

**Національний університет водного господарства та  
природокористування**

**На правах рукопису**

**ЖУКОВСЬКА Наталія Анатоліївна**



**УДК 532.72:532.546:539.3:519.63**

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВПЛИВУ ТЕПЛО-  
МАСОПЕРЕНОСЕННЯ ПРИ ФІЛЬТРАЦІЇ СОЛЬОВИХ РОЗЧИНІВ  
НА ДЕФОРМАЦІЙНІ ПРОЦЕСИ ҐРУНТОВИХ МАСИВІВ**

**01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи**

**Дисертація на здобуття наукового ступеня  
кандидата технічних наук**

**Науковий керівник  
Власюк Анатолій Павлович  
д.т.н., професор**

**Рівне – 2016**

## ЗМІСТ

<b>УМОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ</b>	6
<b>ВСТУП</b>	8
<b>РОЗДІЛ 1. Основні математичні моделі напружено-деформованого стану ґрунтових масивів в умовах тепло-масоперенесення при фільтрації сольових розчинів</b>	15
1.1. Напружено-деформований стан ґрунтових середовищ: актуальність питання	15
1.2. Огляд літератури з математичного моделювання деформаційних процесів у ґрунтах	19
1.3. Удосконалені рівняння напружено-деформованого стану ґрунтового масиву з урахуванням процесів тепло-масоперенесення	24
1.3.1. Деформаційні характеристики ґрунтових середовищ	24
1.3.2. Основи теорії напружено-деформованого стану ґрунтових масивів	27
1.3.3. Основні диференціальні рівняння напружено-деформованого стану ґрунтових масивів з урахуванням тепло-масоперенесення при фільтрації сольових розчинів	32
1.4. Рівняння нерозривності	38
1.5. Диференціальні рівняння масоперенесення та теплоперенесення при фільтрації сольових розчинів у пористому середовищі	40
1.6. Крайові умови	40
1.7. Додаткові умови на вільній поверхні	45
1.8. Експериментальні дослідження залежностей коефіцієнтів фільтрації, Ламе та модуля Юнга від фізико-хімічного стану ґрунтового середовища	46
1.9. Висновки до розділу 1	51
<b>РОЗДІЛ 2. Математичне моделювання впливу тепло-масоперенесення при фільтрації сольових розчинів на напружено-деформований стан ґрунтового масиву</b>	53
2.1. Математичне моделювання впливу тепло-масоперенесення при	53

фільтрації сольових розчинів на напружено-деформований стан ґрунтового масиву в одновимірному випадку	
2.1.1. Постановка задачі	53
2.1.2. Математична модель задачі	54
2.1.3. Чисельний розв'язок крайової задачі	56
2.1.4. Результати чисельних експериментів та їх аналіз	62
2.2. Математичне моделювання впливу тепло-масоперенесення при фільтрації сольових розчинів на напружено-деформований стан ґрунтового масиву в двовимірному випадку	66
2.2.1. Постановка задачі	66
2.2.2. Математична модель задачі	67
2.2.3. Чисельний розв'язок крайової задачі	69
2.2.4. Результати чисельних експериментів та їх аналіз	85
2.3. Висновки до розділу 2	91
<b>РОЗДІЛ 3. Математичне моделювання впливу тепло-масоперенесення при фільтрації сольових розчинів на напружено-деформований стан ґрунтового масиву з вільною поверхнею</b>	<b>92</b>
3.1. Математичне моделювання впливу тепло-масоперенесення при фільтрації сольових розчинів на напружено-деформований стан ґрунтового масиву з вільною межею в одновимірному випадку	92
3.1.1. Постановка задачі	92
3.1.2. Математична модель задачі	94
3.1.3. Чисельний розв'язок крайової задачі	96
3.1.4. Результати чисельних експериментів та їх аналіз	102
3.2. Математичне моделювання впливу тепло-масоперенесення при фільтрації сольових розчинів на напружено-деформований стан ґрунтового масиву з вільною поверхнею у двовимірному випадку	104
3.2.1. Постановка задачі	104
3.2.2. Математична модель задачі	105
3.2.3. Чисельний розв'язок крайової задачі	109

3.2.4. Результати чисельних експериментів та їх аналіз	115
3.3. Математичне моделювання напружено-деформованого стану фільтруючої ґрунтової греблі з вільною поверхнею під впливом тепло-масоперенесення у двовимірному випадку	121
3.3.1. Постановка задачі	121
3.3.2. Математична модель задачі в змінних $x, y$ фізичної області	122
3.3.3. Математична модель задачі в змінних $\xi, \eta$	124
3.3.3.1. Побудова чисельної конформної різницевої сітки	124
3.3.3.2. Перетворення рівнянь задачі до змінних $\xi, \eta$	125
3.3.4. Чисельний розв'язок крайової задачі	129
3.3.5. Результати чисельних експериментів та їх аналіз	135
3.4. Математичне моделювання впливу тепло-масоперенесення на напружено-деформований стан фільтруючого ґрунтового масиву внаслідок утворення депресійної лунки у двовимірному випадку	139
3.4.1. Постановка задачі	139
3.4.2. Математична модель задачі в змінних $x, y$ фізичної області	140
3.4.3. Математична модель задачі в змінних $\xi, \eta$	142
3.4.4. Чисельний розв'язок крайової задачі	143
3.4.5. Результати чисельних експериментів та їх аналіз	144
3.5. Висновки до розділу 3	146
<b>РОЗДІЛ 4. Математичне моделювання впливу тепло-масоперенесення при фільтрації сольових розчинів на напружено-деформований стан багат шарового ґрунтового масиву за наявності вільної поверхні</b>	<b>148</b>
4.1. Математичне моделювання впливу тепло-масоперенесення при фільтрації сольових розчинів на напружено-деформований стан багат шарового ґрунтового масиву з вільною межею в одновимірному випадку	148
4.1.1. Постановка задачі	148
4.1.2. Математична модель задачі	150

4.1.3. Чисельний розв'язок крайової задачі	153
4.1.4. Результати чисельних експериментів та їх аналіз	158
4.2. Математичне моделювання впливу тепло-масоперенесення при фільтрації сольових розчинів на напружено-деформований стан багат шарового ґрунтового масиву за наявності вільної поверхні у двовимірному випадку	162
4.2.1. Постановка задачі	162
4.2.2. Математична модель задачі	163
4.2.3. Чисельний розв'язок крайової задачі	167
4.2.4. Результати чисельних експериментів та їх аналіз	173
4.3. Висновки до розділу 4	179
<b>ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ</b>	180
<b>СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ</b>	183
<b>ДОДАТКИ</b>	205

## УМОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

$\text{НДС}$	напружено-деформований стан;
$\text{РГВ}$	рівень ґрунтових вод;
$\mathbf{X} = (x, y, z)$	точка, $m$ ;
$\Omega$	область ґрунтового масиву;
$\bar{\Omega}$	замикання області;
$\Gamma$	межа області;
$\Gamma_0$	вільна поверхня (депресійна крива);
$\mathbf{u} = (U, V, W)$	вектор зміщень;
$U(\mathbf{X})$	зміщення вздовж осі $Ox$ , $m$ ;
$V(\mathbf{X})$	зміщення вздовж осі $Oy$ , $m$ ;
$W(\mathbf{X})$	зміщення вздовж осі $Oz$ , $m$ ;
$X, Y, Z$	масові сили вздовж осей $Ox$ , $Oy$ та $Oz$ відповідно, $\text{Па}/m$ ;
$T_\sigma$	тензор напруження;
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	нормальні напруження, $\text{Па}$ ;
$\tau_{xy}, \tau_{yx}, \tau_{xz},$ $\tau_{zx}, \tau_{yz}, \tau_{zy}$	дотичні напруження, $\text{Па}$ ;
$T_\varepsilon$	тензор деформації;
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	нормальні деформації;
$\varepsilon_{xy}, \varepsilon_{yx}, \varepsilon_{xz},$ $\varepsilon_{zx}, \varepsilon_{yz}, \varepsilon_{zy}$	дотичні деформації;
$h(\mathbf{X}, t)$	п'єзометричний напір, $m$ ;
$T(\mathbf{X}, t)$	температура, $^{\circ}\text{C}$ ;
$c(\mathbf{X}, t)$	концентрація сольового розчину, $g/\text{літр}$ ;
$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$	швидкість фільтрації сольового розчину, $m/\text{доба}$ ;
$\lambda(c, T), \mu(c, T)$	коефіцієнти Ламе, що залежать від концентрації сольового

	розчину та температури, $Па$ ;
$E(c,T)$	модуль Юнга, що залежить від концентрації сольових розчинів та температури, $Па$ ;
$K(c,T)$	коефіцієнт (тензор) фільтрації, що залежить від концентрації сольового розчину та температури, $м/доба$ ;
$\alpha_T$	середній коефіцієнт лінійного теплового розширення в інтервалі температур $(T_0, T)$ , $град^{-1}$ ;
$\lambda_T$	коефіцієнт (тензор) ефективної теплопровідності вологого ґрунту, $Дж/(м \cdot град \cdot доба)$ ;
$D$	коефіцієнт (тензор) конвективної дифузії, $м^2/доба$ ;
$D_T$	коефіцієнт (тензор) термодифузії, $м^2/доба$ ;
$\nu$	коефіцієнт Пуассона;
$C_m$	концентрація граничного насичення, $г/літр$ ;
$\gamma$	коефіцієнт масообміну, $доба^{-1}$ ;
$n_p$	пористість ґрунту;
$\rho$	густина ґрунту, $кг/м^3$ ;
$c_\rho$	питома теплоємність порової рідини, $Дж/(кг \cdot град)$ ;
$c_T$	об'ємна теплоємність ґрунту, $Дж/(м^3 \cdot град)$ ;
$\nu_c$	коефіцієнт (тензор) хімічного осмосу, $м^5/(кг \cdot доба)$ ;
$\nu_T$	коефіцієнт (тензор) термічного осмосу, $м^2/(град \cdot доба)$ ;
$\mathbf{v}$	вектор швидкості руху твердих частинок ґрунту;
$t$	час, $доба$ .

## ВСТУП

**Актуальність теми.** На сучасному етапі розвитку математичного моделювання в поєднанні з комп'ютерним експериментом з'являються нові можливості в розгляді питань проектування, будівництва та подальшої експлуатації цивільних та промислових об'єктів. При експлуатації даних об'єктів може змінюватись напружено-деформований стан (НДС) ґрунтових основ, на яких вони побудовані. Суттєві зміни НДС викликають зміну ґрунтового профілю масиву, на який впливають різні фізико-хімічні фактори. Зокрема, фільтрація підземних вод, масоперенесення, теплоперенесення розчинених речовин фільтраційними потоками (розчинення та вимивання порід).

