Міністерство освіти і науки України
Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

**ЦВЄТКОВА ТЕТЯНА ПАВЛІВНА**

УДК 532.72:532.546:539.217:519.63

# МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПЕРЕНЕСЕННЯ СОЛЕЙ ПРИ ФІЛЬТРАЦІЇ ТА ВОЛОГОПЕРЕНЕСЕННІ У НАСИЧЕНО-НЕНАСИЧЕНИХ ҐРУНТОВИХ СЕРЕДОВИЩАХ

**01.05.02** – математичне моделювання та обчислювальні методи

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата технічних наук

Тернопіль-2016

Дисертацією є рукопис

Робота виконана у Національному університеті водного господарства та природокористування Міністерства освіти і науки України, м. Рівне

**Науковий керівник:** доктор технічних наук, професор
**Власюк Анатолій Павлович,**
Міжнародний економіко-гуманітарний університет
ім. академіка Степана Дем'янчука,
завідувач кафедри інформаційних систем та
обчислювальних методів, м. Рівне.

**Офіційні опоненти:** доктор технічних наук, професор
**Чернуха Ольга Юріївна,**
Центр математичного моделювання Інституту
прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
завідувач відділом математичного моделювання
нерівноважних процесів, м. Львів;

кандидат технічних наук,
**Богаєнко Всеволод Олександрович,**
Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України,
старший науковий співробітник відділу
математичних систем моделювання проблем
екології та енергетики, м. Київ.

Захист відбудеться «30» червня 2016 р. о 14 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д58.052.01 у Тернопільському національному технічному університеті імені Івана Пулюя за адресою: 46001, Україна, м. Тернопіль, вул. Руська, 56.

З дисертацією можна ознайомитись у науково-технічній бібліотеці Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя за адресою: 46001, Україна, м. Тернопіль, вул. Руська, 56.

Автореферат розісланий «27» травня 2016 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради Д58.052.01 Б.Г. Шелестовський

# ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

**Актуальність теми.** Зміни водного режиму унаслідок дії багаторічних, циклічних, природно-кліматичних чинників та в результаті дії несприятливих техногенних умов впливають на гідродинамічний, фізико-хімічний, біохімічний, тепловий режим поверхневих і підземних вод, що у низці випадків призводить до розвитку небезпечних гідрогеологічних процесів.

Однією з причин погіршення якості земельних ресурсів є засолення ґрунтів хлоридами (NaCl, KCl, $CaCl_2$, $MgCl_2$), сульфатами ($CaSO_4$, $MgCO_4$, $Na_2SO_4$, $K_2SO_4$) та карбонатами ($CaCO_3$, $MgCO_3$, $NaHCO_3$, $Na_2SO_3$), що призводить до погіршення корисних властивостей та родючості ґрунту.

Засолення ґрунту може бути обумовлене природним надходженням солей з атмосферними опадами, з ґрунтових і поверхневих вод та нераціональним зрошенням через високе підняття мінералізованих вод внаслідок порушення водного балансу ґрунту.

Для запобігання кризових ситуацій необхідно прогнозувати протікання процесів перенесення солей за фільтрації ґрунтових вод, що описують поширення забруднення ґрунтових вод, засолення родючих ґрунтів, та вологоперенесення – дослідження динаміки переміщення вологи в ненасичених ґрунтах, адже визначення напорів води в ґрунтах є важливим завданням при встановленні кількості водних ресурсів у засушливих регіонах та проектуванні дренажних і зрошувальних систем.

З метою зменшення або уникнення засоленості ґрунтів застосовують гідромеліоративні заходи, які включають створення дренажних систем, через які відбувається відведення сольових розчинів. Тому необхідні ґрунтовні дослідження процесу поширення солей під дією гідродинамічних процесів фільтрації, вологоперенесення та роботи гідромеліоративних систем.

В літературі досліджувалися процеси вологоперенесення без урахування масоперенесення. Процес масоперенесення розглядався лише при фільтрації ґрунтових вод, а процес вологоперенесення – без урахування масоперенесення окремо в насичених та ненасичених ґрунтових середовищах. Тому побудова математичних моделей процесу перенесення солей з урахуванням процесів фільтрації сольових розчинів та вологоперенесення у насичено-ненасичених ґрунтах є важливим та актуальним науковим завданням.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.** Робота виконана в рамках планів наукових досліджень Національного університету водного господарства та природокористування, результати дисертаційної роботи отримані в рамках науково-дослідних тем: «Математичне та комп'ютерне моделювання впливу природних та техногенних факторів на стан ґрунтових основ енергетичних об'єктів» (2007-2009 рр., №ДР 0107U004173); «Математичне та комп'ютерне моделювання фізико-хімічних процесів підземної гідродинаміки під впливом природних, техногенних і соціальних факторів» (2010-2012 рр., №ДР 0110U000816); «Математичне та комп'ютерне моделювання фізико-хімічних процесів підземної гідродинаміки під впливом природних, техногенних і соціальних факторів» (2013-2015 рр., №ДР 0113U004052). У рамках виконання цих науково-дослідних робіт

автором проведено математичне моделювання процесу перенесення солей при фільтрації та вологоперенесенні у насичено-ненасичених ґрунтах.

**Мета і задачі дослідження.** Метою роботи є побудова нових математичних моделей процесу перенесення солей з урахуванням процесів фільтрації та вологоперенесення в областях насичено-ненасиченого ґрунту, знаходження чисельних розв'язків відповідних крайових задач в областях складної геометричної форми та наявними вільними поверхнями.

Для досягнення мети розв'язано такі задачі:

- Побудовано математичну модель взаємозв'язаних процесів перенесення солей, фільтрації сольових розчинів та вологоперенесення у насичено-ненасичених ґрунтових середовищах з рухомою внутрішньою поверхнею контакту ґрунтових масивів та на її основі сформульовано контактно-крайові задачі у лінійних та нелінійних випадках.
- Узагальнено побудовану математичну модель перенесення солей при фільтрації та вологоперенесенні в ґрунті на урахування осушення та зволоження насичено-ненасичених ґрунтових середовищ під дією систематичного дренажу.
- Модифіковано методи скінченних різниць з використанням чисельних методів конформних відображень для розв'язання контактно-крайових задач масоперенесення солей при фільтрації та вологоперенесенні у насичено-ненасичених ґрунтах з вільною поверхнею ґрунтових вод.
- Розроблено різницеві схеми, обчислювальні алгоритми для чисельного розв'язання контактно-крайових задач та на цій основі розроблено комплекс програм для дослідження взаємозв'язаних процесів перенесення солей, фільтрації та вологоперенесення з рухомою та нерухомою внутрішніми поверхнями контакту насичено-ненасичених ґрунтових середовищ.
- Проведено чисельні експерименти та встановлено закономірності взаємозв'язаних процесів перенесення сольових розчинів, вологоперенесення у ненасичених ґрунтах, процесів фільтрації та вологоперенесення у насичено-ненасичених ґрунтових середовищах з вільною поверхнею ґрунтових вод.

*Об'єкт дослідження:* процеси перенесення солей з урахуванням фільтрації та вологоперенесення в насичено-ненасичених ґрунтах.

*Предмет дослідження:* математичні моделі процесів перенесення солей з урахуванням фільтрації та вологоперенесення у насичено-ненасичених ґрунтах.

**Методи досліджень.** Для побудови математичних моделей використано підходи механіки пористого середовища, теорій фільтрації та дифузії, аналітичної хімії. Для знаходження наближених розв'язків крайових задач використано методи скінченних різниць з використанням чисельних методів конформних відображень, метод прогонки, ітераційний метод Гауса-Зейделя, які було модифіковано для розв'язання систем лінійних та нелінійних диференціальних рівнянь параболічного, еліптичного типів в областях з криволінійними межами.

**Наукова новизна одержаних результатів** полягає в наступному:

1. вперше побудовано нелінійну математичну модель взаємозв'язаних процесів перенесення солей, фільтрації ґрунтових вод та вологоперенесення у насичено-ненасичених ґрунтових середовищах з рухомою границею контакту насичених та

ненасичених ґрунтових масивів з урахуванням залежностей коефіцієнтів систем рівнянь від концентрації, напорів та осмосу в одновимірних та двовимірних випадках;

2. узагальнено розроблену математичну модель взаємозв'язаних процесів перенесення солей, фільтрації та вологоперенесення у насичено-ненасичених ґрунтових середовищах на процес перенесення солей під дією плоско-вертикальної безнапірної стаціонарної фільтрації сольового розчину до горизонтального систематичного дренажу при наявній рухомій вільній поверхні ґрунтових вод;

3. вперше модифіковано чисельні методи скінченних різниць з використанням чисельних методів конформних відображень шляхом їх адаптації до розв'язання нелінійних контактно-крайових задач солеперенесення, фільтрації і волого-перенесення в областях з криволінійними межами та за наявної рухомої або нерухомої внутрішньої поверхні контакту;

4. вперше встановлено закономірності процесу солеперенесення при вологоперенесенні у ненасичених ґрунтах, за фільтрації, вологоперенесення та осмосу у насичено-ненасичених ґрунтових середовищах за наявної рухомої або нерухомої внутрішньої поверхні контакту ґрунтових масивів, що містять дрену в якості осушувального або зволожувального елемента дренажної системи.

**Практичне значення отриманих результатів.** Проведені в дисертаційній роботі дослідження розрахунку полів напорів вологи, п'єзометричних напорів, концентрації сольових розчинів в насичено-ненасичених ґрунтах можуть бути використані при проектуванні та будівництві дренажних, зрошувальних систем, запобігання підтоплення територій, прогнозування поширення забруднень та засолення родючих ґрунтів.

