл концентрації сольових розчинів в околі вільної поверхні.

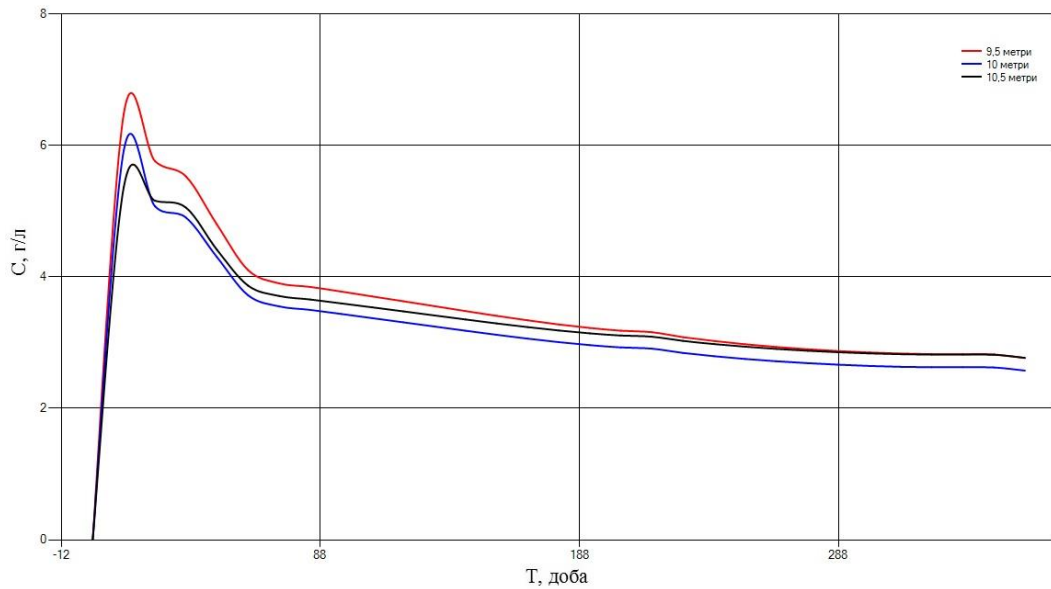


Рис. 2.28. Розподіл концентрації солей на РГВ

Знайдено значення розподілу напорів та концентрації сольового розчину сумісно для областей повного та неповного насичення. Графіки розподілу

напорів рідини та концентрації сольових розчинів в області насичено-ненасиченого ґрунту мають вигляд (рис. 2.29, 2.30)

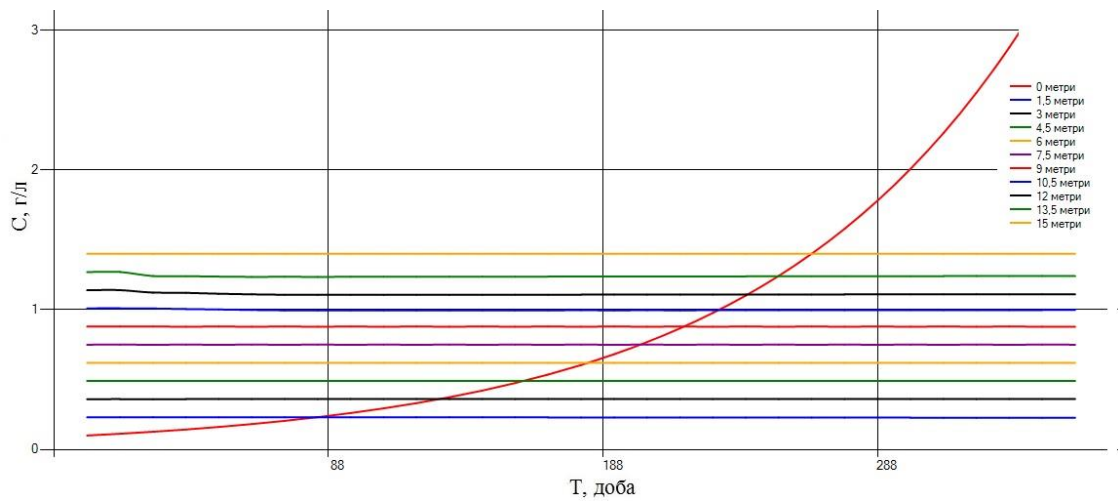


Рис. 2.29. Розподіл напорів рідини в області насичено-ненасиченого ґрунту

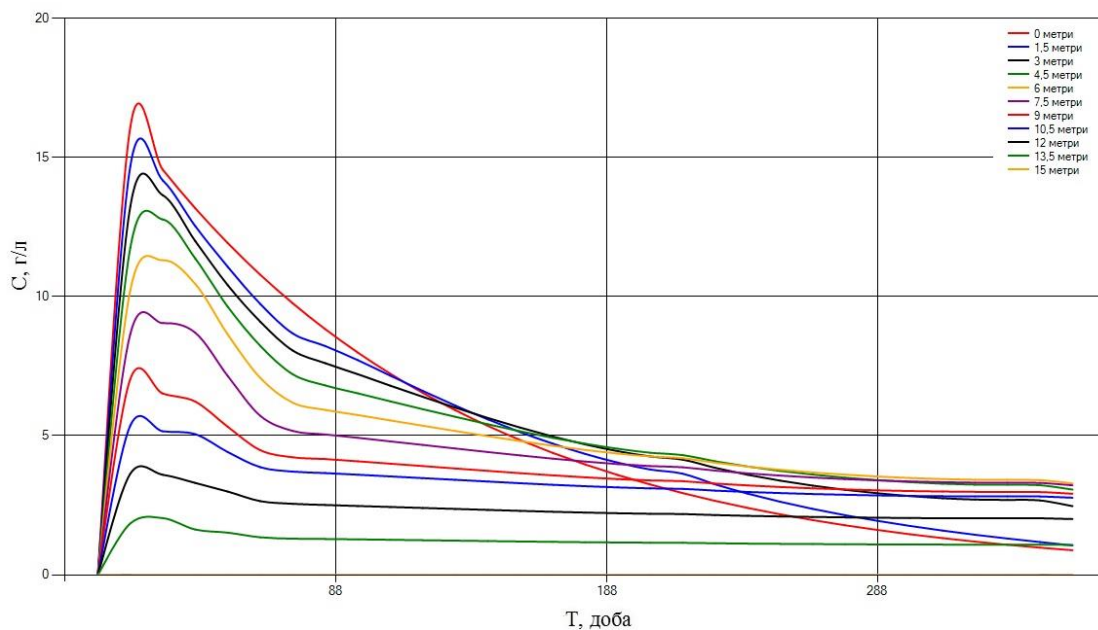


Рис. 2.30. Розподіл концентрації сольових розчинів в області насичено-ненасиченого ґрунту

На основі отриманих результатів та проведених чисельних експериментах можна зробити наступні висновки:

- в області неповного насичення розподіл напорів води зростає з глибиною, набуваючи максимального значення в околі РГВ, та зменшується з

часом, набуваючи найменших значень на максимальному часовому шарі ( $T = 360 \text{ діб}$ ) (рис. 2.20, 2.21);

- розподіл концентрації сольових розчинів найбільших значень набуває в першій третині часового проміжку, в подальшому – розподіл концентрації солей зменшується з часом та глибиною, набуваючи найменших значень на РГВ, що пояснюється вимиванням сольових розчинів з пористого середовища (рис. 2.22-2.24);

- графіки розподілу п'єзометричних напорів в області повного насичення демонструють зростання значень розподілу п'єзометричних напорів з глибиною пористого середовища та їх поступове зменшення з часом (рис. 2.25, 2.26);

- розподіл концентрації солей зменшується з часом та глибиною, набуваючи менших значень в порівнянні з розподілом концентрації в області неповного насичення (рис. 2.27-2.29);

- на внутрішній межі контакту областей повного та неповного насичення відбувається перерозподіл концентрації сольових розчинів, при цьому розподіл концентрації солей продовжує зменшуватися (рис. 2.30);

- отримані спільні графіки розподілу напорів рідини та концентрації солей в області насичено-ненасиченого ґрунтового середовища демонструють поступове зменшення розподілу напорів рідини та монотонне спадання концентрації сольових розчинів з глибиною та часом в даній області водонасичення (рис. 2.31, 2.32);

- з урахуванням осмосу розподіли напорів та концентрації солей зростають. Встановлено, що величина його впливу пропорційна вибору коефіцієнта осмосу або осмотичної функції, тобто, з його збільшенням розподіли напорів та концентрації солей зростають.

### **2.3 Висновки до Розділу 2**

Основні результати даного розділу полягають в наступному:

1. В п. 2.1 даного розділу сформульовано постановку задачі перенесення солей при вологоперенесенні у нелінійному одновимірному випадку. Здійснено математичне моделювання поставленої крайової задачі та знайдено її чисельний розв'язок з використання неявної та монотонної різницевих схем. Проведено ряд чисельних експериментів з дослідження впливу солеперенесення та осмосу на процес вологоперенесення. Встановлено зростання розподілу напорів вологи з урахуванням концентрації солей в порівнянні з задачею чистого вологоперенесення на 3%. Розподіл напорів вологи з урахуванням концентрації солей та осмосу зменшується на 3-5%, при цьому розподіл концентрації солей зростає пропорційно до вибору коефіцієнта осмосу або осмотичної функції.

2. В п. 2.2 проведено математичне моделювання процесу перенесення солей при фільтрації та вологоперенесенні у насичено-ненасичених ґрунтах в одновимірній постановці, лінійному та нелінійному випадках. Побудовані математичні моделі поставлених контактних-крайових задач, описані системами лінійних та нелінійних диференціальних рівнянь з відповідними крайовими умовами. Чисельні розв'язки поставлених задач знайдено методом скінченних різниць з використанням неявної та монотонної різницевих схем, які було модифіковано на випадок розв'язання нелінійних диференціальних рівнянь.

3. Знайдено спільний розв'язок задачі перенесення солей при фільтрації та вологоперенесенні в областях повного та неповного насичення, що дозволяє працювати з даними областями водонасичення як з одним цілим.

4. В кожному з пунктів даного розділу розроблені алгоритми чисельних розв'язків поставлених задач, які програмно реалізовані з використанням сучасних технологій програмування. На основі чого проведено чисельні експерименти та здійснено їх аналіз. В результаті програмної реалізації отримано розподіли напорів вологи, п'єзометричних напорів, концентрації сольових розчинів в області насичено-ненасиченого ґрунту з урахуванням явища осмосу. Проаналізовано залежність отриманих результатів від вхідних даних та встановлено закономірності зміни розподілу концентрації солей з їх

урахуванням, що дозволяє спрогнозувати характер протікання досліджуваних процесів з часом.

5. В побудованих математичних моделях враховано явище осмосу. Осмотичні явища впливають на розподіл концентрації солей пропорційно до вибору коефіцієнта осмосу – зі збільшенням даного коефіцієнта розподіл концентрації солей зростає. Встановлено незначний вплив осмосу на процес перенесення солей для лінійного випадку, порівняно з нелінійним.

Основні результати даного розділу опубліковано в роботах [43, 46, 47, 48, 52, 56, 63, 66, 69, 179].

### РОЗДІЛ 3

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПЕРЕНЕСЕННЯ СОЛЕЙ ПРИ ФІЛЬТРАЦІЇ ТА ВОЛОГОПЕРЕНЕСЕННІ В НАСИЧЕНО- НЕНАСИЧЕНИХ ҐРУНТАХ У ДВОВИМІРНОМУ ВИПАДКУ

### 3.1 Математичне моделювання перенесення солей при сумісній фільтрації та вологоперенесенні у насичено-ненасиченому ґрунтовому масиві з рухомою вільною поверхнею

#### 3.1.1 Постановка задачі

Розглядається задача плоско-вертикальної безнапірної стаціонарної фільтрації сольового розчину до горизонтального систематичного дренажу при наявності вільної поверхні (кривої депресії) ґрунтових вод (рис. 3.1) [67, 68].

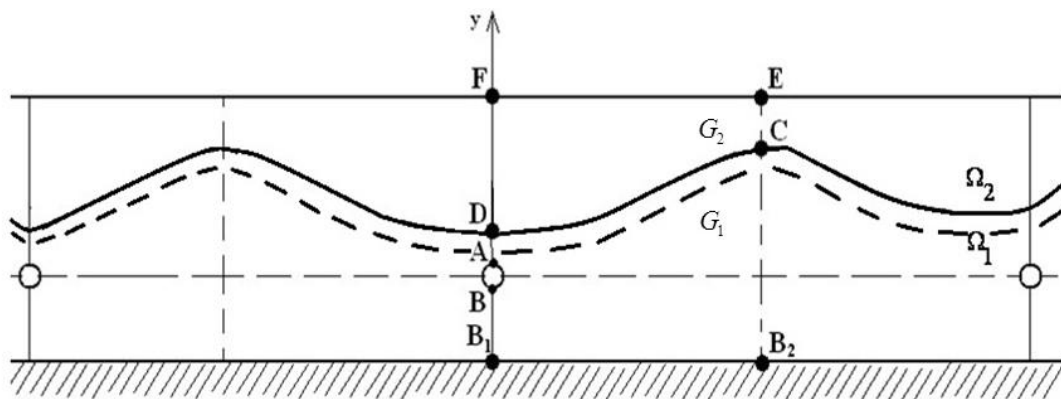


Рис. 3.1. Фільтрація сольового розчину до горизонтального систематичного дренажу

В результаті цього, в ґрунтовому масиві утворюється дві області:  $\Omega_1$  – область повного насичення, зайнята фільтраційним потоком,  $\Omega_2$  – область неповного насичення (область вологоперенесення).

Оскільки розглядувана схема дренажу є симетричною, доцільно розглядати лише виділений її фрагмент  $ABB_2EF$  (рис. 3.2). Виділена область складається з двох підобластей: області повного насичення  $G_1$  та неповного насичення  $G_2$ , розділених вільною поверхнею (кривою депресії)  $CD$ .

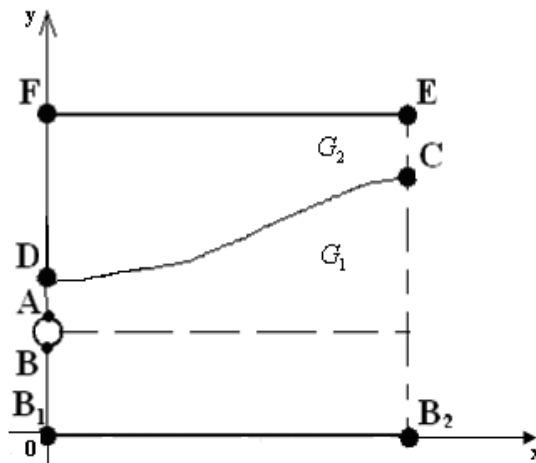


Рис. 3.2. Характерний фрагмент областей повного і неповного насичення

Проведемо дослідження процесу фільтрації сольових розчинів до дрени, через яку відводяться сольові розчини з ґрунтового середовища (режим осушення), в області повного насичення  $G_1$  та процес вологоперенесення з урахуванням перенесення солей в області неповного насичення  $G_2$ ; здійснимо дослідження процесу солеперенесення при фільтрації сольових розчинів та вологоперенесенні в насичено-ненасиченому ґрунтовому середовищі.

### 3.1.2 Математичне моделювання процесу перенесення солей при фільтрації ґрунтових вод у насиченому пористому середовищі з рухомою вільною межею

#### 3.1.2.1 Постановка задачі фільтрації

Розглядається задача плоско-вертикальної безнапірної стаціонарної фільтрації сольових розчинів до дрени, через яку відбувається відведення сольових розчинів з ґрунтового середовища, при наявності вільної поверхні (кривої депресії) ґрунтових вод (рис.3.3.). Тому задача розглядається у випадку осушувального режиму [67, 68].



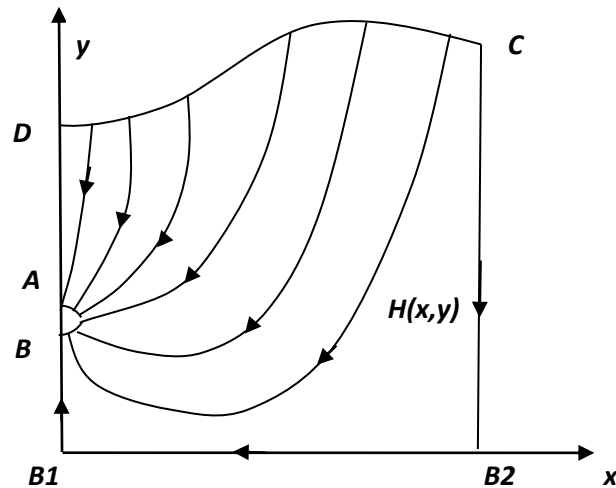


Рис. 3.3. Фрагмент області фільтрації рідини до дрени

Напір на дрені  $AB$  становить  $H_1$ . Фільтруючий шар ґрунту знизу підстиляється практично непроникним шаром глини, на якому задається умова непроникності.  $B_2C$  є лінією течії, на якій задається умова непроникності.

Необхідно розрахувати поле напорів рідини та швидкостей фільтрації в області фільтрації підземних вод.

### 3.1.2.2 Математична модель задачі у фізичній області

Математична модель задачі стаціонарної фільтрації рідини до горизонтального дренажу при наявності вільної поверхні описується наступною крайовою задачею [55, 61, 67, 68, 82]:

$$k(c_1) \left( \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial k(c_1)}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial k(c_1)}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial y} = 0, \quad (3.1)$$

$$\Delta h = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0, \quad (3.2)$$

$$h|_{AB} = h|_{r=r_1} = H_1, \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial h}{\partial n} \Big|_{AD} = \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial h}{\partial n} \Big|_{BB_1 B_2 C} = \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{x=l} = \frac{\partial h}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0, \quad (3.5)$$

$$h|_{CD} = y, \quad (3.6)$$

$$\frac{dh}{dn}|_{CD} = \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial x} = 0. \quad (3.7)$$

Також задані умови Коші-Рімана

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = -\frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad (x, y) \in \partial G_z \quad (3.8)$$

та умови ортогональності ліній сітки області її межах, які не використовують рівняння самої межі

$$\text{grad } \xi \cdot \text{grad } \eta = 0 \quad \text{або} \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0, \quad (3.9)$$

$$\xi|_{AB} = 0, \quad (3.10)$$

$$\xi|_{CD} = a, \quad (3.11)$$

$$\eta|_{BB_1B_2C} = 0, \quad (3.12)$$

$$\eta|_{AD} = b. \quad (3.13)$$

Тут  $k(c)$  – коефіцієнт фільтрації, залежність якого від концентрації сольового розчину встановлена експериментально [43];  $h$  – п'єзометричний напір,  $H(x, y)$  – висота нависання води,  $H_1$  – значення напору на дрені  $AB$ ,  $n$  – внутрішня нормаль до кривої депресії.

### 3.1.2.3 Математична модель задачі у змінних $\xi, \eta$

Розглянемо задачу конформного відображення області  $G_z$  на параметричний прямокутник  $G_\xi$ . Нехай таке відображення реалізується функцією  $\xi(z) = \xi(x, y) + \eta(x, y)$ . Розглянемо математичну модель, яка реалізує дане конформне відображення [29, 37, 41, 42, 44, 85, 86, 105, 108, 155].

Перейдемо в задачі (3.1)-(3.13) до змінних  $\xi, \eta$  [41, 42, 44]. Маємо такий зв'язок між похідними:

$$x_\xi = y_\eta, \quad x_\eta = -y_\xi. \quad (3.14)$$

Метрику відображення визначають величини  $\xi_x, \xi_y, \xi_t, \eta_x, \eta_y, \eta_t$ , які виражаються через похідні  $x_\xi, y_\xi, x_\zeta, x_\eta, y_\xi, x_\zeta$  [41, 42, 44]:

$$\begin{cases} \xi_x = \frac{y_\eta}{I_1}, \\ \xi_y = \frac{-x_\eta}{I_1}, \\ \xi_t = -x_\zeta \cdot \xi_x - \xi_y \cdot y_\zeta; \end{cases} \quad \begin{cases} \eta_x = \frac{-y_\xi}{I_1}, \\ \eta_y = \frac{x_\xi}{I_1}, \\ \eta_t = -x_\zeta \cdot \eta_x - \eta_y \cdot y_\zeta; \end{cases} \quad (3.15)$$

$$I = \xi_x \cdot \eta_y - \xi_y \cdot \eta_x = \frac{1}{I_1} = \frac{1}{x_\xi \cdot y_\eta - x_\eta \cdot y_\xi},$$

$$I_1 = x_\xi \cdot y_\eta - x_\eta \cdot y_\xi = x_\xi \cdot x_\xi - x_\eta \cdot (-x_\eta) = x_\xi^2 + x_\eta^2 = y_\eta \cdot y_\eta - y_\xi \cdot (-y_\xi) = y_\xi^2 + y_\eta^2.$$

Тут  $I$  – якобіан прямого відображення,  $I_1$  – якобіан оберненого відображення.

Перші похідні  $\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}$  перетворюються наступним чином:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial(y, h)}{\partial(\xi, \eta)} / \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} = \frac{1}{I_1} \left[ \frac{\partial h}{\partial \xi} y_\eta - \frac{\partial h}{\partial \eta} y_\xi \right], \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial(x, h)}{\partial(\xi, \eta)} / \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} = \frac{1}{I_1} \left[ -\frac{\partial h}{\partial \xi} x_\eta + \frac{\partial h}{\partial \eta} x_\xi \right]. \quad (3.17)$$

Перетворення других похідних  $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}$  є наступними:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2} \cdot \xi_x^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \xi_x \cdot \eta_x + \frac{\partial h}{\partial \xi} \cdot \xi_{xx} + \frac{\partial h}{\partial \eta} \cdot \eta_{xx} + \frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2} \cdot \eta_x^2, \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2} \cdot \xi_y^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \xi_y \cdot \eta_y + \frac{\partial h}{\partial \xi} \cdot \xi_{yy} + \frac{\partial h}{\partial \eta} \cdot \eta_{yy} + \frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2} \cdot \eta_y^2, \quad (3.19)$$

де величини  $\xi_x, \xi_y, \eta_x, \eta_y$  виражаються за формулами (3.15), а  $\xi_{xx}, \eta_{xx}, \xi_{yy}, \eta_{yy}, \xi_{xy}, \eta_{xy}$  мають вигляд

$$\xi_{xx} = \frac{1}{I_1^2} \cdot [y_\eta \cdot y_{\xi\eta} - y_\xi \cdot y_{\eta\eta} - y_\eta \cdot [y_\eta \cdot I_{1\xi} - y_\xi \cdot I_{1\eta}]], \quad (3.20)$$

$$\xi_{xy} = \frac{1}{I_1^2} \cdot \left[ -x_\eta \cdot y_{\xi\eta} + x_\xi \cdot y_{\eta\eta} - y_\eta \cdot \left[ -x_\eta \cdot I_{1\xi} + x_\xi \cdot I_{1\eta} \right] \right] \quad (3.21)$$

$$\xi_{yy} = \frac{1}{I_1^2} \cdot \left[ -x_\eta \cdot x_{\xi\eta} + x_\xi \cdot x_{\eta\eta} + x_\eta \cdot \left[ -x_\eta \cdot I_{1\xi} + x_\xi \cdot I_{1\eta} \right] \right] \quad (3.22)$$

$$\eta_{xx} = -\frac{1}{I_1^2} \cdot \left[ y_\eta \cdot y_{\xi\xi} - y_\xi \cdot y_{\xi\eta} + y_\xi \cdot \left[ y_\eta \cdot I_{1\xi} - y_\xi \cdot I_{1\eta} \right] \right] \quad (3.23)$$

$$\eta_{xy} = -\frac{1}{I_1^2} \cdot \left[ -x_\eta \cdot y_{\xi\xi} + x_\xi \cdot y_{\xi\eta} + y_\xi \cdot \left[ -x_\eta \cdot I_{1\xi} + x_\xi \cdot I_{1\eta} \right] \right] \quad (3.24)$$

$$\eta_{yy} = \frac{1}{I_1^2} \cdot \left[ -x_\eta \cdot x_{\xi\xi} + x_\xi \cdot x_{\xi\eta} - x_\xi \cdot \left[ -x_\eta \cdot I_{1\xi} + x_\xi \cdot I_{1\eta} \right] \right] \quad (3.25)$$

В формулах перетворень похідних (3.20)-(3.25)  $I_{1\xi}$ ,  $I_{1\eta}$  мають вигляд

$$\begin{cases} I_{1\xi} = \frac{\partial I_1}{\partial \xi} = x_{\xi\xi} \cdot y_\eta + x_\xi \cdot y_{\xi\eta} - x_{\xi\eta} \cdot y_\xi - x_\eta \cdot y_{\xi\xi}, \\ I_{1\eta} = \frac{\partial I_1}{\partial \eta} = x_{\xi\eta} \cdot y_\eta + x_\xi \cdot y_{\eta\eta} - x_{\eta\eta} \cdot y_\xi - x_\eta \cdot y_{\xi\eta}. \end{cases} \quad (3.26)$$

Тоді згідно формул перетворень похідних (3.15)-(3.26) рівняння (3.1) у змінних  $\xi, \eta$  набуде вигляду [37, 41, 42, 68, 85]

$$\begin{aligned} K(c) \left[ \frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2} \xi_x^2 + 2 \frac{\partial^2 h}{\partial \xi \partial \eta} \xi_x \eta_x + \frac{\partial h}{\partial \xi} \xi_{xx} + \frac{\partial h}{\partial \eta} \eta_{xx} + \frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2} \eta_x^2 + \frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2} \xi_y^2 + 2 \frac{\partial^2 h}{\partial \xi \partial \eta} \xi_y \eta_y + \right. \\ \left. + \frac{\partial h}{\partial \xi} \xi_{yy} + \frac{\partial h}{\partial \eta} \eta_{yy} + \frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2} \eta_y^2 \right] + \frac{1}{I_1^2} \left[ \frac{\partial K(c)}{\partial \xi} y_\eta - \frac{\partial K(c)}{\partial \eta} y_\xi \right] \cdot \left[ \frac{\partial h}{\partial \xi} y_\eta - \frac{\partial h}{\partial \eta} y_\xi \right] + \\ + \frac{1}{I_1^2} \left[ -\frac{\partial K(c)}{\partial \xi} x_\eta + \frac{\partial K(c)}{\partial \eta} x_\xi \right] \cdot \left[ -\frac{\partial h}{\partial \xi} x_\eta + \frac{\partial h}{\partial \eta} x_\xi \right] = 0. \quad (3.27) \end{aligned}$$

Звівши подібні члени в рівнянні (3.27), отримаємо

$$\bar{A}_1 \frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2} + \bar{B}_1 \frac{\partial^2 h}{\partial \xi \partial \eta} + \bar{C}_1 \frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2} + \bar{D}_1 \frac{\partial h}{\partial \xi} + \bar{E}_1 \frac{\partial h}{\partial \eta} = 0, \quad (3.28)$$

де коефіцієнти  $\bar{A}_1, \bar{B}_1, \bar{C}_1, \bar{D}_1, \bar{E}_1$  мають вигляд

$$\bar{A}_1 = \xi_x^2 K(c_1) + \xi_y^2 K(c_1) = K(c_1) [\xi_x^2 + \xi_y^2],$$

$$\bar{B}_1 = 2K(c_1)\xi_x\eta_x + 2K(c_1)\xi_y\eta_y = 2K(c_1)[\xi_x\eta_x + \xi_y\eta_y],$$

$$\bar{C}_1 = \eta_x^2 K(c_1) + \eta_y^2 K(c_1) = K(c_1)[\eta_x^2 + \eta_y^2],$$

$$\bar{D}_1 = K(c_1)[\xi_{xx} + \xi_{yy}] + \frac{1}{I_1^2} \left[ \frac{\partial K(c_1)}{\partial \xi} y_\eta - \frac{\partial K(c_1)}{\partial \eta} y_\xi \right] y_\eta - \frac{1}{I_1^2} \left[ -\frac{\partial K(c_1)}{\partial \xi} x_\eta + \frac{\partial K(c_1)}{\partial \eta} x_\xi \right] x_\eta,$$

$$\bar{E}_1 = K(c_1)[\eta_{xx} + \eta_{yy}] - \frac{1}{I_1^2} \left[ \frac{\partial K(c_1)}{\partial \xi} y_\eta - \frac{\partial K(c_1)}{\partial \eta} y_\xi \right] y_\xi + \frac{1}{I_1^2} \left[ -\frac{\partial K(c_1)}{\partial \xi} x_\eta + \frac{\partial K(c_1)}{\partial \eta} x_\xi \right] x_\xi.$$

Здійснивши відповідні спрощення та перетворення, отримуємо наступні значення коефіцієнтів:

$$\bar{A}_1 = \bar{C}_1 = \frac{k(c_1)}{I_1}, \quad \bar{B}_1 = 0, \quad \bar{D}_1 = \frac{1}{I_1^2} \left[ \frac{\partial k(c_1)}{\partial \xi} y_\eta - \frac{\partial k(c_1)}{\partial \eta} y_\xi \right] y_\eta - \frac{1}{I_1^2} \left[ -\frac{\partial k(c_1)}{\partial \xi} x_\eta + \frac{\partial k(c_1)}{\partial \eta} x_\xi \right] x_\eta,$$

$$\bar{E}_1 = -\frac{1}{I_1^2} \left[ \frac{\partial k(c_1)}{\partial \xi} y_\eta - \frac{\partial k(c_1)}{\partial \eta} y_\xi \right] y_\xi + \frac{1}{I_1^2} \left[ -\frac{\partial k(c_1)}{\partial \xi} x_\eta + \frac{\partial k(c_1)}{\partial \eta} x_\xi \right] x_\xi, \quad I_1 = y_\xi^2 + y_\eta^2,$$

враховуючи які рівняння (3.28) перепишуться у вигляді

$$\bar{A}_1 \left( \frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2} \right) + \bar{D}_1 \frac{\partial h}{\partial \xi} + \bar{E}_1 \frac{\partial h}{\partial \eta} = 0 \quad (3.29)$$

або

$$\left( \frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2} \right) + \frac{\bar{D}_1}{\bar{A}_1} \frac{\partial h}{\partial \xi} + \frac{\bar{E}_1}{\bar{A}_1} \frac{\partial h}{\partial \eta} = 0. \quad (3.30)$$

Рівняння (3.2) у змінних  $\xi, \eta$  має вигляд

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2} \xi_x^2 + 2 \frac{\partial^2 h}{\partial \xi \partial \eta} \xi_x \eta_x + \frac{\partial h}{\partial \xi} \xi_{xx} + \frac{\partial h}{\partial \eta} \eta_{xx} + \frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2} \eta_x^2 + \frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2} \xi_y^2 + \\ &+ 2 \frac{\partial^2 h}{\partial \xi \partial \eta} \xi_y \eta_y + \frac{\partial h}{\partial \xi} \xi_{yy} + \frac{\partial h}{\partial \eta} \eta_{yy} + \frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2} \eta_y^2 = \frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2} (\xi_x^2 + \xi_y^2) + \\ &+ 2 \frac{\partial^2 h}{\partial \xi \partial \eta} (\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y) + \frac{\partial h}{\partial \eta} (\xi_{xx} + \xi_{yy}) + \frac{\partial h}{\partial \eta} (\eta_{xx} + \eta_{yy}) + \frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2} (\eta_x^2 + \eta_y^2) \end{aligned} \quad (3.31)$$

За умовою ортогональності  $\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y = 0$ , а також враховуючи рівняння

Лапласа  $\xi_{xx} + \xi_{yy} = 0$  [37, 41, 42], маємо

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2} (\xi_x^2 + \xi_y^2) + \frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2} (\eta_x^2 + \eta_y^2). \quad (3.32)$$

З умов Коші-Рімана (3.8) випливає твердження  $\xi_x^2 + \xi_y^2 = \eta_x^2 + \eta_y^2$ .

$$\text{Тоді} \quad \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \left( \frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2} \right) (\xi_x^2 + \xi_y^2) = 0. \quad (3.33)$$

Поділивши праву і ліву частину (3.33) на  $(\xi_x^2 + \xi_y^2) > 0$ , матимемо

$$\left( \frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2} \right) = 0.$$

Перетворення граничних умов (3.3)-(3.7) до змінних  $\xi, \eta$  мають вигляд [68, 74]

$$h|_{AB} = h(0, \eta) = H_1, \quad (3.34)$$

$$\frac{\partial h}{\partial n}|_{AD} = \frac{\partial h}{\partial x}|_{x=0} = \left( \frac{\partial h}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \Big|_{x=0} = \frac{\partial h}{\partial \xi} \frac{y_\eta}{I} + \frac{\partial h}{\partial \eta} \left( -\frac{y_\xi}{I} \right) = \frac{1}{I} \left( \frac{\partial h}{\partial \xi} y_\eta - \frac{\partial h}{\partial \eta} y_\xi \right) = 0,$$

$$\frac{\partial h}{\partial n}|_{AD} = \frac{\partial h}{\partial \xi} y_\eta - \frac{\partial h}{\partial \eta} y_\xi = 0, \quad (3.35)$$

$$\frac{\partial h}{\partial n}|_{BB_1 B_2 C} = \frac{\partial h}{\partial x}|_{x=0} = \frac{\partial h}{\partial x}|_{x=l} = \frac{\partial h}{\partial y}|_{y=0} = 0. \quad (3.36)$$

Гранична умова (3.36) задає три межі:  $BB_1, B_1 B_2, B_2 C$ . Тому розпишемо граничні умови для кожної з меж окремо.

$$\frac{\partial h}{\partial n}|_{BB_1} = \frac{\partial h}{\partial x}|_{x=0} = \left( \frac{\partial h}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \Big|_{x=0} = \frac{\partial h}{\partial \xi} \frac{y_\eta}{I} + \frac{\partial h}{\partial \eta} \left( -\frac{y_\xi}{I} \right) = \frac{1}{I} \left( \frac{\partial h}{\partial \xi} y_\eta - \frac{\partial h}{\partial \eta} y_\xi \right) = 0$$

$$\text{або} \quad \frac{\partial h}{\partial n}|_{BB_1} = \frac{\partial h}{\partial \xi} y_\eta - \frac{\partial h}{\partial \eta} y_\xi = 0; \quad (3.37)$$

$$\frac{\partial h}{\partial n}|_{B_1 B_2} = \frac{\partial h}{\partial y}|_{y=0} = \left( \frac{\partial h}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \Big|_{y=0} = \frac{\partial h}{\partial \xi} \left( -\frac{x_\eta}{I} \right) + \frac{\partial h}{\partial \eta} \frac{x_\xi}{I} = \frac{1}{I} \left( -\frac{\partial h}{\partial \xi} x_\eta + \frac{\partial h}{\partial \eta} x_\xi \right) = 0$$

$$\text{або} \quad \frac{\partial h}{\partial n}|_{B_1 B_2} = -\frac{\partial h}{\partial \xi} x_\eta + \frac{\partial h}{\partial \eta} x_\xi = 0; \quad (3.38)$$

$$\frac{\partial h}{\partial n}|_{B_2 C} = \frac{\partial h}{\partial x}|_{x=l} = \left( \frac{\partial h}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \Big|_{x=l} = \frac{\partial h}{\partial \xi} \frac{y_\eta}{I} + \frac{\partial h}{\partial \eta} \left( -\frac{y_\xi}{I} \right) = \frac{1}{I} \left( \frac{\partial h}{\partial \xi} y_\eta - \frac{\partial h}{\partial \eta} y_\xi \right) = 0$$

або 
$$\left. \frac{\partial h}{\partial n} \right|_{B_2C} = \frac{\partial h}{\partial \xi} y_\eta - \frac{\partial h}{\partial \eta} y_\xi = 0. \quad (3.39)$$

Граничні умови (3.6), (3.7), задані на вільній поверхні  $CD$ , у змінних  $\xi, \eta$  мають вигляд

$$h|_{CD} = \eta, \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial h}{\partial n} \right|_{CD} &= \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} - \left( \frac{\partial h}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \frac{\partial H}{\partial x} = \\ &= \frac{\partial h}{\partial x} (\cos nx) + \frac{\partial h}{\partial y} (\cos ny) = \frac{\partial h}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \end{aligned}$$

або 
$$\left. \frac{\partial h}{\partial n} \right|_{CD} = \frac{\partial h}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0. \quad (3.41)$$

Провівши дискретизацію перетворених граничних умов (3.40), (3.41) [166] отримаємо

$$h_{n,j}^{k+1} = y_{n,j}^1, \quad j = \overline{0, m},$$

$$h_{0,j}^{k+1} = H_1, \quad j = \overline{0, m},$$

$$h_{i,j}^0 = \frac{i}{n} (h_{0,j}^0 + h_{n,j}^0), \quad i = \overline{1, n-1}, \quad j = \overline{0, m},$$

$$h_{i,0}^{k+1} = - \frac{(h_{i+1,0}^k + h_{i-1,0}^k)(y_{i,0} - y_{i,1})}{(y_{i+1,0} - y_{i-1,0})} + h_{i,1}^k, \quad i = \overline{1, n-1},$$

$$h_{i,m}^{k+1} = - \frac{(h_{i+1,m}^k + h_{i-1,m}^k)(x_{i,m} - x_{i,m-1})}{(x_{i+1,m} - x_{i-1,m})} + h_{i,m-1}^k, \quad i = \overline{n_1 + 1, n_2},$$

$$h_{i,m}^{k+1} = - \frac{(h_{i+1,m}^k + h_{i-1,m}^k)(y_{i,m} - y_{i,m-1})}{(y_{i+1,m} - y_{i-1,m})} + h_{i,m-1}^k, \quad i = \overline{n_2 + 1, n_1}.$$

**3.1.2.4 Обчислювальний алгоритм побудови чисельного конформного відображення криволінійного чотирикутника на параметричний прямокутник**

Розглянемо алгоритм побудови чисельного конформного відображення фрагмента області  $G_z$  повного та неповного насичення на параметричний прямокутник  $G_\zeta$  (рис. 3.4 а, б).

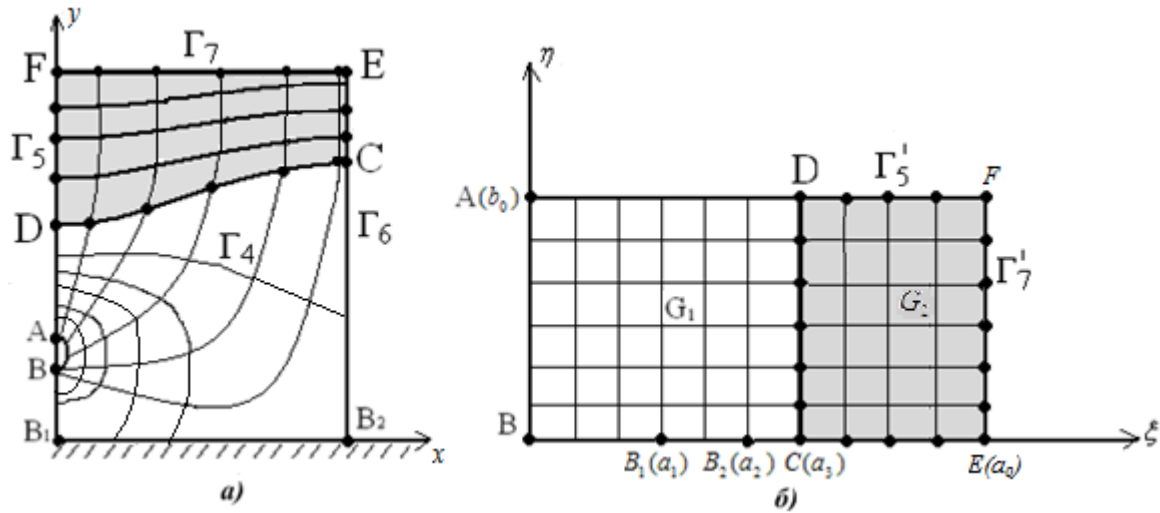


Рис. 3.4. Чисельне конформне відображення виділеного фрагмента області повного та неповного насичення  $G_z$  (а) на параметричний прямокутник  $G_\zeta$  (б)

Для чисельного розв'язування задачі використано метод скінченних різниць [87, 163, 164, 166-168] з застосуванням чисельних конформних відображень в оберненій постановці [29, 41, 42, 86, 108, 155].

У зв'язку з цим відобразимо складену область (рис. 3.4.а) на параметричний прямокутник (рис. 3.4.б). Відображувана область (рис. 3.4 а) складається з двох криволінійних чотирикутників  $ABCD$  та  $CDFE$  зі спільною невідомою межею (кривою депресії)  $CD$ , яка знаходиться в процесі розв'язування задачі.

Під криволінійним чотирикутником тут розуміється однозв'язна область з чотирма відміченими на її границі точками, які при конформному відображенні цієї області на параметричний прямокутник стають його вершинами.

При прямому конформному відображенні фізичної області  $G_z$  виділеного фрагмента на область  $G_\zeta$  зв'язані умовами Коші-Рімана [41, 42, 68]



$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = -\frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad (x, y) \in G_z.$$

Будемо шукати обернене конформне відображення параметричного прямокутника  $G_\zeta$  на криволінійний чотирикутник  $G_z$ , яке задається функціями  $x = x(\xi, \eta)$ ,  $y = y(\xi, \eta)$ . Тоді задача побудови оберненого конформного відображення полягає в знаходженні пари спряжених гармонічних функцій  $x = x(\xi, \eta)$ ,  $y = y(\xi, \eta)$ , зв'язаних умовами Коші-Рімана

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\partial y}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial x}{\partial \eta} = -\frac{\partial y}{\partial \xi}, \quad (\xi, \eta) \in G_\zeta,$$

які на межах області  $G_\zeta$  на кривій депресії  $CD$  задовольняють наступним граничним умовам:

$$AB: x^2(0, \eta) + (y(0, \eta) - y_0)^2 = r^2, \quad 0 < \eta < b_0,$$

$$BB_1: x(\xi, 0) = 0, \quad 0 < \xi < a_1,$$

$$B_1B_2: y(\xi, 0) = 0, \quad a_1 \leq \xi \leq a_2,$$

$$B_2C: x(\xi, 0) = a, \quad a_2 < \xi \leq a_3,$$

$$CD: \xi = a_3, \quad (x, y) \in CD,$$

$$CE: x(\xi, 0) = a_4, \quad a_3 < \xi \leq a_0,$$

$$EF: y(a_0, \eta) = b, \quad 0 < \eta \leq b_0,$$

$$FD: x(\xi, b_0) = 0, \quad a_3 < \xi \leq a_0.$$

Тут:  $a_0, a_1, a_2, a_3, b_0$  – довжини сторін криволінійної області, задані на параметричному прямокутнику.

Таке конформне відображення реалізовано з використанням алгоритму чисельного конформного відображення [29, 41, 42, 68, 85, 86, 108, 155]. В результаті чого встановлено взаємно однозначну відповідність між масивами точок  $(x_{ij}, y_{ij})$ ,  $(i = \overline{0, n}, j = \overline{0, m})$  фізичної області  $G_z$  і точок  $(\xi_i, \eta_j)$ ,  $(i = \overline{0, n}, j = \overline{0, m})$  параметричного прямокутника.

Нехай потрібно відобразити конформну чотирикутну область  $G_z$  площини  $(x, y)$  на параметричний прямокутник  $G_\zeta$  площини  $(\xi, \eta)$ . Позначимо верхню і нижню сторони криволінійного чотирикутника  $G_z$  через  $\Gamma_z^1$  і  $\Gamma_z^2$ , ліву і праву – через  $\Gamma_z^3$ ,  $\Gamma_z^4$  (рис. 3.5). Відповідні сторони параметричного прямокутника  $G_\zeta$  позначимо відповідно через  $\Gamma_\xi^1 - \Gamma_\xi^4$  (рис. 3.6.) [41, 42, 68].

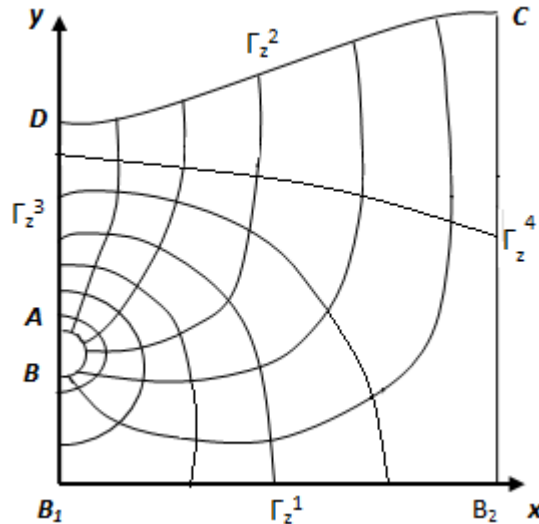


Рис. 3.5. Конформне відображення криволінійного чотирикутника  $G_z$

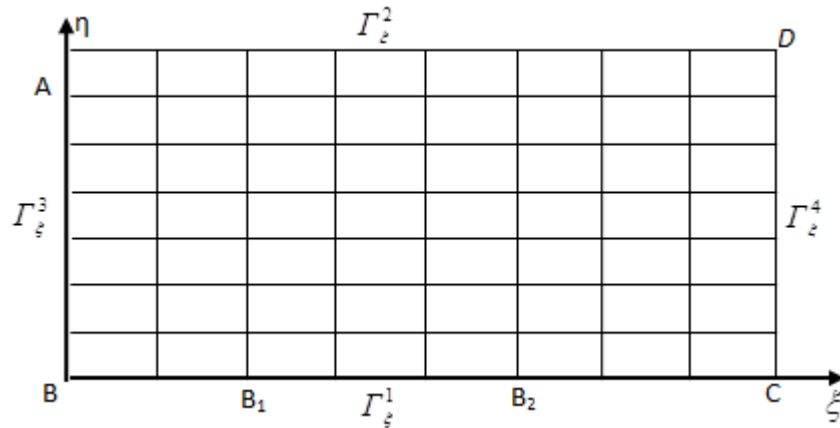


Рис. 3.6. Параметричний прямокутник  $G_\zeta$

Як відомо, чотирикутник  $G_z$  можна конформно відобразити на параметричний прямокутник  $G_\zeta = \{0 \leq \xi \leq a, 0 \leq \eta \leq b\}$  з відповідним співвідношенням сторін  $M = a/b$ , який називається модулем прямокутника,

так, щоб при цьому чотирьом фіксованим точкам  $A_z, B_z, C_z, D_z$  області  $G_z$  відповідали вершини  $A_\xi, B_\xi, C_\xi, D_\xi$  прямокутника  $G_\xi$ . При цьому відображенні встановлюється взаємно однозначна відповідність між граничними точками прямокутника  $G_\xi$  і області  $G_z$ , а також між внутрішніми точками цих областей [41, 42, 44].

Нехай це відображення реалізується аналітичною функцією  $\xi(z) = \xi(x, y) + i \cdot \eta(x, y)$ . Будемо шукати обернене конформне відображення параметричного прямокутника  $G_\xi$  площини  $(\xi, \eta)$  на область  $G_z$  площини  $(x, y)$ , яке реалізується функцією  $z(\xi) = x(\xi, \eta) + i \cdot y(\xi, \eta)$ . В подальшому будемо проводити чисельний розрахунок шуканого відображення [29, 41, 42, 86, 108, 155].