Важливий вплив на стійкість споруд має положення рівня ґрунтових вод (РГВ) або вільної поверхні. Як правило, з розвитком міста й у процесі експлуатації промислових підприємств у місцях високого знаходження ґрунтових вод спостерігається їх зниження, і, навпаки, в районах глибокого знаходження ґрунтових вод або їх відсутності спостерігається поява й підвищення рівня ґрунтових вод. Рух вільної поверхні ґрунтових вод призводить до виникнення різноманітних об'ємних сил і відповідно – до зміни НДС ґрунтового масиву.

На НДС ґрунтових основ може впливати і температурний режим, основними причинами зміни якого можуть бути сезонні та добові коливання температур, захоронення відходів виробництва, будівництво атомних електростанцій та водойм-охолоджувачів біля них та ін.

При оцінці НДС також потрібно враховувати, що в природних умовах ґрунтовий масив може складатись із багатьох шарів, кожний з яких має свої власні характеристики, відмінні від характеристик інших шарів (пористості, коефіцієнти Ламе, конвективної дифузії, термодифузії, теплопровідності, фільтрації, термопружності та ін.).

Вищеописані фактори стають причиною зміни фільтраційних та деформаційних властивостей ґрунту, а відповідно – зміни його НДС. Про важливість проблеми



дослідження НДС ґрунтових масивів і основ у складних гідрогеологічних умовах також свідчить статистика аварій споруд, що побудовані на таких ґрунтах.

Тому побудова нових та вдосконалення існуючих класичних математичних моделей НДС фільтруючих ґрунтових масивів і основ під впливом тепло-масоперенесення, розвиток та використання чисельних методів для розв'язування відповідних крайових задач є актуальною науковою задачею в напрямку математичного моделювання та обчислювальних методів.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.** Робота виконувалась згідно планів наукових досліджень Національного університету водного господарства та природокористування (НУВГП). Результати дисертаційної роботи отримані в рамках держбюджетних науково-дослідних робіт Міністерства освіти і науки України, що виконувались на кафедрі прикладної математики НУВГП, а саме: «Математичне та комп'ютерне моделювання фізико-хімічних процесів підземної гідромеханіки під впливом природних, техногенних і соціальних факторів» (термін виконання з 01.01.2010 по 31.12.2012 рр., № ДР 0110U000816); «Математичне та комп'ютерне моделювання нелінійних фізико-хімічних процесів гідромеханіки в багатокомпонентних середовищах пористої та нанопористої структури» (термін виконання з 01.01.2013 по 31.12.2015 рр., № ДР 0113U004052).

У рамках виконання цих робіт здобувач була виконавцем.

**Мета і задачі дослідження.** Метою досліджень є вдосконалення класичних та побудова нових математичних моделей процесу НДС фільтруючих ґрунтових масивів і основ з урахуванням зміни їх гідрогеологічних умов та дії техногенних факторів; розвинення скінченно-різницевих методів для знаходження чисельних розв'язків відповідних нелінійних крайових задач, розв'язання поставлених крайових задач, проведення чисельних експериментів та здійснення аналізу отриманих результатів. Для досягнення мети були визначені наступні завдання:

1. На основі аналізу літературних джерел вдосконалити класичні та побудувати нові математичні моделі НДС ґрунтових масивів і основ у нелінійній постановці з урахуванням процесів тепло-масоперенесення при фільтрації сольових розчинів у неізотермічних умовах та залежностей коефіцієнтів фільтрації, Ламе та модуля

Юнга від концентрації сольових розчинів та температури, при наявності вільної поверхні, багат шаровості ґрунтового масиву та сформулювати відповідні крайові задачі в одно- та двовимірних випадках.

2. Отримати рівняння рівноваги в формі Ламе для зміщень та граничні умови і умови спряження для зміщень і напружень на основі узагальнення закону Гука при врахуванні впливу тепло-масоперенесення та залежностей коефіцієнтів Ламе, модуля Юнга від концентрації сольових розчинів та температури.

3. Розвинути обчислювальні методи для знаходження чисельних розв'язків відповідних нелінійних крайових задач в одно- та двовимірному випадках, а саме: метод скінченних різниць для чисельного розв'язування крайових задач тепло-масоперенесення для нелінійних рівнянь параболічного типу, що містять першу похідну; чисельний метод конформних відображень складених областей з криволінійними фіксованими та вільними межами у застосуванні його до чисельного розв'язування задач НДС ґрунтових масивів і основ; метод скінченних різниць для чисельного розв'язування системи рівнянь рівноваги в формі Ламе для зміщень ґрунту в розглянутих областях.

4. Розробити обчислювальні алгоритми та створити необхідний програмний комплекс для реалізації відповідних різницевих схем чисельного розв'язання поставлених крайових задач, провести чисельні експерименти та виконати аналіз впливу тепло-масоперенесення при фільтрації сольових розчинів у неізотермічних умовах, наявності вільної поверхні ґрунтових вод та багат шаровості ґрунту на деформаційні процеси ґрунтових масивів.

*Об'єкт дослідження* – деформаційні процеси в ґрунтових середовищах з урахуванням впливу тепло-масоперенесення при фільтрації сольових розчинів.

*Предмет дослідження* – математичні моделі НДС ґрунтових масивів і основ з урахуванням зміни їх гідрогеологічних умов та впливу техногенних факторів (тепло-масоперенесення, фільтрації сольових розчинів, вільної поверхні, наявності водозабірних свердловин).

**Методи дослідження.** Для побудови математичних моделей використано підходи механіки суцільного середовища, зокрема механіки деформівного тіла та

механіки пористого середовища, теорії термопружності, фільтрації та тепло-масоперенесення. Для знаходження чисельних розв'язків поставлених крайових задач використані такі методи: метод скінченних різниць, монотонні різницеві схеми для нелінійних рівнянь параболічного типу, що містять першу похідну, локально-одновимірний метод Самарського, метод чисельних конформних відображень складених областей з криволінійними фіксованими та вільними межами, метод скінченних різниць для чисельного розв'язування системи рівнянь рівноваги в формі Ламе для зміщень ґрунту.

**Наукова новизна отриманих результатів** полягає в наступному:

➤ Вперше побудовано нелінійні математичні моделі НДС ґрунтових масивів і основ з урахуванням тепло-масоперенесення при фільтрації сольових розчинів у неізотермічних умовах та залежностей коефіцієнтів Ламе і модуля Юнга від концентрації сольових розчинів та температури в одно- та двовимірному випадках за наявності водонасиченого ґрунтового масиву, ґрунтового масиву при наявності РГВ, ґрунтового масиву та основи ґрунтової греблі з вільною поверхнею, ґрунтового масиву внаслідок утворення депресійної лунки та багат шарового ґрунтового масиву з різними фізико-хімічними та механічними властивостями його шарів.

➤ Вперше виведено систему рівнянь рівноваги в формі Ламе для зміщень ґрунту на основі узагальнення закону Гука з урахуванням впливу тепло-масоперенесення та залежностей коефіцієнтів Ламе, модуля Юнга від концентрації сольових розчинів та температури.

➤ Вперше отримано граничні умови та умови спряження для зміщень і напружень з урахуванням впливу теплового та хімічного станів ґрунтового середовища та залежностей коефіцієнтів Ламе та модуля Юнга від концентрації сольових розчинів та температури.

➤ Розвинено метод скінченних різниць для чисельного розв'язування крайових задач тепло-масоперенесення для нелінійних рівнянь параболічного типу, що містять першу похідну; чисельний метод конформних відображень складених областей з криволінійними фіксованими та вільними межами для чисельного розв'язування задач НДС ґрунтових масивів і основ; метод скінченних різниць для

чисельного розв'язування системи рівнянь рівноваги в формі Ламе для зміщень ґрунту в розглянутих областях.

**Обґрунтованість та достовірність наукових результатів, висновків і рекомендацій** забезпечені строгими теоретичними викладками при побудові фізично обґрунтованих постановок крайових задач, коректним використанням теоретично обґрунтованих та апробованих методів математичної фізики, чисельних методів скінченних різниць і конформних відображень для знаходження розв'язку задач НДС ґрунтових масивів з урахуванням впливу тепло-масоперенесення за фільтрації сольових розчинів, коректною фізичною інтерпретацією отриманих результатів, узгодженням окремих результатів досліджень з відомими з літературних джерел тестових прикладів, апробаціями на наукових конференціях.

**Практичне значення отриманих результатів** полягає в можливості математичного та комп'ютерного моделювання процесу зміни НДС фільтруючих ґрунтових масивів і основ при врахуванні гідрогеологічних умов та дії техногенних факторів, що є менш трудомістким і дорогим у порівнянні з практичними інженерними експериментами. Результати дисертаційної роботи використано в практиці роботи гідротехнічного цеху при експлуатації ґрунтової греблі ставка-охолоджувача Хмельницької АЕС, у навчальному процесі при виконанні кваліфікаційних, дипломних та магістерських робіт студентами за галуззю знань 0403 «Системні науки та кібернетика» освітньо-кваліфікаційних рівнів бакалавр, спеціаліст та магістр НУВГП МОН України, а також при підготовці та читанні ряду тем з дисциплін «Теорія систем та математичне моделювання», «Математичне і комп'ютерне моделювання природних і техногенних процесів».

**Особистий внесок здобувача.** Усі теоретичні та практичні результати, що становлять зміст дисертаційної роботи, отримані автором самостійно. У працях, опублікованих у співавторстві, здобувачеві належать: в роботах [49 (202); 72] – побудова математичних моделей задач у фізичних  $(x, y)$  та в комплексних  $(\xi, \eta)$  площинах, побудова чисельних конформних відображень областей дослідження на параметричні прямокутники, знаходження чисельного розв'язку поставлених задач, розробка програмного забезпечення для проведення чисельних експериментів та

аналіз отриманих результатів; в роботі [155] – побудова математичної моделі задачі в неізотермічних умовах у фізичній  $(x, y)$  та в комплексній  $(\xi, \eta)$  площинах; в роботах [56, 64, 70] – побудова математичних моделей, знаходження чисельних розв’язків, розробка програмного забезпечення, проведення чисельних експериментів та їх аналіз; в роботі [57] – постановка та побудова математичної моделі задачі, проведення аналізу отриманих результатів; в роботі [63] – побудова математичної моделі задачі, розробка обчислювального алгоритму для знаходження чисельного розв’язку, проведення чисельних експериментів та здійснення їх аналізу.

Проведення теоретичних досліджень, оформлення результатів роботи у вигляді публікацій і доповідей, самостійне узагальнення окремих етапів досліджень та дисертаційної роботи в цілому належать здобувачу.