Результати даної дисертаційної роботи впроваджено при складанні завдань на проектування та будівництво меліоративних систем Рівненським обласним управлінням водних ресурсів.

Одержані результати дисертаційних досліджень теоретичного і практичного характеру впроваджені в навчальному процесі при підготовці спецкурсів «Чисельні методи математичної фізики», «Теорія систем та математичне моделювання» для студентів Національного університету водного господарства та природо-користування МОН України за спеціальністю «Прикладна математика».

**Особистий внесок здобувача.** Всі теоретичні та прикладні результати, що складають зміст дисертаційної роботи, отримані автором самостійно. У роботах, опублікованих у співавторстві, здобувачеві належать: дослідження взаємозв'язаних процесів масоперенесення, фільтрації та вологоперенесення [2, 11, 15], побудова одновимірних математичних моделей перенесення солей з урахуванням процесів фільтрації та вологоперенесення у лінійних [3, 6] та нелінійних випадках [7, 10], дослідження впливу осмотичних явищ на солеперенесення у насичено-ненасичених ґрунтах [6, 14], дослідження протікання процесу перенесення солей [17, 25] з урахуванням рухомої вільної поверхні [5, 12], у випадку осушення [23, 24] та зволоження ґрунту [1, 17] під дією систематичного дренажу, встановлення впливу нестаціонарної фільтрації [4, 19] та вологоперенесення [18, 20] на солеперенесення у насичено-ненасичених ґрунтах, у шаруватих ґрунтах [8, 16], побудова

обчислювальних алгоритмів та розв'язування відповідних крайових задач [1, 5, 9], проведення чисельних експериментів [1, 13, 22] та аналіз отриманих результатів [5, 21].

**Апробація результатів дослідження.** Основні результати дисертації доповідались й обговорювались на міжнародних та вітчизняних конференціях: XII, XV міжнародних наукових конференціях ім. академіка М. Кравчука (Київ, 2008, 2014); XVI, XVIII, XX, XXIII, XXIV, XXV міжнародних конференціях «Прогнозування та прийняття рішень в умовах невизначеності» (Київ-Рівне, 2008; Ялта, 2010; Ялта, 2011; Брно, Чеська Республіка, 2012; Мукачево, 2014; Ческий Рудолец, Чехія, 2014; Східниця, 2015); XV, XVI, XIX, XX, XXI всеукраїнських наукових конференціях «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики» (Львів, 2008, 2009, 2013-2015); VI міжнародній науковій конференції «Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації» (Кам'янець-Подільський, 2014); міжнародній науковій конференції «Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів» (Рівне, 2015); науково-практичних конференціях професорсько-викладацького складу Національного університету водного господарства та природокористування (Рівне, 2008-2015 рр.).

В повному обсязі робота доповідалася на розширеному засіданні кафедри прикладної математики Національного університету водного господарства та природокористування; міжкафедральному науковому семінарі факультету прикладної математики та інформатики Львівського національного університету ім. Івана Франка; науковому семінарі кафедри системного аналізу та теорії прийняття рішень Київського національного університету ім. Тараса Шевченка; науковому семінарі «Математичне моделювання та обчислювальні методи» Тернопільського національного технічного університету ім. Івана Пулюя.

**Публікації.** За темою дисертаційної роботи опубліковано 25 наукових праць, у тому числі: 9 статтей у наукових фахових виданнях з технічних наук, з них 1 у зарубіжному науковому виданні, яке входить до наукометричних баз, 16 публікацій в матеріалах міжнародних та національних конференціях, 1 працю опубліковано без співавторів.

**Структура та обсяг роботи.** Дисертація складається зі вступу, трьох розділів, висновків, списку використаних джерел із 217 найменувань на 24 сторінках, додатків на 2 сторінках. Обсяг роботи становить 209 сторінок, в тому числі основного тексту 145 сторінок.

## ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** дано загальну характеристику роботи, обґрунтовано актуальність теми та необхідність проведенення дослідження, сформульовано мету роботи та задачі дослідження, наукову новизну та практичне значення отриманих результатів.

У **першому розділі** викладено огляд наукової літератури за темою дисертації, визначено місце досліджень, наведених у роботі, у розв'язанні наукового завдання розробки нових математичних моделей перенесення солей при фільтрації та вологоперенесенні у насичених та ненасичених ґрунтах.

Питаннями дослідження процесу масоперенесення при фільтрації підземних

вод у насичених ґрунтах займалися М.М. Веригін, А.В. Ликов, Ю.А. Михайлов, В.М. Ніколаєвський, В.М. Булавацький, В.І. Лаврик, І.І. Ляшко, С.І. Ляшко, В.В. Скопецький, В.С. Дейнека, А.П. Власюк, А.Я. Бомба, Я.Г. Савула, Г.А. Шинкаренко, Є.Я. Чапля, О.Ю. Чернуха, Б.В. Гера, М.М. Біляєв, І.В. Бейко, П.М. Мартинюк, О.П. Остапчук, О.М. Степанченко, A. Darcy, J. Bear, K. Eriksson, A.D. Nield та ін.

Теорія масоперенесення у ненасичених ґрунтових середовищах розвинена в роботах М.М. Веригіна, І.В. Сергієнка, В.С. Дейнеки, В.В. Скопецького, І.І. Ляшка, E.C. Childs, M.T. Van Genuchten та ін.

Теоретичні основи вологоперенесення в ґрунтах закладені в працях С.Ф. Авер'янова, М.М. Веригіна, П.І. Ковальчука, А.П. Ліхацевича, О.Я. Олійника, В.Л. Полякова, М.М. Рекса, E.C. Childs, A. Darcy, J. Simunek, L.A. Richards та ін.

Експериментальні дослідження коефіцієнтів і параметрів фільтрації сольових розчинів механічних характеристик ґрунтів та вологоперенесення проведені в роботах М.Т. Кузла, А.П. Власюка, В.Й. Пастушенка.

Процеси масоперенесення з урахуванням консолідації ґрунтів розглянуті в роботах А.П. Власюка, П.М. Мартинюка, М.Р. Петрика, В.О. Богаєнка, Ж. Фрессара.

Питання ймовірності надійності експлуатації гідротехнічних споруд на осушувально-зрошувальних територіях досліджені в роботах Ц.Є. Мірцхулави, І.І. Науменка, В.А. Гурина, Д.В. Стефанишина.

Дослідження процесів масоперенесення здійснювалося окремо в областях повного та неповного водонасиченння без урахування процесу вологоперенесення. Тому питання впливу вологоперенесення на процес масоперенесення недостатньо досліджені.

З метою адекватного опису гідродинамічних процесів процес перенесення солей потрібно розглядати з урахуванням процесів фільтрації підземних вод та вологоперенесення сумісно у насичено-ненасичених ґрунтах. Таке комплексне дослідження вимагає побудови нової нелінійної математичної моделі, яка описує процес перенесення солей при фільтрації в насичених ґрунтах, та перенесення солей при вологоперенесенні у ненасичених ґрунтових середовищах з заданням відповідних умов спряження ідеального контакту на межі областей (кривій депресії).

Нелінійна математична модель процесу перенесення солей при вологоперенесенні у ненасичених ґрунтах описується наступною системою диференціальних рівнянь:

$$div(D(x,y,c)\,grad\,c - \vec{V}(x,y,c))grad\,c = \sigma\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial N}{\partial t}, \tag{1}$$

$$div(k(c,h)\cdot grad\ h\ ) - \nu(c)grad\,c = \mu(h)grad\,h, \tag{2}$$

$$\vec{V} = -k(c,h)grad\,h + \nu(c)grad\,c, \tag{3}$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = f\left(c, N, C^*, N^*, \gamma_1, \ldots, \gamma_n\right). \tag{4}$$

В рівняннях (1)-(3), які описують масоперенесення, вологоперенесення і швидкість вологоперенесення, враховано залежність коефіцієнта конвективної дифузії $D$, явища осмосу від концентрації сольових розчинів $D = D(c), \nu = \nu(c)$,

коефіцієнта фільтрації $k$ та швидкості фільтрації $V$ від напору та концентрації солей ($k=k(c,h)$, $V=V(c,h)$, а також коефіцієнта вологоємності $\mu$ від напору $(\mu=\mu(h))$. Рівняння (4) описує масообмін між рідкою та твердою фазами, де $c$, $N$ – концентрація сольових розчинів у рідкій та твердій фазах відповідно, $C^*$, $N^*$ – концентрація граничного насичення у рідкій та твердій фазах, $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ – коефіцієнти інтенсивності масообміну.

В області повного насичення ґрунту фільтрація сольових розчинів відбувається під дією градієнта напору, концентрації солей та осмосу. Тому математичною моделлю процесу є (1)-(4) із заміною рівняння (2) на наступне:

$$div(k(c,h)\cdot grad\, h - div(k(c,h)\cdot grad\, c - div(\nu(c) grad\, c) = 0. \qquad (5)$$

На межі областей повного $\Omega_1$ та неповного насичення $\Omega_2$ (кривій депресії) $\Gamma$ задаються умови спряження для напорів, концентрації та потоків солей відповідно

$$h_1\big|_\Gamma = h_2\big|_\Gamma,\ \left(\frac{\partial h_1}{\partial y} - \frac{\partial h_1}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial x}\right)\Bigg|_\Gamma = 0,\ c_1\big|_\Gamma = c_2\big|_\Gamma,\ \left(D_1(c_1)\frac{\partial c_1}{\partial n} - v_1 c_1\right)\Bigg|_\Gamma = \left(D_2(c_2)\frac{\partial c_2}{\partial n} - v_2 c_2\right)\Bigg|_\Gamma, \qquad (6)$$

де $h_1$ – п'єзометричний напір, $h_2$ – напір вологи, $c_1$, $c_2$ – концентрації сольових розчинів в насичених та ненасичених ґрунтах, $H$ – висота нависання рідини, $D(c_1)$, $D(c_2)$ – коефіцієнти конвективної дифузії в областях повного та неповного насичення, $n=(n_x,n_y), n_x, n_y$ – напрямні косинуси вектора зовнішньої нормалі до межі $\Gamma$.