Задача чисельного розрахунку конформного відображення параметричного прямокутника  $G_\xi$  на криволінійний чотирикутник  $G_z$  зводиться до обчислення [41, 42]:

- 1) модуля  $M$  області  $G_z$ ;
- 2) координат внутрішніх вузлів  $x(\xi_i, \eta_j), y(\xi_i, \eta_j)$ ,  $(i = \overline{1, n-1}, j = \overline{1, m-1})$  різницевої сітки;
- 3) координат „плаваючих” вузлів границі  $\Gamma_z$  області  $G_z$ .

Границя  $\Gamma$  області  $G_z$  складається з чотирьох кусково-гладких жорданових кривих, заданих рівняннями

$$g_i(x, y) = 0, (x, y) \in \Gamma_z^i, i = \overline{1, 4}.$$

Стиковані кінці вказаних кривих дадуть чотири фіксовані точки  $A_z, B_z, C_z, D_z$ . Для розв’язання задачі в криволінійному чотирикутнику потрібно так визначити відношення  $a/b$  сторін параметричного прямокутника  $G_\xi$ , щоб існувало потрібне відображення з відповідністю вершин прямокутника точкам  $A_z, B_z, C_z, D_z$ .

В наведеній постановці для криволінійного чотирикутника вузли передбачаються „плаваючими” по всьому контуру границі області  $G_z$ . Модуль області визначений постановкою задачі, але невідомий і шукається в процесі побудови відображення. Таким чином, постановка даної задачі зводиться до побудови конформної різницевої сітки в будь-якій скінченій однозв’язній області  $G_z$ , обмеженій кусково-гладкою жордановою кривою  $\Gamma$ , яка розділена на чотири частини довільним чином. В даному випадку одна з меж параметричного прямокутника розбивається на три кусково-гладких кривих  $BB_1$ ,  $B_1B_2$ ,  $B_2C$ .

При належному початковому виборі модуля прямокутника  $G_z$  розрахунок конформного відображення зводиться до розв’язку системи  $2(n+1)(m+1) - 8$  рівнянь, з яких  $2(n-1)(m-1)$  лінійні, а решта – нелінійні. Порядок цієї системи рівнянь змінюється у зв’язку з уточненням модуля області  $G_z$  шляхом вибору  $n$  і  $m$  при кожному новому перерахунку різницевої сітки відображення. Тому розв’язування цієї системи проведено в динаміці побудови самого конформного відображення.

Нижче наведені кроки алгоритму побудови чисельного конформного відображення [41, 42, 44].

#### 1. Уточнення координат внутрішніх вузлів сітки.

Вибравши деякі  $n$  і  $m$ , отримано систему з  $2(n+1)(m+1) - 8$  рівнянь для визначення координат внутрішніх і „плаваючих” вузлів. Зафіксувавши на границі області  $G_z$  деякі положення „плаваючих” вузлів, визначено для них початкові наближення  $x_{i0}^{(0)}$ ,  $y_{i0}^{(0)}$ ,  $x_{im}^{(0)}$ ,  $y_{im}^{(0)}$ ,  $x_{0j}^{(0)}$ ,  $y_{0j}^{(0)}$ ,  $x_{nj}^{(0)}$ ,  $y_{nj}^{(0)}$ ,  $i = \overline{1, n-1}$ ,  $j = \overline{1, m-1}$ .

Початкові наближення  $x_{ij}^{(0)}$ ,  $y_{ij}^{(0)}$ ,  $i = \overline{1, n-1}$ ,  $j = \overline{1, m-1}$  вибрано на основі принципу максимуму як середнє арифметичне чотирьох граничних значень

$$x_{ij}^{(0)} = \frac{1}{4}(x_{i0}^{(0)} + x_{im}^{(0)} + x_{0j}^{(0)} + x_{nj}^{(0)}),$$

$$y_{ij}^{(0)} = \frac{1}{4}(y_{i0}^{(0)} + y_{im}^{(0)} + y_{0j}^{(0)} + y_{nj}^{(0)}),$$

та послідовні наближення  $x_{ij}^{(k)}$ ,  $y_{ij}^{(k)}$ ,  $i = \overline{1, n-1}$ ,  $j = \overline{1, m-1}$ ,  $k$  – номер ітерацій.

Уточнення координат внутрішніх вузлів здійснено ітераційним методом верхньої релаксації.

Ітераційний процес закінчуємо у випадку виконання умов

$$\max |x_{ij}^{(k+1)} - x_{ij}^{(k)}| < \varepsilon, \quad \max |y_{ij}^{(k+1)} - y_{ij}^{(k)}| < \varepsilon$$

для двох послідовних наближень  $(x_{ij}^{(k)}, y_{ij}^{(k)})$ ,  $(x_{ij}^{(k+1)}, y_{ij}^{(k+1)})$ ,  $i = \overline{1, n-1}$ ,  $j = \overline{1, m-1}$ .

## 2. Уточнення координат „плаваючих” вузлів.

Координати „плаваючих” вузлів уточнюємо шляхом розв’язування відповідної системи нелінійних рівнянь, яка містить  $2(n+m) - 4$  автономних підсистем двох нелінійних рівнянь.

Уточнення координат „плаваючих” вузлів проводиться на основі умов Коші-Рімана з використанням «Г-шаблонів» (або шаблонів «кут»), тоді  $2(n+m) - 4$  координат цих вузлів знаходимо із такої ж кількості автономних нелінійних рівнянь. Ще стільки ж значень координат одержуємо із різницевих співвідношень Коші-Рімана. Відмітимо, що при визначенні координат „плаваючих” вузлів «Г-шаблон» можна вибрати так, що отримується нелінійна система рівнянь, яка не розбивається на автономні підсистеми нелінійних рівнянь.

Уточнення координат „плаваючих” вузлів проводимо до тих пір, поки

$$\max |x_{ij}^{(k+1)} - x_{ij}^{(k)}| < \delta, \quad \forall x_{ij} \in \Gamma,$$

$$\max |y_{ij}^{(k+1)} - y_{ij}^{(k)}| < \delta, \quad \forall y_{ij} \in \Gamma$$

або середньоквадратичне відхилення на всій границі не перевищать заданої точності.

$$S = \frac{1}{2(n+m)-4} \left( \sum_{i=1}^{n-2} ((x_{i0}^{(k+1)} - x_{i0}^{(k)})^2 + (x_{im}^{(k+1)} - x_{im}^{(k)})^2 + (y_{i0}^{(k+1)} - y_{i0}^{(k)})^2 + (y_{im}^{(k+1)} - y_{im}^{(k)})^2) + \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^{m-1} ((x_{0j}^{(k+1)} - x_{0j}^{(k)})^2 + (x_{nj}^{(k+1)} - x_{nj}^{(k)})^2 + (y_{0j}^{(k+1)} - y_{0j}^{(k)})^2 + (y_{nj}^{(k+1)} - y_{nj}^{(k)})^2) \right).$$

В протилежному випадку – знову проводимо уточнення внутрішніх вузлів сітки, але з новими граничними умовами, які отримані уточненням координат „плаваючих” вузлів.

$$x_{i0} = x_{i0}^{(k+1)}, \quad x_{im} = x_{im}^{(k+1)}, \quad x_{0j} = x_{0j}^{(k+1)}, \quad x_{nj} = x_{nj}^{(k+1)}, \\ y_{i0} = y_{i0}^{(k+1)}, \quad y_{im} = y_{im}^{(k+1)}, \quad y_{0j} = y_{0j}^{(k+1)}, \quad y_{nj} = y_{nj}^{(k+1)}.$$

Таким чином, при вибраних  $n$  і  $m$  визначено координати  $x_{ij}$ ,  $y_{ij}$  як внутрішніх, так і „плаваючих” вузлів.

Варто зауважити, що в даній задачі маємо невідому верхню межу. Уточнення координат „плаваючих” вузлів на цій межі проводимо згідно умов Коші-Рімана (3.8) для  $y$  та з умов ортогональності для  $x$ .

Замінивши для „плаваючих” вузлів умови на межах різницевиими аналогами, матимемо

$$x_{mi} = x_{m-2} + 4 \frac{(x_{m-1,i} - x_{m-1,i+1})(y_{m-1,i} - y_{m-1,i+1})}{y_{m-2,i} - y_{m,i}}, \quad i = \overline{0, n-1}, \quad (3.42)$$

$$y_{mi} = y_{m-i} - \frac{3}{2}(x_{m-1,i+1} - x_{m-1,i}), \quad i = \overline{0, n-1}, \quad (3.43)$$

$$x_{in} = 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad (3.44)$$

$$y_{in} = \frac{1}{3}(x_{i-1,n} - x_{i,n}) + (4y_{i,n-1} - y_{i,n-2}), \quad i = \overline{1, m}. \quad (3.45)$$

Значення для „плаваючих” вузлів на  $\Gamma_1$  розбивається на три частини

$$x_{m-i,0} = l, \quad i = \overline{1, m - (m_1 + m_2)}, \quad (3.46)$$

$$y_{m-i,0} = \frac{1}{3} \left( x_{m-(i+1),0} - x_{m-(i-1),0} + 4y_{m-i,1} - y_{m-i,2} \right), \quad i = \overline{1, m - (m_1 + m_2)}, \quad (3.47)$$

$$x_{m-i,0} = 0, \quad i = \overline{m-m_1, m-1}, \quad (3.48)$$

$$y_{m-i,0} = \frac{1}{3} \left( x_{m-(i+1),0} - x_{m-(i-1),0} + 4y_{m-i,1} - y_{m-i,2} \right), \quad i = \overline{m-m_1, m-1}, \quad (3.49)$$

$$x_{m-i,0} = \frac{1}{3} \left( y_{m-(i-1),0} - y_{m-(i+1),0} + 4x_{m-i,1} - x_{m-i,2} \right), \quad i = \overline{m-(m_1-m_2), m-m_1-1}, \quad (3.50)$$

$$y_{m-i,0} = 0, \quad i = \overline{m-(m_1-m_2), m-m_1-1}. \quad (3.51)$$

Уточнення значень „плаваючих” вузлів на межі  $\Gamma_3$  не проводимо, оскільки це є дрена  $AB$ , а її положення вважаємо незмінним.

### 3. Уточнення модуля області $G_z$ .

Отримана описаним вище методом різницева сітка може не бути ортогональною, і тим більше не конформною. Для того, щоб вона була конформною, необхідно для існування конформного відображення прямокутника  $G_\zeta$  на криволінійний чотирикутник  $G_z$  забезпечити правильний вибір модуль прямокутника  $G_\zeta$ , який є інваріантним модулю області  $G_z$ . Іншими словами, необхідно знайти таку кількість поділів  $n$  і  $m$  відповідно по  $O_\xi$  і  $O_\eta$ , щоб шукане відображення було конформним, тобто різницева сітка повинна бути конформною.

Відмітимо деякі основні властивості ортогональних конформних сіток [41, 42, 155]:

- 1) сітка є ортогональною і конформною;
- 2) клітинки сітки повинні бути подібні квадратам;
- 3) поблизу границі ізоляції сітки близькі по формі до контурів області.

Після кожного окремого розрахунку сітки проведено її перевірку на конформність. Для цього визначено через  $\Delta S$ ,  $\Delta l$  криволінійні довжини кліток сітки відповідно по напрямках осей  $O_\xi$  і  $O_\eta$ , через  $d_1, d_2$  – діагоналі кліток. Тоді на  $k$ -му кроці маємо

$$\Delta S = \sqrt{(x_{ij}^{(k)} - x_{ij+1}^{(k)})^2 + (y_{ij}^{(k)} - y_{ij+1}^{(k)})^2}, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad j = \overline{1, m-1}, \quad (3.52)$$

$$\Delta l = \sqrt{(x_{ij}^{(k)} - x_{i+1,j}^{(k)})^2 + (y_{ij}^{(k)} - y_{i+1,j}^{(k)})^2}, \quad i = \overline{1, n-2}, \quad j = \overline{1, m-2}, \quad (3.53)$$

$$\Delta d_1^{(k)} = \sqrt{(x_{ij}^{(k)} - x_{i+1,j+1}^{(k)})^2 + (y_{ij}^{(k)} - y_{i+1,j+1}^{(k)})^2}, \quad i = \overline{1, n-2}, \quad j = \overline{1, m-2}, \quad (3.54)$$

$$\Delta d_2^{(k)} = \sqrt{(x_{i+1,j}^{(k)} - x_{i,j+1}^{(k)})^2 + (y_{i+1,j}^{(k)} - y_{i,j+1}^{(k)})^2}, \quad i = \overline{1, n-2}, \quad j = \overline{1, m-2}. \quad (3.55)$$

Для того, щоб різницева сітка була конформною, тобто при чисельному відображенні подібні комірки, наприклад, квадратики, переходили в подібні, необхідно, щоб із заданою точністю виконувались співвідношення.

$$\left| \left( \frac{\Delta S}{\Delta l} \right)_{cp}^{(k)} - 1 \right| < \delta_0, \quad \left| \left( \frac{d_1}{d_2} \right)_{cp}^{(k)} - 1 \right| < \delta_0, \quad (3.56)$$

тобто,

$$\rho_1 = \left( \frac{\Delta S}{\Delta l} \right)_{cp}^{(k)} \cong 1, \quad \rho_2 = \left( \frac{d_1}{d_2} \right)_{cp}^{(k)} \cong 1.$$

Тут  $\left( \frac{\Delta S}{\Delta l} \right)_{cp}^{(k)}$ ,  $\left( \frac{d_1}{d_2} \right)_{cp}^{(k)}$  означають середні значення відношень  $\frac{\Delta S^{(k)}}{\Delta l^{(k)}}$ ,  $\frac{d_1^{(k)}}{d_2^{(k)}}$  по всій сітці,  $\delta_0$  – точність обчислень.

Якщо ж умови конформності сітки не виконані, тоді вибирають нові  $n$  і  $m$ .

При чисельній реалізації даного методу на комп'ютері, можна спочатку шукати модуль  $M$  прямокутника, тобто числа  $n$  і  $m$ , з деякою невеликою точністю  $\delta$ , а потім збільшувати число поділів по  $O_\xi$  і  $O_\eta$  відповідно по  $k$  – разів, так як  $M = a/b = (k \cdot a)/(k \cdot b)$ . Похибка апроксимації при цьому зменшується. Однак це справедливо для  $n$  і  $m$ , що не перевищують деяких великих значень, внаслідок обмеженості розглядуваної сітки.

Таким чином, алгоритм побудови чисельного конформного відображення параметричного прямокутника на криволінійний чотирикутник передбачає виконання наступних кроків [41, 42].

1. Введення вхідних даних.
2. Задання границі області  $G$ .
3. Вибір початкових  $n$  і  $m$ .



4. Обчислення початкових наближень значень координат „плаваючих” вузлів на границі  $\Gamma$  області  $G$ .
5. Вибір початкових наближень  $x_{ij}^{(0)}$ ,  $y_{ij}^{(0)}$  координат внутрішніх вузлів сітки.
6. Обчислення координат внутрішніх вузлів  $x_{ij}$ ,  $y_{ij}$  різницевої сітки.
7. Уточнення координат „плаваючих” вузлів границі  $\Gamma$ .
8. Якщо відхилення  $S$  на границі області перевищує задану точність  $\delta$ , по повернутись до п. 6 даного алгоритму.
9. Обчислення  $\rho_1 = \left( \frac{\Delta S}{\Delta l} \right)_{cp}$ ,  $\rho_2 = \left( \frac{d_1}{d_2} \right)_{cp}$  по всій сітці.
10. Якщо  $|\rho_1 - 1| < \delta$  і  $|\rho_2 - 1| < \delta$ , тоді повернутись до п. 4, інакше – вибір нових  $n$  і  $m$ .
11. Вивід координат  $x_{ij}$ ,  $y_{ij}$ ,  $i = \overline{0, n}$ ,  $j = \overline{0, m}$ , отриманої різницевої сітки.

Розрахувавши значення координат  $x_{ij}$ ,  $y_{ij}$ ,  $i = \overline{0, n}$ ,  $j = \overline{0, m}$  отриманої різницевої сітки, ми можемо розрахувати напори у всіх вузлових точках. Для цього задаємо початкові значення напорів на межах  $\Gamma_3, \Gamma_4$  [68, 87, 166].

$$h_{0,i} = H_1, \quad i = \overline{0, n}, \quad (3.57)$$

$$h_{m,i} = y_{m,i}, \quad i = \overline{0, n}. \quad (3.58)$$

Після цього за лінійним законом задаємо значення напорів у всіх інших точках сітки.

$$h_{i,j} = \frac{i}{m} (h_{0,j} + h_{m,j}) \quad i = \overline{1, m-1}, \quad j = \overline{0, n}. \quad (3.59)$$

Апроксимувавши різницеvими аналогами умови, уточнимо значення потоків на межах.

$$h_{i,n} = - \frac{(h_{i+1,n} - h_{i-1,n})(y_{i,n} - y_{i,n-1})}{(y_{i+1,n} - y_{i-1,n})} + h_{i,n-1}, \quad i = \overline{1, m-1}, \quad (3.60)$$

$$h_{i,0} = -\frac{(h_{i+1,0} - h_{i-1,0})(y_{i,0} - y_{i,1})}{(y_{i+1,0} - y_{i-1,0})} + h_{i,1}, \quad i = \overline{1, m_1}, \quad (3.61)$$

$$h_{i,0} = -\frac{(h_{i+1,0} - h_{i-1,0})(x_{i,0} - x_{i,1})}{(x_{i+1,0} - x_{i-1,0})} + h_{i,1}, \quad i = \overline{m_1 + 1, m_1 + m_2 - 1}, \quad (3.62)$$

$$h_{i,0} = -\frac{(h_{i+1,0} - h_{i-1,0})(y_{i,0} - y_{i,1})}{(y_{i+1,0} - y_{i-1,0})} + h_{i,1}, \quad i = \overline{m_1 + m_2, m - 1}. \quad (3.63)$$

Отриману задачу розв'язано ітераційним методом Гауса-Зейделя [99, 131, 132, 146, 162, 168, 183], який модифіковано на випадок розв'язання нелінійної крайової задачі.

### 3.1.2.5 Обчислювальний алгоритм розв'язування задачі фільтрації

Згідно закону Дарсі швидкість фільтрації рідини визначається за формулою [4, 11, 25, 79, 153, 171, 196]

$$\vec{V} = -k \cdot \text{grad } h,$$

де  $k$  - коефіцієнт фільтрації сольового розчину.

Якщо врахувати, що  $\varphi = -k_0 \cdot h$ , то рівняння матиме вигляд

$$\vec{V} = \frac{k}{k_0} \text{grad } \varphi,$$

де  $k_0 = k|_{t=0} = k(x, y, 0)$  - значення коефіцієнта фільтрації в початковий момент часу.

Компоненти швидкості фільтрації згідно формул (3.15) мають вигляд

$$V_x = -k(c_1) \frac{\partial h}{\partial x} = -k(c_1) \left( \frac{\partial h}{\partial \xi} \cdot \frac{1}{I_1} \cdot y_\eta + \frac{\partial h}{\partial \eta} \cdot \left( -\frac{1}{I_1} \right) \cdot y_\xi \right) = -\frac{k(c_1)}{I_1} \cdot \left( \frac{\partial h}{\partial \xi} \cdot y_\eta - \frac{\partial h}{\partial \eta} \cdot y_\xi \right),$$

$$V_y = -k(c_1) \frac{\partial h}{\partial y} = -k(c_1) \left( \frac{\partial h}{\partial \xi} \cdot \left( -\frac{1}{I_1} \right) \cdot x_\eta + \frac{\partial h}{\partial \eta} \cdot \frac{1}{I_1} \cdot x_\xi \right) = -\frac{k(c_1)}{I_1} \cdot \left( -\frac{\partial h}{\partial \xi} \cdot x_\eta + \frac{\partial h}{\partial \eta} \cdot x_\xi \right)$$

або

$$V_x = \frac{k(c_1)}{k_0 \cdot I_1} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \cdot y_\eta - \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \cdot y_\xi \right), \quad V_y = \frac{k(c_1)}{k_0 \cdot I_1} \left( -\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \cdot x_\eta + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \cdot x_\xi \right).$$

Квадрат швидкості фільтрації солевих розчинів обчислюється за формулою

$$V^2 = V_y^2 + V_x^2.$$

Отриману задачу фільтрації в змінних  $\xi, \eta$  області параметричного прямокутника, розв'яжемо методом Гауса-Зейделя на основі (3.28) [99, 131, 132, 146, 162, 168, 183].

$$h_{i,j}^{(k+1)} = P_1 h_{i-1,j}^{(k+1)} + P_2 h_{i+1,j}^{(k)} + P_3 h_{i,j-1}^{(k+1)} + P_4 h_{i,j+1}^{(k)}, \quad i = \overline{1, m-1}, \quad j = \overline{1, n}, \quad (3.64)$$

$$\text{де } P_1 = \frac{\overline{A_1} - \overline{D_1}}{h_1^2 - 2h_1}, \quad P_2 = \frac{\overline{A_1} + \overline{D_1}}{h_1^2 + 2h_1}, \quad P_3 = \frac{\overline{A_1} - \overline{E_1}}{h_2^2 - 2h_2}, \quad P_4 = \frac{\overline{A_1} + \overline{E_1}}{h_2^2 + 2h_2}, \quad P_0 = 2\overline{A_1} \left( \frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2} \right).$$

Обчислення проводяться до тих пір, поки не буде виконуватися задана точність обчислень  $\varepsilon$  між двома сусідніми ітераціями:

$$|h_{i,j}^{(k+1)} - h_{i,j}^{(k)}| \leq \varepsilon, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad j = \overline{1, m-1}.$$

Компоненти швидкості фільтрації знаходяться згідно формул

$$V_{x i, j} = -\frac{k(c_1)}{I_1} \left( \frac{(h_{i+1,j} - h_{i-1,j})(y_{i,j+1} - y_{i,j-1})}{4h_1 h_2} - \frac{(h_{i,j+1} - h_{i,j-1})(y_{i+1,j} - y_{i-1,j})}{4h_1 h_2} \right),$$

$$V_{y i, j} = -\frac{k(c_1)}{I_1} \left( \frac{(h_{i,j} - h_{i-1,j})(x_{i,j} - x_{i,j-1})}{h_1 h_2} - \frac{(h_{i,j} - h_{i,j-1})(x_{i,j} - x_{i,j-1})}{h_1 h_2} \right),$$

$$\text{де } I_1 = \frac{1}{4h_1 h_2} [(x_{i+1,j} - x_{i-1,j})(y_{i,j+1} - y_{i,j-1}) - (x_{i,j+1} - x_{i,j-1})(y_{i+1,j} - y_{i-1,j})].$$

Обчислення значень швидкості фільтрації на межах області повного насичення здійснимо за наступними формулами:

$$V_{x i, 0} = -\frac{1}{3}(V_{x i, 2} + 4V_{x i, 1}), \quad V_{x i, n} = -\frac{1}{3}(-V_{x i, n-2} + 4V_{x i, n-1}),$$

$$V_{x 0, j} = \frac{1}{3}(-V_{x 2, j} + 4V_{x 1, j}), \quad V_{x m, j} = \frac{1}{3}(-V_{x m-2, j} + 4V_{x m-1, j}),$$

$$V_{y i, 0} = \frac{1}{3}(-V_{y i, 2} + 4V_{y i, 1}), \quad V_{y i, n} = \frac{1}{3}(-V_{y i, n-2} + 4V_{y i, n-1}),$$

$$V_{y 0, j} = \frac{1}{3}(-V_{y 2, j} + 4V_{y 1, j}), \quad V_{y m, j} = \frac{1}{3}(-V_{y m-2, j} + 4V_{y m-1, j}), \quad i = \overline{1, m-1}, \quad j = \overline{0, n}.$$

### 3.1.3 Математичне моделювання процесу перенесення солей у насиченому ґрунтовому середовищі

#### 3.1.3.1 Постановка задачі перенесення солей

Розглядається задача перенесення солей при фільтрації ґрунтових вод у насиченому ґрунтовому середовищі  $G_1$  при наявній вільній поверхні  $CD$  (кривій депресії). Розглядувана область містить дренаж  $AB$ , через яку відбувається відведення сольових розчинів з ґрунтового масиву (рис. 3.7) [38, 68].

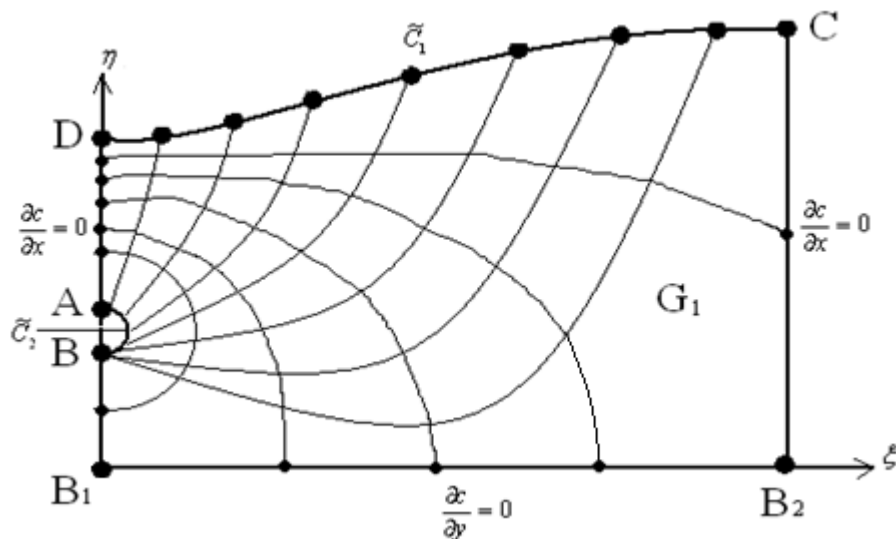


Рис. 3.7. Область повного насичення ґрунтового середовища

Проведемо дослідження процесу розподілу поля концентрації сольового розчину в області  $G_1$ , встановимо положення вільної поверхні та дослідимо її зміну під дією фільтраційного потоку сольових розчинів.

#### 3.1.3.2 Математична модель задачі у фізичній області

Математична модель задачі перенесення солей при фільтрації ґрунтових вод в області повного насичення  $G_1$  має вигляд [38, 67, 68, 74, 75, 79, 110]

$$\frac{\partial \left( D_1(c_1) \frac{\partial c_1}{\partial x} \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left( D_1(c_1) \frac{\partial c_1}{\partial y} \right)}{\partial y} - v_1 \frac{\partial c_1}{\partial x} - v_2 \frac{\partial c_1}{\partial y} - \gamma(c - C^*) = \sigma \frac{\partial c_1}{\partial t}, \quad (3.65)$$

$$\vec{v} = -k(c_1) \text{grad } h, \quad \text{div } \vec{v} = 0. \quad (3.66)$$

Рівняння масоперенесення (3.65) доповнюється крайовими умовами для концентрації сольових розчинів  $c_1(x, y, t)$ :

$$c_1(x, y, 0) = \tilde{C}_0^1(x, y), \quad \frac{\partial c_1}{\partial n} \Big|_{AD \cup BB_1 \cup B_2C \cup B_1B_2} = 0, \quad c_1 \Big|_{DC} = \tilde{C}_1, \quad c_1 \Big|_{AB} = \tilde{C}_2. \quad (3.67)$$

Рівняння фільтрації сольових розчинів (3.66) до горизонтального дренажу доповнюється такими граничними умовами:

$$h \Big|_{AB} = h \Big|_{r=r_1} = H_1, \quad \frac{\partial h}{\partial n} \Big|_{AD} = \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial n} \Big|_{BB_1B_2C} = \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{x=l} = \frac{\partial h}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0. \quad (3.68)$$

На вільній поверхні  $CD$  задані умови спряження для напорів та концентрації сольового розчину вигляду [67, 68, 82]

$$h = y, \quad \frac{dh}{dn} = \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial x} = 0, \quad (3.69)$$

$$c_1(x, y, t) = c_2(x, y, t), \quad D_1(c_1) \frac{\partial c_1}{\partial n} - v_1 c_1 = D_2(c_2) \frac{\partial c_2}{\partial n} - v_2 c_2.$$

Після перетворення (3.65), (3.66) отримаємо

$$D_1(c_1) \left( \frac{\partial^2 c_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_1}{\partial y^2} \right) - v_1 \frac{\partial c_1}{\partial x} - v_2 \frac{\partial c_1}{\partial y} - \gamma(c - C_*) = \sigma \frac{\partial c_1}{\partial t}, \quad (3.70)$$

$$k(c_1) \left( \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial k(c_1)}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial k(c_1)}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial y} = 0, \quad (3.71)$$

де  $v_1 = v_x(c_1) - \frac{\partial D_1(c_1)}{\partial x}$ ,  $v_2 = v_y(c_1) - \frac{\partial D_1(c_1)}{\partial y}$ ,  $v_x = -k(c_1) \frac{\partial h}{\partial x}$ ,  $v_y = -k(c_1) \frac{\partial h}{\partial y}$ .

Тут  $D_1(c_1)$  – коефіцієнт конвективної дифузії;  $c_1(x, y, t)$  – концентрація сольового розчину,  $v_1, v_2$  – компоненти швидкості фільтрації, які знаходяться з розв'язку задачі фільтрації;  $C^*$  – концентрація граничного насичення сольового розчину  $\gamma$  – коефіцієнт інтенсивності масообміну;  $\sigma$  – пористість ґрунту.

### 3.1.3.3 Математична модель задачі у змінних $\xi, \eta$

Запишемо рівняння перенесення солей (3.65) у змінних  $\xi, \eta$ .

Величини  $\xi_x, \xi_y, \eta_x, \eta_y$ , які визначають метрику відображення, виражаються через похідні  $x_\xi, x_\eta, y_\xi, y_\eta$  за формулами (3.14), (3.15) [29, 37, 41, 42, 44, 85, 86, 105, 108, 155].

Перші та другі похідні рівняння (3.65) перетворюються у змінні  $\xi, \eta$  наступним чином:

$$\begin{aligned}\frac{\partial c}{\partial x} &= \frac{1}{I_1} \left[ \frac{\partial c}{\partial \xi} y_\eta - \frac{\partial c}{\partial \eta} y_\xi \right], & \frac{\partial c}{\partial y} &= \frac{1}{I_1} \left[ -\frac{\partial c}{\partial \xi} x_\eta + \frac{\partial c}{\partial \eta} x_\xi \right], \\ \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 c}{\partial \xi^2} \xi_x^2 + 2 \frac{\partial^2 c}{\partial \xi \partial \eta} \xi_x \eta_x + \frac{\partial c}{\partial \xi} \xi_{xx} + \frac{\partial c}{\partial \eta} \eta_{xx} + \frac{\partial^2 c}{\partial \eta^2} \eta_x^2, \\ \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 c}{\partial \xi^2} \xi_y^2 + 2 \frac{\partial^2 c}{\partial \xi \partial \eta} \xi_y \eta_y + \frac{\partial c}{\partial \xi} \xi_{yy} + \frac{\partial c}{\partial \eta} \eta_{yy} + \frac{\partial^2 c}{\partial \eta^2} \eta_y^2,\end{aligned}$$

де  $\xi_x, \eta_x, \xi_y, \eta_y$ , виражаються через функції  $x(\xi, \eta)$ ,  $y(\xi, \eta)$  за формулами (3.14), (3.15), похідні  $\xi_{xx}, \xi_{yy}, \eta_{xx}, \eta_{yy}$  мають вигляд (3.20)-(3.25).

Тоді рівняння рівняння (3.65) згідно (3.67) в змінних  $\xi, \eta$  має вигляд

$$\begin{aligned}D_1(c_1) \left[ \frac{\partial^2 c_1}{\partial \xi^2} \xi_x^2 + 2 \frac{\partial^2 c_1}{\partial \xi \partial \eta} \xi_x \eta_x + \frac{\partial c_1}{\partial \xi} \xi_{xx} + \frac{\partial c_1}{\partial \eta} \eta_{xx} + \frac{\partial^2 c_1}{\partial \eta^2} \eta_x^2 + \frac{\partial^2 c_1}{\partial \xi^2} \xi_y^2 + 2 \frac{\partial^2 c_1}{\partial \xi \partial \eta} \xi_y \eta_y + \right. \\ \left. + \frac{\partial c_1}{\partial \xi} \xi_{yy} + \frac{\partial c_1}{\partial \eta} \eta_{yy} + \frac{\partial^2 c_1}{\partial \eta^2} \eta_y^2 \right] - v_x \frac{1}{I_1} \left[ \frac{\partial c_1}{\partial \xi} y_\eta - \frac{\partial c_1}{\partial \eta} y_\xi \right] - v_y \frac{1}{I_1} \left[ -\frac{\partial c_1}{\partial \xi} x_\eta + \frac{\partial c_1}{\partial \eta} x_\xi \right] - \\ - \gamma(c - C^*) = \sigma \frac{\partial c_1}{\partial t}.\end{aligned}\quad (3.72)$$

Звівши подібні члени в (3.72), отримаємо

$$\bar{A}_2 \frac{\partial^2 c_1}{\partial \xi^2} + \bar{B}_2 \frac{\partial^2 c_1}{\partial \xi \partial \eta} + \bar{C}_2 \frac{\partial^2 c_1}{\partial \eta^2} + \bar{D}_2 \frac{\partial c_1}{\partial \xi} + \bar{E}_2 \frac{\partial c_1}{\partial \eta} + \bar{G}_2 = \sigma \frac{\partial c_1}{\partial t}, \quad (3.73)$$

де коефіцієнти  $\bar{A}_2, \bar{B}_2, \bar{C}_2, \bar{D}_2, \bar{E}_2, \bar{G}_2$ , мають вигляд

$$\begin{aligned}\bar{A}_2 &= \xi_x^2 D_1(c_1) + \xi_y^2 D_1(c_1) = D_1(c_1) [\xi_x^2 + \xi_y^2], \\ \bar{B}_2 &= 2D_1(c_1) \xi_x \eta_x + 2D_1(c_1) \xi_y \eta_y = 2D_1(c_1) [\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y],\end{aligned}$$

$$\bar{C}_2 = \eta_x^2 D_1(c_1) + \eta_y^2 D_1(c_1) = D_1(c_1)[\eta_x^2 + \eta_y^2], \quad \bar{D}_2 = D_1(c_1)[\xi_{xx} + \xi_{yy}] - \frac{v_x}{I_1} y_\eta + \frac{v_y}{I_1} x_\eta,$$

$$\bar{E}_2 = D_1(c_1)[\eta_{xx} + \eta_{yy}] + \frac{v_x}{I_1} y_\xi - \frac{v_y}{I_1} x_\xi, \quad \bar{G}_2 = -\gamma(c - C^*).$$

Коефіцієнти  $\bar{A}_2$  та  $\bar{C}_2$  перепишуться у спрощеному вигляді

$$\bar{A}_2 = D_1(c_1)[\xi_x^2 + \xi_y^2] = \frac{D_1(c_1)}{I_1^2}(x_\eta^2 + y_\eta^2) = \frac{D_1(c_1)I_1}{I_1^2} = \frac{D_1(c_1)}{I_1}.$$

Аналогічно  $\bar{C}_2 = \frac{D_1(c_1)}{I_1}$ . Отже,  $\bar{A}_2 = \bar{C}_2$ .

Згідно умови ортогональності лінії сітки її межах (3.9), коефіцієнт  $\bar{B}_2 = 0$ .

Враховуючи попередні рівності, рівняння (3.73) можна записати у вигляді

$$\bar{A}_2 \left( \frac{\partial^2 c_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 c_1}{\partial \eta^2} \right) + \bar{D}_2 \frac{\partial c_1}{\partial \xi} + \bar{E}_2 \frac{\partial c_1}{\partial \eta} + \bar{G}_2 = \sigma \frac{\partial c_1}{\partial t}$$

або

$$\left( \frac{\partial^2 c_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 c_1}{\partial \eta^2} \right) + \frac{\bar{D}_2}{\bar{A}_2} \frac{\partial c_1}{\partial \xi} + \frac{\bar{E}_2}{\bar{A}_2} \frac{\partial c_1}{\partial \eta} - \frac{\bar{G}_2}{\bar{A}_2} = \frac{\sigma}{\bar{A}_2} \frac{\partial c_1}{\partial t}. \quad (3.74)$$

### 3.1.3.4 Чисельний алгоритм розв'язування задачі

Розв'язок задачі (3.74) при відповідних крайових умовах знайдемо за локально-одновимірною схемою (ЛОС) О.А. Самарського [87, 163, 164, 166-168, 172], згідно якої вихідну крайову задачу представимо у вигляді двох крайових задач.

Крайова задача вздовж осі  $O\xi$  має вигляд

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 c_1}{\partial \xi^2} + \frac{\overline{D}_2}{A_2} \frac{\partial c_1}{\partial \xi} - \frac{0.5\overline{G}_2}{A_2} = \frac{0.5}{A_2} \sigma \frac{\partial c_1}{\partial t}, (\xi, \eta) \in G_\zeta, t > 0, \\ c_1(\xi, \eta, 0) = \tilde{C}_0(\xi, \eta), (\xi, \eta) \in G_\zeta, \\ c_1(0, \eta, t) = \frac{\partial c_1}{\partial \xi} \Big|_{BB_1} = 0, 0 < \eta \leq a_1, t > 0, \\ c_1(a, \eta, t) = \frac{\partial c_1}{\partial \xi} \Big|_{B_2C} = 0, a_2 < \eta \leq a_3, t > 0. \end{array} \right. \quad (3.75)$$

Вздовж осі  $O\eta$  маємо таку крайову задачу:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 c_1}{\partial \eta^2} + \frac{\overline{E}_2}{A_2} \frac{\partial c_1}{\partial \eta} - \frac{0.5\overline{G}_2}{A_2} = \frac{0.5}{A_2} \sigma \frac{\partial c_1}{\partial t}, (\xi, \eta) \in G_\zeta, t > 0, \\ c_1(\xi, \eta, 0) = \tilde{C}_0(\xi, \eta), (\xi, \eta) \in G_\zeta, \\ c_1(\xi, 0, t) = \frac{\partial c_1}{\partial n} \Big|_{B_1B_2} = 0, a_1 < \xi \leq a_2, t > 0, \\ c_1(\xi, b, t) = \frac{\partial c_1}{\partial n} \Big|_{CD} = \tilde{C}_1, \xi = a_3, t > 0. \end{array} \right. \quad (3.76)$$

Чисельний розв'язок крайових задач (3.75), (3.76) знайдемо за монотонною різницевою схемою [39, 40, 131, 132, 166-168, 188].

Монотонна різницева схема для задачі (3.75) має наступний вигляд:

$$\begin{aligned} \mu_1 \frac{C_{1i-1,j}^{k+\frac{1}{2}} - 2C_{1i,j}^{k+\frac{1}{2}} + C_{1i+1,j}^{k+\frac{1}{2}}}{h_1^2} + r_{1-}^2 \frac{C_{1i,j}^{k+\frac{1}{2}} - C_{1i-1,j}^{k+\frac{1}{2}}}{h_1} - \frac{0.5}{A_2} \gamma \left( C_{1i,j}^{k+\frac{1}{2}} - C_* \right) = \\ = \frac{0.5}{A_2} \sigma \frac{C_{1i,j}^{k+\frac{1}{2}} - C_{1i,j}^k}{0.5\tau}, \end{aligned} \quad (3.77)$$

$$C_{1i,j}^0 = \tilde{C}_{0i,j}^1, C_{10,j}^{k+1/2} = \tilde{C}_1, C_{1n,j}^{k+1/2} = C_{1n-1,j}^{k+1/2}, i = \overline{1, n-1}, j = \overline{1, m-1}, k = \overline{0, k_1},$$

$$\text{де } \mu_1 = \frac{1}{1 + 0.5h_1|r_1^2|} = \frac{1}{1 + \frac{h_1\overline{D}_2}{2A_2}}, \quad r_{1-}^2 = -\frac{\overline{D}_2}{A_2}, \quad i = \overline{1, n-1}, j = \overline{1, m-1}, k = \overline{0, k_1}.$$

Або

$$\frac{\mu_1}{h_1^2} C_{1i-1,j}^{k+\frac{1}{2}} - \frac{2\mu_1}{h_1^2} C_{1i,j}^{k+\frac{1}{2}} + \frac{\mu_1}{h_1^2} C_{1i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} + \frac{r_{1-}^2}{h_1} C_{1i,j}^{k+\frac{1}{2}} - \frac{r_{1-}^2}{h_1} C_{1i-1,j}^{k+\frac{1}{2}} - \frac{0.5}{A_2} \gamma \left( C_{1i,j}^{k+\frac{1}{2}} - C_* \right) -$$



$$-\frac{0.5\sigma}{A_2 0.5\tau} C_{li,j}^{k+\frac{1}{2}} = -\frac{0.5\sigma}{A_2 0.5\tau} C_{li,j}^k, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad j = \overline{1, m-1}, \quad k = \overline{0, k_1}.$$

Згрупувавши доданки в (3.77), отримаємо

$$\begin{aligned} C_{li-1,j}^{k+\frac{1}{2}} \left[ \frac{\mu_1}{h_1^2} - \frac{r_{1-}^2}{h_1} \right] + C_{li,j}^{k+\frac{1}{2}} \left[ -\frac{2\mu_1}{h_1^2} + \frac{r_{1-}^2}{h_1} - \frac{0.5\gamma}{A_2} - \frac{\sigma}{A_2\tau} \right] + C_{li+1,j}^{k+\frac{1}{2}} \left[ \frac{\mu_1}{h_1^2} \right] = \\ = -\frac{\sigma}{A_2\tau} C_{li,j}^k - 0.5\gamma C^*. \end{aligned} \quad (3.78)$$

Розв'язок задачі знайдемо методом прогонки [99, 129, 131, 132, 146, 148, 162, 168]. Тоді рівняння (3.77), згідно (3.78), у прогоночному вигляді буде наступним:

$$a_1 C_{i-1,j}^{k+\frac{1}{2}} - c_1 C_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} + b_1 C_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} = -f_1, \quad (3.79)$$

де 
$$a_1 = \frac{\mu_1}{h_1^2} - \frac{r_{1-}^2}{h_1}, \quad b_1 = \frac{\mu_1}{h_1^2}, \quad c_1 = \frac{-2\mu_1}{h_1^2} + \frac{r_{1-}^2}{h_1} - \frac{0.5\gamma}{A_2} - \frac{\sigma}{A_2\tau},$$

$$f_1 = \frac{\sigma}{A_2\tau} C_{i,j}^k - 0.5\gamma C^*, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad j = \overline{1, m-1}, \quad k = \overline{0, k_1}.$$

Розв'язок різницевої схеми (3.77), записаної у канонічному вигляді (3.79), за методом прогонки має вигляд

$$C_{li,j}^{k+\frac{1}{2}} = \alpha_{i+1,j}^1 C_{li+1,j}^{k+\frac{1}{2}} + \beta_{i+1,j}^1,$$

де 
$$\alpha_{i+1,j}^1 = \frac{b_1}{c_1 - \alpha_{i,j} a_1}, \quad \beta_{i+1,j}^1 = \frac{a_1 \beta_{i,j}^1 + f_1}{c_1 - \alpha_{i,j} a_1}, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad j = \overline{1, m-1}, \quad k = \overline{0, k_1},$$

$$\alpha_{1j}^1 = 0, \quad \beta_{1j}^1 = \tilde{C}_1, \quad j = \overline{1, m-1}.$$

Монотонна різницева схема для задачі (3.76) має вигляд

$$\begin{aligned} \mu_2 \frac{C_{li,j-1}^{k+1} - 2C_{li,j}^{k+1} + C_{li,j+1}^{k+1}}{h_2^2} + r_{2+}^2 \frac{C_{li,j+1}^{k+1} - C_{li,j}^{k+1}}{h_2} + r_{2-}^2 \frac{C_{li,j}^{k+1} - C_{li,j-1}^{k+1}}{h_2} - \frac{0.5\bar{G}_2}{\bar{A}_2} C_{li,j}^{k+1} = \\ = \frac{0.5}{\bar{A}_2} \sigma \frac{C_{li,j}^{k+1} - C_{li,j}^{k+\frac{1}{2}}}{0.5\tau}, \end{aligned} \quad (3.80)$$

$$C_{li,j}^0 = \tilde{C}_{0i,j}^1, \quad C_{li,0}^{k+1} = \tilde{C}_1, \quad C_{li,m}^{k+1} = C_{li,m-1}^{k+1}, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad j = \overline{1, m-1}, \quad k = \overline{0, k_1},$$

де 
$$\mu_2 = \frac{1}{1 + 0.5h_2|r_2^2|} = \frac{1}{1 + \frac{h_2\bar{E}_2}{2A_2}}, \quad r_+^2 = 0.5(r^2 + |r^2|) \geq 0, \quad r_-^2 = 0.5(r^2 - |r^2|) \leq 0,$$

$$r_{2+}^2 = \frac{\bar{E}_2}{A_2}.$$

Згрупувавши доданки в (3.80), отримаємо

$$\begin{aligned} C_{1i,j-1}^{k+1} \left[ \frac{\mu_2}{h_2^2} - \frac{r_{2-}^2}{h_2} \right] + C_{1i,j}^{k+1} \left[ \frac{-2\mu_2}{h_2^2} - \frac{r_{2+}^2}{h_2} + \frac{r_{2-}^2}{h_2} - \frac{0.5\gamma}{A_2} - \frac{\sigma}{A_2\tau} \right] + C_{i,j+1}^{k+1} \left[ \frac{\mu_2}{h_2^2} + \frac{r_{2+}^2}{h_2} \right] = \\ = -\frac{\sigma}{A_2\tau} C_{1i,j}^{k+\frac{1}{2}} - 0.5\gamma C^*. \end{aligned}$$

Тоді прогнаний вигляд рівняння (3.80) запишеться так:

$$a_2 C_{1i,j-1}^{k+1} - c_2 C_{1i,j}^{k+1} + b_2 C_{i,j+1}^{k+1} = -f_2, \quad (3.81)$$

де 
$$a_2 = \frac{\mu_2}{h_2^2} - \frac{r_{2-}^2}{h_2}, \quad b_2 = \frac{\mu_2}{h_2^2} + \frac{r_{2+}^2}{h_2}, \quad c_2 = -\frac{2\mu_2}{h_2^2} - \frac{r_{2+}^2}{h_2} + \frac{r_{2-}^2}{h_2} - \frac{0.5\gamma}{A_2} - \frac{\sigma}{A_2\tau},$$

$$f_2 = \frac{\sigma}{A_2\tau} C_{1i,j}^{k+\frac{1}{2}} - 0.5\gamma C^*, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad j = \overline{1, m-1}, \quad k = \overline{0, k_1}.$$

Згідно методу прогонки чисельний розв'язок задачі перенесення солей (3.80) в області повного насичення  $G_1$  має вигляд

$$C_{1i,j}^{k+1} = \alpha_{i,j+1}^2 C_{1i,j+1}^{k+1} + \beta_{i,j+1}^2,$$

де 
$$\alpha_{i,j+1}^2 = \frac{b_2}{c_2 - \alpha_{i,j}^2 a_2}, \quad \beta_{i,j+1}^2 = \frac{a_2 \beta_{i,j}^2 + f_2}{c_2 - \alpha_{i,j}^2 a_2}, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad j = \overline{1, m-1}, \quad k = \overline{0, k_1},$$

$$\alpha_{i,1}^2 = 0, \quad \beta_{i,1}^2 = \tilde{C}_1, \quad i = \overline{1, n-1}.$$

### 3.1.4 Математичне моделювання процесу перенесення солей при вологоперенесенні у ненасиченому ґрунтовому середовищі

#### 3.1.4.1 Постановка задачі вологоперенесення

Розглядається задача вологоперенесення у ненасиченому пористому середовищі  $G_2$  при наявній вільній поверхні ґрунтових вод (кривій депресії)  $CD$  [68].