**Апробація результатів дисертації.** Основні результати дисертації доповідались й обговорювались на міжнародних та вітчизняних конференціях: XII-XIV Міжнародних наукових конференціях імені академіка М. Кравчука (Київ, 2008, 2010, 2012); XV-XVIII та XXI Всеукраїнських наукових конференціях «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики» (Львів, 2008, 2009, 2011, 2012, 2015); Всеукраїнській та Міжнародній наукових конференціях «Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів» (Рівне, 2013, 2015); Міжнародних наукових конференціях «Проблеми прийняття рішень в умовах невизначеності» (PDMU) (Київ-Рівне, 2008; Крим (Новий Світ), 2008; Кам’янець-Подільський, 2009; Ялта, 2010 (XVI), 2011 (XVIII); Східниця, 2011 (XVII), 2015 (XXV); Мукачево, 2012 (XIX); Чеська Республіка, Брно, 2012 (XX)); Міжнародній науково-практичній конференції «Проблеми розвитку вищої школи та економіки в XXI столітті» (Рівне, 2013); науково-практичних конференціях Національного університету водного господарства та природокористування (Рівне, 2008-2015).

В повному обсязі робота доповідалась на розширеному засіданні кафедри прикладної математики НУВГП, на міжкафедральному науковому семінарі факультету прикладної математики та інформатики Львівського національного університету імені Івана Франка, на науковому семінарі кафедри системного аналізу та теорії прийняття рішень Київського національного університету імені Тараса

Шевченка; на науковому семінарі «Математичне моделювання та обчислювальні методи» у Тернопільському національному технічному університеті імені Івана Пулюя.

**Публікації.** За темою дисертації опубліковано 29 наукових праць, у тому числі: 9 статей, з них 1 у зарубіжному науковому виданні, що входить до міжнародних наукометричних баз Scopus, INSPEC, Google Scholar та ін., 8 статей у наукових фахових виданнях з технічних наук, 20 публікацій в матеріалах міжнародних та всеукраїнських конференціях, 1 стаття опублікована без співавторів.

**Структура та обсяг роботи.** Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел із 202 найменувань на 22 сторінках, додатків на 25 сторінках. Обсяг роботи становить 229 сторінок, в тому числі основного тексту 160 сторінок, 97 рисунків та 12 таблиць.

Користуючись нагодою, хочу висловити щиру подяку своєму науковому керівнику доктору технічних наук, професору, завідувачу кафедри інформаційних систем та обчислювальних методів Міжнародного економіко-гуманітарного університету імені академіка Степана Дем'янчука Анатолію Павловичу Власюку за визначення загального плану наукової діяльності, постановки задач, цінні поради і постійну увагу до роботи.

## РОЗДІЛ 1

# ОСНОВНІ МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ҐРУНТОВИХ МАСИВІВ В УМОВАХ ТЕПЛО-МАСОПЕРЕНЕСЕННЯ ПРИ ФІЛЬТРАЦІЇ СОЛЬОВИХ РОЗЧИНІВ

У даному розділі проведено огляд літератури за темою дисертації, розглянуто деформаційні характеристики та основні співвідношення, що описують напружено-деформований стан, а також фізичні та фізико-хімічні процеси, що відбуваються в ґрунтових середовищах. Виведено диференціальні рівняння рівноваги в формі Ламе для зміщень ґрунту з урахуванням тепло-масоперенесення та залежностей коефіцієнтів Ламе від концентрації сольового розчину та температури. Наведено основні диференціальні рівняння та додаткові умови, що описують напружено-деформований стан (НДС) ґрунтових масивів і основ з урахуванням тепло-масоперенесення при фільтрації сольових розчинів (таких як, хлориди ( $\text{NaCl}$ ,  $\text{KCl}$ ,  $\text{CaCl}_2$ ,  $\text{MgCl}_2$ ), сульфати ( $\text{CaSO}_4$ ,  $\text{MgCO}_4$ ,  $\text{Na}_2\text{SO}_4$ ,  $\text{K}_2\text{SO}_4$ ), карбонати ( $\text{CaCO}_3$ ,  $\text{MgCO}_3$ ,  $\text{NaHCO}_3$ ,  $\text{Na}_2\text{SO}_3$ ) та ін.), а також експериментальні дослідження впливу концентрації сольових розчинів та температури на фільтраційні й деформаційні властивості ґрунту.

### **1.1. Напружено-деформований стан ґрунтових середовищ: актуальність питання**

Під час проектування, будівництва та експлуатації гідротехнічних, енергетичних та цивільних споруд значної уваги вимагає дослідження НДС ґрунтового середовища, на який можуть впливати різноманітні фактори. Зміни НДС, спричинені ущільненням ґрунту (консолідацією), фільтрацією підземних вод, масоперенесенням розчинених речовин фільтраційними потоками (вимивання, розчинення порід), фільтраційною консолидацією, нерівномірними температурними режимами, зміною поверхневих навантажень при наповненні або спорожненні

водойм, переміщенням великого об'єму ґрунту під час відриву котловану, тунелів та ін., можуть призвести до трагічних наслідків.

Завдання дослідження зміщень, напружень та деформацій ґрунтових масивів і основ під дією зовнішніх сил і власної ваги, розробка питань їх міцності, стійкості, тиску ґрунтів на огороження, а також на неглибоко розташовані підземні споруди має важливе значення в практиці будівництва. Знаючи НДС ґрунтової основи споруди, можна прогнозувати стійкість, надійність та безпеку експлуатації даного об'єкта.

Фізико-хімічні процеси здійснюють значний вплив на будову земного середовища та на розміщені на ньому споруди, особливо у зв'язку з використанням все більш глибоких горизонтів земної кори для основи великомасштабних споруд і середовища для побудови підземних споруд.

При малій величині побудови, невеликого навантаження на основу ґрунтового середовища та незначних розмірів самих споруд (порядку 1-3 м) питання про фізико-хімічні процеси, що виникають в ґрунтовому середовищі під дією основ та самих споруд так гостро не ставляться, лише в окремих випадках необхідно проводити дослідження НДС основи ґрунтового середовища.

При побудові Нурекської ГЕС (рис. 1.1) в Таджикистані була споруджена кам'яно-земляна гребля висотою 300 м, шириною по основі 1600 м, яка перегороджує глибоку Пулісангінську ущелину, причому утворюється водосховище довжиною 75000 м, яке збирає 11 млрд. м<sup>3</sup> води. Повний об'єм кам'яно-ґрунтової греблі складає 56 млн. м<sup>3</sup>, а тиск на основу – порядку 8 МПа.



Рис. 1.1. Нурекська ГЕС (<http://inspired.com.ua/photography/tallest-dams/>)



Побудова таких високих гребель неодмінно суттєво позначиться на НДС верхніх шарів ґрунтового середовища, а механізм водосховища – на стійкості його бортів.

Детальний статистичний аналіз аварій на греблях, зокрема на ґрунтових греблях, наведено в роботі [141]. Так, в [141] відмічено, що з 11950 ґрунтових гребель різної конструкції зруйнувалось 138, з яких 100 висотою до 30 м і 38 висотою більше 30 м.

При сучасній техніці робіт часто проектується грандіозні по масштабах об'єкти гірської промисловості, не кажучи вже про шахтне будівництво, що потребує значних досліджень та розробки відповідних технічних прогнозів НДС споруди та основи ґрунтового середовища. Так, при розробці Білозерського залізорудного родовища (м. Запоріжжя, Україна) значне зниження напорів підземних вод призвело до потужного стискання піщано-глинистих товщ, що визвало недопустимі деформації.

Роботи, пов'язані з відкачкою підземних вод, нафти чи газу викликають значні осідання великих ділянок земної поверхні, що можна заздалегідь і з достатньою точністю передбачити, використовуючи прогнозування НДС ґрунтового середовища. Так, відомі випадки значного пониження депресійної лунки при відкачці підземних вод до 100 м і більше, а в кутових басейнах – навіть до 1000 м.

Пониження рівня підземних вод викликає значне осідання поверхні на великих площах, які іноді займають сотні квадратних кілометрів.

Наприклад, за спостереженням Інституту інженерних досліджень Мексики, з 1900 по 1969р. територія м. Мехіко осіла на 9 м. Причому в деяких місцях осідання було нерівномірне, що викликало потужні деформації капітальних споруд – Театрального центра, Музею-мавзолею та ін.

В Японії, де використовуються підземні артезіанські води, наприклад, в м. Токіо осідання за 50 років досягло 3,3 м, причому в окремих місцях швидкість осідання дорівнювала 18 см за рік.

На о. Хонсю в м. Ніагата внаслідок відкачки газу спостерігалось осідання поверхні до 50 см за рік, і навіть після закачування у свердловини води осідання зменшилось лише до 25 см за рік.

Особливо небезпечним є осідання поверхні міст, що розміщені у прибережно-морській зоні. Наприклад, у м. Осака вже на кінець 80-х років ХХ століття було збудовано 200 км захисних дамб, 550 різноманітних споруд, що запобігають повені, близько 100 насосних станцій. Щоб ліквідувати несприятливі наслідки опускання поверхні, у деякі свердловини почали закачувати морську воду.

В результаті зміни гідрогеологічних умов відбувається розвиток нерівномірних деформацій ґрунтових основ. Це може стати причиною виникнення тріщин в об'єктах, що побудовані на таких ґрунтах (рис. 1.2).



Рис. 1.2. Вигляд стіни будинку №19 по вул. Стадіонна в м. Києві ([http://n-auditor.com.ua/ru/component/na\\_archive/812?view=material](http://n-auditor.com.ua/ru/component/na_archive/812?view=material))

Для охолодження устаткування Хмельницької АЕС (м. Нетішин, Україна) використовується водосховище електростанції (рис. 1.3), яке має плесо водойми майже у 22 км<sup>2</sup> і оптимальний об'єм – 120 млн. м<sup>3</sup> води.

Зміни температурних режимів, зниження або підвищення рівня води в результаті закачування води у водосховище, значного випадання опадів і танення снігу, можуть впливати на стійкість укосу ґрунтової греблі ставка-охолоджувача.



Рис. 1.3. Ставок-охолоджувач Хмельницької АЕС  
(<http://perspekt.org.ua/news/ribaliti-na-vodosxovishh>)

Практичний вихід і конкретні приклади численних аварій гідротехнічних об'єктів, споруд цивільного будівництва в результаті підтоплення територій, або ж навпаки – осушенні, зміні гідрогеологічних умов внаслідок техногенного впливу людської діяльності підштовхнули до дослідження деформаційних процесів ґрунтових основ, на яких ці об'єкти та споруди побудовані.