Побудова математичних моделей на основі співвідношень (1)-(6) дозволяє адекватно описати процес перенесення солей в насичено-ненасичених ґрунтах для вирішення важливих задач підземної гідродинаміки.

**Другий розділ** дисертаційної роботи присвячений математичному моделюванню лінійних та нелінійних одновимірних процесів перенесення солей при фільтрації та вологоперенесенні у насичено-ненасичених ґрунтах. Зокрема, з метою дослідження впливу вологоперенесення на процес перенесення солей розглядається задача перенесення солей при вологоперенесенні в ненасиченому ґрунті. Оскільки, найбільш поширеними солями в агросекторі є хлориди, які потрапляють в ґрунт природнім шляхом або з високими дозами мінеральних добрив і хімічних засобів захисту рослин, тому дослідження процесу перенесення солей проведено для NaCl.

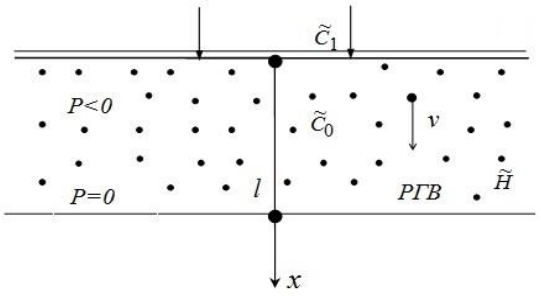

Рис. 1. Перенесення солей в ненасиченому ґрунті

На поверхню ґрунту поступає сольовий розчин з атмосферними опадами або за рахунок інших факторів з концентрацією $\tilde{C}_1$. Розподіл концентрації в області неповного насичення – $\tilde{C}_0$. У зв'язку з цим на деякій глибині $l$ від поверхні землі утворюється вільна поверхня рівня ґрунтових вод, яка вважається нерухомою (рис. 1).

Процес перенесення солей при вологоперенесенні та явищі осмосу описується такою математичною моделлю:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(D(c)\frac{\partial c}{\partial x}\right) - v_x\frac{\partial c}{\partial x} - \gamma\left(c - C^*\right) = \sigma\frac{\partial c}{\partial t}, \quad x\in(0;l),\ t>0, \qquad (7)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(k(c,h)\frac{\partial h}{\partial x})-\nu(c)\frac{\partial c}{\partial x}=\mu(h)\frac{\partial h}{\partial t},\quad x\in(0;l),\ t>0, \tag{8}$$

$$v_x=-k(c,h)\frac{\partial h}{\partial x}+\nu(c)\frac{\partial c}{\partial x},\quad x\in(0;l) \tag{9}$$

за таких крайових умовах для концентрації сольових розчинів $c(x,t)$ та напору вологи $h(x,t)$:

$$c(x,0)=\tilde{C}_0(x),\ c(0,t)=\tilde{C}_1(t),\ c(l,t)=\tilde{C}_2(t),\ x\in(0;l),\ 0<t<t_1, \tag{10}$$

$$h(x,0)=\tilde{H}_0(t),\ h(0,t)=\tilde{H}_1(t),\ h(l,t)=\tilde{H}_2(t),\ x\in(0;l),\ 0<t<t_1. \tag{11}$$

Для знаходження чисельного розв'язку задач перенесення солей у насичено-ненасичених ґрунтах розроблено програмний комплекс у середовищі Microsoft Visual Studio Express на мові програмування C#, який функціонує на довільній стандартній конфігурації персонального комп'ютера з операційною системою сімейства Windows з використанням технології .NET Framework 4.0 (використані програмні засоби є безкоштовними для академічного використання).

Чисельний розв'язок крайової задачі (7)-(11) знайдено методом скінченних різниць. Наближений розв'язок задачі вологоперенесення (8), (11) знайдено з використанням неявної різницевої схеми, перенесення солей (7), (10) – монотонної різницевої схеми.

В результаті проведених чисельних експериментів отримано розподіли напорів вологи з урахуванням та без урахування концентрації солей та осмосу (рис. 2), концентрації сольових розчинів з урахуванням напорів вологи та осмотичних явищ (рис. 3).

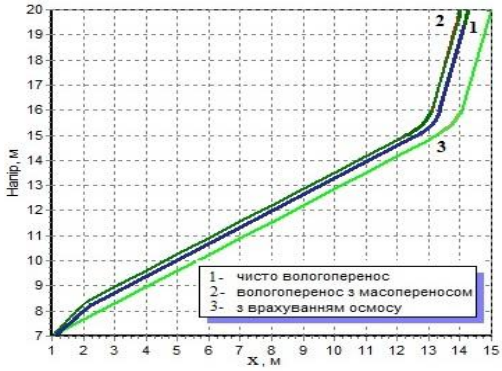


Рис. 2. Розподіл напорів вологи (1) з урахуванням концентрації солей (2) та осмосу (3)

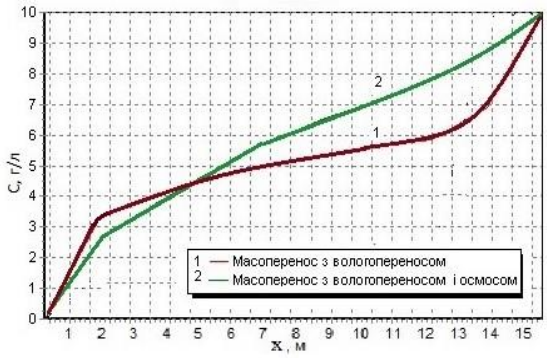


Рис. 3. Розподіл концентрації солей з урахуванням розподілу напорів вологи (1) та осмосу (2)

При аналізі отриманих чисельних розв'язків встановлено зростання напорів вологи з глибиною та часом при потраплянні сольових розчинів на поверхню ґрунту. З впливом концентрації солей розподіл напорів вологи збільшується з глибиною по всій області вологоперенесення на 1-3% та зменшується з урахуванням осмосу на 3-5%. Розподіл концентрації сольових розчинів при вологоперенесенні та осмосі набуває більших значень, порівняно з результатами без урахування осмосу; при цьому розподіл концентрації солей зростає пропорційно до вибору коефіцієнта осмосу або осмотичної функції. З часом розподіл концентрації солей стабілізується і поступово спадає.

В даному розділі також здійснено математичне моделювання перенесення солей при фільтрації ґрунтових вод та вологоперенесенні у насичено-ненасичених ґрунтах в лінійному та нелінійному випадках.

На поверхню ґрунту попадають атмосферні опади і поливи з концентрацією $\tilde{C}_1$ (рис. 4). У зв'язку з цим, на деякій глибині $l_1$ від поверхні землі утворюється вільна поверхня рівня ґрунтових вод $(P=0)$, яка вважається нерухомою. На глибині $l_2$ знаходиться фронт промочування, який є нерухомим. Таким чином, у ґрунтовому масиві сформувалося дві області: I – область неповного насичення $(P<0)$ – між поверхнею землі і вільною поверхнею; II – область повного насичення $(P>0)$ – між вільною поверхнею та фронтом промочування. Розподіл концентрації в області неповного насичення – $\tilde{C}_0$, в області повного насичення – $\tilde{C}_2$. Дослідження процесу перенесення солей у насичено-ненасиченому ґрунті при наявності вільної поверхні проведено з урахуванням процесів фільтрації, вологоперенесення та хімічного осмосу.