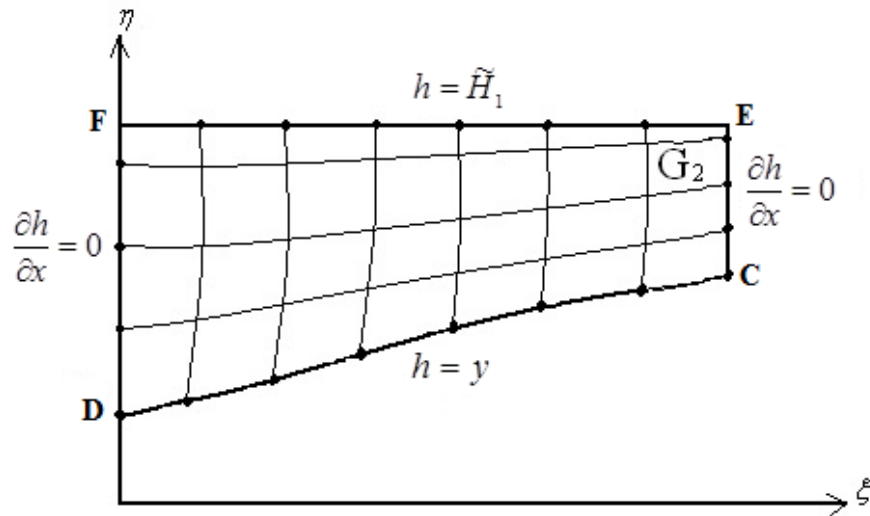


Рис. 3.8. Область неповного насичення ґрунту

Проведемо дослідження розподілу поля концентрації сольових розчинів з урахуванням розподілу напорів води в даній області вологоперенесення.

### 3.1.4.2 Математична модель задачі у фізичній області

Рух води у ненасиченому ґрунтовому середовищі описується наступним нелінійним рівнянням параболічного типу [96, 120, 156, 171, 173]:

$$\mu(h) \frac{\partial h}{\partial t} = \operatorname{div}(K(h) \operatorname{grad} h), \quad (3.82)$$

Рівняння (3.82) доповнюється крайовими умовами вигляду

$$h|_{t=0} = \tilde{H}_0, \quad h|_{CD} = y, \quad h|_{FE} = \tilde{H}_1, \quad \frac{\partial h}{\partial x}|_{DF \cup CE} = 0. \quad (3.83)$$

В рівнянні вологоперенесення (3.82) функції мають вигляд [171]

$$\mu(h) = \frac{\partial W}{\partial h} = \frac{\partial(a\rho g(h+y)+b)}{\partial h} = a\rho g \left(1 + \frac{\partial y}{\partial h}\right) = a\rho g \left(1 + \frac{1}{\frac{\partial y}{\partial h}}\right) - \text{функція вологоємності};$$

$h = \frac{p}{\rho g} + y$  – гідравлічний потенціал (напір);  $p = \rho g(h+y)$  – тиск рідини,  $\rho$  –

густина рідини,  $g$  - прискорення вільного падіння,  $y$  – вертикальна координата,

направлена вгору,  $K(h) = \frac{a_1}{b_1 + p^\alpha} = \frac{a_1}{b_1 + [\rho g(h+y)]^2}$  – коефіцієнт водопр-

никності,  $\alpha, a_1, b_1$  - сталі, які визначаються експериментально [51, 120, 171].

### 3.1.4.3 Математична модель задачі у змінних $\xi, \eta$

Запишемо рівняння (3.82) у змінних  $\xi, \eta$ .

Величини  $\xi_x, \xi_y, \eta_x, \eta_y$ , які визначають метрику відображення, виражаються через (3.14), (3.15).

Перші, другі похідні в рівнянні (3.82) перетворюються у змінні  $\xi, \eta$  за формулами (3.16)-(3.26), за якими отримаємо [41, 42, 44].

$$\frac{\partial K(h)}{\partial x} = \frac{1}{I_1} \left[ \frac{\partial K(h)}{\partial \xi} y_\eta - \frac{\partial K(h)}{\partial \eta} y_\xi \right], \quad \frac{\partial K(h)}{\partial y} = \frac{1}{I_1} \left[ -\frac{\partial K(h)}{\partial \xi} x_\eta + \frac{\partial K(h)}{\partial \eta} x_\xi \right].$$

Тоді рівняння (3.82) у змінних  $\xi, \eta$  набуде вигляду

$$\begin{aligned} K(h) & \left[ \frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2} \xi_x^2 + 2 \frac{\partial^2 h}{\partial \xi \partial \eta} \xi_x \eta_x + \frac{\partial h}{\partial \xi} \xi_{xx} + \frac{\partial h}{\partial \eta} \eta_{xx} + \frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2} \eta_x^2 + \frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2} \xi_y^2 + 2 \frac{\partial^2 h}{\partial \xi \partial \eta} \xi_y \eta_y + \right. \\ & \left. + \frac{\partial h}{\partial \xi} \xi_{yy} + \frac{\partial h}{\partial \eta} \eta_{yy} + \frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2} \eta_y^2 \right] + \frac{1}{I_1^2} \left[ \frac{\partial K(h)}{\partial \xi} y_\eta - \frac{\partial K(h)}{\partial \eta} y_\xi \right] \cdot \left[ \frac{\partial h}{\partial \xi} y_\eta - \frac{\partial h}{\partial \eta} y_\xi \right] + \\ & + \frac{1}{I_1^2} \left[ -\frac{\partial K(h)}{\partial \xi} x_\eta + \frac{\partial K(h)}{\partial \eta} x_\xi \right] \cdot \left[ -\frac{\partial h}{\partial \xi} x_\eta + \frac{\partial h}{\partial \eta} x_\xi \right] = \mu(h) \frac{\partial h}{\partial t}. \end{aligned}$$

Звівши подібні члени, отримаємо

$$\bar{A}_3 \left( \frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2} \right) + \bar{D}_3 \frac{\partial h}{\partial \xi} + \bar{E}_3 \frac{\partial h}{\partial \eta} = \mu(h) \frac{\partial h}{\partial t}, \quad (3.84)$$

де коефіцієнти  $\bar{A}_3, \bar{D}_3, \bar{E}_3$  мають вигляд

$$\bar{A}_3 = \xi_x^2 K(h) + \xi_y^2 K(h) = K(h) [\xi_x^2 + \xi_y^2];$$

$$\bar{D}_3 = K(h) [\xi_{xx} + \xi_{yy}] + \frac{1}{I_1^2} \left[ \frac{\partial K(h)}{\partial \xi} y_\eta - \frac{\partial K(h)}{\partial \eta} y_\xi \right] y_\eta - \frac{1}{I_1^2} \left[ -\frac{\partial K(h)}{\partial \xi} x_\eta + \frac{\partial K(h)}{\partial \eta} x_\xi \right] x_\eta;$$

$$\bar{E}_3 = K(h) [\eta_{xx} + \eta_{yy}] - \frac{1}{I_1^2} \left[ \frac{\partial K(h)}{\partial \xi} y_\eta - \frac{\partial K(h)}{\partial \eta} y_\xi \right] y_\xi + \frac{1}{I_1^2} \left[ -\frac{\partial K(h)}{\partial \xi} x_\eta + \frac{\partial K(h)}{\partial \eta} x_\xi \right] x_\xi.$$

Коефіцієнти  $\bar{A}_3$ ,  $\bar{C}_3$ ,  $\bar{D}_3$ , перепишуться у спрощеному вигляді

$$\bar{A}_3 = \frac{K(h)}{I_1}, \quad \bar{D}_3 = \frac{1}{I_1} \frac{\partial K(h)}{\partial \xi}, \quad \bar{E}_3 = \frac{1}{I_1} \frac{\partial K(h)}{\partial \eta}.$$

Враховуючи попередні рівності, рівняння вологоперенесення можна записати у вигляді

$$\left( \frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2} \right) + \frac{\bar{D}_3}{\bar{A}_3} \frac{\partial h}{\partial \xi} + \frac{\bar{E}_3}{\bar{A}_3} \frac{\partial h}{\partial \eta} = \frac{\mu(h)}{\bar{A}_3} \frac{\partial h}{\partial t}, \quad (3.85)$$

#### 3.1.4.4 Обчислювальний алгоритм побудови чисельного конформного відображення криволінійного чотирикутника на параметричний прямокутник

Розглянемо алгоритм побудови чисельного конформного відображення на параметричний прямокутник для знаходження конформної різницевої сітки області вологоперенесення  $G_2$  (рис. 3.4) [37, 41, 42, 44, 85, 86, 105, 108, 155].

Алгоритм розв'язування задачі полягає у наступному:

1. Побудувати чисельне конформне відображення криволінійної області на параметричний прямокутник.
2. Розрахувати поле швидкостей вологоперенесення.
3. Знайти чисельний розв'язок задачі вологоперенесення.

Згідно даного алгоритму спочатку обчислюємо початкові наближення значень координат „плаваючих” вузлів на границі  $\Gamma_i$ ,  $i = \overline{1,4}$  області  $G_2$ .

Початкові наближення  $x_{ij}^{(0)}$ ,  $y_{ij}^{(0)}$  координат внутрішніх вузлів сітки обчислюємо за формулами середнього арифметичного:

$$x_{ij}^{(0)} = \frac{1}{4}(x_{i0}^{(0)} + x_{im}^{(0)} + x_{0j}^{(0)} + x_{nj}^{(0)}), \quad y_{ij}^{(0)} = \frac{1}{4}(y_{i0}^{(0)} + y_{im}^{(0)} + y_{0j}^{(0)} + y_{nj}^{(0)}).$$

Уточнення координат внутрішніх вузлів  $x_{ij}$ ,  $y_{ij}$  та „плаваючих” вузлів границі  $\Gamma_i, i = \overline{1,3}$  різницевої сітки здійснюємо за алгоритмом, описаним у п. 3.1.2.4, використовуючи формули

$$\Gamma_5: x_{im} = x_{im-1} + \frac{1}{2}(y_{i-1,m-1} - y_{i+1,m-1}), \quad i = \overline{2,n-2},$$

$$y_{im} = y_{im-1} + \frac{1}{2}(x_{i+1,m-1} - x_{i-1,m-1}), \quad i = \overline{2,n-2};$$

$$\Gamma_6: x_{i0} = x_{i1} + \frac{1}{2}(y_{i+1,1} - y_{i-1,1}), \quad i = \overline{2,n-2},$$

$$y_{i0} = y_{i1} + \frac{1}{2}(x_{i-1,1} - x_{i+1,1}), \quad i = \overline{2,n-2};$$

$$\Gamma_7: x_{mj} = x_{1j} + \frac{1}{2}(y_{1,j-1} - y_{1,j+1}), \quad j = \overline{2,m-2},$$

$$y_{mj} = y_{1j} + \frac{1}{2}(x_{1,j-1} - x_{1,j+1}), \quad j = \overline{2,m-2}.$$

Уточнення координат „плаваючих” вузлів проводимо до тих пір, поки обчислення не досягнуть заданої точності  $\delta$  або середньоквадратичне відхилення на всій границі не перевищать заданої точності.

В протилежному випадку – знову проводимо уточнення внутрішніх вузлів сітки, але з новими граничними умовами, які отримані уточненням координат „плаваючих” вузлів.

$$x_{i0} = x_{i0}^{(k+1)}, \quad x_{im} = x_{im}^{(k+1)}, \quad x_{0j} = x_{0j}^{(k+1)}, \quad x_{nj} = x_{nj}^{(k+1)},$$

$$y_{i0} = y_{i0}^{(k+1)}, \quad y_{im} = y_{im}^{(k+1)}, \quad y_{0j} = y_{0j}^{(k+1)}, \quad y_{nj} = y_{nj}^{(k+1)}.$$

Таким чином, при вибраних  $m$  і  $n$  визначимо координати  $x_{ij}$ ,  $y_{ij}$  як внутрішніх, так і „плаваючих” вузлів.

Отримана різницева сітка, описаним вище методом, може не бути ортогональною, і тим більше не конформною. Для того, щоб вона була конформною, необхідно для існування конформного відображення

прямокутника  $G_\xi$  на криволінійний чотирикутник  $G_z$  забезпечити правильний вибір модуль прямокутника  $G_\xi$ , який є інваріантним модулю області  $G_z$ . Необхідно знайти таку кількість поділів  $n$  і  $m$  відповідно по  $O_\xi$  і  $O_\eta$ , щоб шукане відображення було конформним, тобто різницєва сітка повинна бути конформною.

Основними властивостями ортогональних конформних сіток є [41, 42, 86, 155]: 1) сітка є ортогональною і конформною; 2) клітки сітки повинні бути подібні квадратам; 3) поблизу границі ізолінії сітки близькі по формі до контурів області.

Після кожного окремого розрахунку сітки будемо перевіряти її на конформність. Для цього визначимо через  $\Delta S$ ,  $\Delta l$  криволінійні довжини кліток сітки відповідно по напрямках  $O_\xi$  і  $O_\eta$ ; через  $d_1, d_2$  – діагоналі кліток. Тоді на  $k$ -му кроці обчислення проводимо за формулами (3.52)-(3.55).

Для того, щоб різницєва сітка була конформною, тобто при чисельному відображенні подібні комірки, наприклад, квадратики, переходили в подібні, необхідно, щоб із заданою точністю виконувались умови конформності. Якщо умови конформності сітки не виконані, тоді вибирають нові  $m$  і  $n$ .

Розрахунок поля швидкостей вологоперенесення здійснюємо за законом Дарсі, згідно якого швидкість вологоперенесення визначається з рівняння [4, 11, 25, 79, 153, 171, 196]

$$\vec{V} = -k(h) \cdot \text{grad } h, \quad (3.86)$$

де  $k(h)$  що визначається як в рівнянні (3.82). Рівняння (3.86) можна подати у вигляді компонент швидкостей вологоперенесення:

$$V_x = -k(h) \frac{\partial h}{\partial x}, \quad V_y = -k(h) \frac{\partial h}{\partial y}. \quad (3.87)$$

Тоді швидкість вологоперенесення знайдемо за рівнянням

$$V^2 = V_y^2 + V_x^2. \quad (3.88)$$

### 3.1.4.5 Чисельний алгоритм розв'язування задачі вологоперенесення

Для розв'язання задачі вологоперенесення застосуємо ЛОС О. А. Самарського [87, 163, 164, 166-168], згідно якої вихідній крайовій задачі (3.82), (3.83) поставимо у відповідність сукупність двох крайових задач:

1. вздовж осі  $O_\xi$  (поздовжня прогонка):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2} + \frac{\overline{D_3}}{A_3} = \frac{0.5\mu(h)}{A_3} \frac{\partial h}{\partial t}, \xi \in G_\zeta, t > 0, \\ h(\xi, \eta, 0) = \tilde{H}_0(\xi, \eta), (\xi, \eta) \in G_\zeta, \\ \frac{\partial h}{\partial \xi}(0, \eta, 0) = 0, \eta \in G_\zeta, \\ \frac{\partial h}{\partial \xi}(a, \eta, 0) = 0, \eta \in G_\zeta. \end{array} \right. \quad (3.89)$$

2. вздовж осі  $O_\eta$  (поперечна прогонка):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2} + \frac{\overline{E_3}}{A_3} = \frac{0.5\mu(h)}{A_3} \frac{\partial h}{\partial t}, \\ h(\xi, \eta, 0) = \tilde{H}_0(\xi, \eta), (\xi, \eta) \in G_\zeta, \\ \frac{\partial h}{\partial \xi}(\xi, 0, t) = y, a_3 < \xi \leq a_0, t > 0, \\ \frac{\partial h}{\partial \xi}(\xi, b, t) = H_1, \xi = a_0, t > 0. \end{array} \right. \quad (3.90)$$

Застосуємо до (3.89) монотонну різницеву схему [68, 131, 132, 166-168, 188]. Отримаємо

$$\begin{aligned} \mu_3 \frac{H_{i-1,j}^{k+\frac{1}{2}} - 2H_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} + H_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}}}{h_1^2} + r_{3+}^2 \frac{H_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} - H_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}}{h_1} + r_{3-}^2 \frac{H_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} - H_{i-1,j}^{k+\frac{1}{2}}}{h_1} = \\ = \frac{0.5\mu(h)}{\overline{A_3}} \frac{H_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} - H_{i,j}^k}{0.5\tau}, \end{aligned} \quad (3.91)$$

$$H_{i,j}^0 = \tilde{H}_{0i,j}^1, H_{0,j}^{k+1/2} = \tilde{H}_1, H_{1n,j}^{k+1/2} = H_{n-1,j}^{k+1/2}, i = \overline{1, n-1}, j = \overline{1, m-1}, k = \overline{0, k_1},$$



$$\text{де } \mu_3 = \frac{1}{1 + 0.5h_1|r_3^2|} = \frac{1}{1 + \frac{h_1\bar{D}_3}{2A_3}}, r_{3+}^2 = 0.5(r_3^2 + |r_3^2|) \neq 0, r_{3-}^2 = 0.5(r_3^2 - |r_3^2|) \neq 0, r_3^2 = \frac{\bar{D}_3}{A_3}.$$

Згрупуємо доданки в (3.91).

$$H_{i-1,j}^{k+\frac{1}{2}} \left[ \frac{\mu_3}{h_1^2} - \frac{r_{3-}^2}{h_1} \right] + H_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} \left[ -\frac{2\mu_3}{h_1^2} - \frac{r_{3+}^2}{h_1} + \frac{r_{3-}^2}{h_1} - \frac{\mu(h)}{0.5\bar{A}_3\tau} \right] + H_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} \left[ \frac{\mu_3}{h_1^2} + \frac{r_{3+}^2}{h_1} \right] = -\frac{\mu(h)}{\bar{A}_3\tau} H_{i,j}^k.$$

Тоді за методом прогонки розв'язок задачі (3.89) має вигляд

$$a_3 H_{i-1,j}^{k+\frac{1}{2}} - c_3 H_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} + b_3 H_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} = -f_3, \quad (3.92)$$

$$\text{де } a_3 = \frac{\mu_3}{h_1^2} - \frac{r_{3-}^2}{h_1}, \quad b_3 = \frac{\mu_3}{h_1^2} + \frac{r_{3+}^2}{h_1}, \quad c_3 = -\frac{2\mu_3}{h_1^2} - \frac{r_{3+}^2}{h_1} + \frac{r_{3-}^2}{h_1} - \frac{\mu(h)}{\bar{A}_3\tau}, \quad f_3 = -\frac{\mu(h)}{\bar{A}_3\tau} H_{i,j}^k,$$

$$i = \overline{1, n-1}, \quad j = \overline{1, m-1}, \quad k = \overline{0, k_1}.$$

Розв'язок задачі (3.92) знаходимо у вигляді

$$H_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} = \alpha_{i+1,j}^3 H_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} + \beta_{i+1,j}^3,$$

$$\text{де } \alpha_{i+1,j}^3 = \frac{b_3}{c_3 - \alpha_{i,j}^3 a_3}, \quad \beta_{i+1,j}^3 = \frac{a_3 \beta_{i,j}^3 + f_3}{c_3 - \alpha_{i,j}^3 a_3}, \quad \alpha_{1j}^3 = 0, \quad \beta_{1j}^3 = \tilde{H}_1, \quad j = \overline{1, m-1}.$$

Аналогічно розв'язуванню задачі (3.89) застосуємо до (3.90) монотонну різницеву схему.

$$\mu_4 \frac{H_{i,j-1}^{k+1} - 2H_{i,j}^{k+1} + H_{i,j+1}^{k+1}}{h_2^2} + r_+^2 \frac{H_{i,j+1}^{k+1} - H_{i,j}^{k+1}}{h_2} + r_-^2 \frac{H_{i,j}^{k+1} - H_{i,j-1}^{k+1}}{h_2} = \frac{0.5\mu(h)}{\bar{A}_3} \frac{H_{i,j}^{k+1} - H_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}}{0.5\tau}, \quad (3.93)$$

$$C_{li,j}^0 = \tilde{C}_{0i,j}^1, \quad C_{li,0}^{k+1} = \tilde{C}_1, \quad C_{li,m}^{k+1} = C_{1i,m-1}^{k+1}, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad j = \overline{1, m-1}, \quad k = \overline{0, k_1},$$

$$\text{де } \mu_4 = \frac{1}{1 + 0.5h_2|r_4^2|} = \frac{1}{1 + \frac{h_2\bar{E}_3}{2A_3}}, r_{4+}^2 = 0.5(r_4^2 + |r_4^2|) \neq 0, r_{4-}^2 = 0.5(r_4^2 - |r_4^2|) \neq 0, r_4^2 = \frac{\bar{E}_3}{A_3}.$$

Запишемо останнє рівняння в прогоночному вигляді. Для цього згрупуємо доданки в (3.93).

$$H_{i,j-1}^{k+1} \left[ \frac{\mu_4}{h_2^2} - \frac{r_{4-}^2}{h_2} \right] + H_{i,j}^{k+1} \left[ -\frac{2\mu_4}{h_2^2} - \frac{r_{4+}^2}{h_2} + \frac{r_{4-}^2}{h_2} - \frac{\mu(h)}{\bar{A}_3\tau} \right] + H_{i,j+1}^{k+1} \left[ \frac{\mu_4}{h_2^2} + \frac{r_{4+}^2}{h_2} \right] = -\frac{\mu(h)}{\bar{A}_3\tau} H_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}.$$

За методом прогонки, розв'язок задачі в канонічному вигляді є наступним:

$$a_4 H_{i,j-1}^{k+1} - c_4 H_{i,j}^{k+1} + b_4 H_{i,j+1}^{k+1} = -f_4, \quad (3.94)$$

$$\text{де } a_4 = \frac{\mu_4}{h_2^2} - \frac{r_{4-}^2}{h_2}, \quad b_4 = \frac{\mu_4}{h_2^2} + \frac{r_{4+}^2}{h_2}, \quad c_4 = -\frac{2\mu_4}{h_2^2} - \frac{r_{4+}^2}{h_2} + \frac{r_{4-}^2}{h_2} - \frac{\mu(h)}{A_3 \tau}, \quad f_4 = -\frac{\mu(h)}{A_3 \tau} H_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}.$$

Тоді розв'язок задачі вологоперенесення має вигляд

$$H_{i,j}^{k+1} = \alpha_{i,j+1}^4 H_{i,j+1}^{k+1} + \beta_{i,j+1}^4, \quad (3.95)$$

$$\text{де } \alpha_{i,j+1}^4 = \frac{b_4}{c_4 - \alpha_{i,j}^4 a_4}, \quad \beta_{i,j+1}^4 = \frac{a_4 \beta_{i,j}^4 + f_4}{c_4 - \alpha_{i,j}^4 a_4}, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad j = \overline{1, m-1}, \quad k = \overline{0, k_1},$$

$$\alpha_{i,1}^4 = 0, \quad \beta_{i,1}^4 = \tilde{H}_1, \quad i = \overline{1, n-1}.$$

### 3.1.5 Постановка задачі перенесення солей у ненасиченому ґрунтовому середовищі

Розглядається задача перенесення солей у ненасиченому ґрунтовому середовищі при наявності вільної поверхні  $CD$  (рис. 3.10) [55, 61, 68].

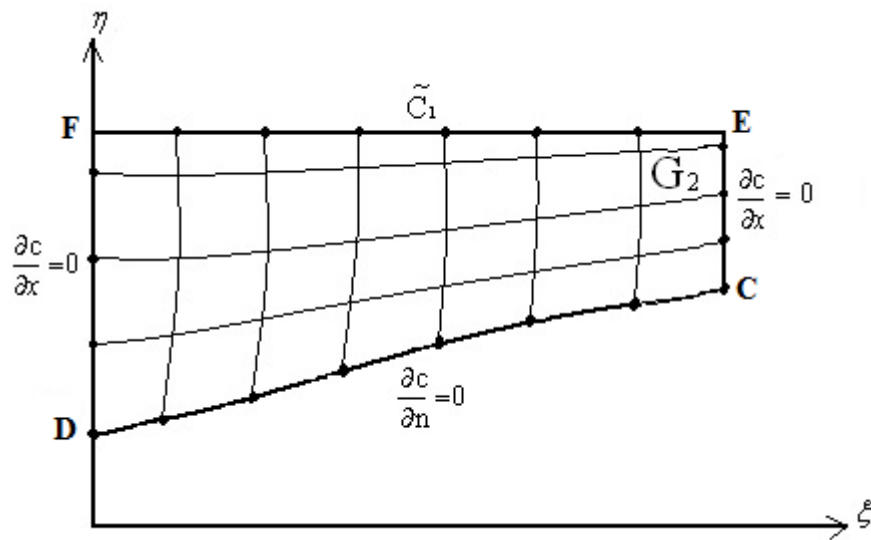


Рис. 3.10. Область неповного водонасичення ґрунту

На поверхню ґрунту потрапляють сольові розчини з концентрацією  $\tilde{C}_1$ . Проведемо дослідження розподілу концентрації сольових розчинів при вологоперенесенні в області неповного насичення  $G_2$ .

### 3.1.5.1 Математична модель задачі у фізичній області

Математична модель задачі перенесення солей в області неповного насичення має вигляд [55, 61, 64, 67, 68, 74, 75, 82, 156, 171, 173]

$$\frac{\partial \left( D_2(c_2) \frac{\partial c_2}{\partial x} \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left( D_2(c_2) \frac{\partial c_2}{\partial y} \right)}{\partial y} - \omega \sigma V_x \frac{\partial c_2}{\partial x} - \omega \sigma V_y \frac{\partial c_2}{\partial y} - f(\omega) c_2 = \sigma \frac{\partial c_2}{\partial t}, \quad (3.96)$$

$$\frac{\partial c_2}{\partial n} \Big|_{CD} = 0, \quad c_2 \Big|_{FE} = \tilde{C}_1^2, \quad \frac{\partial c_2}{\partial x} \Big|_{DF \cup CE} = 0, \quad c_2 \Big|_{t=0} = \tilde{C}_0^2(x, y). \quad (3.97)$$

Тут  $c_2(x, y, t)$  - концентрація сольового розчину в області неповного насичення;  $f(\omega)$  - функція джерел, що має вигляд [120, 121, 156, 171]

$$f(\omega) = (1 - \omega) \frac{\partial \sigma}{\partial t} + v_x \frac{\partial(\omega \sigma^{-1})}{\partial x} + v_y \frac{\partial(\omega \sigma^{-1})}{\partial y},$$

де  $\omega$  – вологість ґрунту обчислюється за формулою  $\omega = ap + b = a\rho g(h + y) + b$ ;  $\sigma$  – пористість;  $v_x, v_y$  – компоненти швидкості фільтрації, які обчислюються за формулами

$$v_x = -k(c, \omega) \frac{\partial h}{\partial x}, \quad v_y = -k(c, \omega) \frac{\partial h}{\partial y},$$

де  $k(c, \omega) = k(c) + k(\omega)$  – коефіцієнт фільтрації, функція  $k(\omega)$  обчислюється з задачі вологоперенесення [43, 51, 120, 171];  $D_2(c_2)$  – коефіцієнт конвективної дифузії, що дорівнює  $D(c) = D_\mu + \lambda |v(c, \omega)|$  [43, 156, 181].

Рівняння (3.96) будемо розглядати у вигляді

$$D_2(c_2) \left( \frac{\partial^2 c_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_2}{\partial y^2} \right) - v_1(\omega, c_2) \frac{\partial c_2}{\partial x} - v_2(\omega, c_2) \frac{\partial c_2}{\partial y} - f(\omega) c_2 = \sigma \frac{\partial c_2}{\partial t}, \quad (3.98)$$

де коефіцієнти  $v_1(\omega, c_2), v_2(\omega, c_2)$  обчислюються за формулами

$$v_1 = \omega \sigma^{-1} v_x - \frac{\partial D(c_2)}{\partial x}, \quad v_2 = \omega \sigma^{-1} v_y - \frac{\partial D(c_2)}{\partial y}.$$

### 3.1.5.2 Математична модель задачі у змінних $\xi, \eta$

Величини  $\xi_x, \xi_y, \eta_x, \eta_y$ , які визначають метрику відображення, виражаються через похідні  $x_\xi, x_\eta, y_\xi, y_\eta$  за формулами (3.14), (3.15). Перші та другі похідні в рівнянні перетворюються у змінні  $\xi, \eta$  за формулами (3.15), (3.20)-(3.25) [29, 37, 41, 42, 44, 85, 86, 105, 108, 155].

Рівняння масоперенесення (3.98) у змінних  $\xi, \eta$  набуде вигляду

$$D_2(c_2) \left[ \frac{\partial^2 c_2}{\partial \xi^2} \xi_x^2 + 2 \frac{\partial^2 c_2}{\partial \xi \partial \eta} \xi_x \eta_x + \frac{\partial c_2}{\partial \xi} \xi_{xx} + \frac{\partial c_2}{\partial \eta} \eta_{xx} + \frac{\partial^2 c_2}{\partial \eta^2} \eta_x^2 + \frac{\partial^2 c_2}{\partial \xi^2} \xi_y^2 + 2 \frac{\partial^2 c_2}{\partial \xi \partial \eta} \xi_y \eta_y + \right. \\ \left. + \frac{\partial c_2}{\partial \xi} \xi_{yy} + \frac{\partial c_2}{\partial \eta} \eta_{yy} + \frac{\partial^2 c_2}{\partial \eta^2} \eta_y^2 \right] - v_1(\omega, c_2) \frac{1}{I_1} \left[ \frac{\partial c_2}{\partial \xi} y_\eta - \frac{\partial c_2}{\partial \eta} y_\xi \right] - v_2(\omega, c_2) \frac{1}{I_1} \left[ -\frac{\partial c_2}{\partial \xi} x_\eta + \frac{\partial c_2}{\partial \eta} x_\xi \right] - \\ - f(\omega) c_2 = \sigma \frac{\partial c_2}{\partial t}.$$

Звівши подібні члени, отримаємо

$$\bar{A}_4 \frac{\partial^2 c_2}{\partial \xi^2} + \bar{B}_4 \frac{\partial^2 c_2}{\partial \xi \partial \eta} + \bar{C}_4 \frac{\partial^2 c_2}{\partial \eta^2} + \bar{D}_4 \frac{\partial c_2}{\partial \xi} + \bar{E}_4 \frac{\partial c_2}{\partial \eta} - f(\omega) c_2 = \sigma \frac{\partial c_2}{\partial t}, \quad (3.99)$$

де коефіцієнти  $\bar{A}_4, \bar{B}_4, \bar{C}_4, \bar{D}_4, \bar{E}_4$  мають вигляд

$$\bar{A}_4 = \xi_x^2 D(c_2) + \xi_y^2 D(c_2) = D_2(c_2) [\xi_x^2 + \xi_y^2], \\ \bar{B}_4 = 2D_2(c_2) \xi_x \eta_x + 2D_2(c_2) \xi_y \eta_y = 2D_2(c_2) [\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y], \\ \bar{C}_4 = \eta_x^2 D_2(c_2) + \eta_y^2 D_2(c_2) = D_2(c_2) [\eta_x^2 + \eta_y^2], \\ \bar{D}_4 = D_2(c_2) [\xi_{xx} + \xi_{yy}] - \frac{v_1(\omega, c_2)}{I_1} y_\eta + \frac{v_2(\omega, c_2)}{I_1} x_\eta, \\ \bar{E}_4 = D_2(c_2) [\eta_{xx} + \eta_{yy}] + \frac{v_1(\omega, c_2)}{I_1} y_\xi - \frac{v_2(\omega, c_2)}{I_1} x_\xi.$$

Запишемо дані коефіцієнти у розгорнутому вигляді.

$$\bar{A}_4 = D_4(c_2) [\xi_x^2 + \xi_y^2] = \frac{D_4(c_2)}{I_1^2} (x_\eta^2 + y_\eta^2) = \frac{D_4(c_2) I_1}{I_1^2} = \frac{D_4(c_2)}{I_1}, \\ \bar{B}_4 = -2D_2(c_2) \left( \frac{x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta}{I^2} \right), \quad \bar{C}_4 = \frac{D_2(c_2) (x_\xi^2 + y_\xi^2)}{I_1^2} = \frac{D_2(c_2)}{I_1},$$

$$\begin{aligned} \bar{D}_4 = & \frac{D_2(c_2)}{I_1^2} [y_\eta y_{\xi\eta} - y_\xi y_{\eta\eta} - y_\eta (y_\eta \{x_{\xi\xi} y_\eta + x_\xi y_{\xi\eta} - x_{\xi\eta} y_\xi - x_\eta y_{\xi\xi}\} - y_\xi \{x_{\xi\eta} y_\eta + \\ & + x_\xi y_{\eta\eta} - x_{\eta\eta} y_\xi - x_\eta y_{\xi\eta}\})] + \frac{D_2(c_2)}{I_1^2} [-x_\eta x_{\xi\eta} + x_\xi x_{\eta\eta} + x_\eta (-x_\eta \{x_{\xi\xi} y_\eta + x_\xi y_{\xi\eta} - \\ & - x_{\xi\eta} y_\xi - x_\eta y_{\xi\xi}\} + x_\xi \{x_{\xi\eta} y_\eta + x_\xi y_{\eta\eta} - x_{\eta\eta} y_\xi - x_\eta y_{\xi\eta}\})] - \frac{v_1(\omega, c_2)}{I_1} y_\eta + \frac{v_2(\omega, c_2)}{I_1} x_\eta \end{aligned}$$

$$\bar{D}_4 = \frac{1}{I_1} (-v_1 y_\eta + v_2 x_\eta), \quad v_1 = \omega \cdot \sigma \cdot V_x - \frac{\partial D_2}{\partial x}, \quad v_2 = \omega \cdot \sigma \cdot V_y - \frac{\partial D_2}{\partial y},$$

$$V_x = -\frac{K(h)}{I_1} \left( \frac{\partial h}{\partial \xi} y_\eta - \frac{\partial h}{\partial \eta} y_\xi \right), \quad V_y = -\frac{K(h)}{I_1} \left( -\frac{\partial h}{\partial \xi} x_\eta + \frac{\partial h}{\partial \eta} x_\xi \right).$$

Отже, 
$$\bar{D}_4 = \frac{1}{I_1} \left( \omega \cdot \sigma \cdot \frac{K(h)}{I_1} h_\xi + \frac{\partial D_2}{\partial \xi} \right),$$

Аналогічно можна показати, що коефіцієнт

$$\begin{aligned} \bar{E}_4 = & -\frac{D_2(c_2)}{I_1^2} [y_\eta y_{\xi\xi} - y_\xi y_{\xi\eta} - y_\xi (y_\eta \{x_{\xi\xi} y_\eta + x_\xi y_{\xi\eta} - x_{\xi\eta} y_\xi - x_\eta y_{\xi\xi}\} - y_\xi \{x_{\xi\eta} y_\eta + \\ & + x_\xi y_{\eta\eta} - x_{\eta\eta} y_\xi - x_\eta y_{\xi\eta}\})] + \frac{D_2(c_2)}{I_1^2} [-x_\eta x_{\xi\xi} + x_\xi x_{\xi\eta} - x_\xi (-x_\eta \{x_{\xi\xi} y_\eta + x_\xi y_{\xi\eta} - \\ & - x_{\xi\eta} y_\xi - x_\eta y_{\xi\xi}\} + x_\xi \{x_{\xi\eta} y_\eta + x_\xi y_{\eta\eta} - x_{\eta\eta} y_\xi - x_\eta y_{\xi\eta}\})] + \frac{v_1(\omega, c_2)}{I_1} y_\xi - \frac{v_2(\omega, c_2)}{I_1} x_\xi, \end{aligned}$$

$$\bar{E}_4 = \frac{1}{I_1} (v_1 \cdot y_\xi - v_2 \cdot x_\xi). \quad \text{Таким чином, } \bar{E}_4 = \frac{1}{I_1} \left( \omega \cdot \sigma \cdot \frac{K(h)}{I_1} h_\eta + \frac{\partial D_2}{\partial \eta} \right)$$

Оскільки  $\bar{A}_4 = \bar{C}_4$  та згідно умови ортогональності лінії сітки її межах коефіцієнт  $\bar{B}_4 = 0$ . Враховуючи попередні рівності, рівняння (3.99) переписеться у вигляді

$$\bar{A}_4 \left( \frac{\partial^2 c_2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 c_2}{\partial \eta^2} \right) + \bar{D}_4 \frac{\partial c_2}{\partial \xi} + \bar{E}_4 \frac{\partial c_2}{\partial \eta} - f(\omega) c_2 = \sigma \frac{\partial c_2}{\partial t}$$

або

$$\left( \frac{\partial^2 c_2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 c_2}{\partial \eta^2} \right) + \frac{\bar{D}_4}{\bar{A}_4} \frac{\partial c_2}{\partial \xi} + \frac{\bar{E}_4}{\bar{A}_4} \frac{\partial c_2}{\partial \eta} - \frac{f(\omega)}{\bar{A}_4} c_2 = \frac{\sigma}{\bar{A}_4} \frac{\partial c_2}{\partial t}.$$

### 3.1.5.3 Чисельний алгоритм розв'язування задачі перенесення солей

Для розв'язання задачі (3.99) при відповідних крайових умовах застосуємо ЛОС О. А.Самарського [87, 163, 164, 166-168], згідно якої вихідну крайову задачу представимо у вигляді наступних крайових задач:

1. вздовж осі  $O_\xi$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 c_2}{\partial \xi^2} + \frac{\overline{D_4}}{A_4} \frac{\partial c_2}{\partial \eta} - \frac{0.5 f(\omega)}{A_4} f(\omega) c_2 = \frac{0.5}{A_4} \sigma \frac{\partial c_2}{\partial t}, \\ (\xi, \eta) \in G_\zeta, t > 0, \\ c_2(\xi, \eta, 0) = \tilde{C}_0(\xi, \eta), (\xi, \eta) \in G_\zeta, \\ \frac{\partial c_2}{\partial \xi}(0, \eta, t) = 0, \\ \frac{\partial c_2}{\partial \xi}(a, \eta, t) = 0; \end{array} \right. \quad (3.100)$$

2. вздовж осі  $O_\eta$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 c_2}{\partial \eta^2} + \frac{\overline{E_4}}{A_4} = \frac{0.5 f(\omega)}{A_4} \frac{\partial h}{\partial t}, \eta \in G_\zeta, t > 0, \\ c_2(\xi, \eta, 0) = \tilde{C}_0(\xi, \eta), (\xi, \eta) \in G_\zeta, \\ \frac{\partial c_2}{\partial \xi}(\xi, 0, t) = y, \\ \frac{\partial c_2}{\partial \xi}(\xi, b, t) = \tilde{C}_1. \end{array} \right. \quad (3.101)$$

Застосуємо до (3.100) монотонну різницеву схему [131, 132, 166-168, 188].

$$\begin{aligned} \mu_5 \frac{C_{2i-1,j}^{k+\frac{1}{2}} - 2C_{2i,j}^{k+\frac{1}{2}} + C_{2i+1,j}^{k+\frac{1}{2}}}{h_1^2} + r_{5+}^2 \frac{C_{2i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} - C_{2i,j}^{k+\frac{1}{2}}}{h_1} + r_{5-}^2 \frac{C_{2i,j}^{k+\frac{1}{2}} - C_{2i-1,j}^{k+\frac{1}{2}}}{h_1} - \frac{0.5}{A_4} f(\omega) C_{2i,j}^{k+\frac{1}{2}} = \\ = \frac{0.5}{A_4} \sigma \frac{C_{2i,j}^{k+\frac{1}{2}} - C_{2i,j}^k}{0.5\tau}, \end{aligned} \quad (3.102)$$

$$C_{2i,j}^0 = \tilde{C}_{0i,j}^1, C_{20,j}^{k+1/2} = \tilde{C}_1, C_{2n,j}^{k+1/2} = C_{2n-1,j}^{k+1/2}, i = \overline{1, n-1}, j = \overline{1, m-1}, k = \overline{0, k_1},$$

$$\text{де } \mu_5 = \frac{1}{1 + 0.5h_1|r_5^2|} = \frac{1}{1 + \frac{h_1 \overline{D_4}}{2A_4}}, \quad r_{5+}^2 = 0.5(r_5^2 + |r_5^2|) \neq 0, \quad r_{5-}^2 = 0.5(r_5^2 - |r_5^2|) \neq 0, \quad r_5^2 = \frac{\overline{D_4}}{A_4},$$

$$f(\omega) = -\frac{\rho^2 g^2}{0.5\tau} \left( h_{ij}^{k+\frac{1}{2}} + y_{ij} \right) \left( h_{ij}^{k+\frac{1}{2}} - h_{ij}^k \right) + \frac{V_x \rho g}{4\sigma h_1 h_2} \left( \left( h_{i+1j}^{k+\frac{1}{2}} - h_{i-1j}^{k+\frac{1}{2}} \right) (y_{ij+1} - y_{ij-1}) - \right. \\ \left. - \left( h_{ij+1}^{k+\frac{1}{2}} - h_{ij-1}^{k+\frac{1}{2}} \right) (y_{i+1j} - y_{i-1j}) \right) - \frac{V_y \rho g}{\sigma h_1 h_2} \left( \left( h_{ij}^{k+\frac{1}{2}} - h_{i-1j}^{k+\frac{1}{2}} \right) (x_{ij} - x_{ij-1}) - \left( h_{ij}^{k+\frac{1}{2}} - h_{ij-1}^{k+\frac{1}{2}} \right) (x_{ij} - x_{i-1j}) \right),$$

$$i = \overline{1, n-1}, \quad j = \overline{1, m-1}.$$

Згрупуємо подібні доданки в (3.102), отримаємо

$$C_{2i-1,j}^{k+\frac{1}{2}} \left[ \frac{\mu_5}{h_1^2} - \frac{r_{5-}^2}{h_1} \right] + C_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} \left[ -\frac{2\mu_5}{h_1^2} - \frac{r_{5+}^2}{h_1} + \frac{r_{5-}^2}{h_1} - \frac{0.5f(\omega)}{\overline{A_4}} \right] - \frac{\sigma}{\overline{A_4}\tau} + C_{2i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} \left[ \frac{\mu_5}{h_1^2} + \frac{r_{5+}^2}{h_1} \right] = -\frac{\sigma}{\overline{A_4}\tau} C_{2i,j}^k.$$

Тоді розв'язок рівняння у канонічному вигляді наступний:

$$a_5 C_{2i-1,j}^{k+\frac{1}{2}} - c_5 C_{2i,j}^{k+\frac{1}{2}} + b_5 C_{2i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} = -f_5, \quad (3.103)$$

$$\text{де } a_5 = \frac{\mu_5}{h_1^2} - \frac{r_{5-}^2}{h_1}, \quad b_5 = \frac{\mu_5}{h_1^2} + \frac{r_{5+}^2}{h_1}, \quad c_5 = -\frac{2\mu_5}{h_1^2} - \frac{r_{5+}^2}{h_1} + \frac{r_{5-}^2}{h_1} - \frac{0.5f(\omega)}{\overline{A_4}} - \frac{\sigma}{\overline{A_4}\tau},$$

$$f_5 = \frac{\sigma}{\overline{A_4}\tau} C_{2i,j}^k, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad j = \overline{1, m-1}, \quad k = \overline{0, k_1}.$$

Згідно (3.103) та методу прогонки, розв'язок задачі знаходимо у вигляді [99, 131, 132, 146, 148, 162, 168]

$$C_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} = \alpha_{i+1,j}^5 C_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} + \beta_{i+1,j}^5,$$

$$\text{де } \alpha_{i+1,j}^5 = \frac{b_5}{c_5 - \alpha_{i,j}^5 a_5}, \quad \beta_{i+1,j}^5 = \frac{a_5 \beta_{i,j}^5 + f_5}{c_5 - \alpha_{i,j}^5 a_5}, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad j = \overline{1, m-1}, \quad k = \overline{1, k_1},$$

$$\alpha_{1j}^5 = 0, \quad \beta_{1j}^5 = \tilde{C}_1, \quad j = \overline{1, m-1}.$$

Аналогічно застосуємо до (3.101) монотонну різницеву схему, отримаємо

$$\mu_6 \frac{C_{2i,j-1}^{k+1} - 2C_{2i,j}^{k+1} + C_{2i,j+1}^{k+1}}{h_2^2} + r_{6+}^2 \frac{C_{2i,j+1}^{k+1} - C_{2i,j}^{k+1}}{h_2} + r_{6-}^2 \frac{C_{2i,j}^{k+1} - C_{2i,j-1}^{k+1}}{h_2} - \frac{0.5}{\overline{A_4}} f(\omega) C_{2i,j}^{k+1} =$$

$$= \frac{0.5}{A_4} \sigma \frac{C_{2i,j}^{k+1} - C_{2i,j}^{k+\frac{1}{2}}}{0.5\tau}, \quad (3.104)$$

$$C_{2i,j}^0 = \tilde{C}_{0i,j}^1, \quad C_{2i,0}^{k+1} = y_i, \quad C_{2i,m}^{k+1} = C_{2i,m-1}^{k+1}, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad j = \overline{1, m-1}, \quad k = \overline{0, k_1},$$

$$\text{де } \mu_6 = \frac{1}{1 + 0.5h_2|r_6^2|} = \frac{1}{1 + \frac{h_2\bar{E}_4}{2A_4}}, \quad r_{6+}^2 = 0.5(r_6^2 + |r_6^2|) \neq 0, \quad r_{6-}^2 = 0.5(r_6^2 - |r_6^2|) \neq 0, \quad r_6^2 = \frac{\bar{E}_4}{A_4},$$

$$f(\omega) = -\frac{\rho^2 g^2}{0.5\tau} \left( h_{ij}^{k+1} + y_{ij} \right) \left( h_{ij}^{k+1} - h_{ij}^{k+\frac{1}{2}} \right) + \frac{V_x \rho g}{4\sigma h_1 h_2} \left( (h_{i+1j}^{k+1} - h_{i-1j}^{k+1}) (y_{ij+1} - y_{ij-1}) - \right. \\ \left. - (h_{ij+1}^{k+1} - h_{ij-1}^{k+1}) (y_{i+1j} - y_{i-1j}) \right) - \frac{V_y \rho g}{\sigma h_1 h_2} \left( (h_{ij}^{k+1} - h_{i-1j}^{k+1}) (x_{ij} - x_{ij-1}) - (h_{ij}^{k+1} - h_{ij-1}^{k+1}) (x_{ij} - x_{i-1j}) \right).$$

Згрупувавши доданки, запишемо (3.104) в канонічному вигляді

$$C_{2i,j-1}^{k+1} \left[ \frac{\mu_6}{h_2^2} - \frac{r_{6-}^2}{h_2} \right] + C_{2i,j}^{k+1} \left[ -\frac{2\mu_6}{h_2^2} - \frac{r_{6+}^2}{h_2} + \frac{r_{6-}^2}{h_2} - \frac{0.5f(\omega)}{A_4} - \frac{\sigma}{A_4\tau} \right] + C_{2i,j+1}^{k+1} \left[ \frac{\mu_6}{h_2^2} + \frac{r_{6+}^2}{h_2} \right] = -\frac{\sigma}{A_4\tau} C_{2i,j}^{k+\frac{1}{2}}$$

Прогоночний вигляд рівняння (3.93) наступний:

$$a_6 C_{i,j-1}^{k+1} - c_6 C_{i,j}^{k+1} + b_6 C_{i,j+1}^{k+1} = -f_6,$$

$$a_6 = \frac{\mu_6}{h_2^2} - \frac{r_{6-}^2}{h_2}, \quad b_6 = \frac{\mu_6}{h_2^2} + \frac{r_{6+}^2}{h_2}, \quad c_6 = -\frac{2\mu_6}{h_2^2} - \frac{r_{6+}^2}{h_2} + \frac{r_{6-}^2}{h_2} - \frac{0.5f(\omega)}{A_4} - \frac{\sigma}{A_4\tau},$$

$$f_6 = \frac{\sigma}{A_4\tau} C_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad j = \overline{1, m-1}, \quad k = \overline{0, k_1}.$$

Отже, розв'язок задачі перенесення солей за методом прогонки знаходимо у вигляді

$$C_{i,j}^{k+1} = \alpha_{i,j+1}^6 C_{i,j+1}^{k+1} + \beta_{i,j+1}^6, \quad (3.105)$$

$$\text{де } \alpha_{i+1,j}^6 = \frac{b_6}{c_6 - \alpha_{i,j}^6 a_6}, \quad \beta_{i+1,j}^6 = \frac{a_6 \beta_{i,j}^6 + f_6}{c_6 - \alpha_{i,j}^6 a_6}, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad j = \overline{1, m-1}, \quad k = \overline{0, k_1},$$

$$\alpha_{i,1}^6 = 0, \quad \beta_{i,1}^6 = \tilde{C}_1, \quad i = \overline{1, n-1}.$$



Таким чином, алгоритм розв'язування задачі перенесення солей при фільтрації та вологоперенесенні у насичено-ненасиченому ґрунтовому середовищі з рухомою вільною межею побудовано повністю.