## **1.2. Огляд літератури з математичного моделювання деформаційних процесів у ґрунтах**

Для побудови математичних моделей НДС ґрунтових масивів і основ, що розглядаються в дисертаційній роботі, використано підходи механіки суцільного середовища, зокрема механіки деформівного тіла, механіки пористого середовища та теорії термопружності. Термопружність є розділом теорії пружності, де вивчаються залежності між напруженнями, деформаціями і температурою, а також розробляються математичні методи розрахунку температурних напружень і деформацій.

Основи загальної теорії пружності належать Коші (A. Cauchy), Нав'є (C. Navier) та Пуассону (S.-D. Poisson). Зокрема, датою виникнення математичної теорії пружності вважають 1821 р., коли в опублікованій роботі Нав'є були сформульовані основні рівняння. Коші в своїх працях ввів поняття деформації та напруження, спростивши вивід загальних рівнянь. Вперше рівняння для визначення

термопружного стану тіла в квазістатичній постановці вивів Дж. Дюгамеля (J. Duhamel). Пізніше ці результати отримав Ф.Е. Нейман (F. E. Neumann).

Великий внесок у подальший розвиток теорій пружності та термопружності в твердих тілах зробили такі вчені, як Ламе (G. Lamé), Сен-Венан (A. Saint-Venant), Грін (G. Green), Максвелл (J. Maxwell), Треффц (E. Trefftz), М. В. Остроградський, W. Nowacki, R. W. Southwell, Б. Боли, Дж. Уейнер, В. М. Вигак, М. В. Остроградський, Ф. С. Ясинський, С. П. Тимошенко, Г. В. Колосов, Л. С. Лейбензон, П. Ф. Папкович, Я. С. Підстригач, Р. М. Швець, А. Р. Гачкевич, Л. В. Чернявська, Я. Й. Бурак, Ю. Д. Зозуляк, Б. В. Гера, В. Й. Самуль, В. В. Божидарник, Я. Г. Савула, О. Д. Коваленко, П. В. Ясній, А. О. Сяський, Р. М. Кушнір, Г. Т. Сулим, В. А. Кривень, Б. Г. Шелестовський та ін. [10, 11, 25, 26, 33, 87, 90, 100, 116, 124–126, 134, 143, 144, 146, 165, 169, 170, 186, 191, 196, 197, 199].

В енциклопедії [179] зібрано фундаментальні та новітні матеріали, що стосуються досліджень в області термічних напружень, а також теорії пружності, теплопровідності та ін. в різних середовищах, зокрема в області суцільного середовища.

Дослідження деформаційних процесів багат шарових основ під впливом температури проводились в роботах як українських (Є. В. Алтухов [2], Б. В. Процюк [130], С. Г. Блажевський [7] та ін.), так і іноземних вчених (Chao Ching-Kong, V. Gao, R. Bhowmick, Das Vikash, C. H. Ranjan Hsueh [172, 174, 183] та ін.).

Розв'язок основної граничної задачі теорії термопружності для багат шарової основи з будь-якою скінченною кількістю шарів у двовимірному та тривимірному випадках отримано авторами у публікаціях [27, 28]. Розв'язок мішаної граничної задачі для термопружної багат шарової основи у випадку плоскої деформації розглянуто у роботі [147].

Вплив гідрогеологічних умов на деформаційні процеси ґрунтових середовищ досліджено в роботах В. А. Флоріна, І. В. Сергієнка, В. В. Скопецького, В. С. Дейнеки, П. Л. Іванова, Ю. К. Зарецького, В. М. Ломбардо, Ю. І. Калюха, О. М. Трофимчука, З. Г. Тер-Мартиросяна, Т. Hueckel, Т. W. Lambe, R. V. Whitman,

А. П. Власюка, М. Т. Кузла, І. А. Філатової, Є. І. Катерини [42, 74, 75, 84–86, 92–94, 136, 137, 145, 148-152, 156, 157, 160, 184, 187] та ін.

В роботах В. А. Флоріна [156, 157] було досліджено НДС ґрунтових основ. Зокрема, він розробив загальний метод визначення контактних напружень по підшві балок і смуг кінцевої довжини та змінної жорсткості, що спираються на пружну основу. Пізніше ним був опублікований метод визначення просідання споруд з урахуванням бічних деформацій ґрунту. Особливу увагу В. А. Флорін приділяв питанням оцінки областей застосування різних розрахункових моделей. Зокрема, ним був обґрунтований критерій застосовності принципів теорії пружності до ґрунтів. Також одним із перших, хто застосував рівняння НДС до ґрунтових середовищ був М. А. Biot [173].

Найбільш широке застосування в сучасній механіці ґрунтів отримала модель суцільного середовища, згідно якої не розглядається поведінка окремої частинки, а приймається, що складові частини ґрунту (мінеральні частки, вода, повітря) заповнюють весь простір безперервно. Зокрема, Н. А. Цитович [159] зазначає, що поглиблення знань в області механіки ґрунтових середовищ відбулось завдяки використанню досягнень механіки деформованих суцільних середовищ, перш за все, з урахуванням теорій пружного, пластичного та деформованого середовищ.

В роботах Ю. К. Зарецького та В. М. Ломбардо [84, 85] на основі експериментальних даних деформаційних властивостей ґрунтів у складному напруженому стані розроблена математична модель на базі теорії пластичного зміцнення, подано комплексну методика розрахунку ґрунтових гребель при статичних та динамічних навантаженнях, а також порівняння натурних і отриманих розрахункових значень.

О. М. Трофимчуком [148-152] та його учнями розроблені нові моделі динаміки насичених рідиною пористопружних середовищ та методика розв'язання задач сейсмостійкості споруд, оптимізація аналізу забруднень поверхневих вод та ґрунтів; досліджено характеристики НДС протизсувних споруд, які значною мірою залежать як від несприятливого збігу техногенних і природних чинників, так і від регіональних особливостей зсувної небезпеки території. Однак, їхні дослідження в

області деформаційних процесів ґрунтових середовищ розглядаються у в'язкопластичній постановці.

В ранніх роботах Т. Нюескел [184] досліджено механічну поведінку ґрунтів, зокрема увагу приділено теорії термо-пластичності глин.

Питання ймовірнісної надійності експлуатації гідротехнічних об'єктів розглянуті в роботах Д. В. Стефанишина [141, 142], Ц. Є. Мірцхулави [111], В. А. Гурина [80], а також міцності ґрунту і стійкості укосів у роботах J. M. Duncan [178]. Зокрема, в [178] досліджено НДС ґрунту і його використання при побудові схилів, враховано особливості високопластичних глин та їх сейсмічну стійкість. Побудовано відповідні математичні моделі поставлених задач та знайдено їх чисельний розв'язок методом скінченних елементів, що дало можливість обрахувати фактор руйнування схилів.

В статті [189] проаналізовано вплив малих змін температури в твердому пористому середовищі з низькою проникністю, в якому природні пори заповнені водою під високим тиском. Показано, як теоретично за допомогою математичного моделювання, так і експериментально, вплив високих тисків і малої зміни температури на появу гідравлічних розривів в таких середовищах.

Liu J. та ін. [188] в лабораторних умовах дослідили зразки піщаного ґрунту, зокрема його НДС. Побудовано трьохвимірну математичну модель досліджуваного процесу на основі рівнянь Нав'є-Стокса та рівняння еластичності. Чисельний розв'язок знайдено методом скінченних елементів на базі програмних платформ MIMICS і ICEM. Показано добру узгодженість чисельного моделювання з експериментальними даними, що говорить про успішну валідацію моделі.

В роботах І. В. Сергієнка, В. В. Скопецького та В. С. Дейнеки [136, 137] досліджено НДС ґрунтових основ гідротехнічних споруд при наявності фільтрації ґрунтових вод та без неї, причому розглядалась фільтрація чистої води.

В роботі А. П. Власюка та Є. І. Катерини [42] вперше розв'язано одновимірну задачу НДС нескінченного шару ґрунту з урахуванням впливу масоперенесення при фільтрації сольових розчинів.

Математичне моделювання НДС ґрунтових масивів при наявності перенесення солей фільтраційними потоками в ізотермічних умовах та при врахуванні рівня ґрунтових вод проведено М. Т. Кузлом та І. А. Філатовою [75, 91–94].

Дослідженнями процесів масоперенесення розчинених у фільтраційному потоці речовин та тепло-масоперенесення в пористих середовищах займалися М. М. Веригін, В. І. Лаврик, І. І. Ляшко, С. І. Ляшко, С. М. Нумеров, О. М. Патрашев, Б. С. Шержуков, В. М. Ніколаєвський, Ф. М. Бочевєр, В. В. Скопецький, І. В. Сергієнко, В. С. Дейнека, В. М. Булавацький, В. О. Богаєнко, Ю. Г. Кривонос, Я. Г. Савула, Г. А. Шинкаренко, О. Ю. Чернуха, Я. Й. Бурак??, Є. Я. Чапля, J. Fraissard, М. Р. Петрик, Д. М. Михалик, М. М. Біляєв, І. В. Бейко, В. В. Акіменко, О. В. Ликов, Ю. А. Михайлов, М. І. Нікитенко, Л. І. Демченко, П. Я. Полубаринова-Кочина, Г. Є. Мистецький, П. І. Ковальчук, А. А. Глущенко, О. Я. Олійник, А. В. Гладкий, В. Л. Поляков, А. П. Власюк, А. Я. Бомба, П. М. Мартинюк, О. М. Степанченко, О. П. Остапчук, J. Bear, K. Eriksson, D. A. Nield, M. Shirato, D. Leclerc, J. Kärger, W. C. Conner [1, 3–6, 12–14, 16, 17–25, 31, 36–39, 41–46, 48–73, 77, 79, 81, 82, 88, 95–99, 102–108, 110, 112–115, 117, 118, 120–123, 127, 128, 136–140, 161–163, 166, 168, 171, 175–177, 180, 182, 185, 190, 192–195, 198] та ін.

Зокрема, в роботах В. В. Скопецького, В. М. Булавацького, Ю. Г. Кривоноса, М. Р. Петрика, А. П. Власюка, П. М. Мартинюка та ін. досліджено вплив фільтрації сольових розчинів на процеси фільтраційної консолідації ґрунтів [13, 17–24, 38, 45, 82, 83, 104, 108, 109, 121–123, 136–139, 192–195].

Моделювання і дослідження масоперенесення в неоднорідних і нанопористих середовищах та ідентифікації параметрів в середовищах частинок нанопористої структури розглянуті в роботах [37, 82, 121–123, 138, 139, 192–195] та ін.

Однак, у всіх вищезгаданих роботах не враховано вплив тепло-масоперенесення при фільтрації сольових розчинів у неізотермічних умовах на деформаційні процеси ґрунтових середовищ.