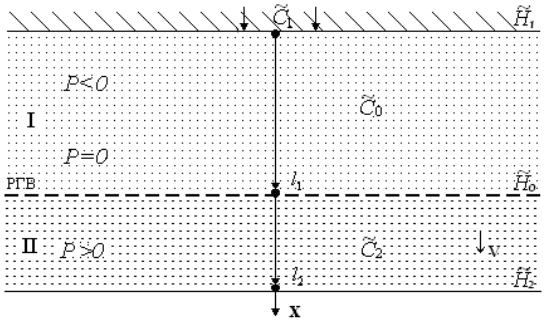

Рис. 4. Перенесення солей в областях повного і неповного насичення

Математична модель контактно-крайової задачі взаємозв'язаних процесів в одновимірному нелінійному випадку

- для області неповного насичення $G_1$ має вигляд

$$\frac{\partial\left(D_1(c_1)\frac{\partial c_1}{\partial x}\right)}{\partial x}-v_1\frac{\partial c_1}{\partial x}-\gamma_1(c_1-C_1^*)=\sigma_1\frac{\partial c_1}{\partial t},\quad x\in\Omega_1,\ t>0, \tag{12}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(k_1(c_1,h_1)\frac{\partial h_1}{\partial x})-v_1(c_1)\frac{\partial c_1}{\partial x}=\mu(h_1)\frac{\partial h_1}{\partial t},\quad x\in\Omega_1,\ t>0, \tag{13}$$

$$v_1=-k_1(c_1,h_1)\frac{\partial h_1}{\partial x}+v_1(c_1)\frac{\partial c_1}{\partial x},\quad x\in\Omega_1; \tag{14}$$

- для області повного насичення $G_2$ є наступною:

$$\frac{\partial\left(D_2(c_2)\frac{\partial c_2}{\partial x}\right)}{\partial x}-v_2\frac{\partial c_2}{\partial x}-\gamma_2(c_2-C_2^*)=\sigma_2\frac{\partial c_2}{\partial t},\quad x\in\Omega_2,\ t>0, \tag{15}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(k_2(c_2,h_2)\frac{\partial h_2}{\partial x})-v_2(c_2)\frac{\partial c_2}{\partial x}=0,\quad x\in\Omega_2, \tag{16}$$

$$v_2=-k_2(c_2,h_2)\frac{\partial h_2}{\partial x}+v_2(c_2)\frac{\partial c_2}{\partial x},\quad x\in\Omega_2 \tag{17}$$

за таких початкових та граничних умов:

$$c_i(x,0)=\tilde{C}_0^i(x),\quad c_1(0,t)=\tilde{C}_1^1(t),\quad c_2(l_2,t)=\tilde{C}_2^2(t),\quad x\in(0;l_i),\quad 0<t<t_1, \tag{18}$$

$$h_i(x,0)=\tilde{H}_0^i(x),\ h_i(0,t)=\tilde{H}_1^i(t),\ h_2(l_2,t)=\tilde{H}_2^2(t),\ x\in(0;l_i),\ x\in(0;l_i),\ 0<t<t_1,\ i=1,2. \tag{19}$$

На межі контакту областей (вільній поверхні) задані умови спряження для напору та концентрації солей вигляду (6).

Чисельний розв'язок поставленої задачі знайдено методом скінченних різниць. Для розв'язування задач вологоперенесення (13), (19), фільтрації (16), (19) побудовано неявні різницеві схеми; перенесення солей (12), (14), (19) та (15), (17), (19) – монотонні різницеві схеми, розв'язок яких знайдено методом прогонки.

Оскільки в математичній моделі враховано явище осмосу, знайдено розв'язок задачі при хімічному $(\nu = \nu(c))$, звичайному осмосі $(\nu = const)$ та без його урахування $(\nu = 0)$. Результати чисельних експериментів розподілу концентрації солей при $\nu = const$, $\nu = \nu(c)$ в ненасиченому ґрунті наведені на рис. 5, 6.

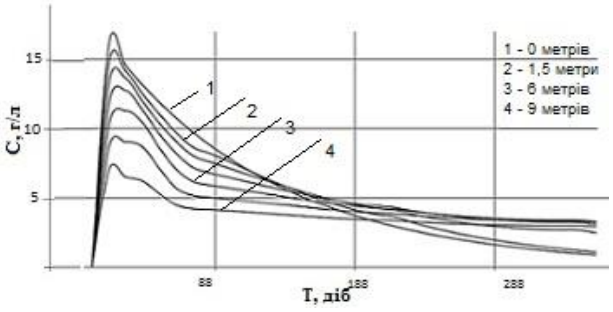


Рис. 5. Розподіл поля концентрації солей при $\nu = const$ в ненасиченому ґрунті

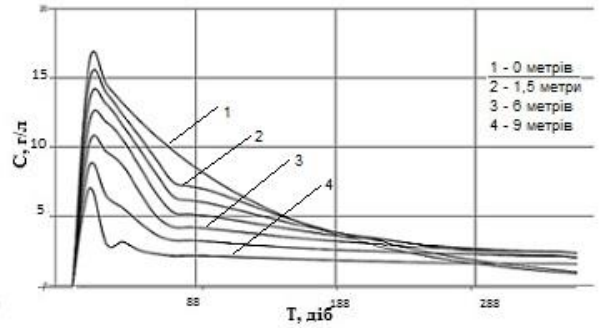


Рис. 6. Розподіл поля концентрації солей при $\nu = \nu(c)$ в ненасиченому ґрунті

Вплив явища осмосу на розподіл поля концентрації солей в насиченому ґрунті наведено на рис. 7 і 8. Аналогічні дослідження проведені для визначення впливу осмосу на розподіл напорів вологи та п'єзометричних напорів в областях неповного та повного насичення відповідно.

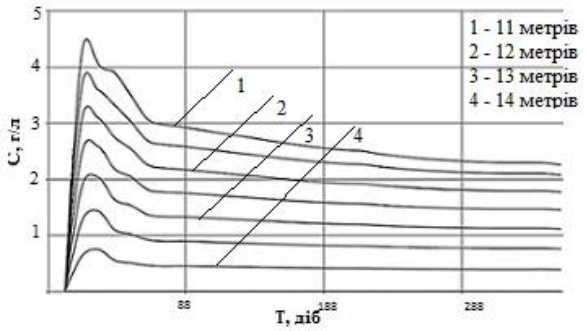


Рис. 7. Розподіл поля концентрації при $\nu = const$ в насиченому ґрунті

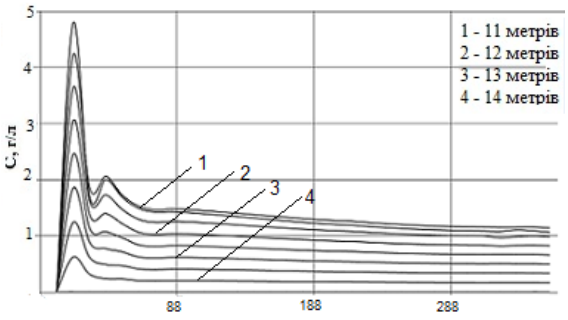


Рис. 8. Розподіл поля концентрації при $\nu = \nu(c)$ в насиченому ґрунті

Встановлено зростання розподілу напорів та концентрації солей з урахуванням осмотичних явищ – величина впливу пропорційна вибору коефіцієнта осмосу або осмотичної функції. Знайшовши розв'язок задачі на вільній поверхні, отримано спільний розв'язок задачі з насичено-ненасиченому ґрунті, який демонструє поступове зменшення розподілу напорів рідини та монотонне спадання концентрації сольових розчинів з глибиною та часом в області насичено-ненасиченого ґрунту.

В даному розділі також проведено математичне моделювання вище наведеної задачі в лінійному випадку та знайдено її чисельний розв'язок. В результаті проведених чисельних експериментів проаналізовано залежність отриманих результатів розподілу концентрації солей від вхідних даних значень пористості ґрунту $\sigma$, коефіцієнтів: конвективної дифузії $D$, масообміну $\gamma$, фільтрації $k$. Встановлено незначний вплив осмосу на процес перенесення солей для лінійного

випадку ($\nu = 0$), порівняно з нелінійним ($\nu = \nu(c)$), що потрібно враховувати при отриманні реальної картини досліджуваних процесів.

В **третьому** розділі проведено математичне і комп'ютерне моделювання процесу перенесення солей при фільтрації та вологоперенесенні в насичено-ненасичених ґрунтах у двовимірному випадку.

Розв'язано задачу плоско-вертикальної безнапірної стаціонарної фільтрації сольового розчину до горизонтального систематичного дренажу при наявності рухомої вільної поверхні (кривої депресії) ґрунтових вод (рис. 9). В результаті в ґрунтовому масиві утворилося дві області: $\Omega_1$ – область повного насичення, зайнята фільтраційним потоком, $\Omega_2$ – область неповного насичення (область вологоперенесення). Оскільки схема дренажу є симетричною, розглянуто лише виділений її фрагмент $ABB_1B_2EF$. Виділена область складається з двох підобластей: області повного насичення $G_1$ та неповного насичення $G_2$, розділених вільною поверхнею (кривою депресії) $CD$. Через дрену $AB$ відбувається відведення сольових розчинів з ґрунтового середовища (режим осушення).

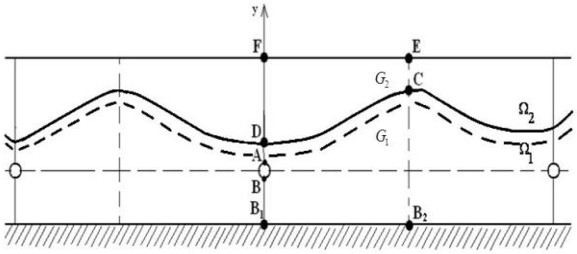

Рис. 9. Фільтрація сольового розчину до горизонтального систематичного дренажу

Розроблену математична модель (1)-(5) узагальнено на випадок контактно-крайових задач, що містять дрену. Зокрема, процес перенесення солей при фільтрації ґрунтових вод до дрени в області повного насичення $G_1$ та при вологоперенесенні в області неповного насичення $G_2$ описується наступною контактно-крайовою задачею:

$$\frac{\partial\left(D_1(c_1)\frac{\partial c_1}{\partial x}\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(D_1(c_1)\frac{\partial c_1}{\partial y}\right)}{\partial y}-v_x\frac{\partial c_1}{\partial x}-v_y\frac{\partial c_1}{\partial y}-\gamma(c_1-C^*)=\sigma_1\frac{\partial c_1}{\partial t},\ (x,y)\in G_1,\ t>0, \quad (20)$$