### 3.1.5.4 Результати чисельних експериментів та їх аналіз

Реалізація побудованих обчислювальних алгоритмів поставленої задачі виконана за допомогою розробленого програмного комплексу, який дозволяє отримати розв'язки задач та провести відповідні чисельні експерименти.

В загальному модулі програми взаємодіють таким чином, що робота програми зводиться до наступного: головне вікно програми дозволяє викликати всі модулі проекту та знайти розв'язки відповідних задач. За допомогою пунктів, розміщених у головному меню, можна виконати наступне:

- здійснити побудову чисельного конформного відображення областей фільтраційного потоку та потоку води;
- знайти розподіл полів п'єзометричних напорів, напорів води та швидкостей фільтрації сольових розчинів і вологоперенесення;
- отримати розподіл концентрації сольових розчинів в областях повного та неповного насичення;
- встановити рух вільної поверхні з часом та визначити вплив фільтраційного потоку на її положення;
- побудувати графічні представлення отриманих результатів та провести чисельні експерименти.

Програмна реалізація та чисельні експерименти проводилися при сталих граничних і початкових умовах з такими вихідними даними [31, 32, 43, 120, 135, 145, 156, 171, 181]:  $T = 60 \text{ діб}$ ,  $l_1 = 10 \text{ м}$ ,  $l_2 = 15 \text{ м}$ ,  $\sigma = 0,4$ ,  $\gamma = 0,0065$ ,  $D_m = 10^{-6} \text{ м}^2 / \text{добу}$ ,  $\lambda = 1 \div 10$ ,  $C^* = 350 \text{ г/літр}$ ,  $\tilde{C}_1 = 3 \text{ г/літр}$ ,  $\tilde{C}_2 = 20 \text{ г/літр}$ ,  $a_1 = 1$ ,  $b_1 = 1$ ,  $H_1 = 5 \text{ м}$ ,  $H_2 = 0,3 \text{ м}$ ,  $p = 360 \text{ Па}$ ,  $g = 9.8 \text{ м/с}^2$ ,  $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ ,  $k(c) = 0.0002c^6 - 0.00088c^5 + 0.162c^4 - 1.3194c^3 + 3.9229c^2 + 0.0223c + 18.187$ ,  $c \in [0,1]$

Проведені чисельні експерименти дають можливість провести аналіз отриманих результатів та детально дослідити характер і прогноз протікання процесів.

Розглянемо результати побудови чисельного конформного відображення області фільтраційного потоку.

Для побудови чисельного конформного відображення області повного насичення застосовано алгоритм, розглянутий в п. 3.1.2.4.

Реалізація даного алгоритму проведена при наступних вхідних даних:  $m=30$  – кількість поділів відрізка по осі  $O_\eta$ ,  $n=15$  – кількість поділів відрізка по осі  $O_\xi$ ,  $h_1=1$  – крок по осі  $O_\xi$ ,  $h_2$  – крок по осі  $O_\eta$  знаходиться в процесі побудови відображення. Початкове значення  $h_2$  дорівнює  $h_1$ ,  $a=10$  – довжина відрізка на осі  $O_\xi$ ,  $b=15$  – довжина відрізка на осі  $O_\eta$ ,  $r_1=0.3$  – радіус дрени.

Задаємо чотири фіксовані точки криволінійного чотирикутника:

$$D: x_{n0} = 0, y_{n0} = b/2 + \arctg(a/2), A: x_{00} = 0, y_{00} = b/10 + r;$$

$$C: x_{nm} = a, y_{nm} = b/2 + \arctg(x_{nm} + a/2), B: x_{0m} = 0, y_{0m} = b/10 - r.$$

Межі області повного насичення задаються у вигляді

$$AB: x_{0j} = \frac{b}{10} + r \cdot \cos\left(\frac{\pi}{m} j\right), \quad y_{0j} = \frac{b}{10} + r \cdot \sin\left(\frac{\pi}{m} j\right),$$

$$AD: x_{im} = 0, \quad y_{in} = \frac{b}{10} + r + ih_1,$$

$$DC: x_{nj} = jh_2, \quad y_{nj}^k = \begin{cases} \frac{b}{2} + \arctg\left(x_{nj} + \frac{a}{2}\right), & k=0 \\ b_1 - ih_2, & k=1,2,\dots \end{cases}$$

$$BB_1: x_{im} = 0, \quad y_{im} = \frac{b}{10} - r - \frac{i}{h_1},$$

$$B_1B_2: x_{im} = ih_2, \quad y_{im} = 0,$$

$$B_2C: x_{im} = a, \quad y_{im} = ih_1.$$

В результаті застосування алгоритму було здійснено побудову чисельного конформного відображення криволінійної області повного насичення з вільною поверхнею, графічне представлення якого має вигляд (рис. 3.11)

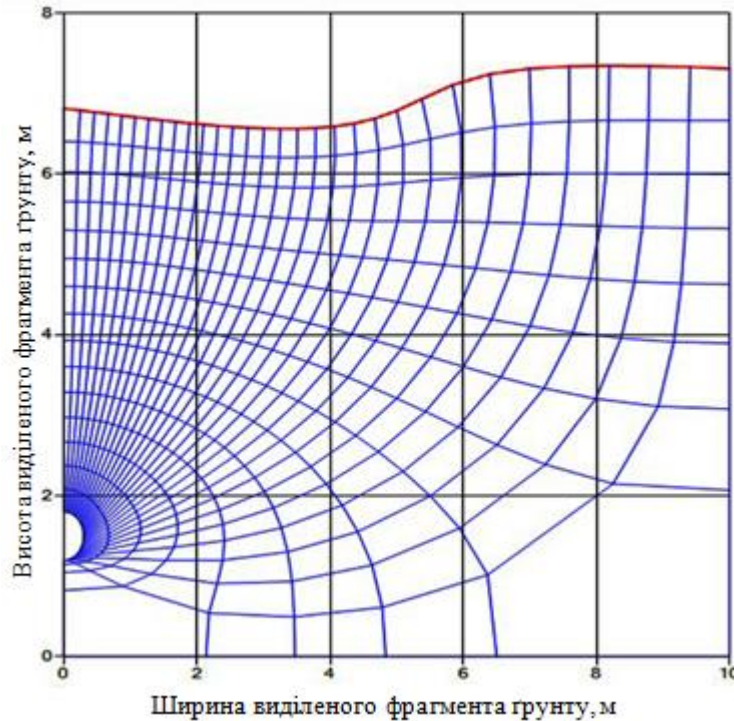


Рис. 3.11. Конформна різницева сітка області повного насичення

На рис. 3.11 представлена гідродинамічна сітка фільтраційного потоку з вільною поверхнею. Верхня ізолінія побудованої різницевої сітки, яка є екіпотенціальною лінією, дає вигляд вільної поверхні.

Отримана конформна різницева сітка ортогональна і гідродинамічна. Одне сімейство ізолінії сітки є лініями течії, друге, ортогональне йому, – екіпотенціальними лініями. Отримана гідродинамічна сітка ортогональна межах області фільтрації. На основі візуалізації гідродинамічної сітки потоку видно її згущення до лівої межі області фільтрації.

Розв'язки вище наведених задач знайдено з урахуванням руху вільної межі. Рівняння руху вільної поверхні має наступний вигляд:

$$y_{nj}^{k+1} = y_{nj}^k - \alpha j e^{-\beta \tau}, \quad \alpha = 0,1, \quad \beta = 10, \quad j = \overline{0, n}, \quad k = \overline{0, t}, \quad t = 5.$$

Розподіл напорів рідини (п'єзометричних напорів) знайдено за алгоритмом, наведеним у п. 3.2.2.5.

Розрахувавши значення координат  $x_{ij}$ ,  $y_{ij}$ ,  $i = \overline{0, n}$ ,  $j = \overline{0, m}$  отриманої різницевої сітки, здійснено розрахунок розподілу напорів рідини у всіх вузлових точках області повного насичення ґрунту. Візуалізація отриманих значень представлена на наступному графіку (рис. 3.12):

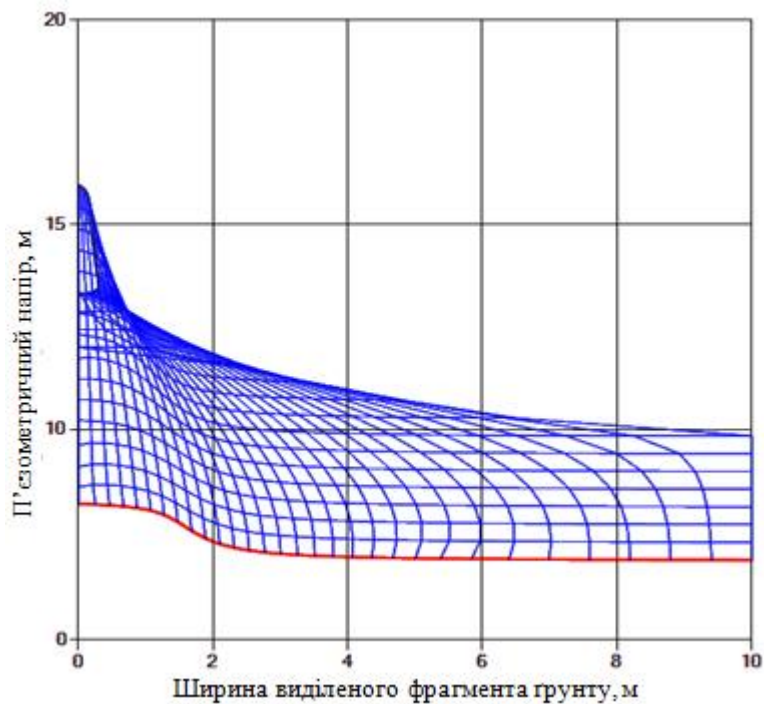


Рис. 3.12. Розподіл п'єзометричних напорів

Знайшовши розподіл напорів, знайдено розв'язок задачі фільтрації та встановлено значення компонент  $V_x$  відносно осі  $O_\xi$ ,  $V_y$  –  $O_\eta$ , графічне представлення яких має вигляд (рис. 3.13, 3.14)

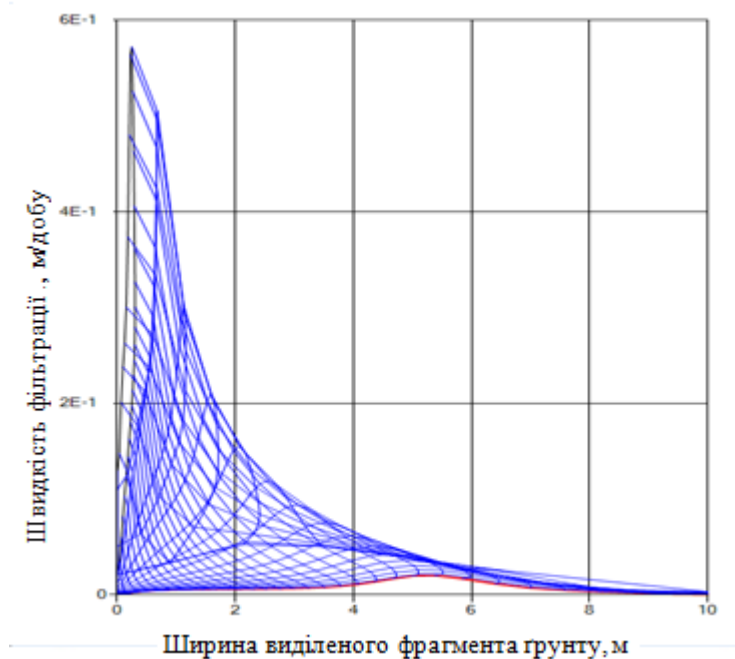


Рис. 3.13. Компонента швидкості фільтрації  $V_x$

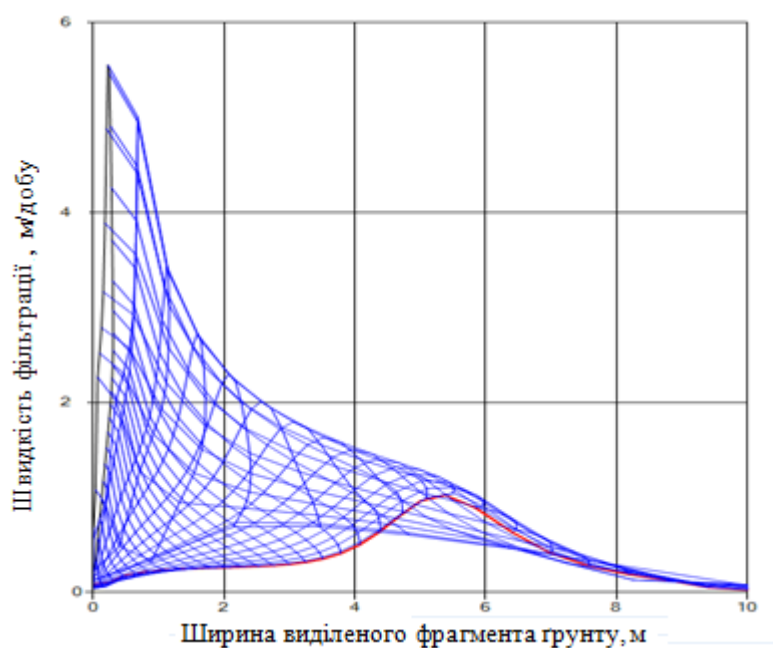


Рис. 3.14. Компонента швидкості фільтрації  $V_y$

В результаті розв'язання задачі перенесення солей в області повного насичення отримали наступний графік розподілу поля концентрації сольових розчинів (рис. 3.15):

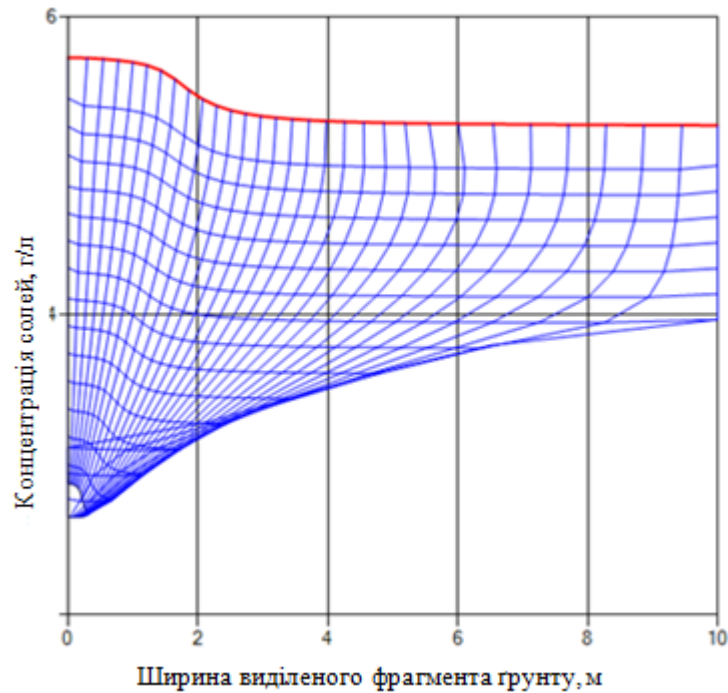


Рис. 3.15. Розподіл концентрації сольових розчинів

На представленому рис. 3.15 спостерігається монотонне спадання концентрації солей з глибиною та з часом. Найбільше значення концентрації спостерігається в околі вільної межі, де швидкість фільтрації є найменшою.

Для побудови чисельного конформного відображення області неповного насичення, аналогічно до побудови чисельного конформного відображення області повного насичення, застосовано алгоритм розглянутий в п. 3.1.4.4.

Межі області  $G_2$  задаються у вигляді

$$DF: x_{i0} = 0, \quad y_{i0} = i \cdot h_1,$$

$$FE: x_{nj} = jh_2, \quad y_{nj} = b,$$

$$CE: x_{im} = a, \quad y_{im} = ih_2,$$

$$DC: x_{0j} = jh_1, \quad y_{0j}^k = \begin{cases} \frac{b}{2} + \arctg\left(x_{0j} + \frac{a}{2}\right), & k = 0 \\ b_1 - ih_2, & k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

$$h_1 = \frac{b - b_1}{n}, \quad h_2 = \frac{a}{m}.$$

В результаті реалізації обчислювального алгоритму конформне відображення області неповного насичення має вигляд (рис. 3.16)

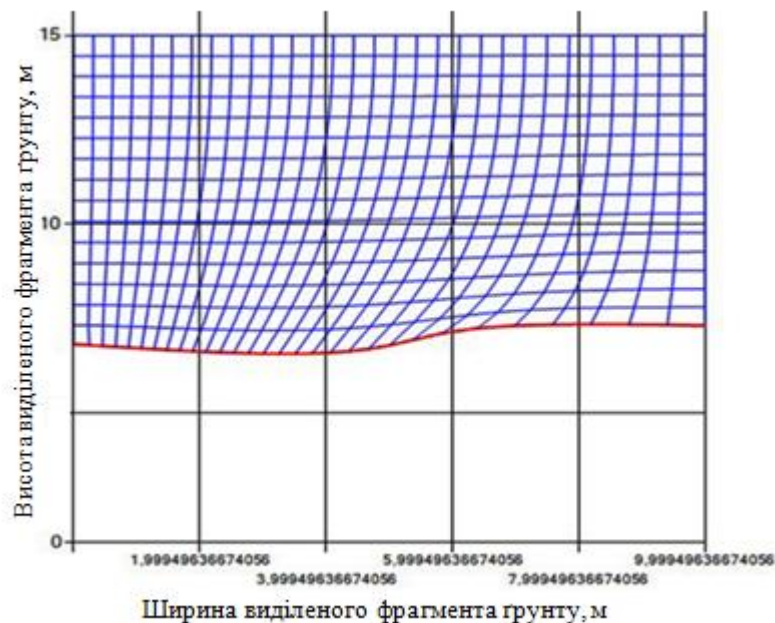


Рис. 3.16. Конформна різницева сітка області неповного насичення

На рис. 3.16 представлена різницева сітка потоку води з вільною поверхнею, яка є внутрішньою межею контакту областей повного і неповного насичення.

Для знаходження розв'язку задачі вологоперенесення було знайдено значення функцій водопроникності  $K(h)$  та вологоємності  $\mu(h)$ .

Розрахувавши значення координат  $x_{ij}$ ,  $y_{ij}$ ,  $i = \overline{0, n}$ ,  $j = \overline{0, m}$  отриманої різницевої сітки, здійснено розрахунок розподілу напорів води у всіх вузлових точках області. В результаті чого отримано значення поля розподілу напорів води для неповного насичення ґрунту, які мають наступну графічну візуалізацію (рис. 3.17):

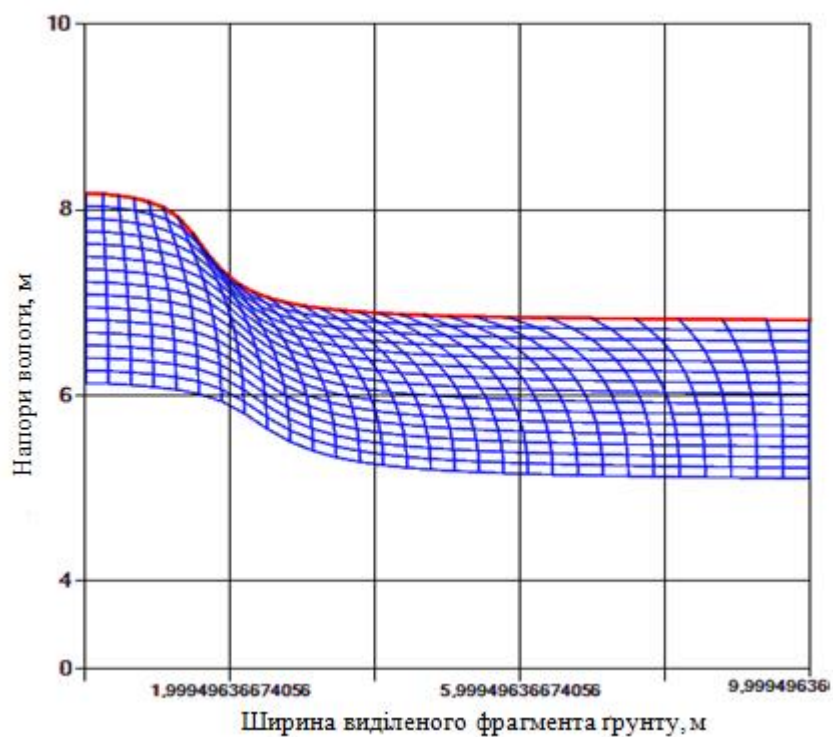


Рис. 3.17. Розподіл напорів вологи

Розподіл поля швидкостей вологоперенесення має вигляд (рис. 3.18, 3.19).

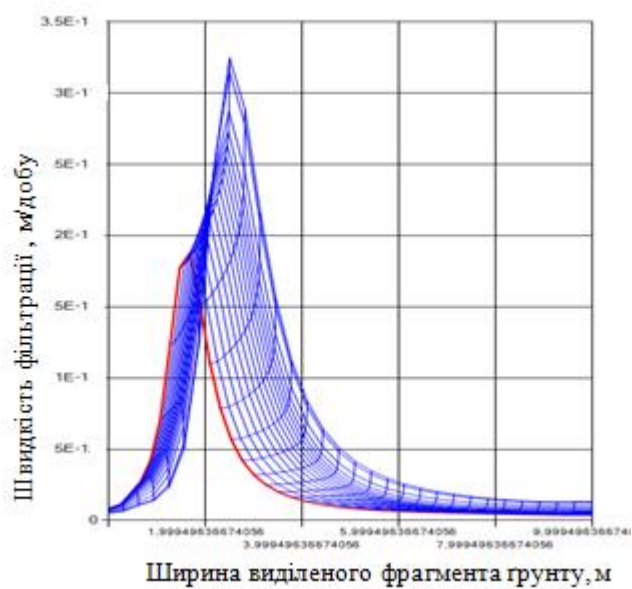


Рис. 3.18. Компонента швидкості вологоперенесення  $V_x$



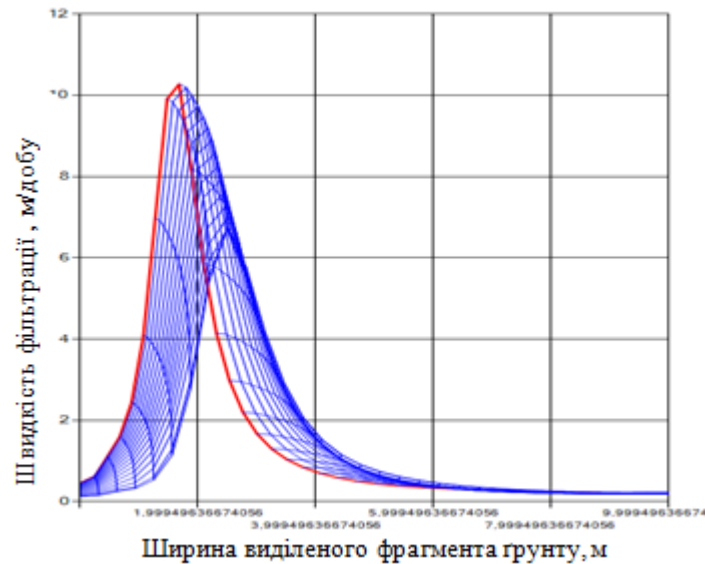


Рис. 3.19. Компонента швидкості вологоперенесення  $V_y$

Для знаходження розв'язку задачі перенесення солей в області неповного насичення знайдено значення функцій конвективної дифузії  $D_2(c_2)$ , коефіцієнта фільтрації  $k(c_2, \omega) = k(c_2) + k(\omega)$ , залежного від концентрації  $c$  та води  $\omega$ . Значення функції  $k(\omega)$  знайдено з задачі вологоперенесення. Початковий розподіл поля концентрації задано за експоненціальним законом:

$$C_{nj}^k = C_0 - e^{-jy_{nj}}, C_0 = 20, j = \overline{0, n}, k = \overline{0, t}.$$

Візуалізація отриманих значень розподілу концентрації сольових розчинів представлена на рис. 3.20.

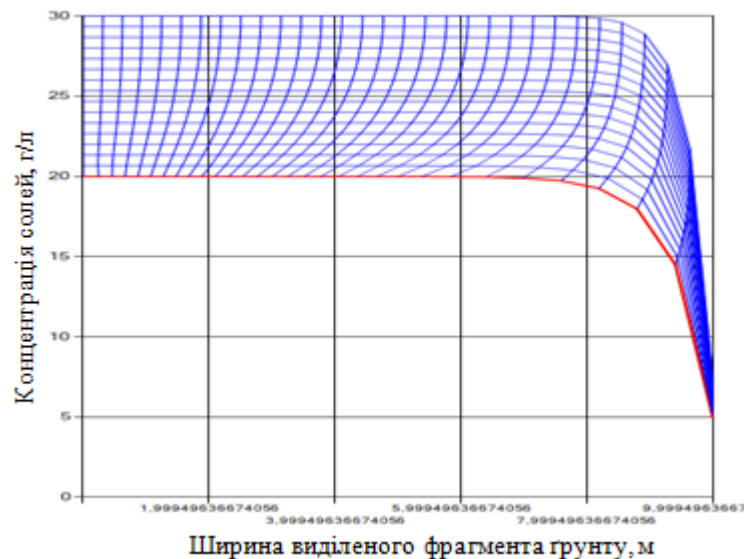


Рис. 3.20. Розподіл концентрації солей в області неповного насичення

На представленому рис. 3.20 спостерігається монотонне спадання концентрації солей з глибиною та з часом.

Для того, щоб зрозуміти та спрогнозувати досліджувані процеси в досліджуваній області, необхідно розглядати насичене і ненасичене середовище як одне ціле. Для цього необхідно знайти взаємозв'язок між процесами, що відбуваються в ньому. Тому на основі вище наведених результатів побудови різницевої сітки даних областей, побудовано спільну конформну різницеву сітку області насичено-ненасиченого ґрунтового середовища, яка має вигляд (рис. 3.21)

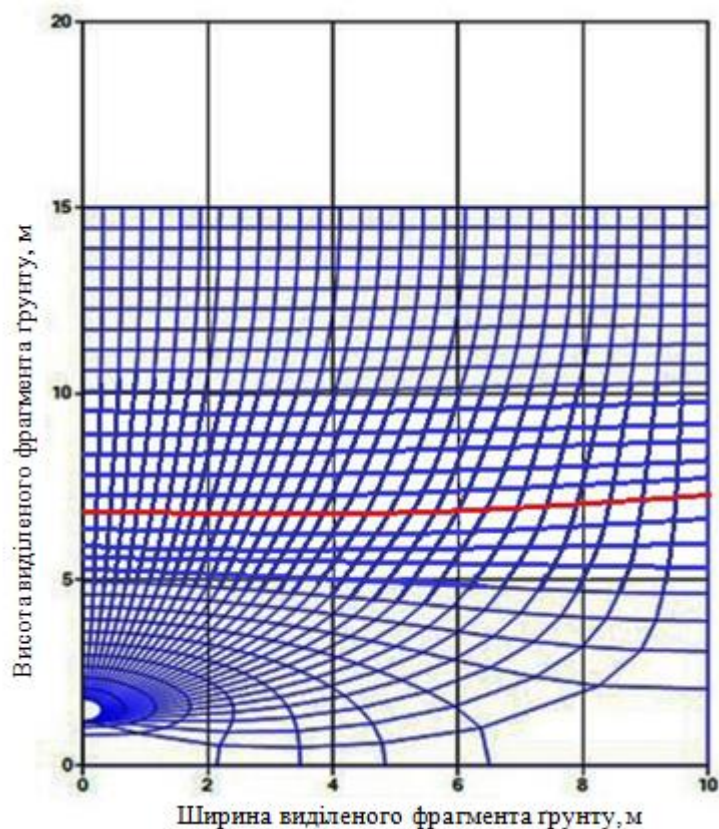


Рис. 3.21. Конформна різницева сітка області насичено-ненасиченого ґрунтового середовища

В результаті розв'язання задачі солеперенесення в областях повного та неповного насичення у випадку осушувального режиму, проведено дослідження руху вільної межі з часом та враховано вплив фільтраційного потоку на вигляд вільної поверхні.

В процесі знаходження розв'язку задачі фільтрації вільна межа уточнюється за рівнянням

$$y_{nj}^{k+1} = y_{nj}^k - \alpha j h_1, \quad \alpha = 0,02, \quad j = \overline{0, n}, \quad k = \overline{0, t}, \quad t = 5.$$

Врахувавши наведене рівняння, отримано конформну різницеву сітку з новим положенням вільної межі (рис. 3.22).

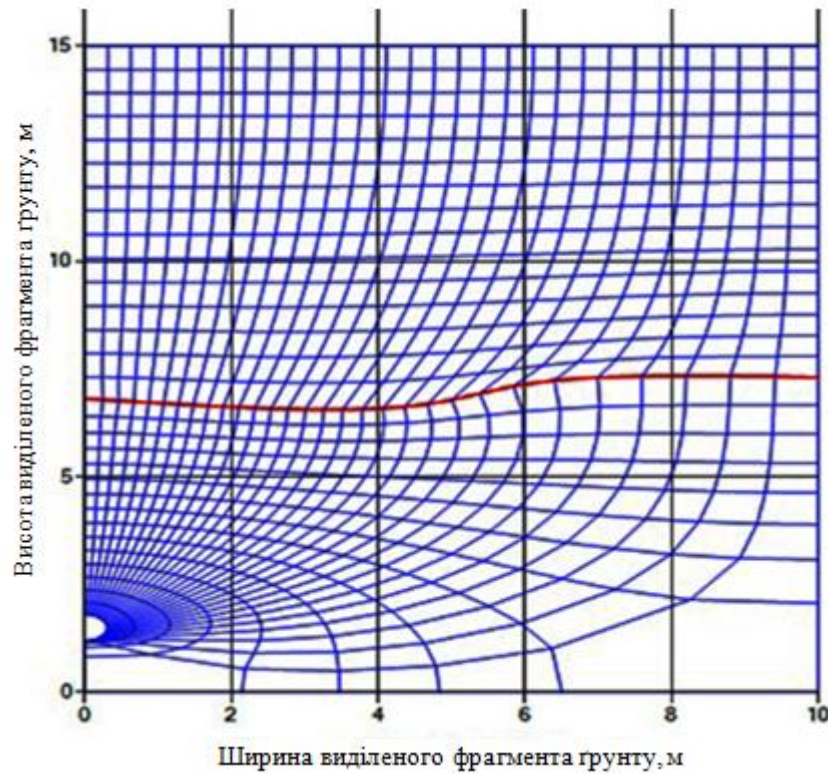


Рис. 3.22. Конформна різницєва сітка з урахуванням фільтраційного потоку

Рух вільної поверхні з часом наведено на рис. 3.23.

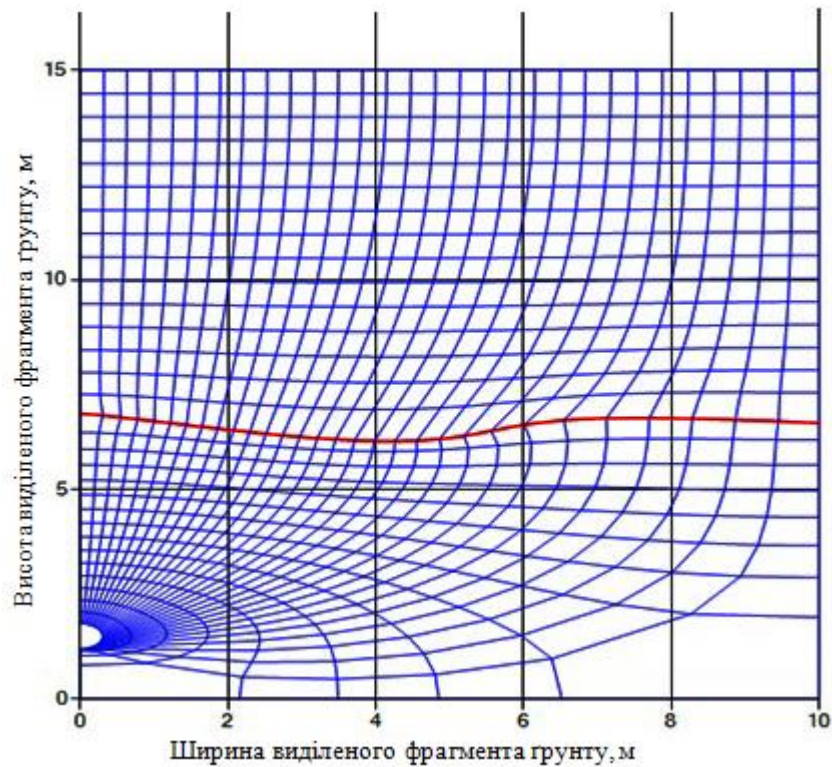


Рис. 3.23. Конформна різницєва сітка зміни положення вільної поверхні з часом

В результаті розв'язання поставленої задачі у випадку осушувального режиму та проведення ряду чисельних експериментів, проаналізувавши вищенаведені результати, можна зробити наступні висновки:

- розподіл п'єзометричних напорів зростає з глибиною, набуваючи найбільших значень в околі дрени (рис. 3.12);
- розподіл концентрації сольових розчинів в області повного насичення солей спадає з глибиною, набуваючи найменших значень в околі дрени, де спостерігається зростання швидкості фільтрації сольових розчинів (рис. 3.13-3.15); зростання значень концентрації солей спостерігається в околі вільної поверхні; при цьому поле розподілу концентрації монотонно спадає по всій області фільтрації за рахунок вимивання сольових розчинів через дренаж.
- напір води зростає з глибиною і найбільших значень набуває в околі вільної поверхні (рис. 3.17);

- зростання значень напорів води на вільній поверхні спостерігається і для задачі швидкості вологоперенесення в області неповного насичення (рис. 3.18, 3.19);

- значення розподілу поля концентрації спадають з глибиною, набуваючи найменших значень на вільній поверхні, тобто, розподіл концентрації спадає по всій області вологоперенесення (рис. 3.20);

- під дією фільтраційного потоку та з часом у випадку осушувального режиму вільна межа рухається вниз, зміна її положення складає 13-15%, що зумовлює перерозподіл напорів та концентрації сольових розчинів (рис. 3.22, 3.23)

- поле розподілу концентрації сольових розчинів в області насичено-ненасиченого середовища з глибиною та часом зменшується за рахунок вимивання сольових розчинів через дренаж під дією процесів фільтрації та вологоперенесення.

## **3.2 Математичне моделювання перенесення солей при сумісній фільтрації та вологоперенесенні у насичено-ненасиченому ґрунтовому масиві при його зволоженні**

### **3.2.1 Постановка задачі**

Розглядається задача плоско-вертикальної безнапірної стаціонарної фільтрації сольового розчину до горизонтального систематичного дренажу при наявності вільної поверхні (кривої депресії) ґрунтових вод (рис. 3.24) [46, 47].

В результаті цього, в ґрунтовому масиві утворюється дві області:  $\Omega_1$  – область повного насичення, зайнята фільтраційним потоком,  $\Omega_2$  – область неповного насичення (область вологоперенесення).

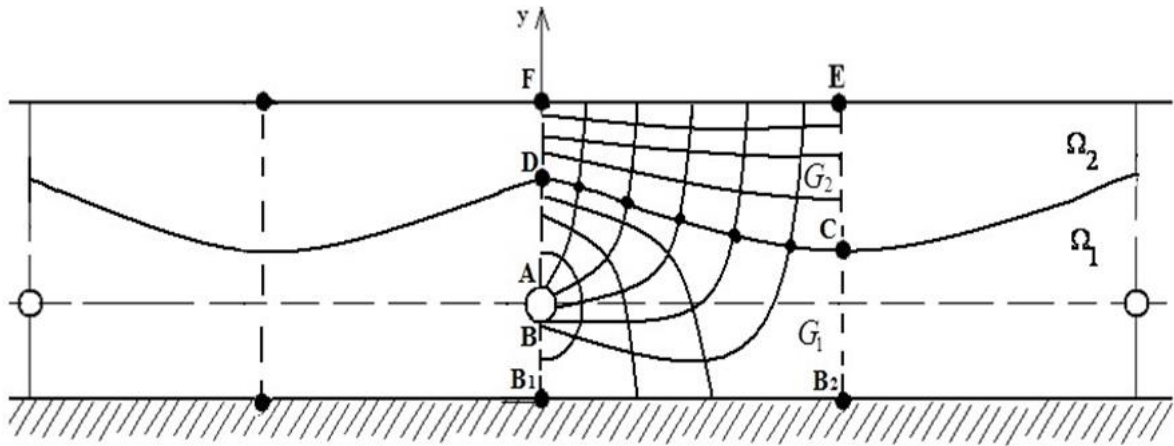


Рис. 3.24. Фільтрація сольового розчину до горизонтального систематичного дренажу

Оскільки розглядувана схема дренажу є симетричною, доцільно розглядати лише виділений її фрагмент  $ABB_1B_2EF$  (рис. 3.25). Виділена область складається з двох підобластей: області повного насичення  $G_1$ , та неповного насичення  $G_2$ , розділених вільною поверхнею (кривою депресії)  $DC$ . Область  $G_1$  містить дренаж, через яку відбувається нагнітання сольових розчинів в ґрунтове середовище. Тому задача розглядається у випадку зволоження ґрунтового масиву.

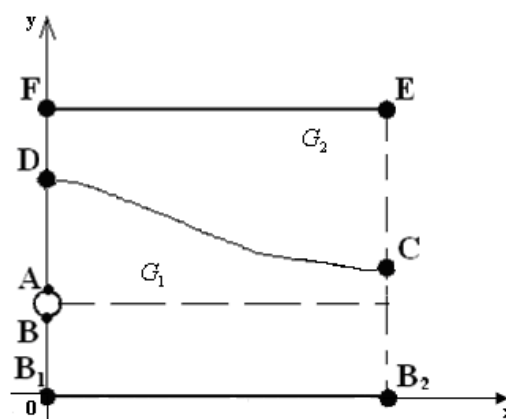


Рис. 3.25. Характерний фрагмент областей повного і неповного насичення

Розглянемо задачу перенесення солей в насичено-ненасиченій області у випадку зволожуючого режиму (рис. 3.25). Проведемо дослідження процесів

фільтрації сольових розчинів під дією дренажу в області повного насичення  $G_1$ , вологоперенесення з урахуванням перенесення солей в області неповного водонасичення  $G_2$ , перенесення солей під дією процесів фільтрації та вологоперенесення у насичено-ненасиченому ґрунтовому середовищі.

### 3.2.2 Математичне моделювання процесу перенесення солей при фільтрації ґрунтових вод та вологоперенесенні у насиченому та ненасиченому ґрунтовому середовищі при наявній вільній поверхні

#### 3.2.2.1 Математична модель задачі в області повного насичення

Математична модель задачі перенесення солей з урахуванням процесів фільтрації ґрунтових вод та вологоперенесення описується контактної-крайовою задачею, яка складається з двох нелінійних систем диферціальних рівнянь.

В області повного насичення  $G_1$  процес масоперенесення за фільтрації сольових розчинів описується наступною системою диферціальних рівнянь [46, 47, 54-61, 68, 69, 71, 75, 83]:

$$\frac{\partial \left( D_1(c_1) \frac{\partial c_1}{\partial x} \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left( D_1(c_1) \frac{\partial c_1}{\partial y} \right)}{\partial y} - v_1 \frac{\partial c_1}{\partial x} - v_2 \frac{\partial c_1}{\partial y} - \gamma(c_1 - C^*) = \sigma \frac{\partial c_1}{\partial t}, \quad (3.106)$$

$$\vec{v} = -k(c_1) \text{grad} h, \quad \text{div} \vec{v} = 0, \quad (3.107)$$

яка доповнюється умовами для концентрації сольових розчинів

$$c_1(x, y, 0) = \tilde{C}_0^1(x, y), \quad \frac{\partial c_1}{\partial n} \Big|_{AD \cup BB_1 \cup B_2C \cup B_1B_2} = 0, \quad c_1 \Big|_{CD} = \tilde{C}_1^1, \quad c_1 \Big|_{AB} = \tilde{C}_2^1 \quad (3.108)$$

та п'єзометричних напорів

$$h \Big|_{AB} = h \Big|_{r=r_1} = H_1^1, \quad \frac{\partial h}{\partial n} \Big|_{AD} = \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial n} \Big|_{BB_1B_2C} = \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{x=l} = \frac{\partial h}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0$$

,(3.109)

заданих на межах області фільтрації та дрені.

На кривій депресії  $CD$  задаються додаткові умови для напору та концентрації солей відповідно [46, 69, 82]

$$h = y, \quad \frac{dh}{dn} = \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial x} = 0, \quad (3.110)$$

$$c_1(x, y, t) = c_2(x, y, t), \quad D_1(c_1) \frac{\partial c_1}{\partial n} - v_1 c_1 = D_2(c_2) \frac{\partial c_2}{\partial n} - v_2 c_2.$$

Тут:  $D_1(c_1)$  – коефіцієнт конвективної дифузії;  $c_1(x, y, t)$  – концентрація сольового розчину,  $v_x, v_y$  – компоненти швидкості фільтрації, які знаходяться з розв'язку задачі фільтрації;  $C^*$  – концентрація граничного насичення сольового розчину;  $\gamma$  – коефіцієнт інтенсивності масообміну;  $\sigma$  – пористість ґрунту.

Після перетворення (3.106), (3.107) отримаємо

$$D_1(c_1) \left( \frac{\partial^2 c_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_1}{\partial y^2} \right) - v_1 \frac{\partial c_1}{\partial x} - v_2 \frac{\partial c_1}{\partial y} - \gamma(c - C^*) = \sigma \frac{\partial c_1}{\partial t},$$

$$k(c_1) \left( \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial k(c_1)}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial k(c_1)}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial y} = 0,$$

де  $v_1 = v_x(c_1) - \frac{\partial D_1(c_1)}{\partial x}$ ,  $v_2 = v_y(c_1) - \frac{\partial D_1(c_1)}{\partial y}$ ,  $v_x = -k(c_1) \frac{\partial h}{\partial x}$ ,  $v_y = -k(c_1) \frac{\partial h}{\partial y}$ .

### 3.2.2.2 Математична модель задачі в області неповного насичення

Процес перенесення солей з урахуванням вологоперенесення в області неповного насичення  $G_2$  описується системою диференціальних рівнянь вигляду [46, 47, 52, 69, 54-61, 81]

$$\frac{\partial \left( D_2(c_2) \frac{\partial c_2}{\partial x} \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left( D_2(c_2) \frac{\partial c_2}{\partial y} \right)}{\partial y} - \omega \sigma V_x \frac{\partial c_2}{\partial x} - \omega \sigma V_y \frac{\partial c_2}{\partial y} - f(\omega) c_2 = \sigma \frac{\partial c_2}{\partial t}, \quad (3.111)$$

$$\mu(h) \frac{\partial h}{\partial t} = \operatorname{div}(K(h) \operatorname{grad} h), \quad (3.112)$$

$$V_x = -k(c, h) \frac{\partial h}{\partial x}, \quad V_y = -k(c, h) \frac{\partial h}{\partial y}, \quad (3.113)$$



яка доповнюється наступними крайовими умовами для концентрації сольових розчинів та напорів води відповідно

$$\left. \frac{\partial c_2}{\partial n} \right|_{DC} = 0, \quad c_2 \Big|_{FE} = \tilde{C}_1^2, \quad \left. \frac{\partial c_2}{\partial x} \right|_{DF \cup CE} = 0, \quad c_2 \Big|_{t=0} = \tilde{C}_0^2(x, y), \quad (3.114)$$

$$h \Big|_{DC} = y, \quad h \Big|_{FE} = \tilde{H}_1^2, \quad \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{DF \cup CE} = 0, \quad h \Big|_{t=0} = \tilde{H}_0^2(x, y). \quad (3.115)$$

Тут:  $c_2(x, y, t)$  – концентрація сольового розчину в області неповного насичення,  $D_2(c_2)$  – коефіцієнт конвективної дифузії,  $f(\omega)$  – функція джерел,  $\omega$  – вологість ґрунту,  $\sigma$  – пористість ґрунту;  $V_x, V_y$  – компоненти швидкості фільтрації,  $k(c, h)$  – коефіцієнт фільтрації,  $\mu(h)$  – функція вологоємності;  $h$  – напір води;  $K(h)$  – коефіцієнт водопроникності.

Після перетворення (3.111) отримаємо рівняння, яке будемо розглядати в подальшому.

$$D_2(c_2) \left( \frac{\partial^2 c_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_2}{\partial y^2} \right) - v_1(\omega, c_2) \frac{\partial c_2}{\partial x} - v_2(\omega, c_2) \frac{\partial c_2}{\partial y} - f(\omega) c_2 = \sigma \frac{\partial c_2}{\partial t},$$

де коефіцієнти  $v_1(\omega, c_2)$   $v_2(\omega, c_2)$  обчислюються згідно формул [120, 156, 171]

$$v_1(\omega, c_2) = \omega \sigma V_x - \frac{\partial D_2(c_2)}{\partial x}, \quad v_2(\omega, c_2) = \omega \sigma V_y - \frac{\partial D_2(c_2)}{\partial y}, \quad \omega = ap + b = apg(h + y) + b.$$

### 3.2.3 Чисельний метод розв'язування задачі

Для чисельного розв'язування задачі перенесення солей при фільтрації та вологоперенесенні у насичено-ненасиченому ґрунтовому середовищі, описаної математичними моделями (3.106-3.110), (3.111-3.115), використано метод скінченних різниць [87, 163, 164, 166-168] з застосуванням чисельного методу конформних відображень в оберненій постановці [29, 41, 42, 86, 108, 155], які було модифіковано шляхом їх адаптації до розв'язання поставленої нелінійної контактної-крайової задачі.

В зв'язку з цим відображено область, яка складається з двох підобластей (рис. 3.26 а), на параметричний прямокутник (рис. 3.26 б). Відображена область

складається з двох криволінійних чотирикутників  $ABCD$  і  $CDFE$  зі спільною невідомою межею (кривою депресії)  $CD$ , яка знаходиться в процесі розв'язування задачі.