### 1.3. Удосконалені рівняння напружено-деформованого стану ґрунтового масиву з урахуванням процесів тепло-масоперенесення

#### 1.3.1. Деформаційні характеристики ґрунтових середовищ

Деформаційні характеристики ґрунтового середовища – фізико-механічні властивості та їх залежність від будови і фізичного стану ґрунту, НДС, умови міцності та стійкості ґрунтових масивів, їх взаємодія з будівлями та спорудами, загальна стисливість ґрунтів, їх структурно-фазова деформованість, контактна опірність зрушення – вивчаються механікою ґрунтів. Результати, отримані в цій науці, використовуються при проектуванні основ і фундаментів будівель, промислових і гідротехнічних споруд, в дорожньому та аеродромному будівництві, пристроях підземних комунікацій, прокладання трубопроводів, а також для прогнозування деформацій та стійкості укосів, підпірних стін та ін.

Оскільки ґрунт складається з твердих частинок та пор, які частково або повністю заповнені водою, теоретично при його стисненні повинні зменшуватися обсяги всіх трьох компонентів – твердих часток, повітря (газу) і води.

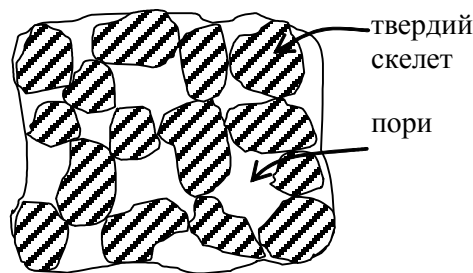


Рис. 1.4. Фрагмент пористого середовища

Оскільки напруження стиску, що виникають зазвичай у основах споруд, порівняно невеликі, об'ємні деформації твердих часток, що складаються з таких матеріалів, як кварц і польовий шпат та ін., мізерно малі і не враховуються. Отже, зміна обсягу ґрунту при стисненні відбувається через зміни об'єму пор.

Внаслідок пружних деформацій скелету (частинок) ґрунту, тонких плівок води, розташованих між частинками, пружного стиснення бульбашок повітря, а також стиснення порової води, що містить розчинене повітря, можуть відбуватися пружні



зміни обсягу ґрунту. Такі деформації ґрунту, як правило, у багато разів менші залишкових. Останні розвиваються, коли виникаючі в ґрунті напруги перевищують його структурну міцність. У кінцевому рахунку залишкові деформації призводять до ущільнення (зменшення пористості) ґрунту.

Деформації ущільнення розвиваються в результаті зміщень або зсувів окремих частинок ґрунту відносно один одного, а також при руйнуванні часток, особливо в точках їх контактів. Деформації ущільнення пілувато-глинистих ґрунтів найчастіше протікають повільно в часі. Це пояснюється насамперед тим, що при ущільненні з пор водонасиченого ґрунту повинна бути видавлена вода. Без цього ґрунт ущільнюватися не може, оскільки вода практично не стискається. Процес видавлювання води з водонасичених пілувато-глинистих ґрунтів внаслідок їх малої водопроникності продовжується тривалий час. Повільний розвиток деформацій як ущільнення, так і зміщень обумовлюється, крім того, повзучістю зв'язаної води, навколишніх твердих часток, і повзучістю самого скелету ґрунту.

Всі механічні властивості ґрунтів зазвичай визначаються дослідним шляхом (дослідження в польових і лабораторних умовах).

Під дією переданих спорудою вертикальних або похилих сил в масиві ґрунту виникають нормальні і дотичні напруження, що призводять до його деформації. Крім того, ґрунт відчуває напруги від власної ваги. Деформації від власної ваги ґрунту завершуються, як правило, в процесі діагенезу ґрунтів. Напруги, що виникають від переданих спорудою зусиль, призводять до додаткової деформації ґрунтів. Найбільш часто виникають деформації ущільнення ґрунтів під дією нормальних напружень, рідше – деформації зміщень ґрунтів, викликані дотичними напруженнями.

Деформування суцільних тіл під дією дотичних напружень характеризується модулем зсуву при пружних деформаціях, поверхнею текучості при пластичних деформаціях і коефіцієнтом в'язкості, що обумовлює в'язка течія. У ґрунтах деформації зміщень розглядають порівняно рідко, зазвичай цікавляться опором їх зміщення при гранично напруженому стані. Цей опір залежить від кута

внутрішнього тертя і питомого зчеплення ґрунтів, що визначаються відповідно до закону опору ґрунтів зрушенню.

Як деформованість ґрунтів у часі, так і їх опір зсуву залежать від частки напруг, переданих на скелет ґрунту і на воду, яка знаходиться в порах. Порова вода під дією виникаючого в ній тиску поступово віджимається і передає його на скелет ґрунту, тому деформованість ґрунтів і їх опір зсуву залежать від фільтраційних властивостей ґрунту.

Ґрунт є відкритою термодинамічною системою по відношенню до процесів масоперенесення (води або мінеральних частинок). Явище масоперенесення в формі руху порової води враховується в теорії фільтраційної консолідації ґрунтів (видавлювання води з пор при зменшенні їх об'єму під дією навантаження). Явище масоперенесення в формі зміщення мінеральних часток ґрунту враховується при вивченні суфозійних процесів в ґрунтах (вимивання з ґрунту компонентів скелету під впливом фільтраційного потоку). Мінеральні частинки специфічних ґрунтів, а також зв'язки між ними можуть складатися з розчинних солей. В цьому випадку міграція порової води може призводити до хімічної суфозії (розчинення і перенесення речовини в розчиненому вигляді). Присутність в поровій воді розчинів солей, кислот і лугів робить її агресивною по відношенню до конструкцій фундаментів.

В залежності від температури і тиску компоненти, що становлять ґрунт, можуть зазнавати процесів фазових переходів. Наприклад, при низьких температурах ґрунтова вода може частково переходити в лід (тверда фаза). При дослідженні зразка ґрунту з великої глибини відбувається його пружне розширення у зв'язку із зменшенням напружень на поверхні виділеного обсягу до нуля. Розширення ґрунту може привести до негативного (порівняно з атмосферним) значенням порового тиску. В результаті цього можуть протікати процеси газовиділення із порової води і перетворення частини порової води в пару (пароутворення). Навпаки, при підвищенні порового тиску можуть спостерігатися процеси газорозподілу і конденсації пари. Дані процеси істотно залежать від температури і враховуються при розрахунках НДС ґрунтових основ споруд.

### 1.3.2. Основи теорії напружено-деформованого стану ґрунтових масивів

В рамках дисертаційної роботи розглядається лінійна теорія пружності та термопружності. Така лінійна залежність можлива, оскільки для ґрунтових масивів інтенсивність внутрішніх об'ємних сил, як правило, не перевищує початковий критичний тиск на ґрунт.

При розв'язанні задач пружності та термопружності припускають наступне:

1. Речовина ідеально пружного тіла безперервно розподілена по його об'єму. Тобто, якщо з тіла виділити нескінченно малий елемент, то вважається, що цей елемент має ті самі фізичні властивості, що й ідеально пружне тіло.

2. Ідеально пружне тіло є однорідним. Це означає, що в усіх точках тіла при одних і тих самих напруженнях виникають однакові деформації.

3. Ідеально пружне тіло ізотропне, тобто пружні властивості в кожній точці однакові у всіх напрямках.

4. При певній температурі та за відсутності зовнішніх сил пружне тіло має певну форму і об'єм. Цей стан називається природним, тобто припускається, що у момент навантаження тіла деформації і напруження в будь-якій точці тіла дорівнюють нулю.

5. Відносні лінійні і кутові деформації малі порівняно з одиницею.

6. Природний стан ідеально пружного тіла при даній температурі є стійкою формою рівноваги при цій температурі.

Всі сили, які діють на тіло можуть бути поверхневими або об'ємними. Поверхневі сили виникають в результаті контакту тіл. Вони розподілені по поверхні тіла, наприклад, тиск води на греблю, тиск фундаменту споруди на ґрунт та ін. Поверхневі сили характеризуються інтенсивністю, тобто значеннями, які припадають на одиницю поверхні. Якщо розміри поверхні, на яку діє сила, малі порівняно з розмірами тіла, то таку силу називають зосередженою. Об'ємні сили діють у будь-якій точці тіла. До них належать власна маса тіла, сила інерції, інтенсивність внутрішніх сил (напруга).

Основними кількісними характеристиками НДС є зміщення, напруження та деформації.

Напруженням називається інтенсивність внутрішніх сил. Для того, щоб охарактеризувати напружений стан в деякій точці  $A$ , виділимо навколо неї елементарний паралелепіпед з ребрами  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ , паралельними відповідним координатним осям. На його гранях діють повні напруження, які можна розкласти на нормальні  $\sigma$  та дотичні  $\tau$ . Кожне дотичне напруження можна розкласти на дві складові, паралельні відповідним координатним осям.

В позначенні нормальних напружень індекс вказує на напрямок нормалі до площини, в якій вони діють. В позначенні дотичних напружень перший індекс вказує на напрямок нормалі до площини, другий – на напрямок самого напруження.

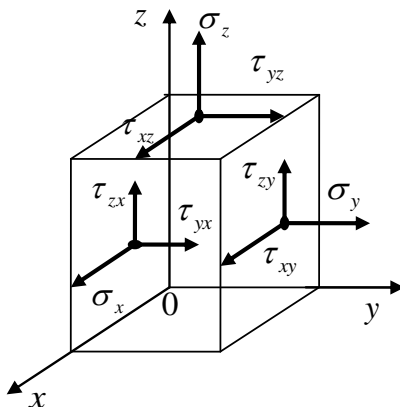


Рис. 1.5. Повні напруження на гранях паралелепіпеда, що характеризують напружений стан в деякій точці

Сукупність напружень, що діють на всіх гранях паралелепіпеда, визначає напружений стан в точці (рис. 1.5). Таким чином, напружений стан у довільній точці характеризується дев'ятьма напруженнями. Їх записують у таблицю (матрицю), на головній діагоналі якої розташовані нормальні напруження [100, 109, 134]

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix},$$

де  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$  – нормальні напруження,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{yx}$ ,  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{zx}$ ,  $\tau_{yz}$ ,  $\tau_{zy}$  – дотичні напруження.

Під дією прикладених сил, при зміні теплового стану або інших впливів змінюються відстані між частинками тіла (в нашому випадку – ґрунту). Це явище складає деформацію даного тіла.