$$\vec{v}=-k(c_1)gradh,\ \ div\,\vec{v}=0, \quad (21)$$

$$c_1(x,y,0)=\tilde{C}_0^1(x,y),\ \frac{\partial c_1}{\partial n}|_{AD\cup BB_1\cup B_2C\cup B_1B_2}=0,\ c_1|_{CD}=\tilde{C}_1^1,\ c_1|_{AB}=\tilde{C}_2^1,\ (x,y)\in G_1,\ t>0, \quad (22)$$

$$h\big|_{AB}=h\big|_{r=r_1}=\tilde{H}_1^1,\ \ \left.\frac{\partial h}{\partial n}\right|_{AD}=\left.\frac{\partial h}{\partial x}\right|_{x=0}=0,\ \ \left.\frac{\partial h}{\partial n}\right|_{BB_1B_2C}=\left.\frac{\partial h}{\partial x}\right|_{x=0}=\left.\frac{\partial h}{\partial x}\right|_{x=l}=\left.\frac{\partial h}{\partial y}\right|_{y=0}=0; \quad (23)$$

$$\frac{\partial\left(D_2(c_2)\frac{\partial c_2}{\partial x}\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(D_2(c_2)\frac{\partial c_2}{\partial y}\right)}{\partial y}-\omega\sigma_2V_x\frac{\partial c_2}{\partial x}-\omega\sigma_2V_y\frac{\partial c_2}{\partial y}-f(\omega)c_2=\sigma_2\frac{\partial c_2}{\partial t},\ (x,y)\in G_2,\ \ t>0, \quad (24)$$

$$\mu(h)\frac{\partial h}{\partial t}=div(k(h)gradh),\ \ V_x=-k(h)\frac{\partial h}{\partial x},\ V_y=-k(h)\frac{\partial h}{\partial y},\ (x,y)\in G_2,\ \ t>0, \quad (25)$$

$$\frac{\partial c_2}{\partial n}\big|_{CD}=0,\ \ c_2\big|_{FE}=\tilde{C}_1^2,\ \frac{\partial c_2}{\partial x}\big|_{DF\cup CE}=0,\ c_2\big|_{t=0}=\tilde{C}_0^2(x,y),\ (x,y)\in G_2,\ t>0, \quad (26)$$

$$h\big|_{FE}=\tilde{H}_1^2,\ \frac{\partial h}{\partial x}\big|_{DF\cup CE}=0,\ h\big|_{t=0}=\tilde{H}_0^2(x,y),\ \ \ (x,y)\in G_2,\ t>0 \quad (27)$$

за таких додаткових умов для напору та концентрації солей, заданих на кривій депресії *CD*

$$h = y,\ \frac{dh}{dn} = \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial x} = 0,\ \ c_1(x,y,t) = c_2(x,y,t),\ \ D_1(c_1)\frac{\partial c_1}{\partial n} - v_1 c_1 = D_2(c_2)\frac{\partial c_2}{\partial n} - v_2 c_2. \quad (28)$$

Тут $\sigma_1$, $\sigma_2$ – пористість ґрунту в областях повного та неповного насичення відповідно, $\omega$ – вологість ґрунту, $f(\omega)$ – функція джерела, $v_x, v_y, V_x, V_y$ – компоненти швидкості фільтрації. В контактно-крайовій задачі (20)-(28) знехтувано явищем осмосу.

Оскільки область, що розглядається, має криволінійні межі, для чисельного розв'язування поставленої контактно-крайової задачі використано метод скінченних різниць з застосуванням методу чисельних конформних відображень в оберненій постановці. У зв'язку з цим, складену область відображено на параметричний прямокутник. Область, що відображається, складається з двох криволінійних чотирикутників зі спільною невідомою межею (кривою депресії), яка знаходиться в процесі розв'язування задачі (рис. 10).

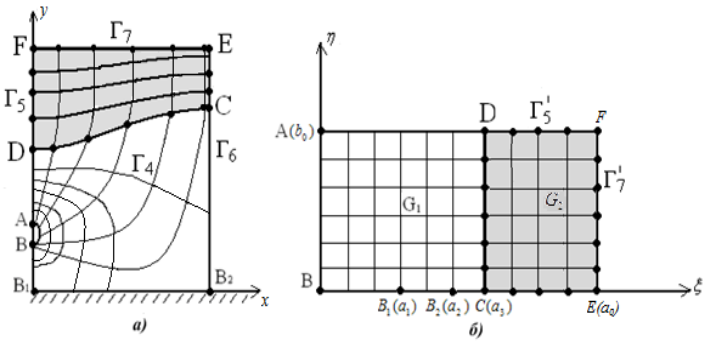


Рис. 10. Конформне відображення криволінійного чотирикутника на параметричний прямокутник

При прямому конформному відображенні фізичної області $G_z$ виділеного фрагмента $G_\zeta$ параметричного прямокутника, координати точок областей $G_z$ і $G_\zeta$ зв'язані умовами Коші-Рімана $\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial y},\ \frac{\partial \xi}{\partial y} = -\frac{\partial \eta}{\partial x},\ (x,y) \in G_z$. Знайдено обернене конформне відображення параметричного прямокутника $G_\zeta$ на криволінійний чотирикутник $G_z$, яке задається функціями $x = x(\xi,\eta),\ y = y(\xi,\eta)$, і пов'язанні умовами Коші-Рімана $\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\partial y}{\partial \eta},\ \frac{\partial x}{\partial \eta} = -\frac{\partial y}{\partial \xi},\ (\xi,\eta) \in G_\zeta$. У зв'язку з цим вихідна крайова задача перетворена до змінних $\xi, \eta$.

Чисельний розв'язок задачі фільтрації для напорів знайдено ітераційним методом Гауса-Зейделя, який модифіковано для розв'язування цієї задачі в нових змінних $\xi, \eta$. Чисельний розв'язок перетворених до нових змінних задач перенесення солей в областях повного та неповного насичення, вологоперенесення знайдено за модифікованим локально-одновимірним методом О.А. Самарського на випадок розв'язування нелінійних рівнянь з використанням побудованих монотонних різницевих схем та методу прогонки.

В результаті застосування та програмної реалізації чисельного методу конформних відображень побудовано конформні різницеві сітки фільтраційного потоку та потоку вологи областей повного і неповного насичення, реалізовано спільну конформну різницеву сітку області насичено-ненасиченого ґрунту (рис. 11), що дало можливість знайти розв'язки задач в обох областях водонасичення.

Аналіз проведених чисельних експериментів показав зростання п’єзометричних напорів в околі дрени та напорів вологи в околі вільної поверхні та їх спадання з часом. Поле розподілу концентрації солей спадає в усій області фільтрації та вологоперенесення, набуваючи найменших значень в околі дрени та вільної поверхні. В цілому, розподіл концентрації солей монотонно спадає по всій області насичено-ненасиченого ґрунтового середовища за рахунок вимивання сольових розчинів через дрену.

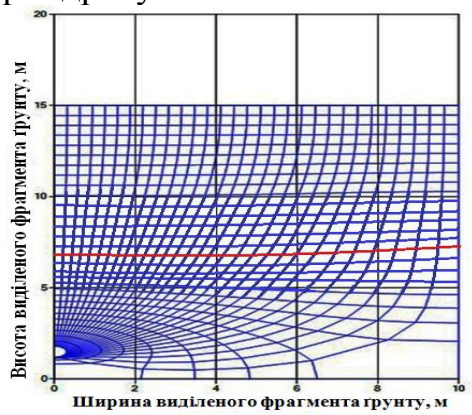


Рис. 11. Конформна різницева сітка області насичено-ненасиченого ґрунту

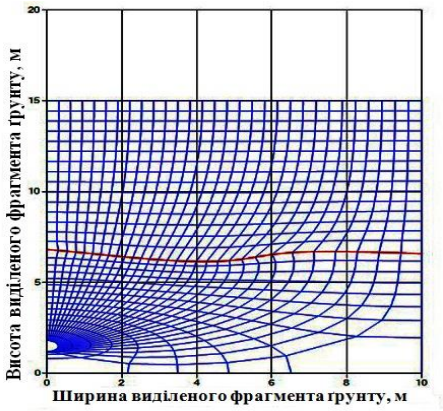


Рис. 12. Конформна різницева сітка зміни положення вільної поверхні

Під дією фільтраційного потоку та зі зростанням часу вільна поверхня рухається вниз, її положення змінилося на глибину до 13-15%, що зумовлює перерозподіл напорів та поля концентрації солей (рис. 12).

В даному розділі також розв’язано задачу перенесення солей під дією процесів фільтрації та вологоперенесення в насичено-ненасиченій області, яка містить дрену, через яку відбувається нагнітання сольових розчинів в ґрунтове середовище (режим зволоження) (рис. 13).

Математична модель в даному випадку аналогічна (20)-(28) з урахуванням процесу зволоження ґрунтового масиву. Для чисельного розв’язування задачі також використано метод скінченних різниць з застосуванням чисельних конформних відображень в оберненій постановці.

В результаті програмної реалізації побудованого обчислювального алгоритму отримано конформні різницеві сітки областей повного, неповного насичення та спільне їх конформне відображення (рис. 14), що дало можливість отримати розв’язки задач фільтрації, вологоперенесення, перенесення солей в даних областях водонасичення у вигляді графічного їх представлення.