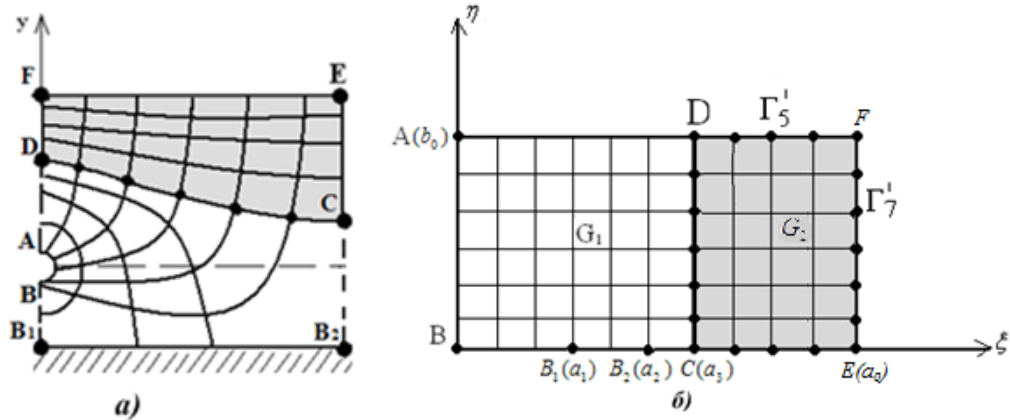


Рис. 3.26. Чисельне конформне відображення виділеного фрагмента області  $G_z$  повного та неповного насичення на параметричний прямокутник  $G_\zeta$

Обчислювальний алгоритм побудови чисельного конформного відображення криволінійного чотирикутника на параметричний прямокутник областей повного та неповного насичення наведено у п.п. 3.1.2.4, 3.1.4.4.

Для знаходження чисельного розв'язку поставлених задач необхідно представити рівняння математичної моделі фізичної області (3.106-3.110) (3.111-3.115) в нових змінних області комплексного потенціалу  $\xi, \eta$  аналогічно до п.п. 3.1.2.3, 3.1.3.3 та п.п. 3.1.4.3, 3.1.4.4. Чисельний метод розв'язування задач будуватиметься аналогічно розв'язуванню задач, представлених п. 3.1.

### 3.2.4 Результати чисельних експериментів та їх аналіз

Чисельний алгоритм розв'язування задачі реалізовано за допомогою розробленого програмного комплексу, який дозволяє здійснити побудову чисельних конформних відображень областей повного і неповного насичення, в яких знайдено розв'язки задач фільтрації сольових розчинів, вологоперенесення, перенесення солей, побудувати графіки полів швидкостей фільтрації та вологоперенесення, п'єзометричних напорів, напорів вологи,

концентрації сольових розчинів в областях повного і неповного водо насичення.

Програмна реалізація та чисельні експерименти проводилися при сталих граничних і початкових умовах при таких вхідними даних [31, 32, 43,120, 135, 145, 156, 171, 181]:  $T = 60$  діб,  $l_1 = 10$  м,  $l_2 = 15$  м,  $\sigma = 0,4$ ,  $\gamma = 0,0065$ ,  $D_m = 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/добу,  $C^* = 350$  г/літр,  $\tilde{C}_1 = 3$  г/літр,  $\tilde{C}_2 = 20$  г/літр,  $H_1 = 5$  м,  $H_2 = 0,3$  м,  $p = 360$  Па,  $g = 9.8$  м/с<sup>2</sup>,  $\rho = 1000$  кг/м<sup>3</sup>,  $\lambda = 1 \div 10$ ,  $k(c) = 0.0002c^6 - 0.00088c^5 + 0.162c^4 - 1.3194c^3 + 3.9229c^2 + 0.0223c + 18.187$ ,  $c \in [0,1]$ .

Проведені чисельні експерименти дають можливість провести аналіз отриманих результатів та детально дослідити характер і прогноз протікання процесів.

Розглянемо результати побудови чисельного конформного відображення області фільтраційного потоку. Для побудови чисельного конформного відображення області повного насичення застосовано алгоритм, розглянутий в п. 3.1.2.4.

Реалізація алгоритму побудови конформного відображення області фільтрації проведена при наступними вхідними даними:  $m=30$  – кількість поділів відрізка по осі  $O_\xi$ ;  $n=15$  – кількість поділів відрізка по осі  $O_\eta$ ;  $h_1 = 1$  – крок по осі  $O_\xi$ ;  $h_2$  – крок по осі  $O_\eta$  знаходиться в процесі побудови відображення, початкове значення  $h_2$  дорівнює  $h_1$ ;  $a=10$  – довжина відрізка на осі  $O_\xi$ ;  $b=15$  – довжина відрізка на осі  $O_\eta$ ;  $r_1=0.3$  – радіус дрени.

Задаємо чотири фіксовані точки криволінійного чотирикутника:

$$A: x_{00} = 0, y_{00} = b/10 + r; B: x_{0m} = 0, y_{0m} = b/10 - r;$$

$$C: x_{nm} = a, y_{nm} = b/2 - \arctg(x_{nm} + a/2), D: x_{n0} = 0, y_{n0} = b/2 - \arctg(a/2).$$

Межі області повного насичення задаються у вигляді

$$AB: x_{0j} = \frac{b}{10} + r \cdot \cos\left(\frac{\pi}{m} j\right), \quad y_{0j} = \frac{b}{10} + r \cdot \sin\left(\frac{\pi}{m} j\right),$$

$$AD : x_{im} = 0, \quad y_{in} = \frac{b}{10} + r + ih_1,$$

$$DC : x_{nj} = jh_2, \quad y_{nj}^k = \begin{cases} \frac{b}{2} - \operatorname{arctg}\left(x_{nj} + \frac{a}{2}\right), & k = 0 \\ b_1 - ih_2, & k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

$$BB_1 : x_{im} = 0, \quad y_{im} = \frac{b}{10} - r - \frac{i}{h_1},$$

$$B_1B_2 : x_{im} = ih_2, \quad y_{im} = 0,$$

$$B_2C : x_{im} = a, \quad y_{im} = ih_1.$$

В результаті застосування чисельного алгоритму побудови конформного відображення здійснено побудову конформної різницевої сітки області повного насичення з вільною поверхнею, графічне представлення якої має вигляд (рис. 3.27)

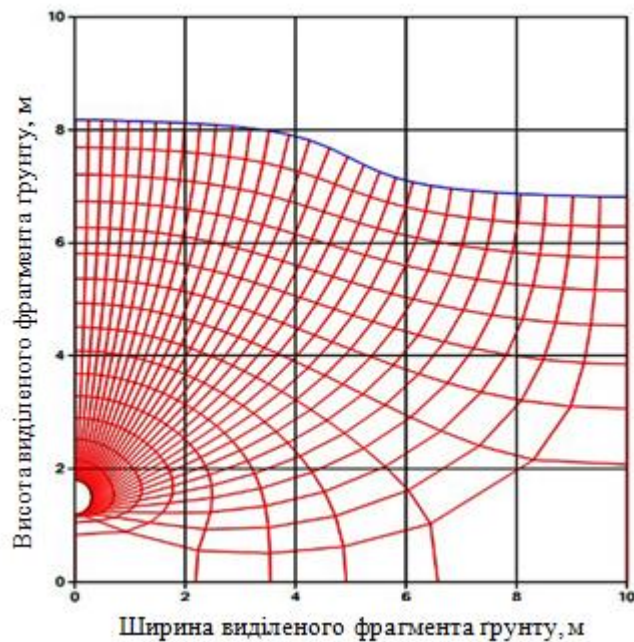


Рис. 3.27. Конформна різницева сітка області повного насичення

На рис. 3.27 представлена конформна різницева сітка фільтраційного потоку з вільною поверхнею. Верхня ізолінія побудованої різницевої сітки, яка є екіпотенціальною лінією, дає вигляд вільної поверхні.

Отримана конформна різницева сітка ортогональна і гідродинамічна. Одне сімейство ізолінії сітки є лініями течії, друге, ортогональне йому, – екіпотенціальними лініями. Отримана гідродинамічна сітка ортогональна межах області фільтрації. На основі візуалізації гідродинамічної сітки потоку видно її згущення до лівої межі області фільтрації.

Розрахувавши значення координат  $x_{ij}$ ,  $y_{ij}$ ,  $i = \overline{0, n}$ ,  $j = \overline{0, m}$  різницевої сітки, знайдено розподіл п'єзометричних напорів у всіх вузлових точках області повного насичення. Візуалізація отриманих значень представлена на рис. 3.28.

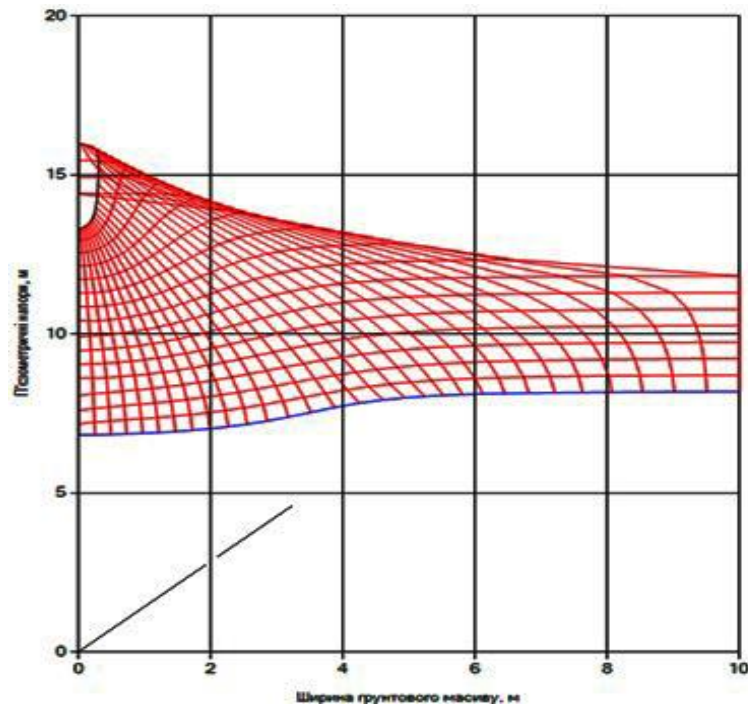


Рис. 3.28. Розподіл п'єзометричних напорів

Графічне представлення компонент швидкостей фільтрації  $V_x$ ,  $V_y$  є наступним (рис. 3.29, 3.30):

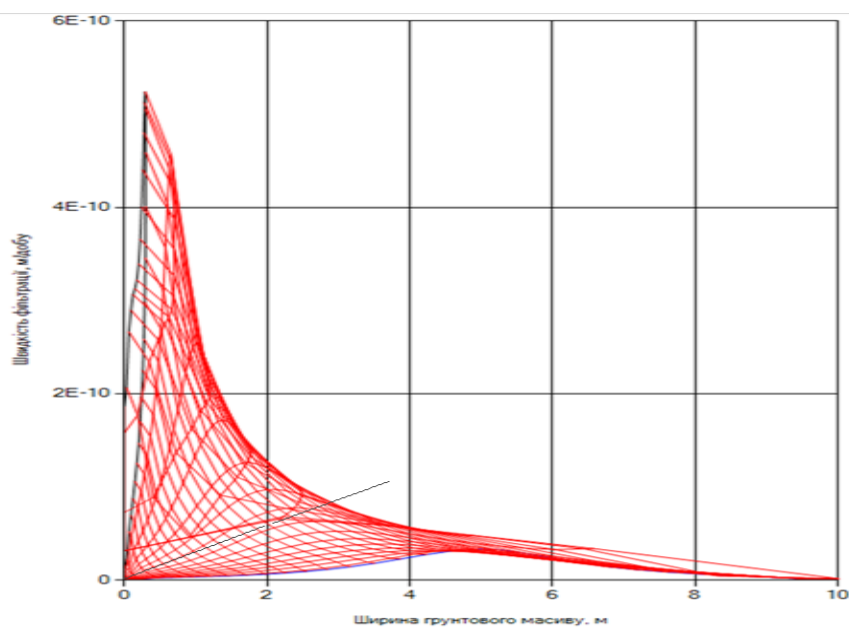


Рис. 3.29. Поле швидкостей фільтрації  $V_x$

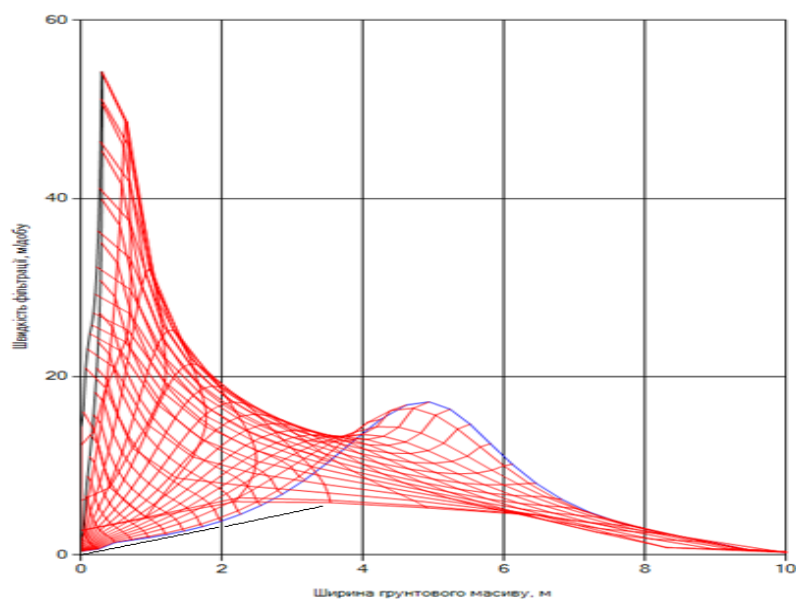


Рис. 3.30. Поле швидкостей фільтрації  $V_y$

Знайшовши значення розподілу напорів та швидкостей фільтрації, знайдено розв'язок задачі перенесення солей та отримано наступний розподіл поля концентрації сольових розчинів в межах даної області водонасичення. В

результаті розв'язання задачі солеперенесення отримали наступний графік розподілу концентрації солей у водонасиченому ґрунті (рис. 3.31):

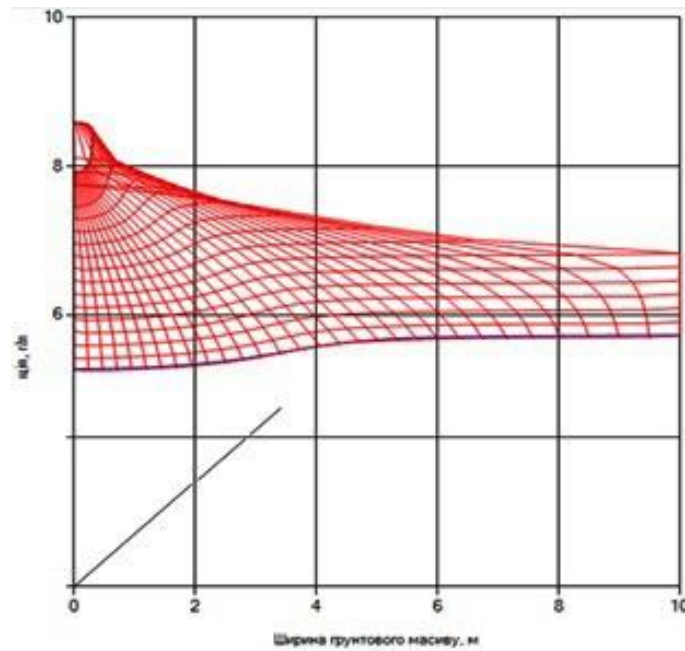


Рис. 3.31. Розподіл концентрації солей в області повного насичення

Для побудови чисельного конформного відображення області неповного насичення, аналогічно до побудови чисельного конформного відображення області повного насичення, застосовано алгоритм розглянутий в п. 3.1.4.4.

Межі області неповного насичення  $G_2$  задані наступним чином:

$$DF: x_{i0} = 0, \quad y_{i0} = i \cdot h_1,$$

$$FE: x_{nj} = jh_2, \quad y_{nj} = b,$$

$$CE: x_{im} = a, \quad y_{im} = ih_2,$$

$$DC: x_{0j} = jh_1, \quad y_{0j}^k = \begin{cases} \frac{b}{2} - \operatorname{arctg}\left(x_{0j} + \frac{a}{2}\right), & k = 0 \\ b_1 - ih_2, & k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

$$h_1 = \frac{b - b_1}{n}, \quad h_2 = \frac{a}{m}.$$

В результаті реалізації обчислювального алгоритму конформне відображення області неповного насичення має вигляд (рис. 3.32)

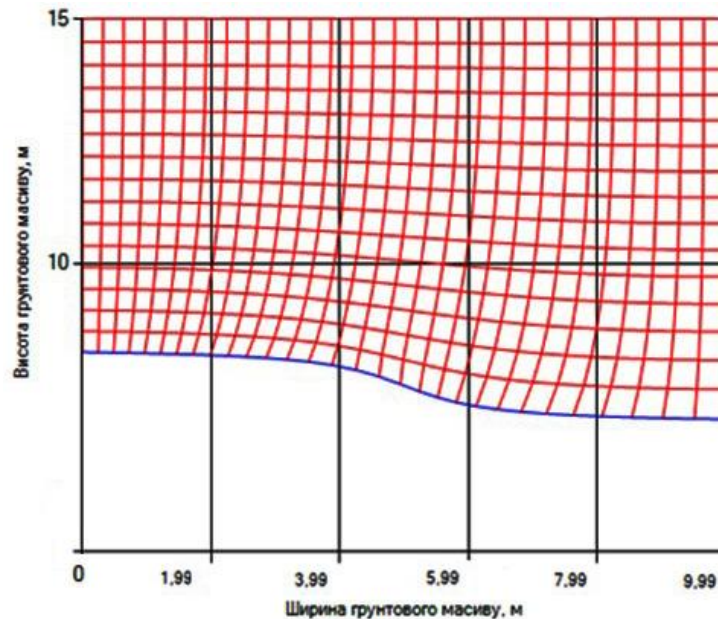


Рис. 3.32. Конформна різницєва сітка області неповного насичення

На рис. 3.32 представлена різницєва сітка потоку вологи з вільною поверхнею, яка є внутрішньою межею контакту областей повного і неповного насичення.

Розрахувавши значення координат  $x_{ij}$ ,  $y_{ij}$ ,  $i = \overline{0, n}$ ,  $j = \overline{0, m}$  отриманої різницєвої сітки, здійснено розрахунок розподілу напорів вологи у всіх вузлових точках області. В результаті чого отримали значення розподілу напорів вологи для неповного насичення ґрунту, які мають наступну графічну візуалізацію (рис. 3.33):



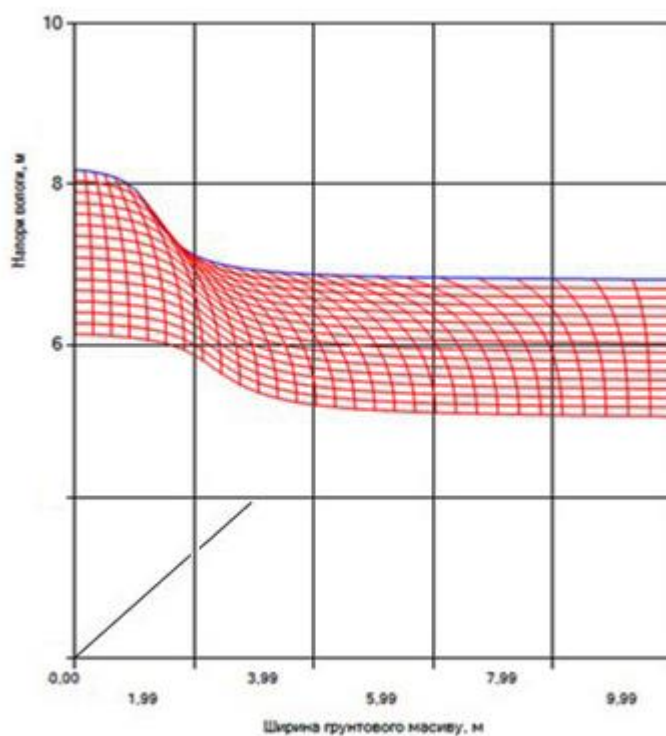


Рис. 3.33. Розподіл напорів води

Розподіл поля швидкості вологоперенесення в даній області водонасичення має вигляд (рис. 3.34, 3.35).

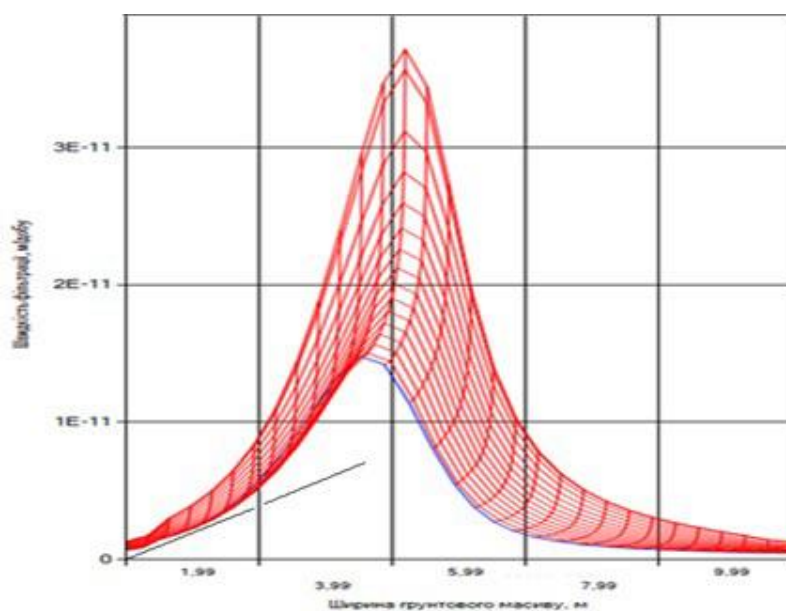


Рис. 3.34. Компонента швидкості вологоперенесення  $V_x$

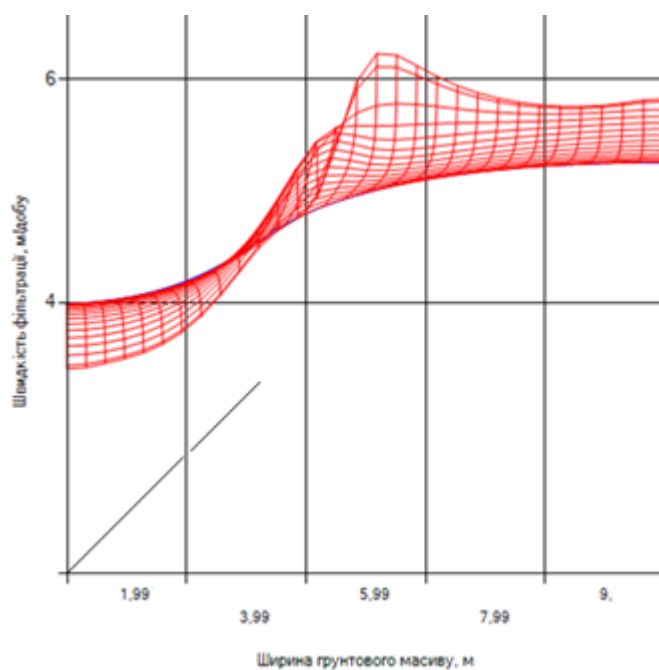


Рис. 3.35. Компонента швидкості вологоперенесення  $V_y$

В результаті розв'язання задачі перенесення солей при вологоперенесенні знайдено розподіл поля концентрації сольових розчинів в ґрунтовому середовищі (рис. 3.36).

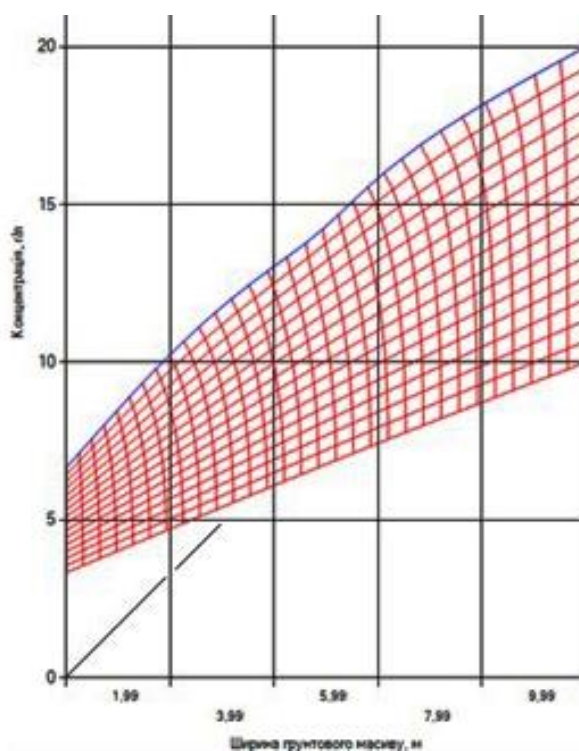


Рис. 3.36. Розподіл поля концентрації солей в області неповного насичення

На основі вище наведених результатів побудови різницевих сіток областей, побудовано спільну конформну різницеву сітку області насичено-ненасиченого ґрунтового масиву (рис. 3.37), яка є ортогональною та гідродинамічною.

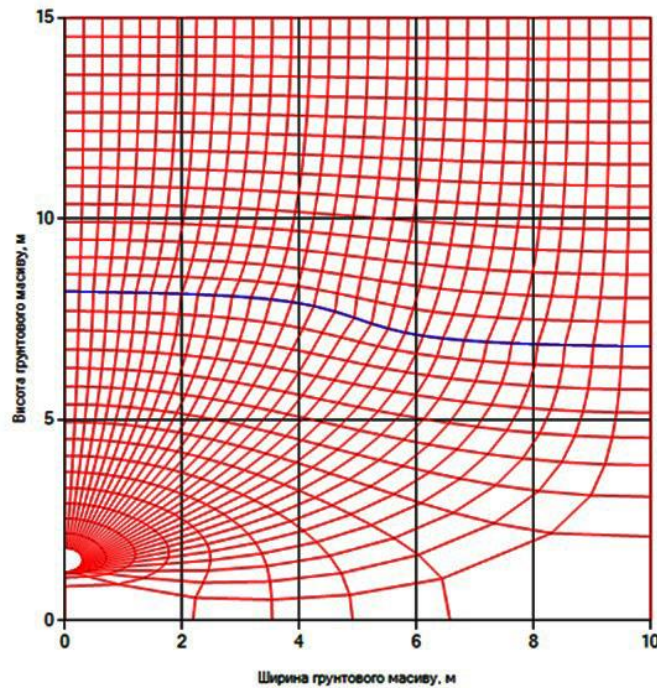


Рис. 3.37. Конформна різницєва сітка області насичено-ненасиченого ґрунтового середовища

Аналіз вищенаведених графіків показує, що в області повного насичення швидкість фільтрації зростає з глибиною і набуває найбільших значень в околиці дрени (рис. 3.29, 3.30), чим обумовлене зростання розподілу п'єзометричних напорів з глибиною (рис. 3.28); розподіл концентрації солей в даній області зростає з глибиною, набуваючи найменших значень в околиці вільної поверхні, де спостерігається спадання швидкостей фільтрації сольових розчинів, зростання значень концентрації спостерігається в околі дрени (рис. 3.31). Розподіл поля концентрації солей монотонно зростає по всій області фільтрації за рахунок нагнітання сольових розчинів через дренаж.

В області неповного насичення напір води зростає з глибиною і найбільших значень приймає в околі вільної поверхні (рис. 3.33). Зростання значень напорів води на вільній поверхні спостерігається і для задачі

швидкості вологоперенесення в даній області (рис. 3.34, 3.35), але отримані значення швидкості вологоперенесення значно менші у порівнянні зі значеннями в області фільтрації. Значення розподілу поля концентрації зростають з глибиною, найбільші значення досягаються на вільній поверхні, тобто, розподіл концентрації солей зростає по всій області вологоперенесення (рис. 3.36).

Розподіл поля концентрації сольових розчинів в області насичено-ненасиченого середовища з глибиною збільшується за рахунок нагнітання сольових розчинів через дренаж.

### 3.3 Математичне моделювання перенесення солей при нестационарній фільтрації та вологоперенесенні у насичено-ненасичених ґрунтах

#### 3.3.1 Постановка задачі

Розглядається задача плоско-вертикальної нестационарної фільтрації сольового розчину до горизонтального дренажу при наявності вільної поверхні ґрунтових вод (рис. 3.38) [53, 70, 74, 83, 84].

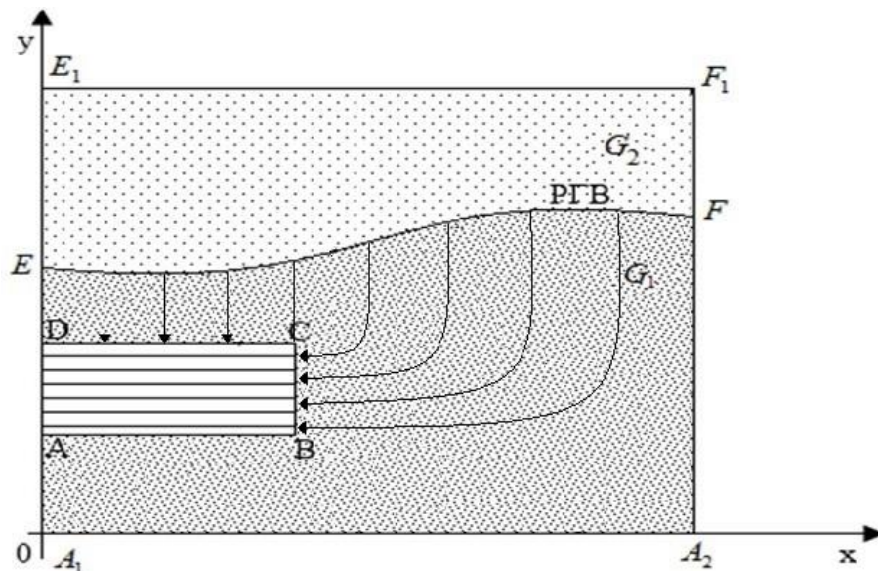


Рис. 3.38. Фільтрація сольового розчину до горизонтального дренажу

В результаті цього, в ґрунтовому масиві утворюється дві області:  $G_1$  – область повного насичення, зайнята нестационарним фільтраційним потоком;  $G_2$  – область неповного насичення (область вологоперенесення).

Область повного насичення  $G_1$  містить дренаж прямокутної форми, яка виконує функцію фільтра-вловлювача.

Потрібно дослідити процес нестационарної фільтрації сольових розчинів до дренажу в області повного насичення та процес вологоперенесення з урахуванням масоперенесення в області неповного насичення.

### 3.3.2 Математична модель задачі перенесення солей при нестационарній фільтрації в області повного насичення

Математична модель задачі масоперенесення солей при нестационарній фільтрації в області повного насичення  $\Omega_1$  має вигляд [53, 70, 74, 83, 84].

$$\frac{\partial \left( D_1(c_1) \frac{\partial c_1}{\partial x} \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left( D_1(c_1) \frac{\partial c_1}{\partial y} \right)}{\partial y} - v_x(c_1) \frac{\partial c_1}{\partial x} - v_y(c_1) \frac{\partial c_1}{\partial y} - \gamma_1(c_1 - C^*) = \sigma_1 \frac{\partial c_1}{\partial t}, \quad (3.116)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k_1(c_1) \frac{\partial h_1}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_1(c_1) \frac{\partial h_1}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( v(c_1) \frac{\partial c_1}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( v(c_1) \frac{\partial c_1}{\partial y} \right) = a \frac{\partial h_1}{\partial t}, \quad (3.117)$$

$$v_x(c_1) = -k(c_1, h_1) \frac{\partial h_1}{\partial x} + v(c_1) \frac{\partial c_1}{\partial x}, \quad v_y(c_1) = -k(c_1, h_1) \frac{\partial h_1}{\partial y} + v(c_1) \frac{\partial c_1}{\partial y}. \quad (3.118)$$

де (3.116) – рівняння масоперенесення сольових розчинів; (3.117) – рівняння нестационарної фільтрації; (3.118) – компоненти швидкостей фільтрації. В рівняннях (3.116)-(3.118) використані такі позначення:  $D_1(c_1)$ ,  $D_2(c_2)$  – коефіцієнти конвективної дифузії,  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  – коефіцієнти інтенсивності масообміну,  $C_1^*$ ,  $C_2^*$  – концентрації граничного насичення сольових розчинів;  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  – пористості ґрунтів,  $k_1(c_1, h_1)$ ,  $k_2(c_2, h_2)$  – коефіцієнти фільтрації;  $h_1$  – п'єзометричний напір;  $v_1(c_1)$ ,  $v_2(c_2)$  – осмотичні функції.

До рівнянь (3.116)-(3.118) додаються наступні крайові умови:

- для напору рідини  $h_1(x, y, t)$ :

$$h_1(x, y, 0) = \tilde{H}_0(x, y), \quad h_1|_{EF} = y, \quad h_1|_{ABCD} = \tilde{H}_1,$$

$$\left. \frac{\partial h_1}{\partial n} \right|_{AA_1 \cup A_1 A_2 \cup A_2 F \cup DE} = 0 \quad \text{або} \quad \left. \frac{\partial h_1}{\partial y} \right|_{A_1 A_2} = 0, \quad \left. \frac{\partial h_1}{\partial x} \right|_{AA_1 \cup A_2 F \cup DE} = 0; \quad (3.119)$$

– для концентрації солей  $c_1(x, y, t)$ :

$$c_1(x, y, 0) = \tilde{C}_0(x, y), \quad c_1|_{ABCD} = \tilde{C}_1, \quad c_1|_{EF} = \tilde{C}_2,$$

$$\left. \frac{\partial c}{\partial n} \right|_{AA_1 \cup A_1 A_2 \cup A_2 F \cup DE} = 0 \quad \text{або} \quad \left. \frac{\partial c}{\partial y} \right|_{A_1 A_2} = 0, \quad \left. \frac{\partial c}{\partial x} \right|_{AA_1 \cup A_2 F \cup DE} = 0. \quad (3.120)$$

### 3.3.2.1 Чисельний метод розв'язування задачі нестационарної фільтрації

Для знаходження чисельного розв'язку задачі масоперенесення в області насичено-ненасиченого ґрунтового середовища використаємо метод скінченних різниць [87, 163, 164, 166-168].

Побудуємо обчислювальний алгоритм знаходження розв'язку задачі нестационарної фільтрації в області повного насичення  $G_1$ , описаної диференціальним рівнянням (3.117).

Для цього використаємо ЛОС О.А. Самарського [87, 163, 164, 166-168], згідно якої вихідну крайову задачу розіб'ємо на дві одновимірні крайові задачі.

Тоді на основі рівняння (3.117) задача нестационарній фільтрації запишеться у вигляді наступних задач при відповідних крайових умовах:

I. для повздовжньої прогонки у напрямку осі ОХ:

$$\frac{\partial^2 h_1}{\partial x^2} - \frac{\nu(c_1)}{k_1(c_1)} \frac{\partial^2 c_1}{\partial x^2} = \frac{0,5a}{k_1(c_1)} \frac{\partial h_1}{\partial t}. \quad (3.121)$$

II. для поперечної прогонки в напрямку ОУ маємо

$$\frac{\partial^2 h_1}{\partial y^2} - \frac{\nu(c_1)}{k_1(c_1)} \frac{\partial^2 c_1}{\partial y^2} = \frac{0,5a}{k_1(c_1)} \frac{\partial h_1}{\partial t}. \quad (3.122)$$

Для знаходження розв'язку задач (3.121), (3.122) застосуємо неявну різницеву схему [87, 132, 164, 166, 167].

Неявна різницєва схема для поздовжньої прогонки (3.121) має вигляд

$$\frac{H_{li-1,j}^{k+\frac{1}{2}} - 2H_{li,j}^{k+\frac{1}{2}} + H_{li+1,j}^{k+\frac{1}{2}}}{h_1^2} - \frac{\nu(c_1)}{k_1(c_1)} \frac{C_{li-1,j}^{k+\frac{1}{2}} - 2C_{li,j}^{k+\frac{1}{2}} + C_{li+1,j}^{k+\frac{1}{2}}}{h_1^2} = \frac{0,5a}{k_1(c_1)} \frac{H_{li,j}^{k+\frac{1}{2}} - H_{li,j}^k}{0,5\tau}, \quad (3.123)$$

$$H_{1,i,j}^0 = \tilde{H}_0^1, \quad H_{1,0,j}^{k+\frac{1}{2}} = H_{1,1,j}^k, \quad H_{1,n,j}^{k+\frac{1}{2}} = H_{1,n-1,j}^1.$$

Згрупувавши подібні члени в (3.132), отримаємо

$$\begin{aligned} H_{li-1,j}^{k+\frac{1}{2}} \left[ \frac{1}{h_1^2} \right] - H_{li,j}^{k+\frac{1}{2}} \left[ \frac{2}{h_1^2} + \frac{a}{k_1(c_1)\tau} \right] + H_{li+1,j}^{k+\frac{1}{2}} \left[ \frac{1}{h_1^2} \right] = -\frac{a}{k_1(c_1)\tau} H_{li,j}^k + \\ + \frac{\nu(c_1)}{k_1(c_1)h_1^2} \left[ C_{li-1,j}^{k+\frac{1}{2}} - 2C_{li,j}^{k+\frac{1}{2}} + C_{li+1,j}^{k+\frac{1}{2}} \right]. \end{aligned} \quad (3.124)$$

Чисельний розв'язок задачі знайдемо методом прогонки [99, 131, 162, 168]. Різницєва схема (2.123), згідно (3.124) в прогончному вигляді буде мати наступний вигляд:

$$a_1 H_{li-1,j}^{k+\frac{1}{2}} - c_1 H_{li,j}^{k+\frac{1}{2}} + c_1 H_{li+1,j}^{k+\frac{1}{2}} = -f_1, \quad (3.125)$$

де  $a_1 = \frac{1}{h_1^2}, \quad b_1 = \frac{1}{h_1^2}, \quad c_1 = \frac{2}{h_1^2} + \frac{a}{k_1(c_1)\tau},$

$$f_1 = -\frac{a}{k_1(c_1)\tau} H_{li,j}^k + \frac{\nu(c_1)}{k_1(c_1)h_1^2} \left[ C_{li-1,j}^{k+\frac{1}{2}} - 2C_{li,j}^{k+\frac{1}{2}} + C_{li+1,j}^{k+\frac{1}{2}} \right], \quad i = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,m}.$$

Таким чином, згідно методу прогонки розв'язок задачі знаходимо у вигляді

$$H_{li,j}^{k+1} = \alpha_{i+1,j}^1 H_{li+1,j}^{k+1} + \beta_{i+1,j}^1,$$

де  $\alpha_{i+1,j}^1 = \frac{b_1}{c_1 - \alpha_{i,j} a_1}, \quad \beta_{i+1,j}^1 = \frac{a_1 \beta_{i,j}^1 + f_1}{c_1 - \alpha_{i,j} a_1}, \quad i = \overline{1,n}, \quad \alpha_{i,j} = 0, \quad \beta_{0,j} = H_{li,0}^{k-1}.$

Неявна різницєва схема для задачі поперечної прогонки (3.122) має вигляд

$$\frac{H_{li,j-1}^{k+1} - 2H_{li,j}^{k+1} + H_{li,j+1}^{k+1}}{h_1^2} - \frac{\nu(c_1)}{k_1(c_1)} \frac{C_{li,j-1}^{k+1} - 2C_{li,j}^{k+1} + C_{li,j+1}^{k+1}}{h_1^2} = \frac{0,5a}{k_1(c_1)} \frac{H_{li,j}^{k+1} - H_{li,j}^{k+\frac{1}{2}}}{0,5\tau}. \quad (3.126)$$

Згрупувавши подібні члени в (3.126), отримаємо

$$H_{li,j-1}^{k+1} \left[ \frac{1}{h_1^2} \right] - H_{li,j}^{k+1} \left[ \frac{2}{h_1^2} + \frac{a}{k_1(c_1)\tau} \right] + H_{li,j+1}^{k+1} \left[ \frac{1}{h_1^2} \right] = \frac{a}{k_1(c_1)\tau} H_{li,j}^{k+\frac{1}{2}} + \frac{v(c_1)}{k_1(c_1)h_1^2} \left( C_{li,j-1}^{k+\frac{1}{2}} - 2C_{li,j}^{k+\frac{1}{2}} + C_{li,j+1}^{k+\frac{1}{2}} \right). \quad (3.127)$$

Чисельний розв'язок задачі знайдемо методом прогонки. Різницєва схема в прогоночному вигляді, згідно (3.127), буде мати наступний вигляд:

$$a_2 H_{li,j-1}^{k+\frac{1}{2}} - c_2 H_{li,j}^{k+\frac{1}{2}} + b_2 H_{li,j+1}^{k+\frac{1}{2}} = -f_2, \quad (3.128)$$

де 
$$a_2 = \frac{1}{h_1^2}, \quad b_2 = \frac{1}{h_1^2}, \quad c_2 = \frac{2}{h_1^2} + \frac{a}{k_1(c_1)\tau},$$

$$f_2 = \frac{a}{k_1(c_1)\tau} H_{li,j}^{k+\frac{1}{2}} + \frac{v(c_1)}{k_1(c_1)h_1^2} \left( C_{li,j-1}^{k+\frac{1}{2}} - 2C_{li,j}^{k+\frac{1}{2}} + C_{li,j+1}^{k+\frac{1}{2}} \right), \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}.$$

Згідно (3.129) розв'язок задачі нестационарної фільтрації має вигляд

$$H_{li,j}^{k+1} = \alpha_{i,j+1} H_{li,j+1}^{k+1} + \beta_{i,j+1},$$

де 
$$\alpha_{i,j+1} = \frac{b_2}{c_2 - \alpha_{i,j} a_2}, \quad \beta_{i,j+1} = \frac{a_2 \beta_{i,j} + f_2}{c_2 - \alpha_{i,j} a_2}, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}, \quad \alpha_{i,0} = 0, \quad \beta_{i,0} = H_{li,0}^{k-1}.$$

### 3.3.2.2 Чисельний метод розв'язування задачі солеперенесення

Побудуємо обчислювальний алгоритм знаходження розв'язку задачі масоперенесення (3.116), (3.118) при крайових умовах (3.120) за ЛОС О.А. Самарського, згідно з якою вихідну задачу запишемо у вигляді двох одновимірних задач [87, 163, 164, 166-168].

I. Для поздовжньої прогонки у напрямку осі ОХ:

$$\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - \frac{v_x(c_1)}{D_1(c_1)} \frac{\partial c_1}{\partial x} - \frac{0,5\gamma_1}{D_1(c_1)} (c_1 - C^*) = 0,5\sigma_1 \frac{\partial c_1}{\partial t}, \quad (3.129)$$

$$v_x(c_1) = -k(c_1, h_1) \frac{\partial h}{\partial x} + v(c_1) \frac{\partial c_1}{\partial x}. \quad (3.130)$$

II. для поперечної прогонки в напрямку осі ОУ :



$$\frac{\partial^2 c}{\partial y^2} - \frac{v_y(c_1)}{D_1(c_1)} \frac{\partial c_1}{\partial y} - \frac{0,5\gamma_1}{D_1(c_1)} (c_1 - C^*) = 0,5\sigma_1 \frac{\partial c_1}{\partial t}, \quad (3.131)$$

$$v_y(c_1) = -k(c_1, h_1) \frac{\partial h}{\partial y} + v(c_1) \frac{\partial c_1}{\partial y}. \quad (3.132)$$

Розв'язок задач (3.129), (3.131) знайдемо з використанням монотонної різницевої схеми [39, 40, 131, 132, 166-168, 188].