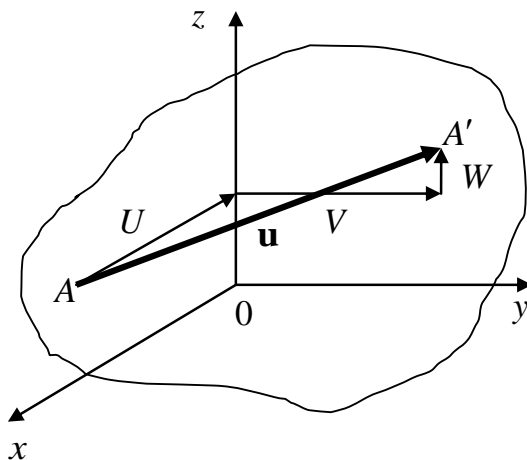


Рис. 1.6. Зміщення точки при деформуванні тіла

Зміщення точки визначається вектором  $\mathbf{u}$ , початок якого знаходиться в початковому положенні деякої точки  $A$ , до деформування тіла, а кінець – в точці  $A'$ . Вектор зміщень можна розкласти на складові компоненти  $U$ ,  $V$ ,  $W$ , проектуючи його на систему координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$  відповідно (рис. 1.6)

$$\mathbf{u} = U \cdot \mathbf{i} + V \cdot \mathbf{j} + W \cdot \mathbf{k},$$

де  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  – орти в напрямку осей  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  відповідно.

Компоненти вектора зміщень являються неперервними функціями координат

$$U = U(\mathbf{X}), \quad V = V(\mathbf{X}), \quad W = W(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X} \in \Omega.$$

При розв'язанні задач теорії пружності використовують теорему про єдиність розв'язку: якщо задані зовнішні поверхневі та об'ємні сили перебувають в рівновазі, то їм відповідає одна єдина система напружень і зміщень.

Різниця в зміщеннях точок тіла призводить до зміни розмірів його елементів. Різниця між розміром елемента тіла до деформації  $ds$  і після деформації  $ds'$  визначає абсолютну лінійну деформацію елемента  $\Delta ds = ds' - ds$ .

Відношення абсолютної деформації елемента до його розміру визначає відносну деформацію елемента. В лінійній теорії пружності відношення абсолютної

деформації береться до початкового розміру елемента  $\varepsilon_{ds} = \frac{\Delta ds}{ds}$ . Для визначення

відносної деформації деформованого тіла в точці знаходять границю  $\varepsilon_s = \lim_{ds \rightarrow 0} \frac{\Delta ds}{ds}$ .

При розгляді прямокутного паралелепіпеда (рис. 1.7, а) визначають абсолютні та відносні деформації елементів, паралельних координатним осям

$$\varepsilon_x = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{\Delta dx}{dx}, \quad \varepsilon_y = \lim_{dy \rightarrow 0} \frac{\Delta dy}{dy}, \quad \varepsilon_z = \lim_{dz \rightarrow 0} \frac{\Delta dz}{dz},$$

або в зміщеннях [100]  $\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x}$ ,  $\varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y}$ ,  $\varepsilon_z = \frac{\partial W}{\partial z}$ .

Окрім лінійних деформацій, розглядають кутові деформації (деформації зсуву), які визначаються зміною прямого кута двох взаємно перпендикулярних елементів тіла при деформуванні. Для прямокутного паралелепіпеда визначають кутові деформації  $\gamma_{xy}$ ,  $\gamma_{xz}$ ,  $\gamma_{yz}$  в трьох координатних площинах (рис. 1.7, б).

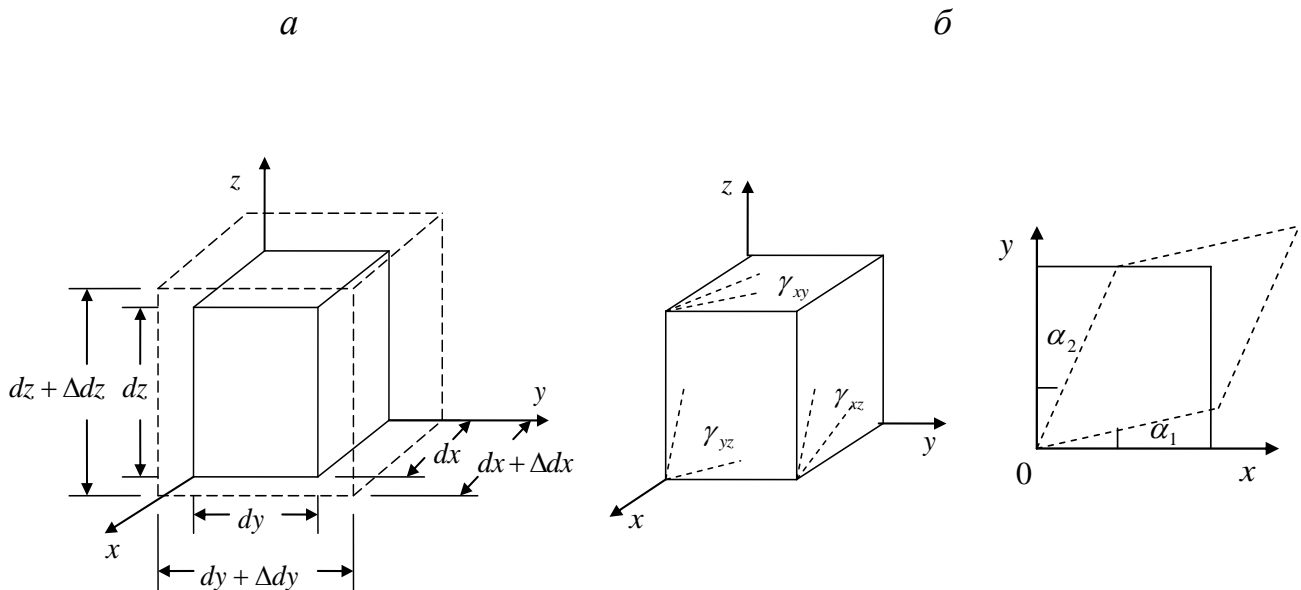


Рис. 1.7. Лінійні деформації (а) та деформації зсуву (б) прямокутного паралелепіпеда

Для кутових деформацій справедливі співвідношення

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Тобто, кутова деформація дорівнює сумі частинних похідних складових зміщення в цій площині по змінних у перпендикулярних напрямках.

Об'ємна деформація дорівнює сумі лінійних деформацій по трьох взаємно перпендикулярних напрямках

$$\varepsilon_{\theta} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z.$$

Закон про залежність між зовнішніми силами і змінами форми тіла, що ними зумовлені, був встановлений ще в 1676 р. англійським ученим Робертом Гуком і в загальному має вигляд

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E},$$

де  $E$  – модуль Юнга (модуль пружності).

На підставі наявних дослідів для ідеально пружного тіла закон Гука беруть в узагальненому вигляді (узагальнений закон Гука в прямій формі). Допускають, що в кожній точці деформованого тіла складові напруження є лінійними функціями складових деформацій, тобто

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)), \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy},$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)), \quad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{G}\tau_{yz},$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)), \quad \varepsilon_{zx} = \frac{1}{G}\tau_{zx},$$

де  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона;  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$  – модуль зсуву.

Виберемо деяку площину з нормаллю  $\mathbf{n}$  (рис. 1.8). Тоді результуючий вектор напруження  $\mathbf{P}$  в точці  $A$  визначається через значення компонент тензора напружень

$$\begin{cases} P_{nx} = \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z, \\ P_{ny} = \tau_{yx} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{yz} n_z, \\ P_{nz} = \tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y + \sigma_z n_z, \end{cases}$$

де  $n_x = \cos(\mathbf{n}, x)$ ,  $n_y = \cos(\mathbf{n}, y)$ ,  $n_z = \cos(\mathbf{n}, z)$  – напрямні косинуси вектора  $\mathbf{n}$ .

Проектуючи вектор  $\mathbf{P}$  на нормаль  $\mathbf{n}$  і вибрану площину, отримаємо нормальні та дотичні напруження вигляду

$$\sigma_n = \sigma_x n_x^2 + \sigma_y n_y^2 + \sigma_z n_z^2 + 2\tau_{xy} n_x n_y + 2\tau_{yz} n_y n_z + 2\tau_{xz} n_x n_z, \quad (1.1)$$

$$\tau_n = \sqrt{P_{nx}^2 + P_{ny}^2 + P_{nz}^2 - \sigma_n^2}.$$

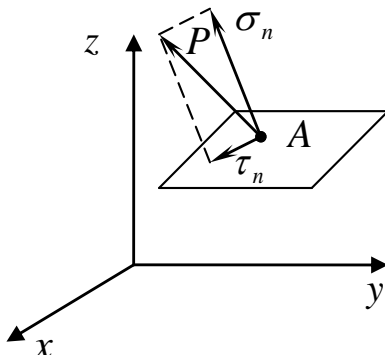


Рис. 1.8. Деяка площина з нормаллю  $\mathbf{n}$

Напруження  $\sigma_n$  і  $\tau_n$  змінюються зі зміною орієнтації площини.

### 1.3.3. Основні диференціальні рівняння напружено-деформованого стану ґрунтових масивів з урахуванням тепло-масоперенесення при фільтрації сольових розчинів

При зміні поверхневих чи об'ємних сил, а також теплового стану будь-яке тіло деформується. Якщо після припинення дії прикладених сил тіло набуває початкової форми, то його деформацію називають пружною, а тіло – пружним. Це явище відбувається лише за умови, що напруження не перевищують критичних значень, що неоднакові для різних матеріалів.

Різні матеріали мають, як правило, кристалічну структуру, а ґрунтові масиви складаються із частинок ґрунту та порового простору, заповненого водою і повітрям. Оскільки частинки ґрунту та розмір пор досить малі по відношенню до характерних розмірів ґрунтових масивів, які досліджуються, то в рамках теорії пружності ґрунтовий масив розглядається як суцільне середовище.

Основні рівняння, які описують напружено-деформований стан тіла (в нашому випадку – ґрунтового середовища) мають наступний вигляд:



1. Статичні рівняння. Як відомо [134], диференціальні рівняння рівноваги (рівняння Нав'є-Коші) мають вигляд

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0, \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y = 0, \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0, \end{cases} \quad (1.2)$$

де  $\mathbf{X} \in \Omega$ ;  $X, Y, Z$  – масові сили.