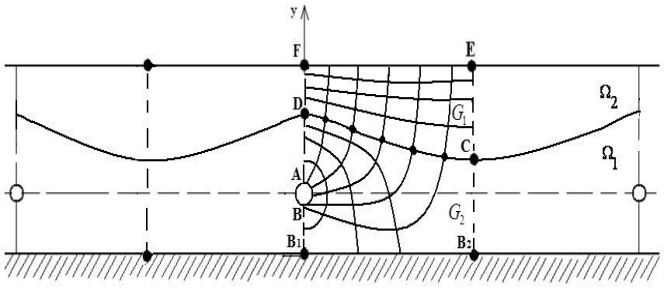


Рис. 13. Фільтрація сольового розчину до горизонтального систематичного дренажу

Встановлено зростання п’єзометричних напорів та швидкостей фільтрації в околі дрени, напорів вологи – в околі вільної поверхні. В процесі зволоження ґрунтового масиву фронт сольових розчинів поширюється в усій насичено-ненасиченій області.

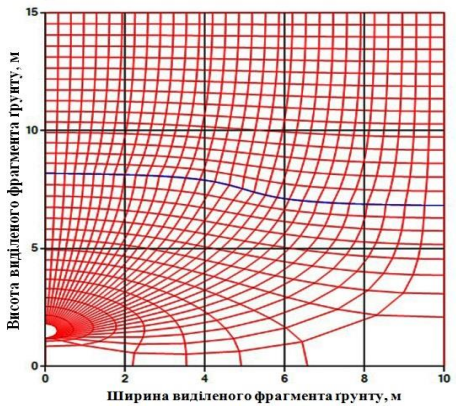

Рис. 14. Конформна різницева сітка області насичено-ненасиченого ґрунту

Проведено серію чисельних експериментів за різних значень вхідних даних, які виявили важливість урахування залежностей параметрів фільтраційного потоку та вологоперенесення від їх фізико-хімічних властивостей та властивостей ґрунтового середовища, які значно впливають на процеси фільтраційного перенесення солей та вологоперенесення.

В третьому розділі отримано чисельний розв'язок задачі солеперенесення при нестаціонарній фільтрації та вологоперенесенні з урахуванням осмосу в насичено-ненасиченому ґрунтовому масиві, який містить дрену прямокутної форми, через яку відбувається відведення сольових розчинів (рис. 15) з ґрунтового масиву.

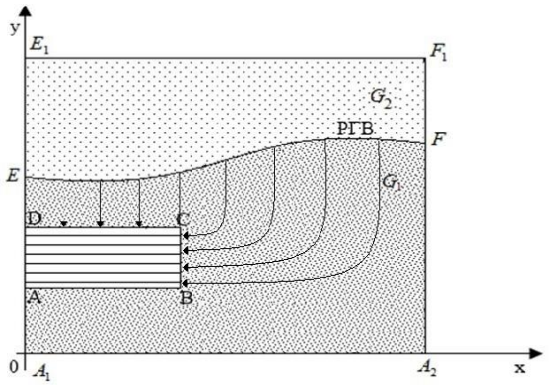

Рис. 15. Фільтрація солей до дрени

Математична модель зазначених процесів описується двома системами диференціальних рівнянь

- для області повного насичення $G_1$ маємо

$$\frac{\partial\left(D_1(c_1)\frac{\partial c_1}{\partial x}\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(D_1(c_1)\frac{\partial c_1}{\partial y}\right)}{\partial y}-\upsilon_x(c_1)\frac{\partial c_1}{\partial x}-\upsilon_y(c_1)\frac{\partial c_1}{\partial y}-\gamma_1\left(c_1-C^*\right)=\sigma_1\frac{\partial c_1}{\partial t},\ (x,y)\in G_1,\ t>0, \quad (29)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_1(c_1)\frac{\partial h_1}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k_1(c_1)\frac{\partial h_1}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu(c_1)\frac{\partial c_1}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu(c_1)\frac{\partial c_1}{\partial y}\right)=a\frac{\partial h_1}{\partial t},\ (x,y)\in G_1,\ t>0, \quad (30)$$

$$\upsilon_x(c_1)=-k(c_1,h_1)\frac{\partial h_1}{\partial x}+\nu(c_1)\frac{\partial c_1}{\partial x},\quad \upsilon_y(c_1)=-k(c_1,h_1)\frac{\partial h_1}{\partial y}+\nu(c_1)\frac{\partial c_1}{\partial y},\ (x,y)\in G_1; \quad (31)$$

- для області неповного насичення $G_2$ система рівнянь має вигляд

$$\frac{\partial\left(D_2(c_2)\frac{\partial c_2}{\partial x}\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(D_2(c_2)\frac{\partial c_2}{\partial y}\right)}{\partial y}-\upsilon_x(c_2)\frac{\partial c_2}{\partial x}-\upsilon_y(c_2)\frac{\partial c_1}{\partial y}-\gamma_2\left(c_2-C^*\right)=\sigma_2\frac{\partial c_2}{\partial t},\ (x,y)\in G_2,\ t>0, \quad (32)$$

$$\mu(h_2)\frac{\partial h_2}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k(c_2,h_2)\frac{\partial h_2}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k(c_2,h_2)\frac{\partial h_2}{\partial y}\right),\quad (x,y)\in G_2,\ t>0, \quad (33)$$

$$\upsilon_x(c_2)=-k(c_2,h_2)\frac{\partial h_2}{\partial x},\qquad \upsilon_y(c_2)=-k(c_2,h_2)\frac{\partial h_2}{\partial y},\quad (x,y)\in G_2 \quad (34)$$

за таких початкових та граничних умов, заданих на межах областей та дрені:

$$h_i(x,y,0)=\tilde{H}_0(x,y),\ h_i\big|_{EF}=y,\ h_1\big|_{ABCD}=\tilde{H}_1,\ \left.\frac{\partial h_1}{\partial n}\right|_{AA_1\cup A_1A_2\cup A_2F\cup DE}=0,\ (x,y)\in G_1,\ i=1,2, \quad (35)$$

$$\left.\frac{\partial h_2}{\partial x}\right|_{EE_1\cup F_1F}=0\ ,\ h_2\big|_{E_1F_1}=\tilde{H}_2,\ (x,y)\in G_2,$$

$$c_i(x,y,0)=\tilde{C}_0(x,y),\ c_1\big|_{ABCD}=\tilde{C}_1,\ c_1\big|_{EF}=\tilde{C}_2,\ \left.\frac{\partial c}{\partial n}\right|_{AA_1\cup A_1A_2\cup A_2F\cup DE}=0,\ (x,y)\in G_1,\ i=1,2, \quad (36)$$

$$c_2\big|_{E_1F_1}=\tilde{C}_1,\quad \left.\frac{\partial c_2}{\partial n}\right|_{EF}=0,\quad \left.\frac{\partial c_2}{\partial x}\right|_{EE_1\cup F_1F}=0,\quad (x,y)\in G_2.$$

Тут $a$ – коефіцієнт гідропружності.

На межі контакту $EF$ областей повного та неповного насичення (кривій депресії) задані умови спряження для напорів, концентрації сольових розчинів та граничні умови на дрені $ABCD$ вигляду (6).

Для знаходження чисельного розв'язку задач (29)-(36) модифіковано локально-одновимірний метод О.А. Самарського на випадок розв'язування нелінійних крайових задач з використанням неявної різницевої схеми для знаходження чисельного розв'язку задач фільтрації та вологоперенесення, монотонної різницевої схеми – перенесення сольових розчинів.

В результаті проведення чисельних експериментів отримано просторово-часові розгортки досліджуваних взаємозв'язаних процесів та встановлено, що в області насичено-ненасиченого ґрунту напори поступово спадають з глибиною та часом при потраплянні сольових розчинів на поверхню ґрунтового шару; поле розподілу концентрації солей монотонно спадає з глибиною та часом, що пояснюється вимиванням сольових розчинів через дрену; під дією фільтраційних процесів вільна поверхня рухається вниз і її положення змінилося на 40%, що потрібно враховувати при використанні дренажних систем в якості елемента осушувальної системи. А також встановлено збільшення значень напорів рідини (10-20%) та концентрації солей (10%) при нестаціонарній фільтрації сольових розчинів (рис. 16, 17).

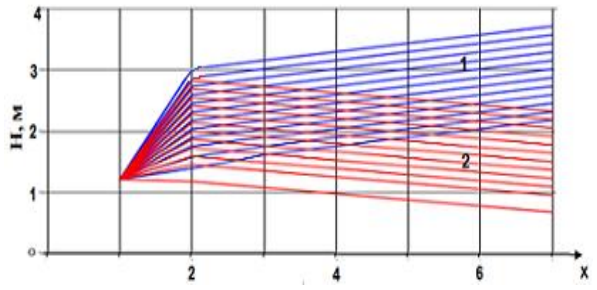


Рис. 16. Розподіл п'єзометричних напорів для задач нестаціонарної (1) та стаціонарної (2) фільтрації

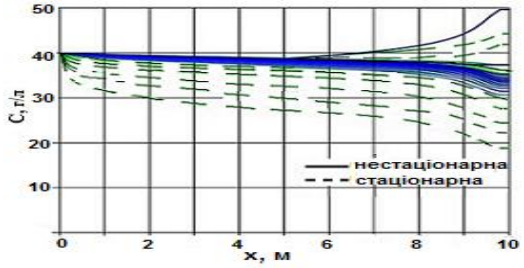


Рис. 17. Розподіл концентрації солей при нестаціонарній та стаціонарній фільтрації

При урахуванні нестаціонарної фільтрації напори рідини зростають інтенсивніше, що призводить до більш швидкого вимивання сольових розчинів з пористого середовища, що потрібно враховувати при математичному моделюванні фільтраційних процесів.

## ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ ТА ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота є завершеним науковим дослідженням, у якому розв'язано важливе наукове завдання математичного моделювання перенесення солей при фільтрації та вологоперенесенні у насичено-ненасичених ґрунтових середовищах. При цьому отримано такі основні результати та висновки:

1. Побудовано нову математичну модель взаємозв’язаних процесів перенесення солей, фільтрації та вологоперенесення у насичено-ненасичених ґрунтових середовищах, яка складається з двох систем диференціальних рівнянь, крайових умов для концентрації солей, напорів та умов спряження, заданих на внутрішній межі контакту ґрунтових масивів, на основі якої сформульовано контактно-крайові задачі у лінійних та нелінійних постановках, одновимірних та двовимірних випадках.

2. Розроблену математичну модель перенесення солей при фільтрації та вологоперенесенні узагальнено на випадки осушення і зволоження насичено-ненасичених ґрунтових масивів під дією горизонтального систематичного дренажу та при наявній рухомій вільній поверхні ґрунтових вод.

3. Досліджено процес перенесення солей під дією нестаціонарної фільтрації сольових розчинів та вологоперенесення з урахуванням осмотичних явищ та при наявній вільній поверхні в насичено-ненасиченому ґрунті. Встановлено зростання розподілу напорів рідини (10-20%), концентрації сольових розчинів (10%) при нестаціонарній фільтрації сольових розчинів, під дією якої вільна поверхня рухається вниз, її положення змінилося на 40%. Результати чисельних експериментів показали, що сумісне урахування процесів фільтрації та вологоперенесення значно впливає на процес розподілу концентрації сольових розчинів в насичено-ненасиченому ґрунті та дозволяє адекватно дослідити процес перенесення солей.

4. Модифіковано чисельні методи скінченних різниць з використанням чисельних методів конформних відображень для розв’язання нелінійних контактно-крайових задач перенесення солей, фільтрації та вологоперенесення в областях з криволінійними межами, за наявної рухомої або нерухомої внутрішньої поверхні контакту та знайдено їх чисельні розв’язки за допомогою розробленого комплексу програм. Достовірність результатів, що були отримані в даній дисертаційній роботі забезпечується коректністю і строгістю постановок задач, адекватністю побудованих математичних моделей, застосуванням достатньо обґрунтованих математичних методів до дослідження і розв'язку задач, використання сучасних чисельних методів і засобів обчислювальної техніки.

5. Встановлено закономірності процесу перенесення солей при вологоперенесенні та осмосі у ненасичених ґрунтах, за фільтрації, вологоперенесенні у насичено-ненасичених ґрунтах за наявної рухомої або нерухомої внутрішніх поверхонь контакту ґрунтових масивів, що містять дрену. Досліджено поширення фронту сольових розчинів під дією процесів фільтрації та вологоперенесення. Встановлено, що під дією фільтраційного потоку вільна поверхня рухається вниз, її положення змінилося на глибину до 13-15%.

6. Практичне значення дисертаційної роботи полягає у наступному: результати даної дисертаційної роботи впроваджено при складанні завдань на проектування та будівництво меліоративних систем Рівненським обласним управлінням водних ресурсів. Одержані результати дисертаційних досліджень теоретичного і практичного характеру впроваджені в навчальному процесі при підготовці спецкурсів «Чисельні методи математичної фізики», «Теорія систем та математичне

моделювання» для студентів Національного університету водного господарства та природокористування МОН України за спеціальністю «Прикладна математика».

## СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ


1. *Власюк А. П.* Математическое моделирование солепереноса при фильтрации и влагопереносе в насыщенно-ненасищенных грунтах в случае увлажняющего режима / *А. П. Власюк, Т. П. Цветкова* // Инженерно-физический журнал. – 2015. – Т. 88, № 5. – С. 1031–1042. – Журнал індексується в Scopus, Inspec, Google Scholar та ін.

2. *Власюк А. П.* Математичне моделювання процесу масопереносу при фільтрації і вологоперенесенні сольових розчинів в областях повного і неповного насичення / *А. П. Власюк, Т. П. Цвєткова* // Вісник Київського нац. ун-ту ім. Тараса Шевченка». Сер.: фіз.-мат. науки. – К., 2012. – Вип. 1. – С. 137–144.

3. *Власюк А. П.* Математичне моделювання солеперенесення при сумісній фільтрації та вологоперенесенні у насичено-ненасичених ґрунтах в лінійній постановці / *А. П. Власюк, Т. П. Цвєткова* // Вісник Київського нац. ун-ту ім. Тараса Шевченка». Сер.: фіз.-мат. науки. – К., 2013. – Вип. 2. – С. 118–124.

4. *Власюк А. П.* Математичне моделювання масоперенесення солей при нестаціонарній фільтрації і вологоперенесенні в насичено-ненасиченому ґрунтовому масиві / *А. П. Власюк, Т. П. Цвєткова* // Зб. наук. пр. «Вісник Київського університету». Сер.: Фіз.-мат. наук.– Вип. 3. – Київ, 2015. – С. 55–59.

5. *Власюк А. П.* Математичне моделювання процесу солепереносу при фільтрації та вологопереносі в насичено-ненасиченому ґрунтовому масиві при наявності рухомої вільної поверхні / *А. П. Власюк, Т. П. Цвєткова* // Вісник ТНТУ. – Тернопіль, 2014. – № 2(74). – С. 219–233.

6. *Цвєткова Т. П.* Математичне моделювання масопереносу з врахуванням осмосу на вологоперенос в одновимірному випадку / *Т. П. Цвєткова* // Математичне та комп'ютерне моделювання. Сер.: технічні науки. – Кам'янець-Подільський, 2010. – Вип. 4. – С. 227–233.

7. *Власюк А. П.* Математичне моделювання переносу сольових розчинів при сумісній фільтрації та вологоперенесенні у насичено-ненасичених ґрунтах в нелінійній одновимірній постановці / *А. П. Власюк, Т. П. Цвєткова* // Математичне та комп'ютерне моделювання. Сер.: технічні науки. – Кам'янець-Подільський, 2012. – Вип. 7. – С. 28–42.

8. *Власюк А. П.* Чисельне моделювання масоперенесення сольових розчинів у ненасичених шаруватих ґрунтах / *А. П. Власюк, Т. П. Цвєткова* // Математичне та комп'ютерне моделювання. Сер.: технічні науки. – Кам'янець-Подільський, 2014. – Вип. 10. – С. 44–52.

9. *Власюк А. П.* Комп'ютерна візуалізація гідродинамічних полів в областях з криволінійними межами / *А. П. Власюк, Т. П. Дячук* // Вісник НУВГП. Сер.: технічні науки. – Рівне, 2006. – Вип. 4(36). Ч.2. – С. 74–84.

10. *Власюк А. П.* Одновимірна задача масопереносу сольових розчинів при фільтрації підземних вод в умовах неповного насичення ґрунту / *А. П. Власюк, Т. П. Цвєткова* // Тези доп. Міжн. наук. конф. ім. академіка М. Кравчука. – Київ, 2008. – С. 75.

11. *Власюк А. П.* Математичне моделювання масопереносу сольових розчинів при фільтрації підземних вод в насичено-ненасичених середовищах / *А. П. Власюк, Т. П. Цвєткова* // Тези доп. Міжн. наук. конф. «Прогнозування та прийняття рішень в умовах невизначеності». – Київ-Рівне, 2008. – С. 248–250.

12. *Власюк А. П.* Математичне моделювання масопереносу сольових розчинів при фільтрації підземних вод в насичено-ненасичених ґрунтових середовищах з рухомою вільною поверхнею / *А. П. Власюк, Т. П. Цвєткова* // Тези доп. Всеукр. наук. конф. «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики». – Львів, 2008. – С. 54.

13. *Власюк А. П.* Математичне моделювання масопереносу при фільтрації сольових розчинів в насичено-ненасичених ґрунтових середовищах / *А. П. Власюк, Т. П. Цвєткова* // Тези доп. Всеукр. наук. конф. «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики». – Львів, 2009. – С. 52–53.

14. *Власюк А. П.* Математичне моделювання впливу масопереносу при сумісному вологопереносі та фільтрації сольових розчинів за наявності осмосу / *А. П. Власюк, Т. П. Цвєткова* // Тез. доп. Міжн. наук. конф. «Прогнозування та прийняття рішень в умовах невизначеності». – Ялта, 2010. – С. 41–42.

15. *Власюк А. П.* Математичне моделювання фільтрації сольових розчинів та вологоперенесення в насичено-ненасичених ґрунтових середовищах в стаціонарному режимі / *А. П. Власюк, Т. П. Цвєткова* // Тез. Доп. Міжн. наук. конф. «Прогнозування та прийняття рішень в умовах невизначеності». – Ялта, 2011. – С. 53–55.

16. *Власюк А. П.* Математическое моделирование массопереноса при фильтрации и влагопереносе в насыщенно-ненасыщенных слоистых ґрунтах / *А. П. Власюк, Т. П. Цветкова* // Тез. докл. Internat. Conf. «Problems of decision making under uncertainties». – Brno, Czech Republic, 2012. – С. 152–153.

17. *Власюк А. П.* Математичне моделювання солеперенесення при фільтрації підземних вод в насичено-ненасичених ґрунтових середовищах у випадку нестаціонарного зволожуючого режиму / *А. П. Власюк, Т. П. Цвєткова* // Тез. доп Всеукр. наук. конф. «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики». – Львів, 2013. – С. 38.