Монотонна різницева схема задачі для поздовжньої прогонки в напрямку осі ОХ (3.129) має вигляд

$$\begin{aligned} \mu_1 \frac{C_{li-1,j}^{k+\frac{1}{2}} - 2C_{li,j}^{k+\frac{1}{2}} + C_{li+1,j}^{k+\frac{1}{2}}}{h_1^2} + r_{1+}^2 \frac{C_{li+1,j}^{k+\frac{1}{2}} - C_{li,j}^{k+\frac{1}{2}}}{h_1} + r_{1-}^2 \frac{C_{li,j}^{k+\frac{1}{2}} - C_{li-1,j}^{k+\frac{1}{2}}}{h_1} - \\ - 0,5 \frac{\gamma_1}{D_1(c_1)} \left( C_{li,j}^{k+\frac{1}{2}} - C_1^* \right) = \frac{0,5\sigma_1}{D(c_1)} \frac{C_{li,j}^{k+\frac{1}{2}} - C_{li,j}^k}{0,5\tau}, \end{aligned} \quad (3.133)$$

$$C_{li,j}^0 = \tilde{C}_1^0, \quad C_{10,j}^{k+\frac{1}{2}} = C_{11,j}^{(k)}, \quad C_{ln,j}^{k+\frac{1}{2}} = C_{ln-1,j}^{(k)},$$

де

$$\mu_1 = \frac{1}{1 + \frac{0,5h_1|r_{li}^k|}{d_{li}^k}}, \quad r_{li}^k = r_{li+}^k + r_{li-}^k = \frac{-V_x(x_i, C_{li,j}^k)}{D_1(c_1)}, \quad r^2 = r_{1+}^2 + r_{1-}^2,$$

$$r_{li+}^k = 0,5(V(x_i, C_{li,j}^k) + |V(x_i, C_{li,j}^k)|) \geq 0, \quad r_{li-}^k = 0,5(V(x_i, C_{li,j}^k) - |V(x_i, C_{li,j}^k)|) \leq 0,$$

$$d_{li}^k = \frac{D_1(x_i, C_{li,j}^k) + D_1(x_{i-1}, C_{li-1,j}^k)}{2}, \quad d_{li+1}^k = \frac{D_1(x_i, C_{li+1,j}^k) + D_1(x_{i-1}, C_{li,j}^k)}{2}.$$

Згрупувавши доданки в (3.133), отримаємо різницеву схему у вигляді

$$\begin{aligned} C_{li-1,j}^{k+\frac{1}{2}} \left[ \frac{\mu_1}{h_1^2} - \frac{r_{1-}^2}{h_1} \right] + C_{li,j}^{k+\frac{1}{2}} \left[ -\frac{2\mu_1}{h_1^2} - \frac{r_{1+}^2}{h_1} + \frac{r_{1-}^2}{h_1} - \frac{0,5\gamma_1}{D(c_1)} - \frac{\sigma_1}{D(c_1)\tau} \right] + C_{li+1,j}^{k+\frac{1}{2}} \left[ \frac{\mu_1}{h_1^2} + \frac{r_{1+}^2}{h_1} \right] = \\ = -\frac{\sigma_1}{D(c_1)\tau} C_{li,j}^k + \frac{0,5\gamma_1}{D(c_1)} C_1^*. \end{aligned} \quad (3.134)$$

Тоді прогоночний вигляд рівняння (3.133) на основі (3.134) для поздовжньої прогонки є наступним:

$$a_3 C_{li-1,j}^{k+\frac{1}{2}} - c_3 C_{li,j}^{k+\frac{1}{2}} + b_3 C_{li+1,j}^{k+\frac{1}{2}} = -f_3, \quad (3.135)$$

де

$$a_3 = \frac{\mu_1}{h_1^2} - \frac{r_{1-}^2}{h_1}, \quad b_3 = \frac{\mu_1}{h_1^2} + \frac{r_{1+}^2}{h_1}, \quad c_3 = -\frac{2\mu_1}{h_1^2} - \frac{r_{1+}^2}{h_1} + \frac{r_{1-}^2}{h_1} - \frac{0,5\gamma_1}{D(c_1)} - \frac{\sigma_1}{D(c_1)\tau},$$

$$f_3 = \frac{\sigma_1}{D(c_1)\tau} C_{li,j}^k - \frac{0,5\gamma_1}{D(c_1)} C_1^*.$$

Чисельний розв'язок (3.133) знаходимо методом прогонки у вигляді

$$C_{li,j}^{k+\frac{1}{2}} = \alpha_{li+1,j} C_{li+1,j}^{k+\frac{1}{2}} + \beta_{li+1,j},$$

де

$$\alpha_{li+1,j}^1 = \frac{b_3}{c_3 - \alpha_{li,j}^1 a_3}, \quad \beta_{li+1,j}^1 = \frac{a_3 \beta_{li,j}^1 + f_3}{c_3 - \alpha_{li,j}^1 a_3}, \quad \alpha_{1,0,i} = 0, \quad \beta_{1,0,j} = C_{1,0,j}^{k+\frac{1}{2}}.$$

Монотонна різницева схема для рівняння (3.131) у випадку поперечної прогонки у напрямку осі ОУ має вигляд

$$\mu_2 \frac{C_{li,j-1}^{k+1} - 2C_{li,j}^{k+1} + C_{li,j+1}^{k+1}}{h_2^2} + r_{1+}^2 \frac{C_{li,j+1}^{k+1} - C_{li,j}^{k+1}}{h_2} + r_{1-}^2 \frac{C_{li,j}^{k+1} - C_{li,j-1}^{k+1}}{h_2} -$$

$$- 0,5 \frac{\gamma_1}{D_1(c_1)} (C_{li,j}^{k+1} - C_1^*) = 0,5\sigma_1 \frac{C_{li,j}^{k+1} - C_{lij}^{k+\frac{1}{2}}}{0,5D(c_1)\tau}, \quad (3.136)$$

$$C_{li,j}^0 = \tilde{C}_1^0, \quad C_{li,0}^{k+1} = C_{li,1}^{(k)}, \quad C_{1,i,m}^{k+1} = C_{1,i,m-1}^{(k)},$$

де

$$\mu_2 = \frac{1}{1 + \frac{0,5h_2 |r_{li}^k|}{d_{li}^k}}, \quad r_{li}^k = r_{li+}^k + r_{li-}^k = \frac{-V_y(x_i, C_{li,j}^k)}{D_1(c_1)}, \quad r^2 = r_{1+}^2 + r_{1-}^2,$$

$$r_{li+}^k = 0,5(V(x_i, C_{lij}^k) + |V(x_i, C_{lij}^k)|) \geq 0, \quad r_{li-}^k = 0,5(V(x_i, C_{lij}^k) - |V(x_i, C_{lij}^k)|) \leq 0,$$

$$d_{li}^k = \frac{D_1(y_i, C_{li,j}^k) + D_1(y_{i-1}, C_{li-1,j}^k)}{2}, \quad d_{li+1}^k = \frac{D_1(y_i, C_{li+1,j}^k) + D_1(y_{i-1}, C_{li,j}^k)}{2}.$$

Згрупувавши доданки в (3.136), отримаємо

$$C_{li,j-1}^{k+1} \left[ \frac{\mu_2}{h_2^2} - \frac{r_{1-}^2}{h_2} \right] + C_{li,j}^{k+1} \left[ -\frac{2\mu_2}{h_2^2} - \frac{r_{1+}^2}{h_2} + \frac{r_{1-}^2}{h_2} - \frac{0,5\gamma_1}{D_1(c_1)} - \frac{\sigma_1}{D_1(c_1)\tau} \right] + C_{li,j+1}^{k+1} \left[ \frac{\mu_2}{h_2^2} + \frac{r_{1+}^2}{h_2} \right] =$$

$$= -\frac{\sigma_1}{D(c_1)\tau} C_{li,j}^{k+\frac{1}{2}} + \frac{0,5\gamma_1}{D(c_1)} C_1^*. \quad (3.137)$$

Різницева схема (3.136) на основі (3.137) у прогончному вигляді для поперечної прогонки є наступною:

$$a_4 C_{li,j-1}^{k+1} - c_4 C_{li,j}^{k+1} + b_4 C_{li,j+1}^{k+1} = -f_4, \quad (3.138)$$

$$\text{де} \quad a_4 = \frac{\mu_2}{h_2^2} - \frac{r_{1-}^2}{h_1}, \quad b_4 = \frac{\mu_2}{h_2^2} + \frac{r_{1+}^2}{h_1}, \quad c_4 = -\frac{2\mu_2}{h_2^2} - \frac{r_{1+}^2}{h_1} + \frac{r_{1-}^2}{h_1} - \frac{0,5\gamma_1}{D(c_1)} - \frac{\sigma_1}{D(c_1)\tau},$$

$$f_4 = \frac{\sigma_1}{D_1(c_1)\tau} C_{li,j}^{k+\frac{1}{2}} - \frac{0,5\gamma_1}{D_1(c_1)} C_1^*.$$

На основі (3.138) за методом прогонки розв'язок задачі масоперенесення солей в області повного насичення  $\Omega_1$  має вигляд

$$C_{li,j}^{k+1} = \alpha_{i,j+1} C_{li,j+1}^{k+1} + \beta_{i,j+1},$$

$$\text{де} \quad \alpha_{i,j+1} = \frac{b_4}{c_4 - \alpha_{i,j} a_4}, \quad \beta_{i,j+1} = \frac{a_4 \beta_{i,j} + f_4}{c_4 - \alpha_{i,j} a_4}, \quad \alpha_{i,0} = 0, \quad \beta_{i,0} = C_{li,0}^{k+1}.$$

Апроксимуючи рівняння швидкості фільтрації (3.130), (3.132) отримаємо:

$$V_x = V_i^{k+1} - k(c_i) \left( \frac{H_{li+1,j}^k - H_{li-1,j}^k}{2h_1} + \frac{1}{h_1} \left( Z_{li+1,j}^k \frac{C_{li+1,j}^{k+1} - C_{lij}^{k+1}}{h_1} - Z_{lij}^k \frac{C_{lij}^{k+1} + C_{li-1,j}^{k+1}}{h_1} \right) \right),$$

$$V_y = V_i^{k+1} - k(c_i) \left( \frac{H_{li,j+1}^k - H_{li,j-1}^k}{2h_1} + \frac{1}{h_2} \left( Z_{2i,j+1}^k \frac{C_{li,j+1}^{k+1} - C_{lij}^{k+1}}{h_2} - Z_{2ij}^k \frac{C_{lij}^{k+1} + C_{li,j-1}^{k+1}}{h_2} \right) \right),$$

$$\text{де} \quad Z_{li+1,j}^k = 0,5(v_1(C_{li+1,j}^k) + v_1(C_{lij}^k)), \quad Z_{lij}^k = 0,5(v_1(C_{lij}^k) + v_1(C_{li-1,j}^k)),$$

$$Z_{2i,j+1}^k = 0,5(v_2(C_{li,j+1}^k) + v_2(C_{lij}^k)), \quad Z_{2ij}^k = 0,5(v_2(C_{lij}^k) + v_2(C_{li,j-1}^k)).$$

### 3.3.3 Математична модель задачі перенесення солей при вологоперенесенні у ненасиченому середовищі

Математична модель задачі перенесення солей при вологоперенесенні в області неповного насичення  $G_2$  описується наступною крайовою задачею [52, 81, 53, 70, 74, 83, 84, 171]:

$$\frac{\partial \left( D_2(c_2) \frac{\partial c_2}{\partial x} \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left( D_2(c_2) \frac{\partial c_2}{\partial y} \right)}{\partial y} - v_x(c_2) \frac{\partial c_2}{\partial x} - v_y(c_2) \frac{\partial c_2}{\partial y} - \gamma_2(c_2 - C^*) = \sigma_2 \frac{\partial c_2}{\partial t}, \quad (3.139)$$

$$\mu(h_2) \frac{\partial h_2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(c_2, h_2) \frac{\partial h_2}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k(c_2, h_2) \frac{\partial h_2}{\partial y} \right), \quad (3.140)$$

$$v_x(c_2) = -k(c_2, h_2) \frac{\partial h_2}{\partial x}, \quad v_y(c_2) = -k(c_2, h_2) \frac{\partial h_2}{\partial y}. \quad (3.141)$$

Крайові умови до рівняння (3.203) для напорів води  $h_2(x, y, t)$ :

$$h_2(x, y, 0) = \tilde{H}_0(x, y), \quad h_2|_{EF} = y, \quad \frac{\partial h_2}{\partial x} \Big|_{EE_1 \cup F_1F} = 0, \quad h_2|_{E_1F_1} = \tilde{H}_2. \quad (3.142)$$

До рівнянь (3.139), (3.141) додаються крайові умови для концентрації солей наступного вигляду:

$$c_2(x, y, 0) = \tilde{C}_0(x, y), \quad c_2|_{E_1F_1} = \tilde{C}_1, \quad \frac{\partial c_2}{\partial n} \Big|_{EF} = 0, \quad \frac{\partial c_2}{\partial x} \Big|_{EE_1 \cup F_1F} = 0. \quad (3.143)$$

На межі областей повного та неповного насичення (кривій депресії  $FE$ ) задаються умови спряження для напорів та концентрації сольових розчинів, які мають вигляд

$$[c_1] = 0 \Rightarrow c_1|_{EF} = c_2|_{EF},$$

$$v_1 c_1 - D_1(c_1) \frac{\partial c_1}{\partial n} = v_2 c_2 - D_2(c_2) \frac{\partial c_2}{\partial n}, \quad (3.144)$$

$$\frac{\partial c_1}{\partial n} \Big|_{ABCD} = 0, \quad \text{тобто} \quad \frac{\partial c_1}{\partial y} \Big|_{AB \cup CD} = 0, \quad \frac{\partial c_1}{\partial x} \Big|_{CB} = 0,$$

$$[h_1] = 0, \quad \text{тобто} \quad h_1|_{EF} = h_2|_{EF}. \quad (3.145)$$

### 3.3.3.1 Чисельний метод розв'язування задачі вологоперенесення

Задача вологоперенесення солей (3.140), (3.142) згідно ЛОС О.А. Самарського [87, 163, 164, 166-168] запишеться у вигляді наступних задач:

I. для повздовжньої прогонки в напрямку осі  $Ox$ :

$$\frac{\partial^2 h}{\partial^2 x} = \frac{0,5\mu(h_2)}{k(c_2, h_2)} \frac{\partial h}{\partial t}, \quad (3.146)$$

II. для поперечної прогонки в напрямку осі OY:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial^2 y} = \frac{0,5\mu(h_2)}{k(c_2, h_2)} \frac{\partial h}{\partial t}. \quad (3.147)$$

Для знаходження розв'язку задач (3.146), (3.147) застосуємо неявну різницеву схему [87, 132, 163, 164, 166-168], яка для поздовжньої прогонки має вигляд

$$\frac{H_{2i-1,j}^{k+1/2} - 2H_{2i,j}^{k+1/2} + H_{2i+1,j}^{k+1/2}}{h_2^2} = 0,5 \frac{\mu(h_2)}{k(c_2, h_2)} \frac{H_{2i,j}^{k+1/2} - H_{2i,j}^k}{\tau}. \quad (3.148)$$

Згрупувавши доданки в (3.148), отримаємо

$$H_{2i-1,j}^{k+1/2} \frac{1}{h_2^2} + H_{2i,j}^{k+1/2} \left[ -\frac{2}{h_2^2} - \frac{0,5\mu(h_2)}{k_2(c_2, h_2)\tau} \right] + H_{2i+1,j}^{k+1/2} \frac{1}{h_2^2} = -\frac{0,5\mu(h_2)}{k(c_2, h_2)\tau} H_{2i,j}^k. \quad (3.149)$$

Тоді прогоночний вигляд рівняння (3.148) для поздовжньої прогонки має вигляд

$$a_5 H_{2i-1,j}^{k+1/2} - c_5 H_{2i,j}^{k+1/2} + b_5 H_{2i+1,j}^{k+1/2} = -f_5, \quad (3.150)$$

де 
$$a_5 = \frac{1}{h_2^2}, \quad b_5 = \frac{1}{h_2^2}, \quad c_5 = -\frac{2}{h_2^2} - \frac{0,5\mu(h_2)}{k(c_2, h_2)\tau}, \quad f_5 = \frac{0,5\mu(h_2)}{k(c_2, h_2)\tau} H_{2i,j}^k.$$

Тоді за (3.150) та методом прогонки [99, 131, 146, 148, 162, 168] розв'язок (3.148) знайдемо у наступному вигляді:

$$H_{2i,j}^{k+1/2} = \alpha_{i+1,j} H_{2i+1,j}^{k+1/2} + \beta_{i+1,j},$$

де 
$$\alpha_{i+1,j} = \frac{b_5}{c_5 - \alpha_{i,j} a_5}, \quad \beta_{i+1,j} = \frac{a_5 \beta_{i,j} + f_5}{c_5 - \alpha_{i,j} a_5}, \quad \alpha_{i,j} = 0, \quad \beta_{i,j} = H_{0,j}^{k+1/2}.$$

Неявна різницєва схема задачі (3.147) для поперечної прогонки має вигляд

$$\frac{H_{2,j-1}^{k+1} - 2H_{2i,j}^{k+1} + H_{2i,j+1}^{k+1}}{h_2^2} = \frac{0,5\mu(h_2)}{k(c_2, h_2)} \frac{H_{2i,j}^{k+1} - H_{2i,j}^{k+1/2}}{\tau}. \quad (3.151)$$

Згрупувавши доданки в (3.251), отримаємо

$$H_{2i,j-1}^{k+1} \frac{1}{h_2^2} + H_{2i,j}^{k+1} \left[ -\frac{2}{h_2^2} - \frac{0,5\mu(h_2)}{k(c_2, h_2)\tau} \right] + H_{2i,j+1}^{k+1} \frac{1}{h_2^2} = -\frac{0,5\mu(h_2)}{k(c_2, h_2)\tau} H_{2i,j}^{k+1/2}. \quad (3.152)$$

Тоді прогнаний вигляд рівняння (3.151), згідно (3.152), має вигляд

$$a_6 H_{2i,j-1}^{k+1} - c_6 H_{2i,j}^{k+1} + b_6 H_{2i,j+1}^{k+1} = -f_6,$$

де 
$$a_6 = \frac{1}{h_2^2}, \quad b_6 = \frac{1}{h_2^2}, \quad c_6 = -\frac{2}{h_2^2} - \frac{0,5\mu(h_2)}{k(c_2, h_2)\tau}, \quad f_6 = \frac{0,5\mu(h_2)}{k(c_2, h_2)\tau} H_{2i,j}^{k+1/2}.$$

Тоді за методом прогонки розв'язок (3.151) знайдемо у вигляді

$$H_{2i,j}^{k+1} = \alpha_{i,j+1} H_{2i,j+1}^{k+1} + \beta_{i,j+1},$$

де 
$$\alpha_{i,j+1} = \frac{b_6}{c_6 - \alpha_{i,j} a_6}, \quad \beta_{i,j+1} = \frac{a_6 \beta_{i,j} + f_6}{c_6 - \alpha_{i,j} a_6}, \quad \alpha_{0,i} = 0, \quad \beta_{i,0} = H_{2i,0}^{k+1}.$$

### 3.3.3.2 Чисельний метод розв'язування задачі перенесення солей

Задача масоперенесення солей при вологоперенесенні (3.139), (3.141), (3.143) згідно ЛОС О.А. Самарського запишеться у вигляді наступних задач:

I. для поздовжньої прогонки в напрямку осі ОХ:

$$\frac{\partial^2 c_2}{\partial x^2} - \frac{v_x(c_2)}{D_2(c_2)} \frac{\partial c_2}{\partial x} - \frac{0,5\gamma_2}{D_2(c_2)} (c_2 - C^*) = 0,5\sigma_2 \frac{\partial c_2}{\partial t}, \quad (3.153)$$

$$v_x(c_2) = -k(c_2, h_2) \frac{\partial h_2}{\partial x}; \quad (3.154)$$

II. для поперечної прогонки в напрямку осі ОУ:

$$\frac{\partial^2 c_2}{\partial y^2} - \frac{v_y(c_2)}{D_2(c_2)} \frac{\partial c_2}{\partial y} - \frac{0,5\gamma_2}{D_2(c_2)} (c_2 - C^*) = 0,5\sigma_2 \frac{\partial c_2}{\partial t}, \quad (3.155)$$

$$v_y(c_2) = -k(c_2, h_2) \frac{\partial h_2}{\partial y}. \quad (3.156)$$

Побудуємо обчислювальний алгоритм знаходження розв'язку задачі масоперенесення солей в області неповного насичення, описаної математичними моделями (3.153)-(3.156) при відповідних крайових умовах, використавши монотонну різницеву схему [39, 40, 131, 132, 166-168, 188].

Монотонна різницева схема задачі (3.153) для повздовжньої прогонки в напрямку осі ОХ має вигляд

$$\begin{aligned} \mu_3 \frac{C_{2i-1,j}^{k+\frac{1}{2}} - 2C_{2i,j}^{k+\frac{1}{2}} + C_{2i+1,j}^{k+\frac{1}{2}}}{h_1^2} + r_{3+}^2 \frac{C_{2i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} - C_{2i,j}^{k+\frac{1}{2}}}{h_1} + r_{3-}^2 \frac{C_{2i,j}^{k+\frac{1}{2}} - C_{2i-1,j}^{k+\frac{1}{2}}}{h_1} - \\ - 0,5 \frac{\gamma_2}{D_2(c_2)} \left( C_{2i,j}^{k+\frac{1}{2}} - C_2^* \right) = \frac{0,5\sigma_2}{D(c_2)} \frac{C_{2i,j}^{k+\frac{1}{2}} - C_{2ij}^k}{0,5\tau}, \end{aligned} \quad (3.157)$$

$$C_{2i,j}^0 = \tilde{C}_2^0, \quad C_{20,j}^{k+\frac{1}{2}} = C_{21,j}^{(k)}, \quad C_{2n,j}^{k+\frac{1}{2}} = C_{2n-1,j}^{(k)},$$

де 
$$\mu_3 = \frac{1}{1 + \frac{0,5h_1|r_{3i}^k|}{d_{3i}^k}}, \quad r_{3i}^k = r_{3i+}^k + r_{3i-}^k = \frac{-V_x(x_i, C_{2i,j}^k)}{D_2(c_2)}, \quad r^2 = r_{3+}^2 + r_{3-}^2,$$

$$r_{3i+}^k = 0,5(V(x_i, C_{2ij}^k) + |V(x_i, C_{2ij}^k)|) \geq 0, \quad r_{3i-}^k = 0,5(V(x_i, C_{2ij}^k) - |V(x_i, C_{2ij}^k)|) \leq 0,$$

$$d_{3i}^k = \frac{D_2(x_i, C_{2i,j}^k) + D_2(x_{i-1}, C_{2i-1,j}^k)}{2}, \quad d_{3i+1}^k = \frac{D_2(x_i, C_{2i+1,j}^k) + D_2(x_{i-1}, C_{2i,j}^k)}{2}.$$

Згрупувавши доданки в (3.157), отримаємо різницеву схему у вигляді

$$\begin{aligned} C_{2i-1,j}^{k+\frac{1}{2}} \left[ \frac{\mu_3}{h_1^2} - \frac{r_{2-}^2}{h_1} \right] + C_{2i,j}^{k+\frac{1}{2}} \left[ -\frac{2\mu_3}{h_1^2} - \frac{r_{2+}^2}{h_1} + \frac{r_{2-}^2}{h_1} - \frac{0,5\gamma_2}{D(c_2)} - \frac{\sigma_2}{D(c_2)\tau} \right] + C_{2i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} \left[ \frac{\mu_3}{h_1^2} + \frac{r_{2+}^2}{h_1} \right] = \\ = -\frac{\sigma_2}{D(c_2)\tau} C_{2i,j}^k + \frac{0,5\gamma_2}{D(c_2)} C_2^*. \end{aligned} \quad (3.158)$$

Тоді прогоночний вигляд рівняння (3.157) на основі (3.158) для повздовжньої прогонки є наступним:

$$a_7 C_{2i-1,j}^{k+\frac{1}{2}} - c_7 C_{2i,j}^{k+\frac{1}{2}} + b_7 C_{2i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} = -f_7,$$

де 
$$a_7 = \frac{\mu_3}{h_1^2} - \frac{r_{2-}^2}{h_1}, \quad b_7 = \frac{\mu_3}{h_1^2} + \frac{r_{2+}^2}{h_1}, \quad c_7 = -\frac{2\mu_3}{h_1^2} - \frac{r_{2+}^2}{h_1} + \frac{r_{2-}^2}{h_1} - \frac{0,5\gamma_2}{D(c_2)} - \frac{\sigma_2}{D(c_2)\tau},$$

$$f_7 = \frac{\sigma_2}{D(c_2)\tau} C_{2i,j}^k - \frac{0,5\gamma_2}{D(c_2)} C_2^*.$$

Чисельний розв'язок (3.159) знаходимо методом прогонки у вигляді

$$C_{2i,j}^{k+\frac{1}{2}} = \alpha_{2i+1,j} C_{2i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} + \beta_{2i+1,j}, \quad (3.159)$$

де  $\alpha_{2i+1,j} = \frac{b_7}{c_7 - \alpha_{2i,j} a_7}$ ,  $\beta_{2i+1,j} = \frac{a_7 \beta_{2i,j} + f_7}{c_7 - \alpha_{2i,j} a_7}$ ,  $\alpha_{2,0,i} = 0$ ,  $\beta_{2,0,j} = C_{2,0,j}^{k+\frac{1}{2}}$ .

Монотонна різницева схема для рівняння (2.221) у випадку поперечної прогонки у напрямку осі ОУ має вигляд

$$\begin{aligned} \mu_4 \frac{C_{2i,j-1}^{k+1} - 2C_{2i,j}^{k+1} + C_{2i,j+1}^{k+1}}{h_2^2} + r_{2+}^2 \frac{C_{2i,j+1}^{k+1} - C_{2i,j}^{k+1}}{h_2} + r_{2-}^2 \frac{C_{2i,j}^{k+1} - C_{2i,j-1}^{k+1}}{h_2} - \\ - 0,5 \frac{\gamma_2}{D_2(c_2)} (C_{2i,j}^{k+1} - C_2^*) = 0,5 \sigma_2 \frac{C_{2i,j}^{k+1} - C_{2ij}^{k+\frac{1}{2}}}{0,5 D(c_2) \tau}. \end{aligned} \quad (3.227)$$

$$C_{2i,j}^0 = \tilde{C}_2^0, \quad C_{2i,0}^{k+1} = C_{2i,1}^{(k)}, \quad C_{2,i,m}^{k+1} = C_{2,i,m-1}^{(k)},$$

де  $\mu_4 = \frac{1}{1 + \frac{0,5 h_2 |r_{2i}^k|}{d_{2i}^k}}$ ,  $r_{2i}^k = r_{2i+}^k + r_{2i-}^k = \frac{-V_y(x_i, C_{2i,j}^k)}{D_2(c_2)}$ ,  $r^2 = r_{1+}^2 + r_{1-}^2$ ,

$$r_{2i+}^k = 0,5 (V(x_i, C_{2ij}^k) + |V(x_i, C_{2ij}^k)|) \geq 0, \quad r_{2i-}^k = 0,5 (V(x_i, C_{2ij}^k) - |V(x_i, C_{2ij}^k)|) \leq 0,$$

$$d_{2i}^k = \frac{D(y_i, C_{2i,j}^k) + D(y_{i-1}, C_{2i-1,j}^k)}{2}, \quad d_{2i+1}^k = \frac{D(y_i, C_{2i+1,j}^k) + D(y_{i-1}, C_{2i,j}^k)}{2}.$$

Згрупувавши доданки в (3.227), отримаємо

$$\begin{aligned} C_{2i,j-1}^{k+1} \left[ \frac{\mu_4}{h_2^2} - \frac{r_{2-}^2}{h_2} \right] + C_{2i,j}^{k+1} \left[ -\frac{2\mu_4}{h_2^2} - \frac{r_{2+}^2}{h_2} + \frac{r_{2-}^2}{h_2} - \frac{0,5\gamma_2}{D_2(c_2)} - \frac{\sigma_2}{D_2(c_2)\tau} \right] + C_{2i,j+1}^{k+1} \left[ \frac{\mu_4}{h_2^2} + \frac{r_{2+}^2}{h_2} \right] = \\ = -\frac{\sigma_2}{D_2(c_2)\tau} C_{2i,j}^{k+\frac{1}{2}} + \frac{0,5\gamma_2}{D_2(c_2)} C_2^*. \end{aligned} \quad (3.161)$$

Різницева схема (3.160) на основі (3.161) у прогоночному вигляді для поперечної прогонки є наступною:

$$a_8 C_{2i,j-1}^{k+1} - c_8 C_{li,j}^{k+1} + b_8 C_{li,j+1}^{k+1} = -f_8, \quad (3.161)$$

де  $a_8 = \frac{\mu_4}{h_2^2} - \frac{r_{2-}^2}{h_1}$ ,  $b_8 = \frac{\mu_4}{h_2^2} + \frac{r_{2+}^2}{h_1}$ ,  $c_8 = -\frac{2\mu_4}{h_2^2} - \frac{r_{2+}^2}{h_1} + \frac{r_{2-}^2}{h_1} - \frac{0,5\gamma_2}{D(c_2)} - \frac{\sigma_2}{D(c_2)\tau}$ ,



$$f_8 = \frac{\sigma_2}{D_2(c_2)\tau} C_{2i,j}^{k+\frac{1}{2}} - \frac{0,5\gamma_2}{D_2(c_2)} C_2^*.$$

На основі (3.161) за методом прогонки розв'язок задачі масоперенесення солей в області неповного насичення має вигляд

$$C_{2i,j}^{k+1} = \alpha_{3i,j+1} C_{1i,j+1}^{k+1} + \beta_{3i,j+1},$$

де 
$$\alpha_{i,j+1} = \frac{b_8}{c_8 - \alpha_{i,j} a_8}, \quad \beta_{i,j+1} = \frac{a_8 \beta_{i,j} + f_8}{c_8 - \alpha_{i,j} a_8}, \quad \alpha_{3i,0} = 0, \quad \beta_{3i,0} = C_{1i,0}^{k+1}.$$

Згідно рівнянь (3.154), (3.156) отримаємо наступні різницеві схеми рівнянь компонент швидкостей фільтрації.

$$V_x = V_i^{k+1} - k(c_i) \left( \frac{H_{1i+1,j}^k - H_{1i-1,j}^k}{2h_1} + \frac{1}{h_1} \left( Z_{1i+1,j}^k \frac{C_{1i+1,j}^{k+1} - C_{1ij}^{k+1}}{h_1} - Z_{1ij}^k \frac{C_{1ij}^{k+1} + C_{1i-1,j}^{k+1}}{h_1} \right) \right),$$

$$V_y = V_i^{k+1} - k(c_i) \left( \frac{H_{1i,j+1}^k - H_{1i,j-1}^k}{2h_1} + \frac{1}{h_2} \left( Z_{2i,j+1}^k \frac{C_{1i,j+1}^{k+1} - C_{1ij}^{k+1}}{h_2} - Z_{2ij}^k \frac{C_{1ij}^{k+1} + C_{1i,j-1}^{k+1}}{h_2} \right) \right),$$

де 
$$Z_{1i+1,j}^k = 0,5(v_1(C_{1i+1,j}^k) + v_1(C_{1ij}^k)), \quad Z_{1ij}^k = 0,5(v_1(C_{1ij}^k) + v_1(C_{1i-1,j}^k)),$$

$$Z_{2i,j+1}^k = 0,5(v_2(C_{1i,j+1}^k) + v_2(C_{1ij}^k)), \quad Z_{2ij}^k = 0,5(v_2(C_{1ij}^k) + v_2(C_{1i,j-1}^k)).$$

Згідно умов спряження (3.144), (3.145), що задані на межі областей повного та неповного насичення, розв'язок задачі масоперенесення солей на РГВ за методом прогонки знайдемо у вигляді [53, 99, 131, 146, 148, 162, 168]

$$C_{i,j}^{k+1} = \alpha_{i,j+1} C_{i,j+1}^{k+1} + \beta_{i,j+1},$$

$$\alpha_{i,j+1} = \begin{cases} \frac{b_i}{c_i - a_i \alpha_{ij}}, & i, j = 0, n_s - 1, \\ \frac{D_{1n_s}^k}{v_{1n_s+1}^j - D_{1n_s+1}^k} - \frac{D_{2n_s}^k}{v_{2n_s+1}^k - D_{2n_s+1}^k}, & i, j = n_s, \\ \frac{b_i}{c_i - a_i \alpha_{ij}}, & i, j = \overline{0, n_s + 1, n - 1}. \end{cases}$$

$$\beta_{i,j+1} = \begin{cases} \frac{a_i \beta_{ij} + f_i}{c_i - a_i \alpha_{ij}}, & i, j = 0, n_s - 1, \\ \frac{D_{1n_s}^k}{v_{1n_s+1}^k - D_{1n_s+1}^k} - \frac{D_{2n_s}^k}{v_{2n_s+1}^k - D_{2n_s+1}^k}, & i, j = n_s, \\ \frac{a_i \beta_{ij} + f_i}{c_i - a_i \alpha_{ij}}, & i, j = \overline{0, n_s + 1, n - 1}. \end{cases}$$

$$\alpha_{i,1} = 0, \quad \beta_{i,1}^1 = \tilde{C}_1(t), \quad i = \overline{1, n-1}, \quad n_s - \text{значення координати на РГВ.}$$

Таким чином, обчислювальний алгоритм знаходження розв'язку задачі масоперенесення солей при нестационарній фільтрації та вологоперенесенні у насичено-ненасичених ґрунтах побудовано повністю.

### 3.3.4. Результати чисельних експериментів та їх аналіз

Для реалізації обчислювального алгоритму поставленої задачі розроблена програма, яка виконана в системі об'єктно-орієнтованого, візуально-подійного програмування Microsoft Visual Studio 2010 на мові С#. Програма являє собою багатовіконний додаток, кожне вікно якого містить чисельні результати розв'язків задач солеперенесення, вологоперенесення, нестационарної фільтрації, швидкості фільтрації; має можливість побудови графіків отриманих результатів та проведення чисельних експериментів.

В загальному модулі програми взаємодіють таким чином, що робота програми в цілому зводиться до наступного: головне вікно програми викликає всі модулі проекту; задавши всі необхідні дані, можна отримати розв'язки задач в області повного насичення – нестационарної фільтрації, солеперенесення, швидкості фільтрації; в області неповного насичення – вологоперенесення, солеперенесення при вологоперенесенні; швидкості фільтрації. Також знайдено розв'язок задачі солеперенесення сумісно для двох областей водонасичення;

Проведені чисельні експерименти над вище перерахованими задачами дають можливість детально дослідити протікання процесу

солеперенесення при сумісній нестационарній фільтрації та вологоперенесенні в областях повного та неповного насичення.

Чисельні розрахунки проведені при таких вхідних даних [53, 31, 32, 43, 120, 135, 145, 156, 171, 181]:  $T = 360 \text{ дїб}$ ,  $l_1 = 10 \text{ м}$ ,  $l_2 = 5 \text{ м}$ ,  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0,4$ ,

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 0,00065, \rho = 1000 \text{ кг/м}^3, a = 2, \mu = 2, C_1^* = 350 \text{ г/літр},$$

$$C_2^* = 350 \text{ г/літр}, \tilde{C}_1 = 10 \text{ г/літр}, \tilde{C}_2 = 40 \text{ г/літр};$$

$$k(c) = 0.0002c^6 - 0.00088c^5 + 0.162c^4 - 1.3194c^3 + 3.9229c^2 + 0.0223c + 18.187, c \in [0,1];$$

$$k_2(h_2) = \frac{a_1}{b_1 + \rho^\alpha} = \frac{a_1}{b_1 + [\rho g(h-x)]^\alpha}, \quad a_1 = 1, \quad b_1 = 1, \quad \alpha = 1, \quad \rho = 1000 \text{ кг/м}^3,$$

$$g = 9,8 \text{ м/с}^2; D(c) = D_m + \lambda|V(x,c)|, D_m = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{доба}, \lambda = 0,1 \text{ м}.$$

Крайові умови для даної задачі задано у вигляді:

$$C(x, y, 0) = 90 \text{ г/літр}, C_1|_{abcd} = 10 \text{ г/літр}, H_2(x, 0, t) = 10 + x/2,5 - t/45,$$

$$H|_{PGB} = 10 - y + x/2,5, H(x, y, 0) = 10 - y + x/2,5,$$

$$H|_{abcd} = 10 - y + x/2,5 - t/45.$$

Результатом розв'язання задачі солеперенесення при вологоперенесенні в даній області є знаходження значень розподілу напорів води та концентрації солей в межах даної області вологоперенесення.

Візуалізація отриманих значень розподілу напорів води по лініям течії представлена на наступному графіку (рис. 3.39):

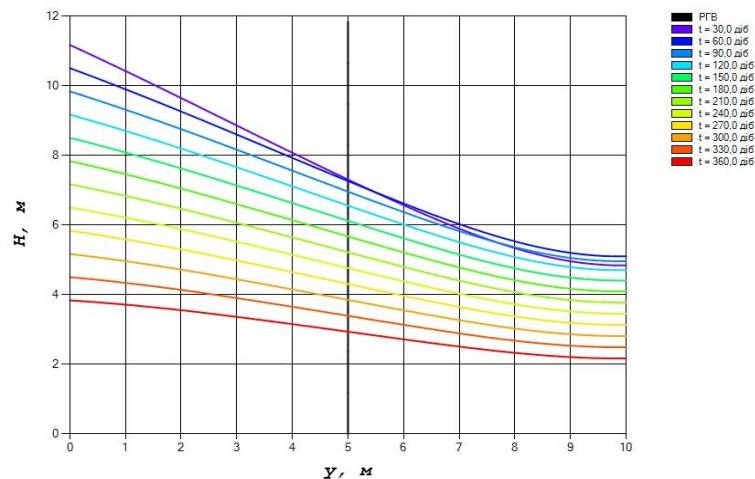


Рис. 3.39. Розподіл напорів води з часом та глибиною

Зміну розподілу напорів води з часом зображено на наступних графіках (рис 3.40.-3.43):

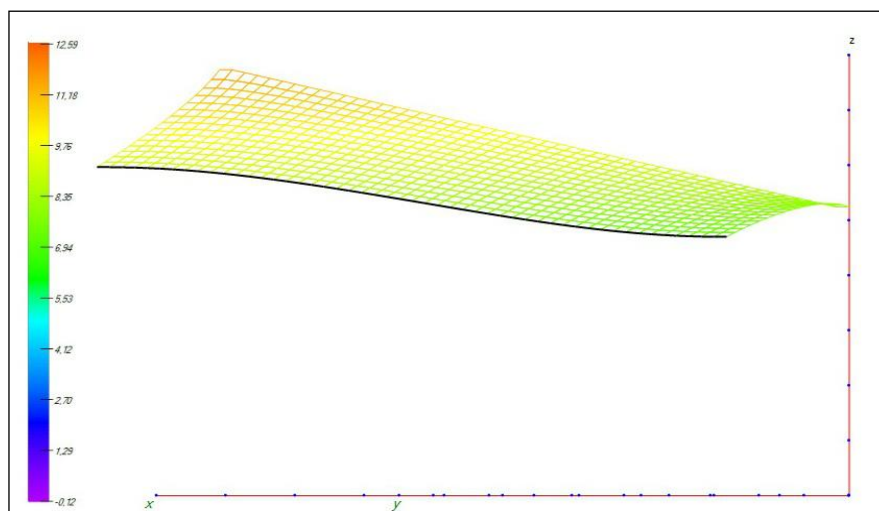


Рис. 3.40. Розподіл напорів води при  $T=90$  діб

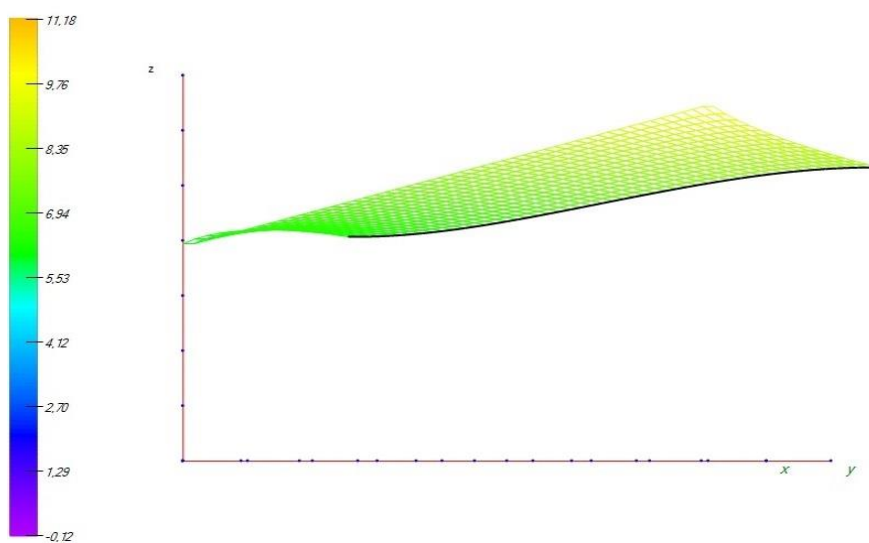


Рис. 3.41. Розподіл напорів води при  $T=180$  діб

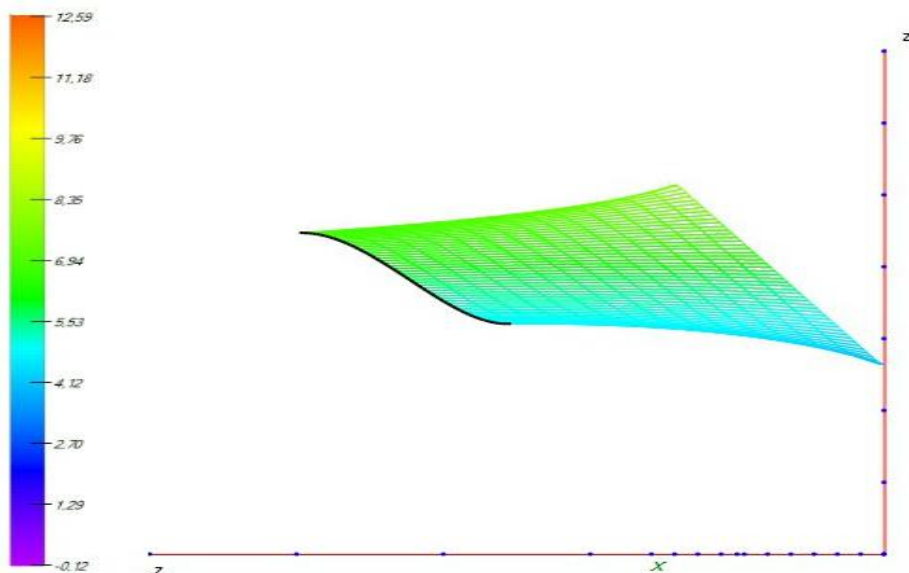


Рис. 3.42. Розподіл напорів води при  $T=270$  діб

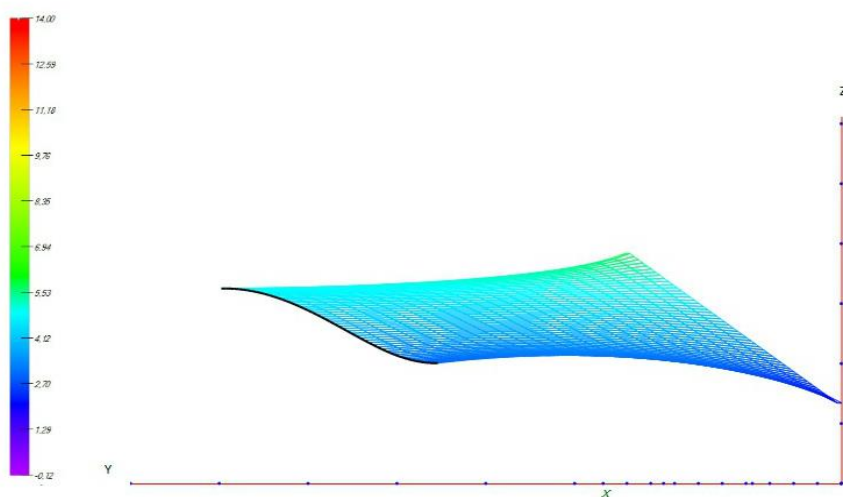


Рис. 3.43. Розподіл напорів води при  $T=360$  діб

В результаті програмної реалізації задачі солеперенесення при вологоперенесенні в даній області водонасичення отримано наступне графічне представлення розподілу концентрації солей по лініям течії (рис. 3.44):

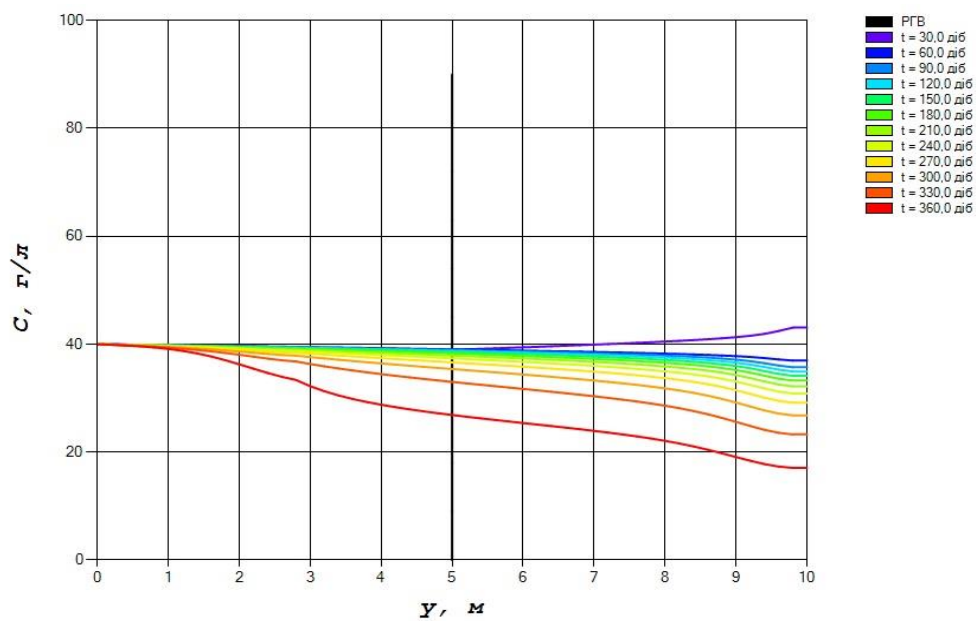


Рис. 3.44. Розподіл концентрації солей в області неповного насичення

Динаміку зміни поля розподілу концентрації солей з часом відображають наступні графіки (рис. 3.45-3.48):

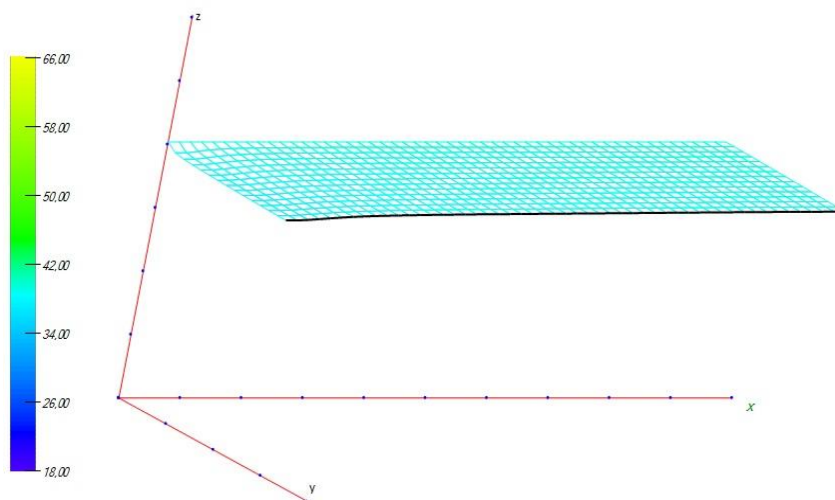


Рис. 3.45. Розподіл концентрації сольових розчинів при  $T=90$  дiб

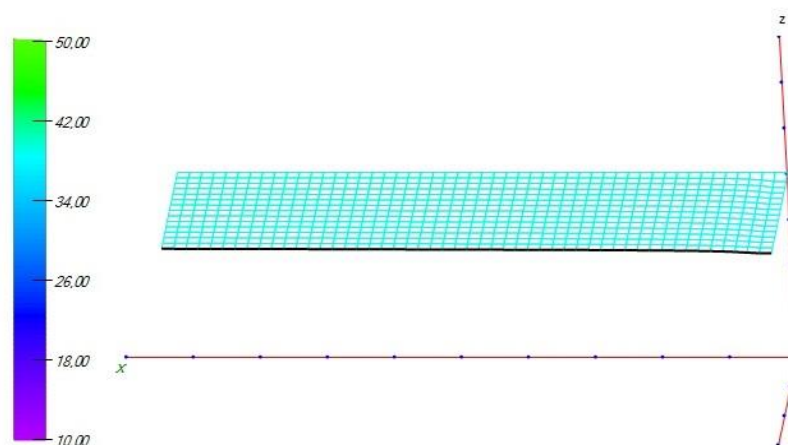


Рис. 3.46. Розподіл концентрації сольових розчинів при  $T=180$  діб

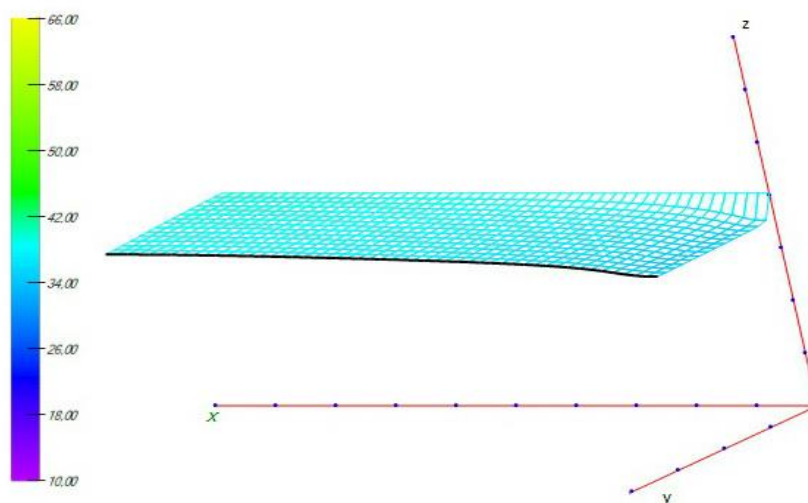


Рис. 3.47. Розподіл концентрації сольових розчинів при  $T=270$  діб

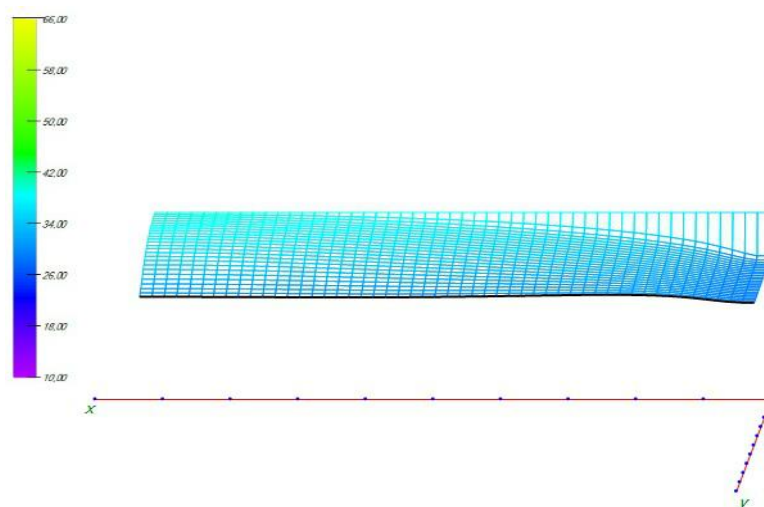


Рис. 3.48. Розподілу концентрації сольових розчинів при  $T=360$  діб

Графічне представлення компонент швидкостей фільтрації  $V_x$ ,  $V_y$  мають вигляд (рис. 3.49, 3.50):

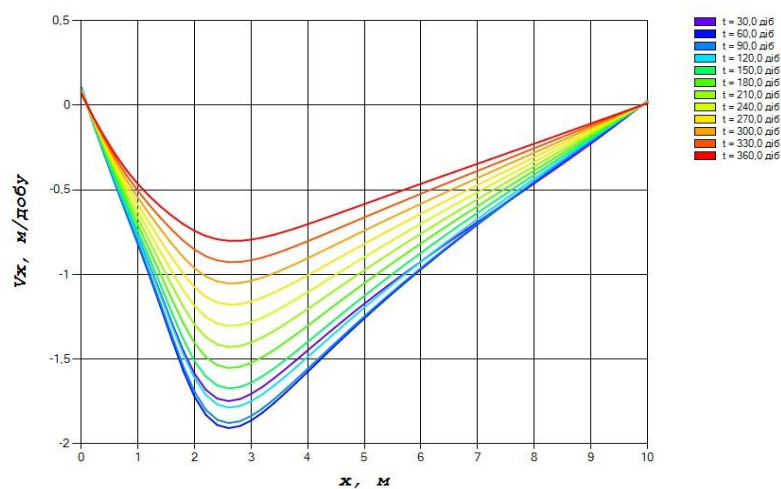


Рис. 3.49. Компонента швидкості фільтрації  $V_x$

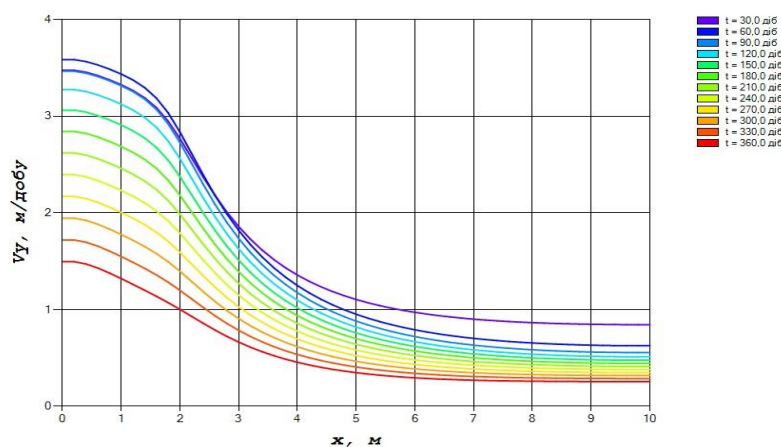


Рис. 3.50. Компонента швидкості фільтрації  $V_y$

Тоді в результаті знаходження значень компонент значень  $V_x$ ,  $V_y$  знайдено швидкість фільтрації  $V_{xy}$  сольового розчину, графік якої наступний (рис. 3.51):



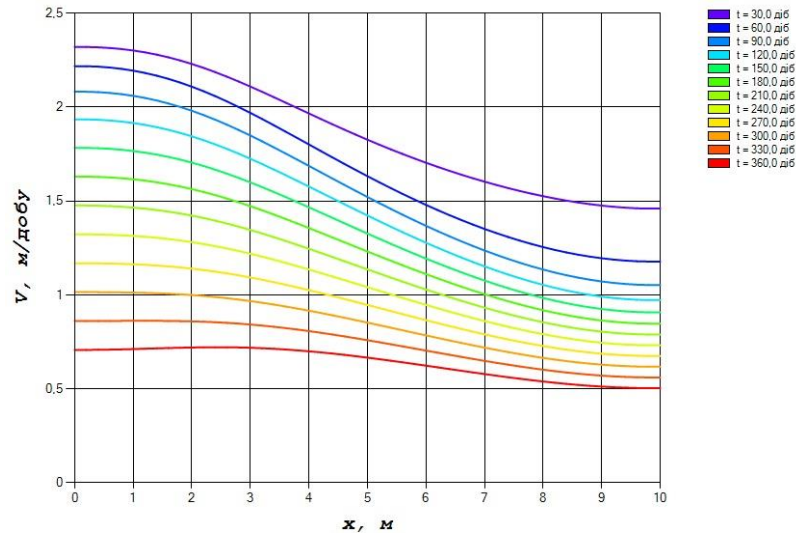


Рис. 3.51. Швидкість фільтрації сольового розчину  $V_{xy}$   
в області неповного насичення

Результатом розв'язання задачі солеперенесення при нестационарній фільтрації у даній області водонасичення є знаходження значень розподілу п'єзометричних напорів (напорів рідини) та концентрації солей в межах даної області фільтрації.