2. Співвідношення Коші, що виражають залежності складових нормальних та дотичних деформацій від складових зміщень (геометричні рівняння)

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y}, \varepsilon_z = \frac{\partial W}{\partial z}, \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right), \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right), \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right), \mathbf{X} \in \Omega. \quad (1.3)$$

3. В межах збереження пружності ґрунту компоненти тензора напружень, тензора деформації і температура пов'язані наступними лінійними співвідношеннями, які називаються фізичними рівняннями термопружності або узагальненим законом Гука в зворотній формі [11, 100]:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \lambda \varepsilon_\theta + 2\mu \varepsilon_x - (3\lambda + 2\mu) \alpha_T \bar{T}, \\ \sigma_y &= \lambda \varepsilon_\theta + 2\mu \varepsilon_y - (3\lambda + 2\mu) \alpha_T \bar{T}, \\ \sigma_z &= \lambda \varepsilon_\theta + 2\mu \varepsilon_z - (3\lambda + 2\mu) \alpha_T \bar{T}, \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\tau_{xy} = 2\mu \cdot \varepsilon_{xy}, \tau_{yz} = 2\mu \cdot \varepsilon_{yz}, \tau_{xz} = 2\mu \cdot \varepsilon_{xz},$$

де  $\mathbf{X} \in \Omega$ ;  $\varepsilon_\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ ;  $\lambda$  та  $\mu$  – коефіцієнти Ламе, які визначаються як

$$\lambda = \frac{2G\nu}{1-2\nu} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)},$$

$\bar{T} = T(\mathbf{X}, t) - T(\mathbf{X}, 0)$  – різниця між температурою в даний момент часу та температурою ненапруженого стану в заданій точці;  $\alpha_T$  – середній коефіцієнт лінійного теплового розширення в інтервалі температур  $(T_0, T)$ , що визначається виразом [87]

$$\alpha_T = \frac{1}{\bar{T}} \int_0^{\bar{T}} \alpha d\bar{T},$$

$\alpha = \frac{\Delta l}{l\bar{T}}$  – коефіцієнт лінійного розширення,  $\Delta l$  – зміна лінійних розмірів досліджуваного зразка.

При врахуванні змінних коефіцієнтів Ламе  $\lambda = \lambda(c, T)$  та  $\mu = \mu(c, T)$  узагальнений закон Гука матиме вигляд

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \lambda(c, T)\varepsilon_\theta + 2\mu(c, T)\varepsilon_x - (3\lambda(c, T) + 2\mu(c, T))\alpha_T\bar{T}, \\ \sigma_y &= \lambda(c, T)\varepsilon_\theta + 2\mu(c, T)\varepsilon_y - (3\lambda(c, T) + 2\mu(c, T))\alpha_T\bar{T}, \\ \sigma_z &= \lambda(c, T)\varepsilon_\theta + 2\mu(c, T)\varepsilon_z - (3\lambda(c, T) + 2\mu(c, T))\alpha_T\bar{T}, \\ \tau_{xy} &= 2\mu(c, T) \cdot \varepsilon_{xy}, \quad \tau_{yz} = 2\mu(c, T) \cdot \varepsilon_{yz}, \quad \tau_{xz} = 2\mu(c, T) \cdot \varepsilon_{xz}, \quad \mathbf{X} \in \Omega.\end{aligned}\tag{1.5}$$

При цьому в теорії пружності виконується закон парності дотичних напружень

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz},$$

який стверджує: на двох взаємно перпендикулярних площинах складові дотичних напружень, перпендикулярні лінії перетину цих площин, рівні між собою. В результаті даного закону замість дев'яти невідомих складових напружень потрібно знайти лише шість.

Таким чином, для оцінки НДС ґрунтового середовища, необхідно знайти 15 невідомих функцій: шість складових напружень  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ , шість складових деформацій  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{xz}, \varepsilon_{yz}$  та три складові зміщення  $U, V, W$ .

Розв'яжемо задачу НДС в зміщеннях. Для цього використаємо узагальнений закон Гука вигляду (1.5) та співвідношення Коші (1.3)

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \lambda\varepsilon_\theta + 2\mu\varepsilon_x - (3\lambda + 2\mu)\alpha_T T = \lambda\varepsilon_\theta + 2\mu \frac{\partial U}{\partial x} - (3\lambda + 2\mu)\alpha_T T, \\ \tau_{xy} &= \mu \cdot \gamma_{xy} = \mu \left( \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right), \quad \tau_{xz} = \mu \cdot \gamma_{xz} = \mu \left( \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right).\end{aligned}$$

Диференціюючи їх відповідно по  $x, y$  і  $z$ , отримаємо

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = \lambda \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - (3\lambda + 2\mu)\alpha_T \frac{\partial T}{\partial x}, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = \mu \left( \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \right), \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \mu \left( \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z} \right).$$

Тоді перше рівняння рівноваги можна записати у вигляді

$$\lambda \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) + \mu \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z} \right) - (3\lambda + 2\mu)\alpha_T \frac{\partial T}{\partial x} + X = 0.$$

Тут:

$$\mu \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z} \right) = \mu \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) = \mu \frac{\partial}{\partial x} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) = \mu \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \nabla^2 U = \Delta U,$$

де  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  – оператор Лапласа.

Остаточно перше рівняння рівноваги матиме вигляд

$$\mu \Delta U + (\lambda + \mu) \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial x} - (3\lambda + 2\mu)\alpha_T \frac{\partial T}{\partial x} + X = 0,$$

$$\text{або } \mu \Delta U + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) - (3\lambda + 2\mu)\alpha_T \frac{\partial T}{\partial x} + X = 0.$$

Аналогічно можна перетворити решту рівнянь рівноваги.

Таким чином, рівняння рівноваги в зміщеннях з врахуванням термопружності запишуться наступним чином:

$$\begin{cases} \mu \Delta U + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) - (3\lambda + 2\mu)\alpha_T \frac{\partial T}{\partial x} + X = 0, \\ \mu \Delta V + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) - (3\lambda + 2\mu)\alpha_T \frac{\partial T}{\partial y} + Y = 0, \\ \mu \Delta W + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) - (3\lambda + 2\mu)\alpha_T \frac{\partial T}{\partial z} + Z = 0 \end{cases} \quad (1.6)$$

Рівняння (1.6) називаються рівняннями Ламе. Вони містять в собі всі механічні, геометричні та фізичні співвідношення, на яких ґрунтується теорія термопружності (умови рівноваги кожного елемента тіла, геометричні характеристики деформації  $U, V, W$  і  $\varepsilon_\theta$ , а також фізичні  $\lambda$  і  $\mu$  та термопружні  $\alpha_T$  характеристики).

Рівняння (1.6) виведені в припущенні, що параметри Ламе є константами, тобто  $\lambda = const$ ,  $\mu = const$ .

Виведемо рівняння (1.6) для змінних коефіцієнтів Ламе  $\lambda = \lambda(c, T)$  та  $\mu = \mu(c, T)$ . Для цього скористаємось рівняннями рівноваги в формі (1.2).

З першої рівності (1.2) отримаємо, що

$$\frac{\partial}{\partial x}(\lambda \varepsilon_\theta + 2\mu \varepsilon_x - (3\lambda + 2\mu)\alpha_T T) + \frac{\partial}{\partial y}(\mu \gamma_{xy}) + \frac{\partial}{\partial z}(\mu \gamma_{xz}) + X = 0.$$

Продовжуємо здійснювати перетворення над (1.2):

$$\frac{\partial}{\partial x}(\lambda \varepsilon_\theta) + \frac{\partial}{\partial x}(\mu \varepsilon_x) + \frac{\partial}{\partial x}(\mu \varepsilon_x) - \frac{\partial}{\partial x}((3\lambda + 2\mu)\alpha_T T) + \frac{\partial}{\partial y}(\mu \gamma_{xy}) + \frac{\partial}{\partial z}(\mu \gamma_{xz}) + X = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda}{\partial x} \varepsilon_\theta + \lambda \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial x} \varepsilon_x + \mu \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial x} \varepsilon_x + \mu \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x} - \alpha_T \left( 3 \frac{\partial \lambda}{\partial x} T + 3\lambda \frac{\partial T}{\partial x} + 2 \frac{\partial \mu}{\partial x} T + 2\mu \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \\ + \frac{\partial \mu}{\partial y} \gamma_{xy} + \mu \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \mu}{\partial z} \gamma_{xz} + \mu \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial z} + X = 0, \end{aligned}$$

$$\left( \frac{\partial \lambda}{\partial x} \varepsilon_\theta + 2 \frac{\partial \mu}{\partial x} \varepsilon_x + \frac{\partial \mu}{\partial y} \gamma_{xy} + \frac{\partial \mu}{\partial z} \gamma_{xz} - \left( 3 \frac{\partial \lambda}{\partial x} + 2 \frac{\partial \mu}{\partial x} \right) \alpha_T T \right) +$$

$$+ \lambda \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial x} + \mu \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x} + \mu \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x} + \mu \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} + \mu \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial z} - (3\lambda + 2\mu)\alpha_T \frac{\partial T}{\partial x} + X = 0,$$

$$\left( \frac{\partial \lambda}{\partial x} \varepsilon_\theta + 2 \frac{\partial \mu}{\partial x} \varepsilon_x + \frac{\partial \mu}{\partial y} \gamma_{xy} + \frac{\partial \mu}{\partial z} \gamma_{xz} - \left( 3 \frac{\partial \lambda}{\partial x} + 2 \frac{\partial \mu}{\partial x} \right) \alpha_T T \right) + \lambda \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial x} +$$

$$+ \mu \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right) - (3\lambda + 2\mu)\alpha_T \frac{\partial T}{\partial x} + X = 0,$$

$$\left( \frac{\partial \lambda}{\partial x} \varepsilon_\theta + 2 \frac{\partial \mu}{\partial x} \varepsilon_x + \frac{\partial \mu}{\partial y} \gamma_{xy} + \frac{\partial \mu}{\partial z} \gamma_{xz} - \left( 3 \frac{\partial \lambda}{\partial x} + 2 \frac{\partial \mu}{\partial x} \right) \alpha_T T \right) +$$

$$+ \lambda \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) + \mu \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z} \right) - (3\lambda + 2\mu)\alpha_T \frac{\partial T}{\partial x} + X = 0,$$

$$\left( \frac{\partial \lambda}{\partial x} \varepsilon_\theta + 2 \frac{\partial \mu}{\partial x} \varepsilon_x + \frac{\partial \mu}{\partial y} \gamma_{xy} + \frac{\partial \mu}{\partial z} \gamma_{xz} - \left( 3 \frac{\partial \lambda}{\partial x} + 2 \frac{\partial \mu}{\partial x} \right) \alpha_T T \right) +$$

$$+ \lambda \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) - (3\lambda + 2\mu)\alpha_T \frac{\partial T}{\partial x} + X = 0,$$