18. *Власюк А. П.* Математичне моделювання солеперенесення під впливом нестаціонарної фільтрації та вологоперенесення у насичено-ненасичених ґрунтах / *А. П. Власюк, Т. П. Цвєткова* // Тез. доп. Міжн. наук. конф. «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики». – Львів, 2014. – С. 56.

19. *Власюк А. П.* Чисельне моделювання солеперенесення при сумісній нестаціонарній фільтрації і вологоперенесенні в областях повного та неповного насичення / *А. П. Власюк, Т. П. Цвєткова* // Тез. доп. Міжн. наук. конф. «Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації». Кам’янець-Подільський, 2014. – С. 35–37.

20. *Власюк А. П.* Математичне моделювання масоперенесення солей при нестаціонарній фільтрації та вологоперенесенні в насичено-ненасичених ґрунтах у нелінійному випадку / *А. П. Власюк, Т. П. Цвєткова* // Тез. доп. Міжн. наук. конф. «Прийняття рішень в умовах невизначеності». – Мукачеве, 2014. – С. 77–78.

21. *Власюк А. П.* Чисельне моделювання солеперенесення при сумісній нестаціонарній фільтрації та вологоперенесенні в насичено-ненасичених ґрунтах в лінійній постановці / *А. П. Власюк, Т. П. Цвєткова* // Тез. доп. Міжн. наук. конф. ім. академіка М. Кравчука. – Київ, 2014. – С. 74.

22. *Vlasyuk A. P.* Mathematical modeling of salt transfer process under simultaneous filtration and moisture transfer in saturated and non-saturated soils with vertical drainage / *A. P. Vlasyuk, T. P. Tsvetkova* // Тези доп. Intern. Conf. «Problems of decision making under uncertainties». – Cesky Rudolec, Czech Republic, 2014. – С.108–109.

23. *Власюк А. П.* Математичне моделювання перенесення солей в насичено-ненасиченому ґрунтовому масиві при його осушенні / *А. П. Власюк, Т. П. Цвєткова* // Тез. доп. Міжн. наук. конф. «Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів». – Рівне, 2015. – С. 49–50.

24. *Власюк А. П.* Математичне моделювання солеперенесення при сумісній нестаціонарній фільтрації та вологоперенесенні в насичено-ненасиченому ґрунтовому масиві при його осушенні / *А. П. Власюк, Т. П. Цвєткова* // Тез. доп. Міжн. конф. «Прийняття рішень в умовах невизначеності». – Східниця, 2015. – С. 157–159.

25. *Власюк А. П.* Математичне моделювання масоперенесення солей при нестаціонарній фільтрації підземних вод та вологоперенесенні у насичено-ненасиченому ґрунті з рухомою вільною поверхнею / *А. П. Власюк, Т. П. Цвєткова* // Тез. доп. Всеукр. наук. конф. «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики». – Львів, 2015. – С. 90–91.

## АНОТАЦІЇ

**Цвєткова Т. П. Математичне моделювання перенесення солей при фільтрації та вологоперенесенні у насичено-ненасичених ґрунтових середовищах. – На правах рукопису.**

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук за спеціальністю 01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи. – Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя МОН України, Тернопіль, 2016.

Дисертаційна робота присвячена питанням математичного моделювання процесу перенесення солей при фільтрації та вологоперенесенні у насичено-ненасичених ґрунтових середовищах.

В дисертації побудовано нову нелінійну математичну модель взаємозв’язаних процесів перенесення солей, фільтрації та вологоперенесення у насичено-ненасичених ґрунтових середовищах з рухомою границею контакту насичених та ненасичених ґрунтових масивів з урахуванням залежностей коефіцієнтів систем рівнянь від концентрації, напорів та осмосу в одновимірних та двовимірних випадках.

Розроблену математичну модель узагальнено на процес перенесення солей під дією плоско-вертикальної безнапірної стаціонарної фільтрації сольового розчину до горизонтального систематичного дренажу при наявній рухомій та нерухомій вільній поверхні ґрунтових вод.

Побудовано обчислювальні алгоритми розв’язку поставлених задач, здійснено їх програмну реалізацію, проведено серію чисельних експериментів, на основі яких встановлено закономірності процесу перенесення солей при вологоперенесенні у ненасичених ґрунтах, за фільтрації, вологоперенесення та осмосу у насичено-

ненасичених ґрунтових середовищах за наявної рухомої або нерухомої внутрішньої поверхні контакту ґрунтових масивів, що містять дрену в якості осушувального або зволожувального елемента дренажної системи.

***Ключові слова:*** математичне моделювання, перенесення солей, вологоперенесення, фільтрація, осмос, повне та неповне насичення, вільна поверхня, конформні відображення, метод скінченних різниць.

**Цветкова Т. П. Математическое моделирование переноса солей при фильтрации и влагопереносе в насыщенно-ненасыщенных грунтовых средах. – На правах рукописи.**

Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук по специальности 01.05.02 – математическое моделирование и вычислительные методы. – Тернопольский национальный технический университет имени Ивана Пулюя МОН Украины, Тернополь, 2016.

Диссертационная работа посвящена вопросам математического моделирования процесса переноса солей при фильтрации и влагопереносе в насыщенно-ненасыщенных грунтовых средах.

В диссертации построено новую нелинейную математическую модель взаимосвязанных процессов переноса солей, фильтрации и влагопереноса в насыщенно-ненасыщенных грунтах с движущейся границей контакта насыщенных и ненасыщенных грунтовых массивов с учетом зависимостей коэффициентов систем уравнений от концентрации солевого раствора, напора и осмоса в одномерных, двумерных постановках, линейных и нелинейных случаях.

Разработанную математическую модель обобщено на процесс переноса солей под действием плоско-вертикальной безнапорной стационарной фильтрации солевого раствора к горизонтальному систематическому дренажу с подвижной свободной поверхностью грунтовых вод.

Для решения поставленных задач модифицировано методы конечных разностей с использованием численных методов конформных отображений для решения систем линейный и нелинейных дифференциальных уравнений параболического, эллиптического типов в областях с криволинейными границами.

Разработаны разностные схемы, вычислительные алгоритмы для численного решения контактно-краевых задач и на этой основе разработан комплекс программ для исследования взаимосвязанных процессов переноса солей, фильтрации и влагопереноса с подвижной и неподвижной внутренними границами контакта насыщенно-ненасыщенных грунтовых сред.

На основании программной реализации проведена серия численных экспериментов, на основе которых установлены закономерности процесса солепереноса при фильтрации, влагопереносе и осмосе в насыщенно-ненасыщенных грунтовых средах с внутренней границей контакта грунтовых массивов. Установлено влияние совместного учета процессов фильтрации и влагопереноса на процесс распределения концентрации солевых растворов в насыщенно-ненасыщенном грунте. Исследовано влияние нестационарной фильтрации и осмотических явлений на распределение напоров и концентрации солей в

насыщенно-ненасыщенных грунтах. Установлено влияние фильтрационных процессов на изменение положения свободной поверхности.

Результаты диссертационных исследований могут быть использованы для оценки степени загрязнения грунтовых вод, засоления плодородных грунтов, затопления территорий, при прогнозировании оседания грунтовых массивов и оснований, провоцируемые избыточным увлажнением и подтоплением участков склонов, вследствие изменения гидрогеологических условий, при установлении количества водных ресурсов в засушливых регионах, проектировании и строительстве дренажных и оросительных систем.

***Ключевые слова:*** математическое моделирование, перенос солей, влагоперенос, фильтрация, осмос, полное и неполное насыщение, свободная поверхность, конформные отображения, метод конечных разностей.

**Tsvetkova T. P. Mathematical modelling of salts transfer under filtration and moisture transfer in saturated-nonsaturated soil media. – Manuscript.**

Thesis for academic degree of candidate of technical sciences in speciality 01.05.02 – mathematical modelling and computational methods. – Ternopil Ivan Pul'uj National Technical University, Ternopil, 2016.

The thesis is devoted to issues of mathematical modelling of the process of salt transfer under filtration and moisture transfer in saturated and nonsaturated soil media.

In the thesis a new nonlinear mathematical model of interrelated processes of salts transfer, filtration and moisture transfer in saturated-nonsaturated soil media with the mobile contact boundary of saturated and nonsaturated soil masses is constructed taking into account the dependencies of equations system coefficients on concentration, heads and osmosis in uni-dimensional and two-dimensional cases.

The developed mathematical model is generalized to the process of the salt transfer under the influence of plane-vertical free-flow stationary filtration of salt solution to horizontal systematic drainage with the presence of movable and immovable free surface of ground waters.

Computational algorithms are built for solving the set of problems, their software implementation is carried out, series of numeric experiments are conducted and on their basis relationships are determined in the process of salt transfer under moisture transfer in nonsaturated soils, under filtration, moisture transfer and osmosis in saturated-nonsaturated soil media with the presence of movable or immovable inner surface of the soil masses contact which contains the drain as a draining or moistening element of the drainage system.

***Key words:*** mathematical modelling, salts transfer, moisture transfer, filtration, osmosis, complete and noncomplete saturation, free surface, conforming reflection, method of finite differences.

Підписано до друку 17.05.2016 р. Формат $60\times90^{1}/_{16}$.
Папір друкарський № 1. Гарнітура Times.
Друк різографічний. Ум.-друк. арк. 0,9.
Тираж 100 прим. Зам. № 5167.

*Видавець і виготовлювач*
*Редакційно-видавничий відділ Національного університету водного господарства та природокористування,*
*33028, м. Рівне, вул. Соборна, 11.*

*Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції РВ № 31 від 26.04.2005 р.*