Графічне представлення поля розподілу п'єзометричних напорів по лініям течії в області повного насичення має вигляд (рис. 3.52)

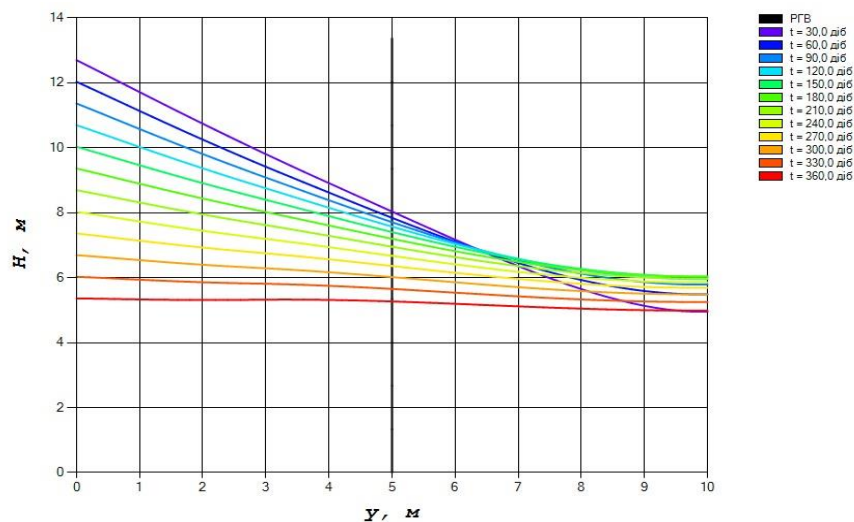


Рис. 3.52. Розподілу п'єзометричних напорів

Динаміку зміни поля розподілу отриманих напорів рідини з часом відображають наступні графіки (рис. 3.53-3.56):

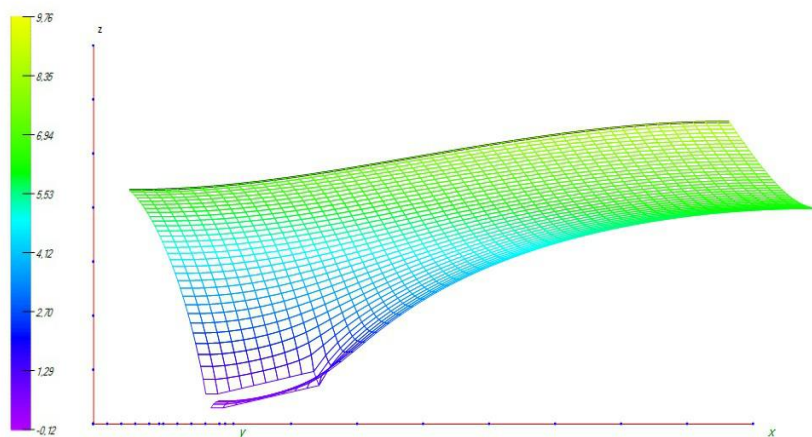


Рис. 3.53. Розподіл п'єзометричних напорів при  $T=90$  діб

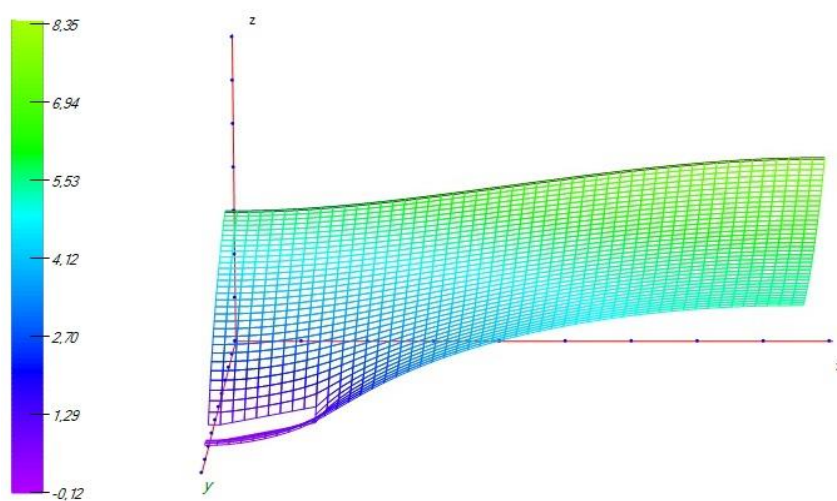


Рис. 3.54. Розподіл п'єзометричних напорів при  $T=180$  діб

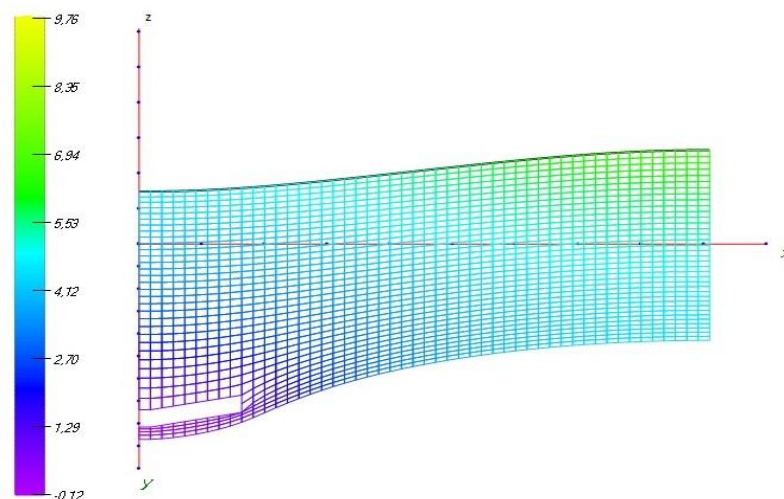


Рис. 3.55. Розподіл п'єзометричних напорів при  $T=270$  діб

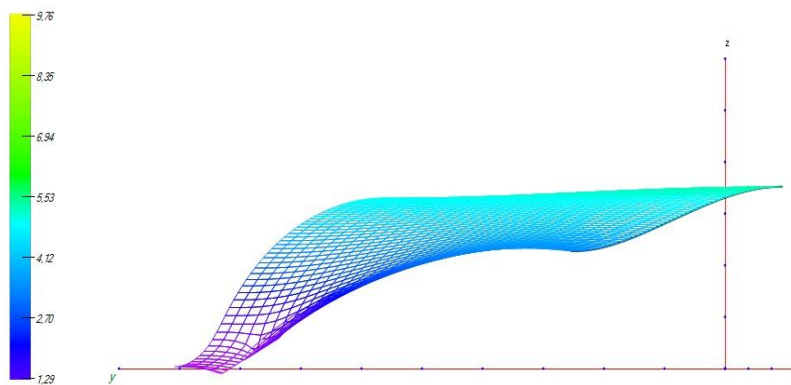


Рис. 3.56. Розподіл п'єзометричних напорів при  $T=360$  діб

В результаті програмної реалізації задачі солеперенесення в даній області водонасичення отримано розподіл концентрації солей по лініях течії (рис. 3.57):

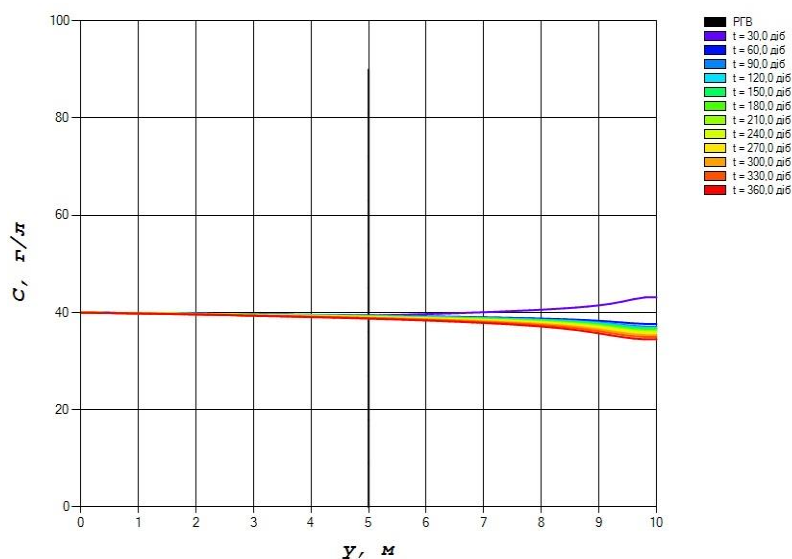


Рис. 3.57. Розподіл концентрації сольових розчинів з часом та глибиною

Зміну розподілу концентрації сольових розчинів з часом зображено на наступних графіках (рис. 3.58-3.61):

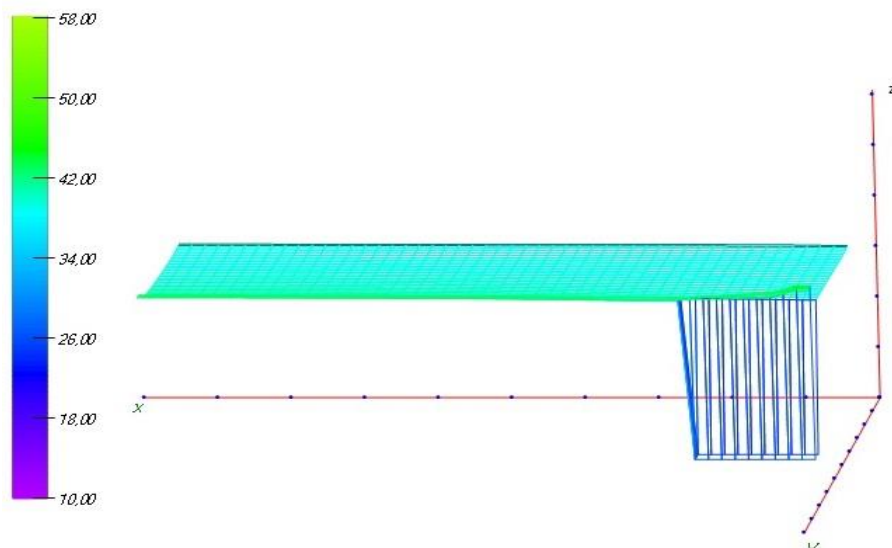


Рис. 3.58. Розподіл концентрації солей при  $T=90$  діб

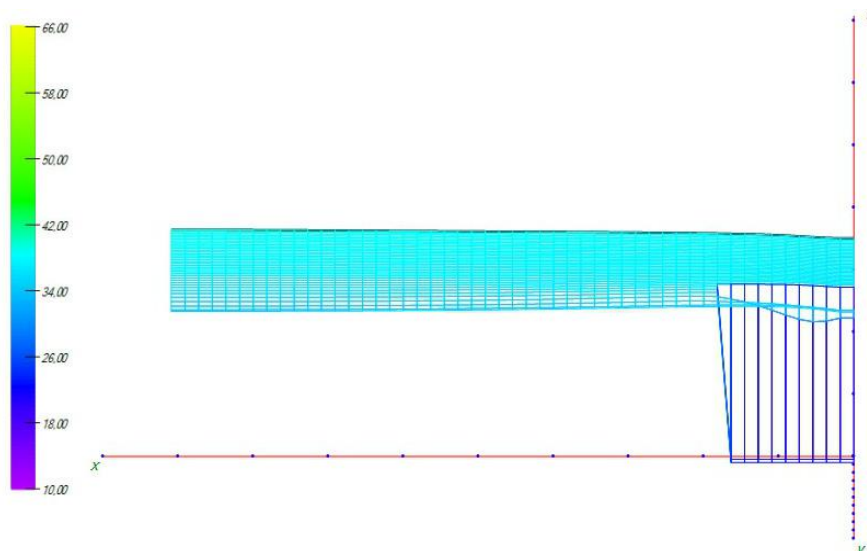


Рис. 3.59. Розподіл концентрації солей при  $T=180$  діб

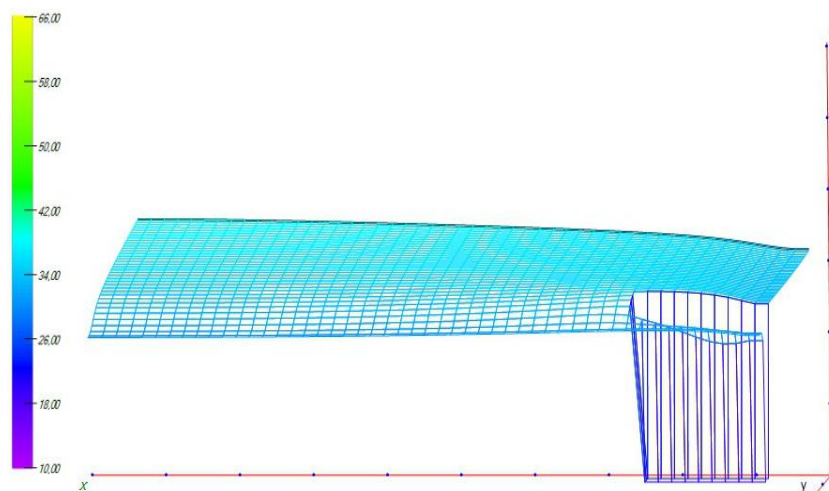


Рис. 3.60. Розподіл концентрації солей при  $T=270$  діб

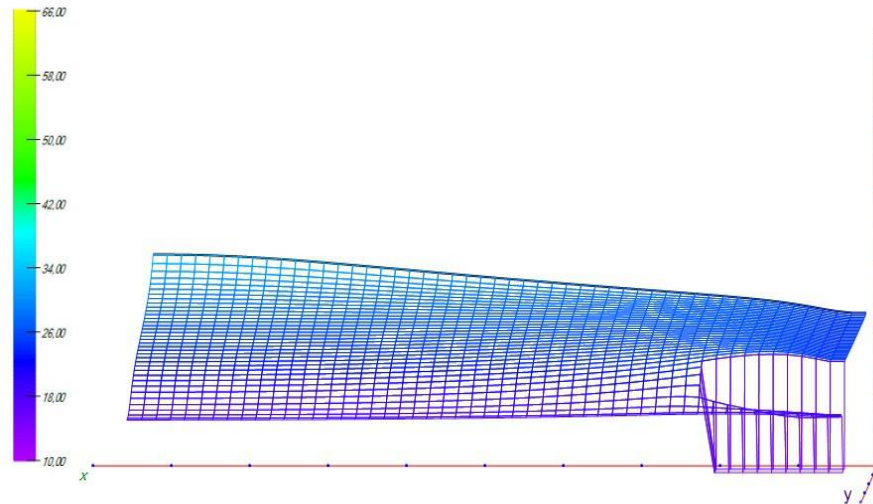


Рис. 3.61. Розподіл концентрації солей при  $T=360$  діб

Отримані результати розв'язків задачі солеперенесення представлено з урахуванням розв'язку задачі фільтрації в межах даної області.

З метою встановлення впливу нестационарної фільтрації на процес розподілу напорів рідини та концентрації солей знайдено розв'язок задачі стаціонарної фільтрації та побудовано відповідний порівняльні графіки розподілу полів п'єзометричних напорів та концентрації сольових розчинів при двох видах фільтрації (рис. 3.62, 3.63).

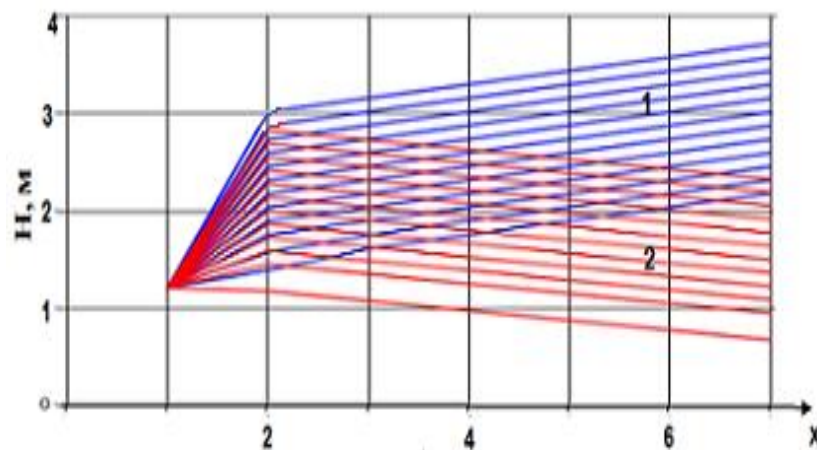


Рис. 3.62. Розподіл п'єзометричних напорів для задач нестационарної (1) та стаціонарної (2) фільтрації

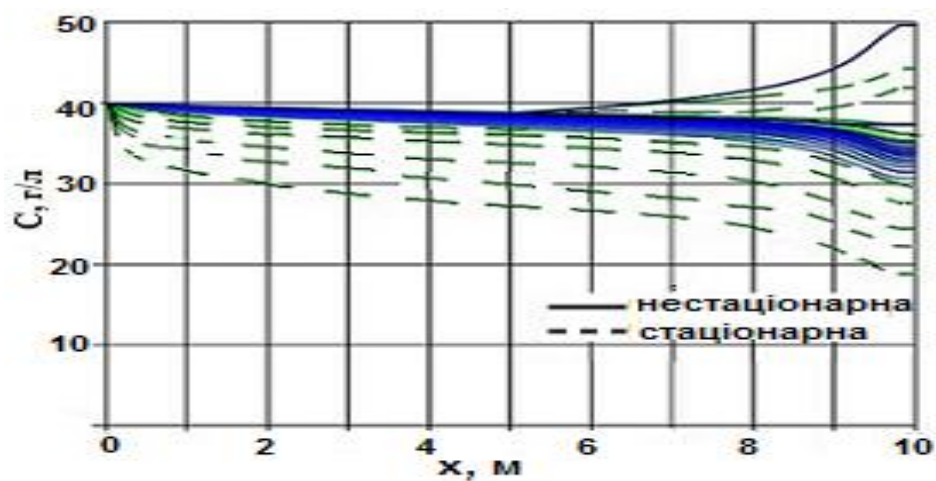


Рис. 3.63. Порівняння розподілу концентрації солей при стаціонарній та нестационарній фільтрації

Для знаходження розв'язку задачі солеперенесення було розв'язано задачу швидкості фільтрації сольових розчинів в даній області дослідження. Графіки отриманих результатів мають наступний вигляд (рис. 3.64-3.66):

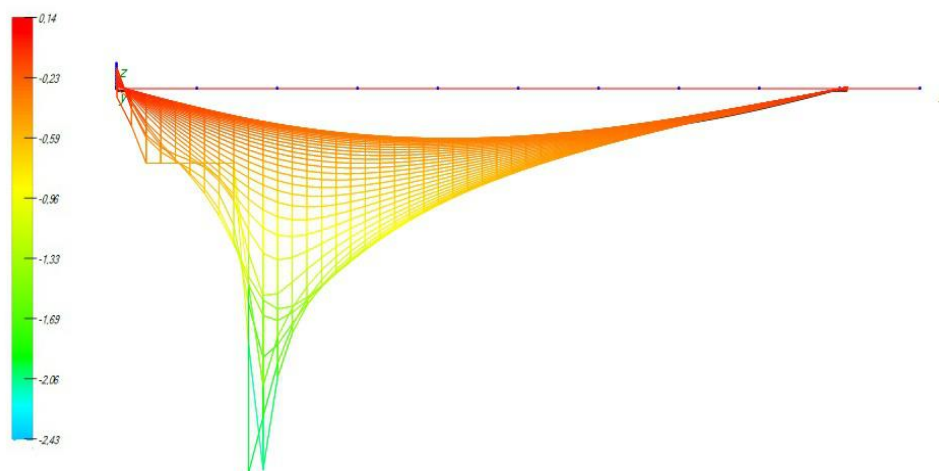


Рис. 3.64. Компонента швидкості фільтрації  $V_x$

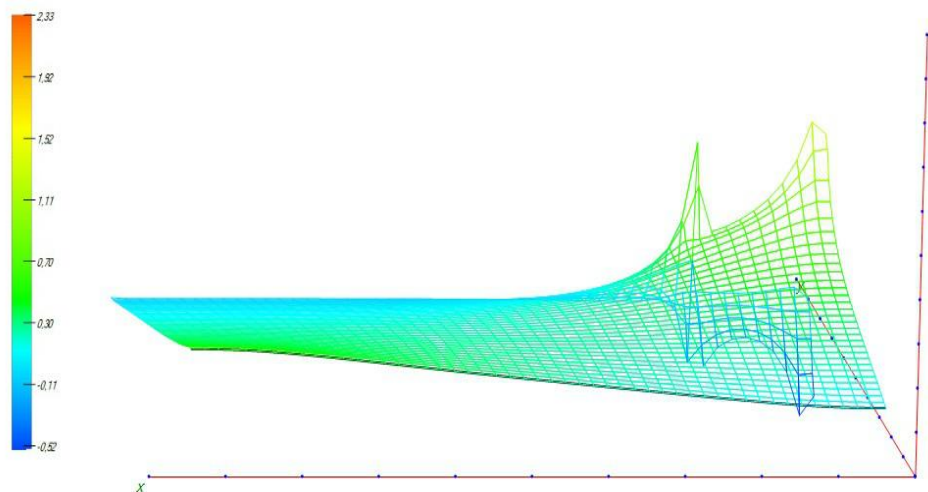


Рис. 3.65. Компонента швидкості фільтрації  $V_y$

Тоді в результаті знаходження значень компонент  $V_x$  та  $V_y$  знайдено загальний графік швидкості фільтрації сольового розчину  $V_{xy}$ , який має вигляд (рис. 3.65)

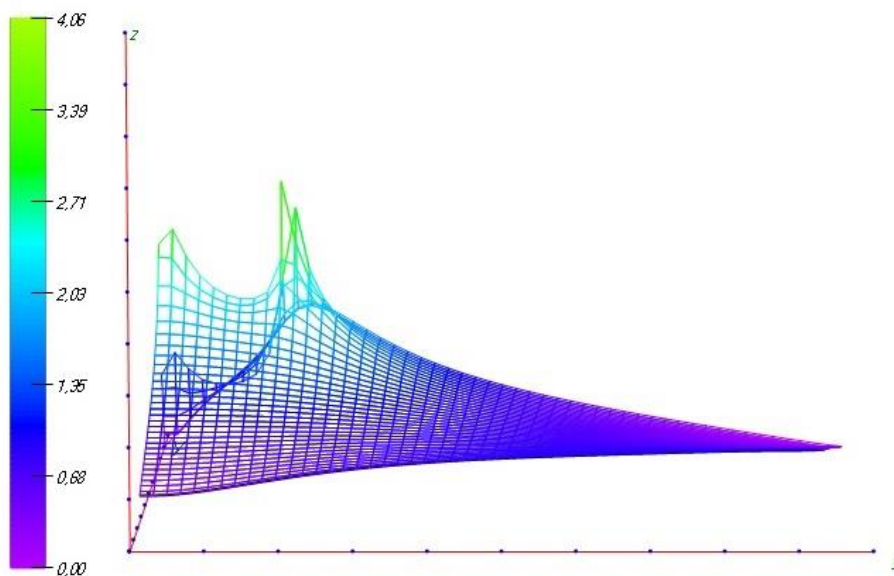


Рис. 3.66. Швидкість фільтрації сольового розчину  $V_{xy}$

Розв'язок задачі солеперенесення на вільній поверхні (РГВ) знайдено в результаті розв'язку задачі в області повного насичення та одночасного уточнення вільної межі в процесі всього розв'язування задачі.

Протягом всього часу досліджень РГВ змінювався з глибиною та часом. Рух вільної межі демонструє наступний графік (рис. 3.67):

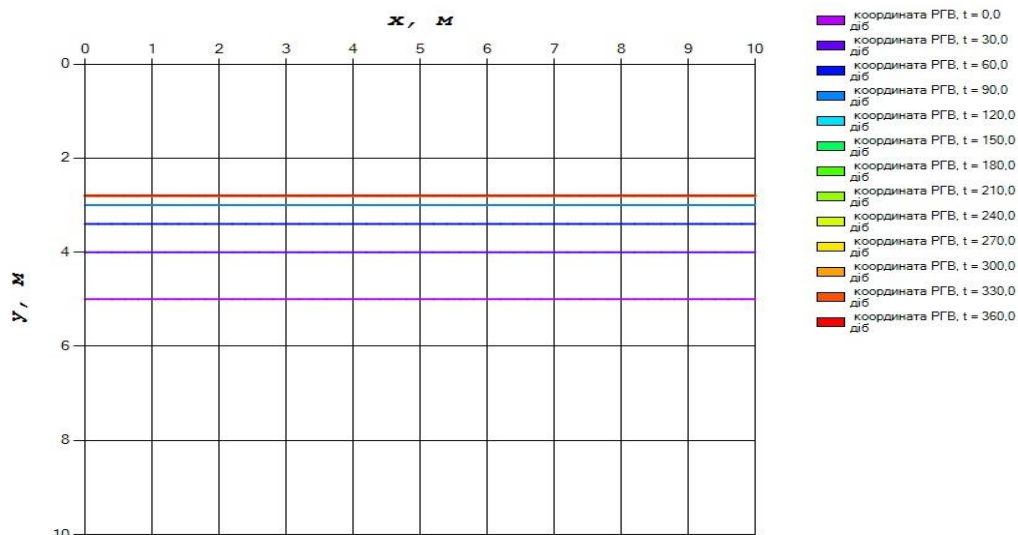


Рис. 3.67. Зміна положення РГВ з часом та глибиною

Знайшовши розв'язок задачі солеперенесення при нестационарній фільтрації та вологоперенесенні в областях неповного та повного насичення, знайдено розв'язок задачі солеперенесення сумісно у насичено-ненасиченій області.

Графічне представлення отриманих значень розподілу напорів рідини має вигляд (рис. 3.68)

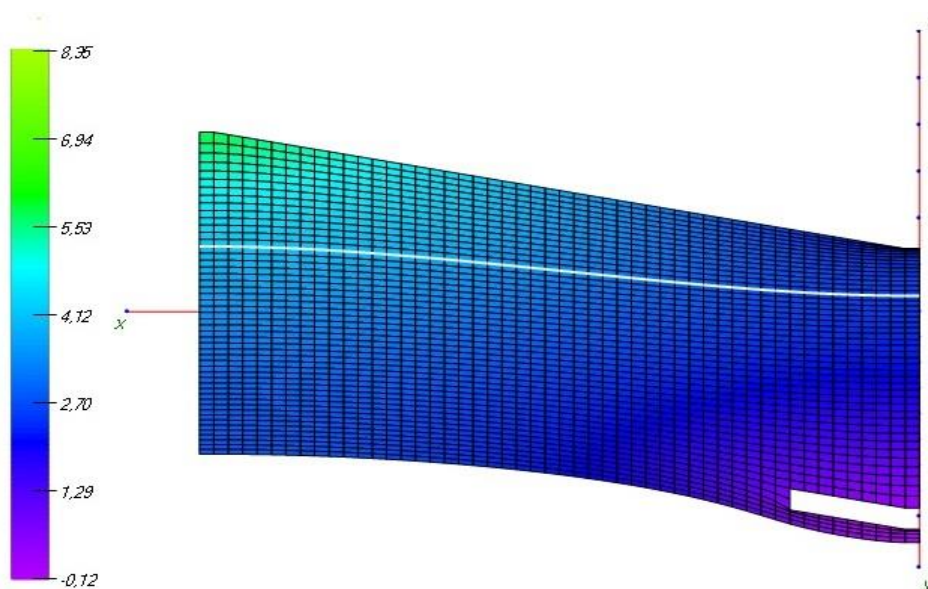


Рис. 3.68. Розподіл напорів рідини в області насичено-ненасиченого ґрунту



В результаті програмної реалізації задачі солеперенесення при сумісній нестационарній фільтрації та вологоперенесенні у насичено-ненасиченій області отримано наступну візуалізацію отриманих значень розподілу концентрації солей (рис. 3.69):

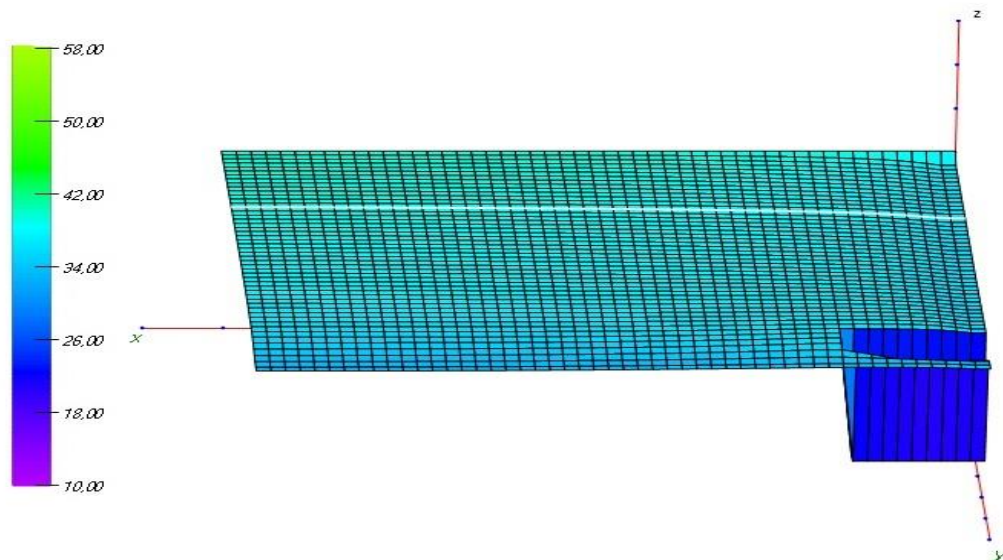


Рис. 3.69. Розподіл концентрації солей у насичено-ненасиченій області

В результаті розв'язання поставленої задачі солеперенесення при нестационарній фільтрації та вологоперенесенні в областях неповного, повного насичення, області насичено-ненасиченого ґрунтового середовища та проведенні ряду чисельних експериментів в даних областях можна зробити наступні висновки:

- розподіл напорів води зменшується з глибиною, набуваючи найменших значень в околі вільної поверхні, та зменшується з часом набуваючи найменших значень на максимальному часовому шарі ( $T=360$  діб) (рис. 3.39-3.43);
- розподіл концентрації сольових розчинів зменшується з глибиною, набуваючи найменших значень в околі вільної поверхні (рис. 3.44-3.48);
- спадання значень на вільній поверхні спостерігається і для задачі швидкості фільтрації (рис. 3.49-3.51);

- розподіл п'єзометричних напорів зменшується з глибиною та часом (рис. 3.52-3.56);
- встановлено зменшення значень розподілу концентрації солей з часом та глибиною (рис. 3.57-3.61); отримано менші значення концентрації солей в порівнянні з розподілом концентрації солей в області неповного насичення, що пояснюється інтенсивнішим вимиванням сольових розчинів з пористого середовища завдяки процесу фільтрації та наявністю дрени;
- при урахуванні нестационарної фільтрації розподіл п'єзометричних напорів зростає на 10-20% (рис. 3.62);
- розподіл концентрації солей зростає до 10 % в порівнянні з результатами задачі для стаціонарної фільтрації (рис. 3.63);
- швидкість фільтрації сольових розчинів в області повного насичення спадає з глибиною; зростання значень спостерігається в околі дрени, з часом спостерігається поступове зменшення інтенсивності процесу фільтрації (рис. 3.64-3.66);
- встановлено зміну положення вільної поверхні з часом та глибиною – вільна поверхня рухається вниз і її положення з часом змінилося на 40 % (рис. 3.67), що потрібно враховувати при використанні дренажних систем в якості елемента осушувальної системи.
- розподіли полів напорів рідини та концентрації сольових розчинів в області насичено-ненасиченого ґрунтового середовища з глибиною та часом монотонно спадають, що пояснюється поступовим вимиванням солей з пористого середовища (рис. 3.68, 3.69).

### 3.4 Висновки до Розділу 3

Основні результати даного розділу полягають в наступному:

В п. 3.1 даного розділу сформульовано постановку задачі масоперенесення сольових розчинів при фільтрації та вологоперенесенні в насичено-ненасичених ґрунтовому масиві з рухомою вільною поверхнею. Здійснено математичне моделювання поставленої крайової задачі та знайдено її чисельний розв'язок за методом скінченних різниць з використання чисельного методу конформних відображень. Побудовано відповідні гідродинамічні сітки та знайдено чисельний розв'язок задачі масоперенесення солей при сумісній фільтрації та вологоперенесенні у насичено-ненасиченому ґрунтовому середовищі у випадках його осушення. Встановлено зміну положення вільної поверхні під дією фільтраційного потоку.

В п. 3.2 побудовано математичну модель процесу солеперенесення при фільтрації та вологоперенесенні у насичено-ненасиченому ґрунтовому масиві при його зволоженні у двовимірному нелінійному випадку. Реалізовано сумісне конформне відображення області водонасичення з криволінійною границею, яка складається з областей повного та неповного насичення, на параметричний прямокутник. На основі результатів програмної реалізації встановлено вплив процесів фільтрації та вологоперенесення на процес розподілу сольових розчинів у насичено-ненасиченому ґрунтовому масиві.

В п. 3.3 проведено математичне моделювання процесу масоперенесення солей з урахуванням нестационарної фільтрації та вологоперенесення в насичено-ненасиченому ґрунтовому масиві у двовимірному нелінійному випадку. Чисельний розв'язок відповідної крайової задачі знайдено методом скінченних різниць з використанням неявної та монотонної різницевої схем. В результаті програмної реалізації задачі та проведенні чисельних експериментів встановлено вплив нестационарної фільтрації та вологоперенесення на процес розподілу концентрації солей.

Знайдено спільний розв'язок задач масоперенесення солей при фільтрації та вологоперенесенні в областях повного та неповного насичення, що дозволяє працювати з даними областями водонасичення як з одним цілим.

Побудовані математичні моделі описані системами нелінійних диференціальних рівнянь з відповідними крайовими умовами, що дозволило адекватно описати досліджувані процеси.

Здійснено програмну реалізацію обчислювальних алгоритмів розв'язку задач, проведено серію чисельних експериментів, на основі яких виконано аналіз результатів досліджень.

## ВИСНОВКИ

Дисетаційна робота є завершеним науковим дослідженням, у якому розв'язано важливу наукову задачу математичного моделювання перенесення солей при фільтрації та вологоперенесенні у насичено-ненасичених ґрунтових середовищах за наявної рухомої або нерухомої внутрішньої межі контакту областей повного та неповного насичення ґрунтових середовищ.

При цьому отримано такі наукові і практичні результати.

1. Побудовано математичну модель взаємозв'язаних процесів перенесення солей при фільтрації та вологоперенесенні у насичено-ненасичених ґрунтових середовищах з рухомою внутрішньою поверхнею контакту ґрунтових масивів та на її основі сформульовано контактні-крайові задачі в одновимірних, двовимірних постановках, лінійних та нелінійних випадках.

2. Узагальнено побудовану математичну модель солеперенесення за фільтрації та вологоперенесення у насичено-ненасичених ґрунтових середовищах на урахування осушення та зволоження ґрунтових масивів під дією горизонтального систематичного дренажу.

3. Модифіковано методи скінченних різниць з використанням чисельних методів конформних відображень для розв'язання контактних-крайових задач перенесення солей, фільтрації та вологоперенесення у насичено-ненасичених ґрунтах при наявній вільній поверхні ґрунтових вод.

4. Розроблено різницеві схеми та обчислювальні алгоритми для чисельного розв'язання контактних-крайових задач, на основі яких розроблено програмний комплекс для дослідження взаємозв'язаних процесів масоперенесення солей, фільтрації та вологоперенесення з внутрішньою поверхнею контакту насичено-ненасичених ґрунтових середовищ.

5. Проведено чисельні експерименти та виконано аналіз отриманих результатів дослідження, встановлено закономірності взаємозв'язаних процесів перенесення сольових розчинів при фільтрації та вологоперенесенні у насичено-ненасичених ґрунтах з вільною поверхнею ґрунтових вод.

6. Створено необхідне програмне забезпечення, що реалізує розроблені в роботі обчислювальні алгоритми розв'язування крайових задач. Проведено чисельні експерименти та їх аналіз.

7. Результати даної дисертаційної роботи впроваджено при складанні завдань на проектування та будівництво меліоративних систем Рівненським обласним управлінням водних ресурсів.

Матеріали кандидатської дисертації використано в навчальному процесі при виконанні кваліфікаційних, дипломних та магістерських робіт студентами за галуззю знань 0403 «Системні науки та кібернетика» освітньо-кваліфікаційних рівнів бакалавр, спеціаліст та магістр. Частина результатів дисертаційних досліджень теоретичного і практичного характеру використана при підготовці та читанні ряду тем з наступних дисциплін: «Чисельні методи математичної фізики», «Теорія систем та математичне моделювання».

**СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ**

1. Аверьянов С. Ф. Изотермическое передвижение влаги в зоне аэрации / С. Ф. Аверьянов. – Л.: Гидрометеиздат, 1972. – С. 6–78.
2. Аверьянов С. Ф. Рассоляющее действие фильтрации из каналов / С. Ф. Аверьянов // Влияние орошения на режим грунтовых вод. – М.: Изд. АН СССР, 1959. – С. 44120.
3. Аверьянов С. Ф. Фильтрация из каналов и её влияние на режим грунтовых вод / С. Ф. Аверьянов // Влияние оросительных систем на режим грунтовых вод. – М.: Изд. АН СССР, 1956. – с. 85–172.
4. Аравин В. И. Теория движения жидкостей и газов в недеформируемой пористой среде / В. И. Аравин, С.Н. Нумеров. – М.: Гостехиздат, 1953. – 616 с.
5. Ахтареев А. А. Метод решения задачи ненасыщенно-насыщенной фильтрации / А. А. Ахтареев, Р.З. Даутов // Научно-исследов. инст. матем. и механ. им. Н. Г. Чеботарева Каз. гос. ун-та. 2003-2007 гг. – Казань: Изд. КГУ, 2008. – С. 318–328.
6. Ахтареев А. А. Метод смешанной переменной для моделирования ненасыщенно-насыщенных течений / А. А. Ахтареев, Р. З. Даутов // Ученые записки КГУ. Сер. физ.мат. наук. – Казань: Изд. КГУ, 2007 – Т. 2. – С. 58–72.
7. Баренблатт Г. И. Движение жидкостей и газов в природных пластах / Г. И. Баренблатт, В. М. Ентов, В. М. Рыжик. – М.: Недра, 1984. – 211 с.
8. Березовский А. А. Лекции по нелинейным краевым задачам математической физики / А. А. Березовский. В 2-х т. – К.: Наук. думка, 1976. – Т.1. – 287 с.; – Т. 2. – 292 с.
9. Богаенко В. А. Анализ вычислительных схем моделирования процессов геогидродинамики / В. А. Богаенко, В. И. Кудин, В. В. Скопецкий // Проблемы управления и информатики. – 2009. – № 8. – С. 1–12.
10. Богаенко В. А. Анализ численного моделирования динамики грунтового массива при неустановившейся напорной фильтрации /

В. А. Богаенко, О. А. Марченко, Т. А. Самойленко // Управляющие системы и машины. – 2014. – № 4. – С. 33–40.

11. Богаенко В. А. Методика численного моделирования процесса электрокинетической очистки грунтов в неизотермических условиях / В. А. Богаенко // УсиМ. – 2013. – №1. – С. 5–15.

12. Богаєнко В. О. Моделювання впливу засоленості на динаміку геохімічних процесів / В. О. Богаєнко // Математичне та комп'ютерне моделювання. Сер.: фізико-математичні науки: зб. наук. пр. – Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільськ. нац. ун-т, 2010. – Вип. 3. – С. 3–13.

13. Богусский И. Г. О скорости химических реакций / И. Г. Богусский, Н.О. Каяндер // Журнал русского физико-химического общества. – 1876. – С. 8.

14. Бомба А. Я. Нелінійні математичні моделі процесів геогідродинаміки / А. Я. Бомба, В. М. Булавацький, В. В. Скопецький. – К.: Наук. думка, 2007. – 92 с.

15. Бомба А. Я. Методи комплексного аналізу / А. Я. Бомба, С. С. Каштан, Д. С. Пригодницький, С. В. Ярощак. – Рівне: НУВГП, 2013. – 415 с.

16. Бомба А. Я. Нелінійні задачі типу фільтрація-конвекція-дифузія-масообмін за умов неповних даних / А. Я. Бомба, В. І. Гаврилюк, А. П. Сафоник, О. А. Фурсачик. – Рівне: НУВГП, 2011. – 276 с.

17. Бондарев Э. Н. Конвективная диффузия в пористых средах с учетом явления адсорбции / Э. Н. Бондарев, В. Н. Николаевский // Журнал прикладной математики и технической физики. – 1962. – № 5. – С. 127–134.

18. Бочеввер Ф. Н. Конвективная диффузия солей в радиальном потоке подземных вод / Ф. Н. Бочеввер, А. Е. Орадовская, В. И. Пагуров // Журнал прикладной математики и технической физики. – 1966. – № 2. – С. 128–130.

19. Бугай Д. А. Локально-одномерная разностная схема для уравнения конвективной диффузии / Д. А. Бугай // Вычислительная и прикладная математика. – 1992. – Вып. 74. – С. 64–67.



20. Булавацкий В. М. Математическое моделирование дробно-дифференциальной динамики релаксационного процесса конвективной диффузии в условиях плановой фильтрации / В. М.Булавацкий, В.А. Богаенко // Кибернетика и системный анализ. – 2015. – Т. 51, №6. – С. 60–70.

21. Булавацкий В. М. Дробно-дифференциальные математические модели динамики неравновесных геомиграционных процессов и задачи с нелокальными граничными условиями / В. М. Булавацкий // Кибернетика и системный анализ. – 2014. – №1. – С. 93– 101.

22. Булавацкий В. М. Системный подход к проблеме математического моделирования процесса фильтрационной консолидации / В. М. Булавацкий, В. В. Скопецкий // Кибернетика и системный анализ. – 2006. – №6. – С. 71–79.

23. Булавацкий В. М. Математическое моделирование динамики аномальных миграционных полей в рамках модели распределенного порядка / В. М. Булавацкий, Ю. Г. Кривонос // Кибернетика и системный анализ. – 2013. – №3. – С. 74–81.

24. Булавацкий В. М. Математическое моделирование динамики одного неравновесного диффузионного процесса на основе интегро-дифференцирования дробного порядка / В. М. Булавацкий, А. В. Гладкий // Кибернетика и системный анализ. – 2015. – №1. – С. 155–161.

25. Бутузов В. Ф. Об одном сингулярно возмущенном уравнении параболического типа / В. Ф. Бутузов, А. В. Нестеров // Вестник МГУ. Вычислительная математика и кибернетика. – 1978. – № 2. – С. 49–56.

26. Вабищевич П. Н. Адаптивные сетки составного типа в задачах математической физики / П. Н. Вабищевич // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1989. – 29, № 6. – С. 902–914.

27. Вабищевич П. Н. Численное решение задачи напорной фильтрации под гидротехническим сооружением / П. Н. Вабищевич, Р. В. Гасиев // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1989. – 27, № 10. – С. 1580–1584.

28. Вакал Е. С. Об одном методе решения нелинейных уравнений параболического типа / Е. С. Вакал, С. Л. Кивва, Г. Е. Мистецкий, О. Б. Стеля // Вычислительная и прикладная математика. – 1985. Вып. 56. – С. 36–43.
29. Веретенцев В. А. Построение разностной сетки в области с криволинейными границами с помощью конформного отображения / В. А. Веретенцев // Актуальные вопросы прикладной математики. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989. – С. 88–93.
30. Веригин Н. Н. Диффузия и массообмен при фильтрации жидкостей в пористых средах / Н. Н. Веригин, Б. С. Шержуков // Развитие исследований по теории фильтрации в СССР (1917–1967). – М.: Наука, 1969. – С. 237–313.
31. Веригин Н. Н. Конвективная диффузия и массообмен при фильтрации растворов в пористой среде / Н. Н. Веригин, В. С. Саркисян // Гидрогеол. исслед. водозаборн., водопонизительн. и дренаж. систем. – М.: 1980. – С. 19–24.
32. Веригин Н. Н. Гидродинамические и физико-химические свойства горных пород / Н. Н. Веригин, С. В. Васильев, В. С. Саркисян, Б. С. Шержуков. – М.: Недра, 1977. – 272 с.
33. Веригин Н. Н. Методы лабораторного определения параметров диффузии и сорбции при фильтрации в пористых средах / Н. Н. Веригин, Н. К. Голованова // Тр. ин-та ВОДГЕО, 1971. – 29. – С. 28–34.
34. Веригин Н. Н. Миграции солей при промывках сухих засоленных земель при их поверхностном засолении / Веригин Н. Н., Куранов Н. П. // Совершенствование методов гидрогеологических и почвенно-мелиоративных исследований орошаемых и осушаемых земель. – М.: Колос, 1974. – С. 14–23.
35. Веригин Н. Н. Некоторые вопросы химической гидродинамики, представляющие интерес для мелиорации и гидротехники / Н. Н. Веригин // Изв. АН СССР, отн. – 1953. – № 7. – С. 1369–1382.
36. Веригин Н. Н. Распространение фронта загрязнения в районах наземных и подземных хранилищ с учетом диффузии и равновесного массообмена / Н. Н. Веригин, А. В. Шибанов // Труды ин-та ВОДГЕО. – 1975. – Вып. 54. – С. 6–17.

37. Веретехина Л. В. Расчет напорной фильтрации на фоне систематического горизонтального дренажа / Л. В. Веретехина, Л. И. Демченко, Г. Е. Мистецкий // Прикладные задачи матфизики: Сб. Латв. Ун-та им. П. Стучки, 1978. – С. 118–127.

38. Власюк А. П. Некоторые случаи фильтрации под флютбетами в анизотропных средах / А. П. Власюк // Мат. методы исследования фильтрации и массопереноса. – К.: Ин-т математики АН УССР, 1984. – С. 77–84.

39. Власюк А. П. Застосування чисельних конформних відображень до розв'язання нестационарної задачі фільтрації підземних вод / А. П. Власюк, О. П. Остапчук // Тези доп. Міжн. конф. «Прогнозування та прийняття рішень в умовах невизначеності». – Київ – Рівне, 2008. – С. 250–252.

40. Власюк А. П. Математичне моделювання впливу масоперенесення солей на вологоперенесення при наявності інфільтрації та осмосу / А. П. Власюк, Т. П. Цветкова // Тези доп. Міжн. наук. конф. ім. академіка М. Кравчука. – Київ, 2012. – С. 115.

41. Власюк А. П. Математичне моделювання впливу масопереносу при сумісному вологопереносі та фільтрації сольових розчинів за наявності осмосу / А. П. Власюк, Т. П. Цветкова // Тез. доп. Міжн. наук. конф. «Прогнозування та прийняття рішень в умовах невизначеності». – Ялта, 2010. – С. 41–42.

42. Власюк А. П. Математичне моделювання масоперенесення солей при нестационарній фільтрації і вологоперенесенні в насичено-ненасиченому ґрунтовому масиві / А. П. Власюк, Т. П. Цветкова // Вісник Київського нац. ун-ту ім. Тараса Шевченка». Сер.: фіз.-мат. науки. – К., 2015. – Вип. 3. – С. 55–59.

43. Власюк А. П. Математичне моделювання масоперенесення солей при нестационарній фільтрації та вологоперенесенні в насичено-ненасичених ґрунтах у нелінійному випадку / А. П. Власюк, Т. П. Цветкова // Тез. доп. Міжн. наук. конф. «Прийняття рішень в умовах невизначеності». – Мукачево, 2014. – С. 77–78.

44. Власюк А. П. Математичне моделювання масоперенесення солей при нестационарній фільтрації підземних вод та вологоперенесенні у насичено-

ненасиченому ґрунті з рухомою вільною поверхнею / А. П. Власюк, Т. П. Цветкова // Тез. доп. Всеукр. наук. конф. «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики». – Львів, 2015. – С. 90–91.

45. Власюк А. П. Математичне моделювання масоперенесення солей при нестационарній фільтрації та вологоперенесенні у насичено-ненасиченому ґрунтовому масиві при наявності вертикального дренажу / А. П. Власюк, Т. П. Цветкова // Тез. доп. Міжн. наук.-практ. конф. «Проблеми розвитку вищої школи та економіки в ХХІ столітті». – Рівне, 2015. – С. 38–40.

46. Власюк А. П. Математичне моделювання масоперенесення солей при сумісній фільтрації та вологоперенесенні в насичено-ненасичених ґрунтах в нелінійній постановці / А. П. Власюк, Т. П. Цветкова // Тез. доп. Міжн. наук. конф. «Прогнозування та прийняття рішень в умовах невизначеності». – Східниця, 2011. – С. 48–50.

47. Власюк А. П. Математичне моделювання масоперенесення солей при фільтрації та вологоперенесенні в насичено-ненасичених ґрунтах / А. П. Власюк, Т. П. Цветкова // Тези доп. Всеукр. наук. конф. «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики». – Львів, 2011. – С. 27.

48. Власюк А. П. Математичне моделювання масопереносу при фільтрації сольових розчинів в насичено-ненасичених ґрунтових середовищах / А. П. Власюк, Т. П. Цветкова // Тези доп. Всеукр. наук. конф. «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики». – Львів, 2009. – С. 52–53.

49. Власюк А. П. Математичне моделювання масопереносу сольових розчинів при фільтрації підземних вод в насичено-ненасичених середовищах / А. П. Власюк, Т. П. Цветкова // Тези доп. Міжн. наук. конф. «Прогнозування та прийняття рішень в умовах невизначеності». – Київ-Рівне, 2008. – С. 248 – 250.

50. Власюк А. П. Математичне моделювання масопереносу сольових розчинів при фільтрації підземних вод в насичено-ненасичених ґрунтових середовищах з рухомою вільною поверхнею / А. П. Власюк, Т. П. Цветкова // Тези доп. Всеукр. наук. конф. «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики». – Львів, 2008. – С. 54.

51. Власюк А. П. Математичне моделювання масопереносу сольових розчинів при фільтрації підземних вод в насичено-ненасичених ґрунтових середовищах з врахуванням інфільтрації / А. П. Власюк, Т. П. Цветкова // Тез. доп. Міжн. наук. конф. «Прогнозування та прийняття рішень в умовах невизначеності». – Мукачеве, 2012. – С. 73–74.

52. Власюк А. П. Математичне моделювання одновимірної задачі вологопереносу з врахуванням масопереносу солей та осмотичних явищ / А. П. Власюк, Т. П. Цветкова // Тези доп. Міжн. наук. конф. ім. академіка М. Кравчука. – Київ, 2010. – С. 94.

53. Власюк А. П. Математичне моделювання перенесення солей в насичено-ненасиченому ґрунтовому масиві при його осушенні / А. П. Власюк, Т. П. Цветкова // Тез. доп. Міжн. наук. конф. «Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів». – Рівне, 2015. – С. 49–50.

54. Власюк А. П. Математичне моделювання перенесення солей при вологоперенесенні в шаруватих ґрунтах / А. П. Власюк, Т. П. Цветкова // Тез. доп. Всеукр. наук. конф. «Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів». – Рівне, 2013 – С. 46.

55. Власюк А. П. математичне моделювання переносу сольових розчинів при фільтрації підземних вод у ґрунтових масивах / А. П. Власюк, О. П. Остапчук. – Рівне: НУВГП, 2015. – 214 с.

56. Власюк А. П. Математичне моделювання переносу сольових розчинів при сумісній фільтрації та вологоперенесенні у насичено-ненасичених ґрунтах в нелінійній одновимірній постановці / А. П. Власюк, Т. П. Цветкова // Математичне та комп'ютерне моделювання. Сер.: технічні науки. – Кам'янець-Подільський, 2012. – Вип. 7. – С. 28–42.

57. Власюк А. П. Математичне моделювання процесів масопереносу в областях з криволінійними фіксованими границями / А. П. Власюк // Вісн. Укр. держ. академії водного господарства.– Рівне, 1998. – Вип. 1. Ч. 1. – С. 203–207.

58. Власюк А. П. Математичне моделювання процесу масопереносу при фільтрації і вологоперенесенні сольових розчинів в областях повного і

неповного насичення / А. П. Власюк, Т. П. Цветкова // Вісник Київського нац. ун-ту ім. Тараса Шевченка». Сер.: фіз.-мат. науки. – К., 2012. – Вип. 1. – С. 137–144.

59. Власюк А. П. Математичне моделювання процесу солепереносу при фільтрації та вологопереносі в насичено-ненасиченому ґрунтовому масиві при наявності рухомої вільної поверхні / А. П. Власюк, Т. П. Цветкова // Вісник ТНТУ. – Тернопіль, 2014. – № 2 (74). – С. 219–233.

60. Власюк А. П. Математичне моделювання солеперенесення при сумісній фільтрації та вологоперенесенні в насичено-ненасичених шаруватих ґрунтових середовищах у випадку зволожуючого стаціонарного режиму / А. П. Власюк, Т. П. Цветкова // Тез. доп. Міжн. наук. конф. «Прийняття рішень в умовах невизначеності». – Ялта-Форос, 2013. – С. 55–57.

61. Власюк А. П. Математичне моделювання солеперенесення під впливом нестаціонарної фільтрації та вологоперенесення у насичено-ненасичених ґрунтах / А. П. Власюк, Т. П. Цветкова // Тез. доп. Міжн. наук. конф. «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики». – Львів, 2014. – С. 56.

62. Власюк А. П. Математичне моделювання солеперенесення при вологоперенесенні з врахуванням осмотичних явищ в шаруватих ґрунтах в нелінійному випадку / А. П. Власюк, Т. П. Цветкова // Тез. доп. Міжн. наук.-практ. конф. «Проблеми розвитку вищої школи та економіки в ХХІ столітті». – Рівне, 2013. – С. 83–85.

63. Власюк А. П. Математичне моделювання солеперенесення при сумісній фільтрації та вологоперенесенні у насичено-ненасичених ґрунтах в лінійній постановці / А. П. Власюк, Т. П. Цветкова // Вісник Київського нац. ун-ту ім. Тараса Шевченка». Сер.: фіз.-мат. науки. – К., 2013. – Вип. 2. – С. 118–124.

64. Власюк А. П. Математичне моделювання солеперенесення при сумісній фільтрації та вологоперенесенні в насичено-ненасичених шаруватих ґрунтах в лінійній постановці / А. П. Власюк, Т. П. Цветкова // Тез. доп. Міжн.

наук. конф. «Прийняття рішень в умовах невизначеності». – Східниця, 2013. – С. 108–110.

65. Власюк А. П. Математичне моделювання солеперенесення при сумісній нестационарній фільтрації та вологоперенесенні в насичено-ненасиченому ґрунтовому масиві при його осушенні / А. П. Власюк, Т. П. Цветкова // Тез. доп. Міжн. конф. «Прийняття рішень в умовах невизначеності». – Східниця, 2015. – С. 157–159.

66. Власюк А. П. Одновимірна задача масопереносу сольових розчинів при фільтрації підземних вод в умовах неповного насичення ґрунту / А. П. Власюк, Т. П. Цветкова // Тези доп. Міжн. наук. конф. ім. академіка М. Кравчука. – Київ, 2008. – С. 75.

67. Власюк А. П. Теоретичне дослідження процесів розчинення та вимивання солей і карстових порід при фільтрації підземних вод в областях з криволінійними та вільними границями: автореф. дис. ... д-ра техн. наук: 05.13.02 / Власюк Анатолій Павлович; Київський ун-т ім. Тараса Шевченка. – К., 1996. – 43 с.

68. Власюк А. П. Фільтраційна консолідація глинистих ґрунтів при наявності масопереносу солей / А. П. Власюк, О.В. Жеребят'єв // Вісн. Укр. держ. академії водного господарства. – Рівне, 1998. – С.40–43.

69. Власюк А. П. Чисельне моделювання масоперенесення сольових розчинів у ненасичених шаруватих ґрунтах / А. П. Власюк, Т. П. Цветкова // Математичне та комп'ютерне моделювання. Сер.: технічні науки. – Кам'янець-Подільський, 2014. – Вип. 10.– С. 44–52.

70. Власюк А. П. Чисельне моделювання масопереносу сольових розчинів при фільтрації підземних вод в насичено-ненасичених ґрунтових середовищах з рухомою вільною поверхнею / А. П. Власюк, Т. П. Цветкова // Тез. доп. Міжн. наук. конф. «Прогнозування та прийняття рішень в умовах невизначеності». – Новий Світ, 2008. – С. 68–70.

71. Власюк А. П. Чисельне моделювання солеперенесення при сумісній нестационарній фільтрації і вологоперенесенні в областях повного та неповного

насичення / А. П. Власюк, Т. П. Цветкова // Тез. доп. Міжн. наук. конф. «Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації». Кам'янець-Подільський, 2014. – С. 35–37.

72. Власюк А. П. Чисельне моделювання солеперенесення при сумісній нестационарній фільтрації та вологоперенесенні в насичено-ненасичених ґрунтах в лінійній постановці / А. П. Власюк, Т. П. Цветкова // Тез. доп. Міжн. наук. конф. ім. академіка М. Кравчука. – Київ, 2014. – С. 74.

73. Власюк А. П. Математичне моделювання фільтрації сольових розчинів та вологоперенесення в насичено-ненасичених ґрунтових середовищах в стаціонарному режимі / А. П. Власюк, Т. П. Цветкова // Тез. Доп. Міжн. наук. конф. «Прогнозування та прийняття рішень в умовах невизначеності». – Ялта, 2011. – С. 53–55.

74. Власюк А. П. Про деякі нові математичні моделі підземної гідромеханіки / А. П. Власюк // Вісник РДТУ. – Рівне, 2000. – Вип. 3 (5). Ч.2. – С.57–62.

75. Власюк А. П. Автоматическое построение конформных и квазиконформных отображений двухсвязных и трехсвязных областей: Препр. / А. П. Власюк, В. Г. Михальчук // АН УССР. Ин-т математики; 91.57. – Киев, 1991. – 56 с.

76. Власюк А. П. Автоматическое построение конформных и квазиконформных отображений четырехугольных областей с помощью разностных сеток с “плавающими” узлами: Препр. / А. П. Власюк, В. Г. Михальчук // АН УССР. Ин-т математики; 89.79. – Киев, 1989. – 55 с.

77. Власюк А. П. Експериментальні дослідження деяких параметрів фільтрації сольових розчинів в піщаних ґрунтах / А. П. Власюк, М. Т. Кузло // Меліорація і водне господарство. – К.: 2000. – Вип.87. – С.43–46.

78. Власюк А. П. Комп'ютерна візуалізація гідродинамічних полів в областях з криволінійними межами / А. П. Власюк, Т. П. Дячук // Вісник НУВГП. Сер.: технічні науки. – Рівне, 2006. – Вип. 4(36). Ч.2. – С. 74–84.



79. Власюк А. П. Математическое моделирование массопереноса при фильтрации и влагопереносе в насыщенно-ненасыщенных слоистых грунтах / А. П. Власюк, Т. П. Цветкова // Тез. докл. Internat. Conf. «Problems of decision making under uncertainties». – Brno, Czech Republic, 2012. – С. 152–153.

80. Власюк А. П. Математическое моделирование солепереноса при фильтрации и влагопереносе в насыщенно-ненасыщенных грунтах в случае увлажняющего режима / А. П. Власюк, Т. П. Цветкова // Инженерно-физический журнал. – 2015. – Т. 88, №5. – С. 1031–1042.

81. Власюк А. П. Математичне моделювання солеперенесення при фільтрації підземних вод в насичено-ненасичених ґрунтових середовищах у випадку нестационарного зволожуючого режиму / А. П. Власюк, Т. П. Цветкова // Тез. доп. Всеукр. наук. конф. «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики». – Львів, 2013. – С. 38.

82. Власюк А. П. Математичне моделювання консолідації ґрунтів в процесі фільтрації сольових розчинів / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк. – Рівне: НУВГП, 2004. – 210 с.

83. Власюк А. П. Математичне моделювання консолідації ґрунтів при фільтрації сольових розчинів в неізотермічних умовах / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк. – Рівне: НУВГП, 2008. – 416 с.

84. Власюк А. П. Математичне моделювання масоперенесення при фільтрації та вологоперенесенні в ненасичених шаруватих ґрунтах з врахуванням інфільтрації та осмосу / А. П. Власюк, Т. П. Цветкова // Тез. доп. Всеукр. наук. конф. «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики». – Львів, 2012. – С. 63.

85. Власюк А. П. Монотонна різницева схема для нелінійного одновимірного рівняння параболічного типу, що містить першу похідну / А. П. Власюк, О. П. Остапчук, О. М. Степанченко // Вісник Київського університету. Сер. фіз.-мат. наук. – К., 2005. – Вип. 2. – С. 188–197.

86. Гладкий А. В. Алгоритмизация и численный расчёт фильтрационных схем / А.В. Гладкий, И. И. Ляшко, Г. Е. Мистецкий. – К: Вища школа, 1981. – 288 с.
87. Годунов С. К. Разностные схемы / С. К. Годунов, В. С. Рябенский. – М.: Наука, 1976. – 400 с.
88. Годунов С. К. О расчетах конформных отображений и построении разностных сеток / С. К. Годунов, Г.П. Прокопов // Журнал вычислительная математика и математическая физика. – 1967. – 7, № 5. – С. 1031–1059.
89. Голубев В. С. Динамика геохимических процессов / В. С. Голубев. – М.: Недра, 1981. – 208 с.
90. Гольдберг В. М. Гидрогеологические основы охраны подземных вод от загрязнения / В. М. Гольдберг, С. Газда. – М.: Недра, 1984. – 262 с.
91. Горев Л. Н. Основы моделювання в гідроекології / Л. Н. Горев. – К.: Либідь, 1996. – 336 с.
92. Гужев Д. С. Численные методы решения задач химической кинетики с диффузией / Д. С. Гужев и др. // Математическое моделирование. – 1992. – Т.4, №1. – С.98–110.
93. Дворкин Л. Б. К теории конвективной диффузии солей в пористых средах с учетом влияния “тупиковых” пор / Л. Б. Дворкин // Журнал физической химии. – 1968. – Т. 42, № 4. – С. 238–243.
94. Дейнека В. С. Математические модели и методы расчета задач с разрывными решениями / В. С. Дейнека, И. В. Сергиенко, В. В. Скопецкий. – К.: Наукова думка. – 1995. – 263 с.
95. Дейнека В. С. Модели и методы решения задач в неоднородных средах / В. С. Дейнека, И. В. Сергиенко. – К.: Наукова думка. – 2001. – 606 с.
96. Дейнека В. С. Модели и методы решения задач с условиями сопряжения / В. С. Дейнека, И. В. Сергиенко, В. В. Скопецкий. – К.: Наук. думка. – 1998. – 615 с.
97. Демченко Л. И. Решение некоторых классов задач влагопереноса с учетом различной структуры почвогрунта / Л. И. Демченко, Д. А. Ключин,

Г. Е. Мистецкий // Моделирование и прогнозирование изменения природных условий при перераспределении водных ресурсов. – Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР. – 1987. – 47 с.

98. Денисов Ю. М. Математическая модель переноса влаги, тепла и солей в почвогрунтах / Ю. М. Денисов // Метеорология и гидрогеология. – 1978, № 3. – С. 71–79.

99. Дьяконов Е. Г. Минимизация вычислительной работы. Асимптотически оптимальные алгоритмы для эллиптических задач / Е. Г. Дьяконов. – М.: Наука, 1989. – 272 с.

100. Згуровский М.З. Численное моделирование распространения загрязнений в окружающей среде / М. З.Згуровский, В. В. Скопецкий, В. К. Хрущ, Н. Н. Беляев. – К.: Наукова думка, 1997. – 367 с.

101. Калиткин Н. Н. Численные методы / Н. Н. Калиткин. – М.: Наука, 1978. – 512 с.

102. Клыков В. Е. Численное решение задачи о растворении и выщелачивании водорастворимых веществ из горных пород / В. Е. Клыков // Вопросы механики. – 1975. – 3. – С. 47–53.

103. Ковальчук П. І. Моделювання і прогнозування стану навколишнього середовища / П. І. Ковальчук // Навч. посібник. – К.: Либідь, 2003. – 208 с.

104. Ковальчук П. І. Системна оптимізація водокористування при зрошенні / П.І. Ковальчук, Н. В. Пендак, М. М. Волошин. – Рівне, 2008. – 204 с.

105. Кузло М. Т. Дослідження впливу концентрації сольових розчинів на деформаційні характеристики ґрунтів / М. Т. Кузло, І. А. Філатова // Вісник НУВГП. – Рівне, 2006. – Вип. 4 (36). Ч. 2. – С. 209–214.

106. Курант Р. Уравнения с частными производными / Р. Курант. – М.: Мир, 1964. – 830 с.

107. Лаврик В. И. Об асимптотическом приближении решений некоторых задач массопереноса при фильтрации в неоднородной анизотропной среде: Препр. / В. И. Лаврик, А. Я. Бомба, А. П. Власюк // АН УССР. Ин-т математики; 85.72. – Киев, 1985. – 17 с.

108. Лаврик В. И. Решение задач массопереноса водорастворимых веществ в случае зависимости коэффициента конвективной диффузии от скорости фильтрации. Некоторые задачи массопереноса при фильтрации подземных вод: Препр. / В. И. Лаврик // АН УССР. Ин-т математики; 81.18. – Киев, 1981. – С. 3–24.

109. Лаврик В. И. Аналитическое и численно-аналитическое решение двумерных краевых задач конвективной диффузии растворимых веществ при фильтрации подземных вод: Препр. / В. И. Лаврик, А. Ф. Милютин // АН УССР. Ин-т математики; 78.24. – Киев, 1978. – 56 с.

110. Лаврик В. И. Конформные отображения физико-топологических моделей / В.И. Лаврик, В. П. Фильчакова, А. А. Яшин. – К: Наук. думка, 1990. – 376 с.

111. Лаврик В. И. Некоторые задачи фильтрации и массопереноса в неоднородных анизотропных пористых средах: Препр. / В. И. Лаврик, А. П. Власюк // АН УССР. Ин-т математики; 85.15. – Киев, 1985. – 59 с.

112. Лаврик В. И. Некоторые модели и методы исследования процессов загрязнения подземных вод / В. И. Лаврик, В. А. Добрынский, И. В. Рогаль // Математика и проблемы водного хозяйства. – К: Наук. думка, 1986. – С. 100–126.

113. Лаврик В. И. О двух краевых задачах неустановившейся конвективной диффузии в случае фильтрации грунтовых вод со свободной поверхностью / В. И. Лаврик // Український математичний журнал. – 1976. – 28, № 5. – С. 667–681.

114. Лаврик В. И. Применение метода прямых к решению задач массопереноса при профильной и плановой фильтрации подземных вод: Препр. / В. И. Лаврик, И. В. Рогаль // АН УССР. Ин-т математики; 83.32. – Киев, 1983. – 57 с.

115. Левич В. Г. Физико химическая гидродинамика / В. Г. Левич. – 2-е изд., М.: 1959. – 699 с.

116. Лычман В. В. Численное решение задач подземного влагопереноса / В. В. Лычман, Г. Е. Мистецкий // Вычислит. и прикл. математика. –1985. – Вып. 56. – С. 88–91.
117. Лукнер Л. Моделирование геофильтрации / Л. Лукнер, В. М. Шестаков. – М.: Недра, 1976. – 407 с.
118. Лукнер Л. Моделирование миграции подземных вод / Л. Лукнер, В. М. Шестаков. – М.: Недра, 1986. – 208 с.
119. Лыков А. В. Теория тепло- и массопереноса / А. В. Лыков, Ю. А. Михайлов. – М.: Госэнергоиздат, 1963. – 536 с.
120. Ляшко И. И. Влагоперенос в насыщенно-ненасыщенных средах / И. И. Ляшко, Л. И. Демченко, Г. Е. Мистецкий / Докл. АН СССР. – Сер. А. – 1979. - № 8. – С. 601–603.
121. Ляшко И. И. Метод мажорантных областей в теории фильтрации / И. И. Ляшко, И. М. Великоиваненко, В. И. Лаврик, Г. Е. Мистецкий. – К: Наукова думка, 1974. – 200 с.
122. Ляшко И. И. Численное решение задач тепло- и массопереноса в пористых средах / И. И. Ляшко, Л. И. Демченко, Г. Е. Мистецкий. – К: Наукова думка, 1991. – 264 с.
123. Ляшко С. И. Моделирование и оптимизация подземного массопереноса / С. И. Ляшко, Д. А. Ключин, А. С. Тригуб. – Київ: Наук. думка, 1998. – 240 с.
124. Ляшко С. И. Обобщенное управление линейными системами / С. И. Ляшко. – Київ: Наук. думка, 1998. – 471 с.
125. Мандзак Т. І. Математичне моделювання і числовий аналіз адвекції-дифузії у неоднорідних середовищах / Т. І. Мандзак, Я. Г. Савула. – Львів: Сплайн, 2009. – 148 с.
126. Мартинюк П. М. Дослідження існування та єдиності розв'язку однієї квазілінійної параболічної системи диференційних рівнянь другого порядку: Препр. / П. М. Мартинюк, А. П. Власюк // НАН України. Ін-т математики; 2001.3. – К.: 2001. – 20 с.

127. Марчук Г. И. Введение в проекционно-сеточные методы / Г. И. Марчук, В. И. Агошков. – М.: Наука, 1981. – 416 с.
128. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики / Г. И. Марчук. – М.: Наука, 1989. – 608 с.
129. Марчук Г. И. Повышение точности решений разностных схем / Г.И. Марчук, В.В. Шайдуров. – М.: Наука, 1979. – 318 с.
130. Математические модели контроля загрязнения воды / Под ред. А. Джеймса. – М.: Мир, 1981. – 472 с.
131. Методы прогноза солевого режима грунтов и грунтовых вод. /Под ред. Н. Н. Веригина. – М.: Колос, 1979. – 336 с.
132. Миграция химических элементов в подземных водах СССР. – М.: Наука. – 1974. – 239 с.
133. Мироненко В. А. Динамика подземных вод / В. А. Мироненко. – М.: Недра, 1983. – 357 с.
134. Мироненко В. А. Основы гидрогеомеханики / В. А. Мироненко, В. М. Шестаков. – М.: Недра, 1984. – 232 с.
135. Мистецкий Г. Е. Гидростроительство. Автоматизация расчета массопереноса в почвогрунтах / Г. Е. Мистецкий. – К.: Будівельник. – 136 с.
136. Моделирование водно-солевого режима почво-грунтов с использованием ЭВМ / Под ред. В. А. Ковды. – М.: Наука, 1976. – 123 с.
137. Моделирование и управление водно-солевым режимом почв / Под ред. Е. Н. Зеличенко, Э. А. Соколенко, В. М. Делова и др. – Алма-Ата: Наука, 1976. – 180 с.
138. Молтянер Г. Л. Массоперенос в подземных водах / Г. Л. Молтянер, А. С. Хабиров. – Ташкент: Укнтувчи, 1976. – 100 с.
139. Николаевский В. Н. Конвективная диффузия в пористых средах / В. Н. Николаевский // Прикладная математика и механика. – 1959. – 23, вып.6. – С.1042–1050.

140. Николаевский В. Н. Некоторые задачи распространения меченых частиц в фильтрационных потоках / В. Н. Николаевский // Изв. АН СССР. Мех. и машиностроение. – 1960. – № 5. – С. 189–193.

141. Нумеров С. Н. Диффузия растворимых веществ в основаниях гидротехнических сооружений / С. Н. Нумеров, А. Н. Патрашев // Тр. Ленинград. политехн. ин-та. – 1947. – № 4. – С. 165–169.

142. Олейник А. Я. Теоретические исследования фильтрационных процессов в пористых средах с изменяющимися водно-физическими свойствами / А. Я. Олейник, В. Л. Поляков // Прикладна гідромеханіка. – 2007, Т. 9 (81), вип. 2–3. – С. 122–137.

143. Орадовская А. Е. Некоторые экспериментальные данные о коэффициенте диффузии (дисперсии) в горных породах / А. Е. Орадовская // Тр. ин-та ВОДГЕО, гидрогеология. – 1969. – № 22. – С. 99–102.

144. Ортега Дж. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными / Дж. Ортега, В. Рейнболдт. – М.: Мир, 1975. – 558 с.

145. Патрашев А. Н. Диффузия солей при одномерной фильтрации / А. Н. Патрашев, Н. Х. Арутюнян // Изв. ВНИИГ. – 1941. – 30. – С. 64–77.

146. Пейре Р. Вычислительные методы в задачах механики жидкости / Р. Пейре, Т. Тейлор. – Л.: Гидрометеиздат, 1986. – 353 с.

147. Пеньковский В. И. Одномерная задача растворения и вымыва солей при фильтрации с большим значением критерия Пекле / В.И. Пеньковский // Журнал прикладной математики и технической физики. – 1969. – № 2. – С. 148–152.

148. Петрик М. Р. Математичне моделювання адсорбційного нелінійного масопереносу в каталітичних пористих середовищах / М. Р. Петрик, Д. М. Михалик // Вісник ТДТУ ім. І. Пулюя. – 2009. – № 4. – С. 193–198.

149. Петрик М. Р. Математическое моделирование нелинейной конкурентивной двухкомпонентной диффузии в среде нанопористых частиц /

М. Р. Петрик, Ж. Фрессард // Проблемы управления и информатики. – 2009. – № 2. – С. 48–65.

150. Петрик М. Р. Моделирование и анализ концентрационных полей нелинейной компетитивной двухкомпонентной диффузии в среде нанопористых частиц / М. Р. Петрик, Ж. Фрессард, Д. М. Михалик // Проблемы управления и информатики. – 2009. – №4. – С.73–83.

151. Питьева К. Е. Практикум по гидрогеохимии / К. Е. Питьева, С. А. Брусиловский, Л. Ю. Вострикова, С. М. Чесалов. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984. – 320 с.

152. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод / П. Я. Полубаринова-Кочина. – М.: Наука, изд. 2, 1977. – 664 с.

153. Поляков В. Л. К расчету фильтрации со свободной поверхностью / В. Л. Поляков // Теория и расчеты фильтрации. – К.: Наук. думка, 1980. – С. 46–56.

154. Прокопов Г. П. Построение ортогональных разностных сеток посредством расчета конформных отображений: Препр. / Г. П. Прокопов // АН СССР. Ин-т прикл. математики; 70.45. – М.: 1970. – 46 с.

155. Развитие исследований по теории фильтрации в СССР (1917–1967). – М.: Наука, 1969. – 545 с.

156. Рекс Л. М. Системные исследования мелиоративных процессов и систем / Л. М. Рекс. – М.: Изд. Аслан, 1995. – 122 с.

157. Рекс Л. М. Определение параметров уравнения влагопереноса по данным экспериментальных исследований и прогноз / Л. М. Рекс, И. Е. Рекс, А. М. Якиревич // Сб.науч.тр Волж НИИГиМ. Мелиорация земель Поволжья. – 1979. – С. 63–72.

158. Рельтов Б. Ф. Дальнейшие экспериментальные исследования осмотических явлений в связных грунтах / Б. Ф. Рельтов, Н. А. Новицька, Ю. С. Большакова// Изв. ВНИИГ. – 1955. – Т.53. – С. 147–164.

159. Савула Я. Г. Чисельне моделювання конвективного теплопереносу в середовищі з тонким капіляром / Я. Г. Савула, Є. Я. Чапля, В. М. Кухарський//



Вісник Львівського університету. Сер. мех.-мат. – 1995. – Вип. 41. – С. 101–105.

160. Савула Я. Г. Числовий аналіз задач математичної фізики варіаційними методами / Я. Г. Савула. – Львів: ЛНУ ім. І.Франка, 2004. – 221 с.

161. Самарский А. А. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры / А. А. Самарський, А. П. Михайлов. – 2-е изд. испр. – М.: физмат, 2002. – 320 с.

162. Самарский А. А. Разностные методы для эллиптических уравнений / А. А. Самарський, В. Б. Андреев. – М.: Наука, 1976. – 352 с.

163. Самарский А. А. Теория разностных схем. / А.А. Самарський. – 3-е изд. – М.: Наука, 1989. – 616 с.

164. Самарский А. А. Численные методы математической физики / А. А. Самарський, А. В. Гулин. – М.: Наука, 2003. – 316 с.

165. Самарский А. А. Методы решения сеточных уравнений / А. А. Самарський, Е. С. Николаев. – М.: Наука, 1978. – 590 с.

166. Саульев В. К. Интегрирование уравнений параболического типа методом сеток / В. К. Саульев. – М.: Физматгиз, 1960. – 332 с.

167. Сергеев Е. М. Грунтоведение / Е. М. Сергеев, Г. А. Голодковская, Р. С. Зиангиров, В.И. Осипов, В.Т. Трофимов.– Изд-во Моск. ун-та, 1973. –387 с.

168. Сергиенко И. В. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах / И. В. Сергиенко, В. В. Скопецкий, В. С. Дейнека. – К: Наук. думка, 1991. – 432 с.

169. Сергієнко І. В. Високопродуктивні методи ідентифікації параметрів компетитивної дифузії в неоднорідних середовищах нанопористих частинок / І. В. Сергієнко, М. Р. Петрик, Ж. Фрессар, С. Леклерк // Кибернетика и системный анализ. – 2015. – Том 51, № 4. – С. 44–61.

170. Сергієнко І. В. Математичне моделювання масопереносу в середовищах частинок нанопористої структури / І. В. Сергієнко, М. Р. Петрик, О. М. Хіміч, Д. Кане, Д. М. Михалик, Д. Леклерк, Ж. Фрессар. – Київ:

Національна академія наук України, Інститут кібернетики ім. В. М. Глушкова, 2014. – 204 с.

171. Сергієнко І. В. Розв'язок нелінійних параболічних рівнянь при наявності розривів і членів конвективного переносу / І. В. Сергієнко, В. С. Дейнека, В. В. Скопецький // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1989. – № 9. – С. 21–24.

172. Сытников А. Б. Динамика воды в насыщенных и ненасыщенных грунтах зоны аэрации / А. Б. Сытников. – К.: Наук. думка, 1978. – 156 с.

173. Ситников А. Б. Динамика влаги и солей в почвогрунтах зоны аэрации / А. Б. Ситников. – К.: Наук. думка, 1986. – 152 с.

174. Стефанишин Д. В. Прогнозирование аварийности проектируемых и строящихся плотин на основе результатов статистического анализа произошедших аварий / Д. В. Стефанишин // Известия ВНИИГ им. Б. Е. Веденеева. – 2008. – Т. 251. – С. 3–9.

175. Тихонов А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М.: Наука, 1972. – 735 с.

176. Федоренко Р. П. Итерационные методы решения разностных эллиптических уравнений / Р. П. Федоренко // Успехи мат. наук. – 1973. – 28, 2. – С. 121–182.

177. Фрид Ж. Загрязнение подземных вод / Ж. Фрид. – М.: Недра, 1981. – 304 с.

178. Хейгеман Л., Янг Д. Прикладные итерационные методы / Л. Хейгеман, Д. Янг. – М.: Мир, 1968. – 446 с.

179. Цветкова Т. П. Математичне моделювання масопереносу з врахуванням осмосу на вологоперенос в одновимірному випадку / Т. П. Цветкова // Математичне та комп'ютерне моделювання. Сер.: технічні науки. – Кам'янець-Подільський, 2010. – Вип. 4. – С.227–233.

180. Чапля Є. Я. Фізико-математичне моделювання гетеро-дифузного масопереносу / Є. Я. Чапля, О. Ю. Чернуха. – Львів: Сполом, 2003. – 128 с.

181. Чернуха О. Ю. Математичне моделювання процесів термодифузії розпадної речовини у стохастично-неоднорідній шаруватій смузі /

О. Ю. Чернуха, В. Є. Гончарук, А. Є. Давидок // Математичні методи і фізико-механічні поля. – 2014. – Т. 57, №3. – С. 143–154 .

182. Чернуха О.Ю. Про один метод побудови розв'язку контактнo-крайових задач дифузії при мішаних граничних умовах / О. Ю. Чернуха // Доп. НАН України. – 2006. – №1. – С.82–87.

183. Шержуков Б. С. Диффузия и неравновесный массообмен при фильтрации в районах наземных и подземных хранилищ проток / Б. С. Шержуков // Тр. ин-та ВОДГЕО. – 1975. – Вып. 54. – С. 25–39.

184. Шестаков В. М. Динамика подземных вод / В. М. Шестаков. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 2 изд. – 1979. – 368 с.

185. Шинкаренко Г. А. Проекційно-сіткові методи розв'язування початково-крайових задач. – К.: НМКВО, 1991. – 88 с.

186. Шульгин Д. Ф. Математические модели и методы расчета влагопереноса при внутрпочвенном орошении / Д. Ф. Шульгин, С. Н. Новосельский // Математика и проблемы водного хозяйства. – К.: Наук. думка. – 1986. – С. 73–90.

187. Яненко Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики / Н. Н. Яненко. – Новосибирск.: Наука, 1967. – 195 с.

188. Bear J. Introduction to modeling of Transport Phenomena in Porous Media / J. Bear, Y. Bachmat. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991. – 580 p.

189. Bonelli S. Approximate solution to the diffusion equation and its application to seepage-related problems / S. Bonelli // Applied Mathematical Modeling. – 2009. – V. 33. – P. 110–126.

190. Brezzi F. A monotonic scheme for scheme for advection-diffusion problem / F. Brezzi, L. Marini, P. Pietra, A. Russo // Trans. Theory Stat. Phys. – 1996. – Iss. 22. – P. 463–475.

191. Burman E. Edge stabilization for Galerkin approximations of convection-diffusion problems: Preprint / E. Burman, P. Hansbo. – Chalmers University of Technology. Chalmers Finite Element Center; 2002.17. – Goteborg, 2002. – 18 p.

192. Chaplya Y. Mathematical Modeling Random Diffusion Flows in Two-Phase Multilayered Stochastically Nonhomogeneous Bodies / Y. Chaplya, O. Chernukha, A. Davydok // TASK Quarterly. – 2015. – Vol. 19, № 3. – P. 297–320.
193. Chaplya Y. Simulation of Diffusion Flows in Two-Phase Multilayered Stochastically Nonhomogeneous Bodies with Non-Uniform Distribution of Inclusions / Y. Chaplya, O. Chernukha, A. Davydok // TASK Quarterly. – 2015. – Vol.19, № 3. – P. 321–351.
194. Chernuha O. Admixture mass transfer in a body with horizontally periodical structure / O. Chernuha // Ibid. – 2005. – V. 48. – P. 2290–2298.
195. Childs E. C. The scientific aspects of field drainage / E. C. Childs // Science Progress. – 1956. – Vol. 44 (174). – P. 208–223.
196. Childs E. C. The use of soil moisture characteristics in soil studies / E. C. Childs // Soil Science. – 1940. – Vol. 50. Iss. 4. – P. 239–252.
197. Childs E. C. The water table, equipotentials and streamlines in drained lands / E. C. Childs // Soil Science. – 1943. – Iss. 56. – P. 30–317.
198. Childs E. C. An introduction to the physical basis of soil water phenomena / E. C. Childs, J. Wiley. – London, 1969. – 506 p.
199. Childs E. C. The transport of water through heavy clay soils / E.C. Childs // The Journal of Agricultural Science. – 1936. – Vol. 26. Iss. 01. – P. 12–114.
200. Darcy H. Les fontains puliques de la ville de Dijio / H. Darcy. – Paris, 1856. – 647 p.
201. Eriksson K. Adaptive streamline diffusion finite element methods for convection-diffusion problems / K. Eriksson, C. Johnson // Math. Comp. – 1993. – Iss. 60. – P. 167–188.
202. Nield D. A. Convection in porous media / D. A. Nield, A. Bejan. – Springer. – 2006. – 653 p.
203. Petryk M. Numerical and analytical modelling of solid-liquid expression from soft plant materials / M. Petryk, E. Vorobiev // Ibid. – 2013. – 59 (12). – P. 4762–4771.

204. Savula Y. H. Numerical analysis of advection diffusion in the continuum with thin canal / Y. H. Savula, V. M. Koukharskiy, Y. Y. Chaplia // Numerical Heat Trans. Part A. –1998. –36, № 3. – P. 657–679.

205. Simunek J. Review and comparison of models for describing non-equilibrium and referential flow and transport in the vadose zone / J. Simunek // Journal of hydrology. – Amsterdam, 2003. – P. 272, 14.

206. Thompson J. F. Numerical Grid Generation/ J. F. Thompson, Z.U.A. Warsi, C. W. Mastin // Foundation and Applications. – New York: Elsevier, 1985. – 931 p.

207. Vafai K. Handbook of porous media / K. Vafai. – Taylor&Francis Group, 2005. – 747 p.

208. Van Genuchten M. T. A Closed-form Equation for Predicting the Hydraulic Conductivity of Unsaturated Soils / M.T. Van Genuchten // Soil Science. – 1980. – Vol. 44. Iss. 5. – P. 892–897.

209. Vlasyuk A. P. Mathematical modeling of salt transfer process under simultaneous filtration and moisture transfer in saturated and non-saturated soils with vertical drainage / A. P. Vlasyuk, T. P. Tsvetkova // Тези доп. Intern. Conf. «Problems of decision making under uncertainties». – Cesky Rudolec, Czech Republic, 2014. – С. 108–109.

210. Xu J. A. Monotone finite element scheme for convection-diffusion equations / J. Xu, L. Zikatanov // Math. Comp. – 1999. – Iss.68(228). – P.1429–1446.

211. Zhangxin C. Computational Methods for Multiphase Flows in Porous Media (Computational Science and Engineering) / C. Zhangxin, M.Yuanle // Paperback. Society for Industrial and Applied Mathematic, 2006. – 531 p.

212. Дренажи и их системы [Електрон. ресурс]. – Режим доступу: <http://sokolgeo.com/stati/ustrojstvo-drenazha>

213. Зволожувальні системи [Електрон. ресурс]. – Режим доступу: [http://vseslova.com.ua/word/Зрошувальна\\_мережа-75815u](http://vseslova.com.ua/word/Зрошувальна_мережа-75815u)

214. Зволожувальні системи [Електрон. ресурс]. – Режим доступу:  
<https://uk.wikipedia.org/wiki/Іригація>

215. Меліоративні системи [Електрон. ресурс]. – Режим доступу:  
[https://uk.wikipedia.org/wiki/Каховська\\_зрошувальна\\_система](https://uk.wikipedia.org/wiki/Каховська_зрошувальна_система)

216. Рисова карта [Електрон. ресурс]. – Режим доступу:  
<http://5fan.ru/wievjob.php?id=5201>

217. Рисосіяння в Україні [Електрон. ресурс]. – Режим доступу:  
<http://geopolitika.crimea.edu/arhiv/2014/tom10-v-1/0152tortik.pdf>

## **ДОДАТКИ**

## ДОДАТОК А



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
 НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ВОДНОГО ГОСПОДАРСТВА  
 ТА ПРИРОДОКОРИСТУВАННЯ

вул. Соборна, 11, м. Рівне, 33028, тел. (0362)63-30-98, факс (0362) 63-32-09, mail@nuwm.edu.ua

Від 17.07.2015 № 001-1237  
 На № \_\_\_\_\_ від \_\_\_\_\_

Довідка  
 про використання у навчальному процесі  
 Національного університету водного господарства та природокористування  
 результатів досліджень, одержаних при виконанні дисертаційної роботи  
 Цветкової Тетяни Павлівни  
 на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук

Науково-методичні розробки та результати досліджень старшого викладача кафедри прикладної математики Цветкової Тетяни Павлівни, що викладені в її дисертаційній роботі, використано у навчальному процесі при виконанні кваліфікаційних, дипломних та магістерських робіт студентами за галузю знань 0403 «Системні науки та кібернетика» освітньо-кваліфікаційних рівнів бакалавр, спеціаліст та магістр, а також при підготовці та читанні ряду тем з наступних дисциплін:

- «Чисельні методи математичної фізики»  
 Тема 5. Різні сімейства різницевих схем для рівняння теплопровідності  
 Тема 10. Економічні методи розв'язування крайових задач математичної фізики
- «Теорія систем та математичне моделювання»  
 Тема 7. Математичні моделі вологоперенесення в пористих середовищах

Проректор з наукової роботи та міжнародних зв'язків, д.е.н., професор

Мартинюк Петро Миколайович 0678576248

Н.Б. Савіна



## ДОДАТОК Б

**ДЕРЖАВНЕ АГЕНТСТВО ВОДНИХ РЕСУРСІВ УКРАЇНИ  
РІВНЕНСЬКЕ ОБЛАСНЕ УПРАВЛІННЯ ВОДНИХ РЕСУРСІВ**

33013, м. Рівне, вул. Кавказька, 7. тел.: 26-94-89, 26-17-87, факс: 26-94-89  
www.rivnevodres.rv.ua, e-mail: rivneovg@gmail.com

.....

11 грудня 2015 року № 261/1750

**Довідка**

про впровадження основних положень дисертаційної роботи

**Цветкової Тетяни Павлівни**

на тему:

**«Математичне моделювання масоперенесення сольових розчинів при сумісній  
фільтрації та вологоперенесенні у насичено-ненасичених ґрунтових  
середовищах»**

Видана **Цветковій Тетяні Павлівні** про те, що одержані результати в дисертаційному дослідженні за темою: «Математичне моделювання масоперенесення сольових розчинів при сумісній фільтрації та вологоперенесенні у насичено-ненасичених ґрунтових середовищах» щодо моделювання та прогнозування динаміки процесів солеперенесення з врахуванням процесів фільтрації та вологоперенесення в насичено-ненасичених ґрунтах, прийняті до розгляду та використання, в певній мірі, при складанні завдань на проектування та будівництво меліоративних систем.

**Начальник управління**

 **С. Васильєв**