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial \lambda}{\partial x} \varepsilon_\theta + 2 \frac{\partial \mu}{\partial x} \varepsilon_x + \frac{\partial \mu}{\partial y} \gamma_{xy} + \frac{\partial \mu}{\partial z} \gamma_{xz} - \left( 3 \frac{\partial \lambda}{\partial x} + 2 \frac{\partial \mu}{\partial x} \right) \alpha_T T \right) + \lambda \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial x} + \\ & + \mu \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) + \mu \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial x} - (3\lambda + 2\mu) \alpha_T \frac{\partial T}{\partial x} + X = 0, \\ & \left( \frac{\partial \lambda}{\partial x} \varepsilon_\theta + 2 \frac{\partial \mu}{\partial x} \varepsilon_x + \frac{\partial \mu}{\partial y} \gamma_{xy} + \frac{\partial \mu}{\partial z} \gamma_{xz} - \left( 3 \frac{\partial \lambda}{\partial x} + 2 \frac{\partial \mu}{\partial x} \right) \alpha_T T \right) + \\ & + (\lambda + \mu) \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) - (3\lambda + 2\mu) \alpha_T \frac{\partial T}{\partial x} + X = 0, \end{aligned}$$

або

$$\mu \Delta U + (\lambda + \mu) \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial x} + \left( \frac{\partial \lambda}{\partial x} \varepsilon_\theta + 2 \frac{\partial \mu}{\partial x} \varepsilon_x + \frac{\partial \mu}{\partial y} \gamma_{xy} + \frac{\partial \mu}{\partial z} \gamma_{xz} - \left( 3 \frac{\partial \lambda}{\partial x} + 2 \frac{\partial \mu}{\partial x} \right) \alpha_T T \right) - (3\lambda + 2\mu) \alpha_T \frac{\partial T}{\partial x} + X = 0.$$

Остаточне рівняння рівноваги в зміщеннях можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} & \mu \Delta U + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) + \frac{\partial \lambda}{\partial x} \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) + 2 \frac{\partial \mu}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial x} + \\ & + \frac{\partial \mu}{\partial y} \left( \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial \mu}{\partial z} \left( \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right) - \left( \left( 3 \frac{\partial \lambda}{\partial x} + 2 \frac{\partial \mu}{\partial x} \right) T + (3\lambda + 2\mu) \frac{\partial T}{\partial x} \right) \alpha_T + X = 0. \end{aligned}$$

Аналогічно перетворюються решта рівнянь рівноваги.

Таким чином, рівняння рівноваги в формі Ламе для зміщень з урахуванням термопружності та при  $\lambda = \lambda(c, T)$  та  $\mu = \mu(c, T)$  мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned} & \mu \Delta U + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) + \frac{\partial \lambda}{\partial x} \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) + 2 \frac{\partial \mu}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial x} + \\ & + \frac{\partial \mu}{\partial y} \left( \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial \mu}{\partial z} \left( \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right) - \left( \left( 3 \frac{\partial \lambda}{\partial x} + 2 \frac{\partial \mu}{\partial x} \right) T + (3\lambda + 2\mu) \frac{\partial T}{\partial x} \right) \alpha_T + X = 0, \\ & \mu \Delta V + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) + \frac{\partial \lambda}{\partial y} \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) + 2 \frac{\partial \mu}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial y} + \\ & + \frac{\partial \mu}{\partial x} \left( \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial \mu}{\partial z} \left( \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right) - \left( \left( 3 \frac{\partial \lambda}{\partial y} + 2 \frac{\partial \mu}{\partial y} \right) T + (3\lambda + 2\mu) \frac{\partial T}{\partial y} \right) \alpha_T + Y = 0, \end{aligned} \tag{1.7}$$

$$\begin{aligned} & \mu \Delta W + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) + \frac{\partial \lambda}{\partial z} \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) + 2 \frac{\partial \mu}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial z} + \\ & + \frac{\partial \mu}{\partial x} \left( \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right) + \frac{\partial \mu}{\partial y} \left( \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right) - \left( \left( 3 \frac{\partial \lambda}{\partial z} + 2 \frac{\partial \mu}{\partial z} \right) T + (3\lambda + 2\mu) \frac{\partial T}{\partial z} \right) \alpha_T + Z = 0. \end{aligned}$$

#### 1.4. Рівняння нерозривності

Із співвідношень Коші випливає, що якщо задані зміщення  $U$ ,  $V$ ,  $W$  точок тіла, то складові деформацій визначаються однозначно. Якщо ж відомі складові деформації, то система відносно  $U$ ,  $V$ ,  $W$  перевизначена, тобто деформації не є довільними функціями і між ними повинні існувати співвідношення, які називаються умовами спільності деформацій. Таких умов є шість, три з яких – це залежності між складовими в одній площині, а решта три – це залежності між складовими деформацій в різних площинах.

Таким чином, рівняння спільності деформацій мають наступний вигляд [134]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}, \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x}, \\ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z}. \end{aligned}$$

Наведену систему рівнянь, отриману Сен-Венаном, називають рівняннями (умовами) спільності, або нерозривності деформацій.

Якщо безпосередньо визначити зміщення точок  $U$ ,  $V$  та  $W$ , то за співвідношеннями Коші (1.3) можна визначити деформації. При цьому умови спільності деформацій будуть задоволені автоматично, оскільки вони виведені з цих співвідношень і є їх наслідком.

Якщо за заданими навантаженнями визначити напруження, а потім деформації, то при цьому необхідно одночасно задовольнити рівняння нерозривності

деформацій, оскільки деформації будуть несумісні і визначити зміщення з співвідношень Коші буде неможливо, оскільки в них будуть взаємні суперечності.

Рівняння нерозривності для сольового розчину води в пористому середовищі має вигляд [38, 45]

$$\operatorname{div}(\rho_B \mathbf{v}) + \frac{\partial(n_p \rho_B [1 - \frac{c}{\rho_N}])}{\partial t} = 0,$$

де  $\rho_B$  – густина води;  $\mathbf{v}$  – вектор швидкості фільтрації;  $n_p$  – об'єм сольового розчину води в одиниці об'єму ґрунту;  $\rho_N$  – густина солей в твердій фазі.

Якщо у вищенаведеному рівнянні знехтувати величиною  $\frac{c}{\rho_N}$ , а густину води вважати сталою величиною ( $\rho_B = \text{const}$ ), то отримаємо

$$\operatorname{div} \mathbf{v} + \frac{\partial n_p}{\partial t} = 0.$$

Враховуючи факт, що стискуваність твердих частинок на порядок менше стискуваності порової рідини (тобто, густина твердої фази ґрунту  $\rho_T = \text{const}$ ), рівняння нерозривності твердої фази ґрунту має вигляд

$$\operatorname{div} \mathbf{v} + \frac{\partial m}{\partial t} = 0,$$

де  $\mathbf{v}$  – вектор швидкості руху твердих частинок ґрунту;  $m$  – об'єм твердих частинок в одиниці об'єму ґрунту.

Узагальнений закон Дарсі-Герсеванова на випадок руху солевих розчинів при наявності градієнта температури має вигляд [38]

$$\mathbf{v} - e\mathbf{v} = -\mathbf{K}(c, T)\nabla h + \mathbf{v}_c \nabla c + \mathbf{v}_T \nabla T, \quad (1.7)$$

де  $e$  – коефіцієнт пористості ґрунту;  $\mathbf{K}$  – коефіцієнт (тензор) фільтрації;  $h$  – напір,  $\mathbf{v}_c$ ,  $\mathbf{v}_T$  – коефіцієнти (тензори) хімічного та термічного осмосу відповідно.

В даній дисертаційній роботі припускається, що швидкість руху твердих частинок ґрунту дорівнює нулю.

## 1.5. Диференціальні рівняння масоперенесення та теплоперенесення при фільтрації сольових розчинів у пористому середовищі

Вищенаведені рівняння рівноваги в формі Ламе для зміщень та коефіцієнти Ламе залежать від невідомих функцій  $c(\mathbf{X}, t)$  та  $T(\mathbf{X}, t)$ , що описують концентрацію сольового розчину в порах ґрунту та його температуру. Тому вказані рівняння повинні доповнюватись рівняннями, які описують сольовий та температурний режим ґрунтового середовища.

Оскільки в неізотермічних умовах має місце явище термодифузії [38] і питомий потік розчинених солей визначається як  $\mathbf{q}_c = \mathbf{v}c - \mathbf{D}(c, T)\nabla c - \mathbf{D}_T\nabla T$ , рівняння переносу солей в пористому середовищі набуває вигляду

$$\nabla \cdot (\mathbf{D}\nabla c) + \nabla \cdot (\mathbf{D}_T\nabla T) - (\mathbf{v}, \nabla c) = n_p \frac{\partial c}{\partial t}, \quad (1.8)$$

де  $\mathbf{D}$  – коефіцієнт (тензор) конвективної дифузії;  $\mathbf{D}_T$  – коефіцієнт (тензор) термодифузії;  $\mathbf{v}$  – швидкість фільтрації, яка визначається згідно (1.7);  $n_p$  – об'єм порового розчину в одиниці об'єму ґрунту;  $t$  – час.

Оскільки питомий тепловий потік в ґрунті визначається як [38]  $\mathbf{q}_T = \rho c_p \mathbf{v}T - \lambda_T \nabla T$ , то рівняння теплоперенесення в пористому середовищі має вигляд

$$\nabla \cdot (\lambda_T \nabla T) - \rho c_p (\mathbf{v}, \nabla T) = c_T \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (1.9)$$

де  $\lambda_T$  – коефіцієнт (тензор) ефективною теплопровідності вологого ґрунту;  $\rho$  – густина сольового розчину;  $c_p$  – питома теплоємність сольового розчину;  $c_T$  – об'ємна теплоємність ґрунту при сталому об'ємі.

## 1.6. Крайові умови

Для забезпечення коректності постановки задач НДС ґрунтового масиву в умовах впливу техногенних факторів в області  $\Omega$  з границею  $\Gamma$  потрібно задати



початкові та граничні умови для невідомих функцій. У даному пункті наведені крайові умови, які є відомими з наукових робіт [100, 134].

Граничні умови на поверхні для рівнянь рівноваги можуть бути задані в зміщеннях (кінематичні граничні умови)

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}) = \mathbf{u}_s(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X} \in \Omega, \quad (1.10)$$

де  $\mathbf{u}_s(\mathbf{X}) = (U_s, V_s, W_s)$  – деякі відомі функції (проекції зміщень на відповідні осі), або в напруженнях вигляду (статичні граничні умови) [134]

$$\begin{cases} P_{nx} = \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z, \\ P_{ny} = \tau_{yx} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{yz} n_z, \\ P_{nz} = \tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y + \sigma_z n_z, \end{cases} \quad (1.11)$$

де  $n_x = \cos(\mathbf{n}, x)$ ,  $n_y = \cos(\mathbf{n}, y)$ ,  $n_z = \cos(\mathbf{n}, z)$  – напрямні косинуси вектора  $\mathbf{n}$ .

Умови (1.11) в напруженнях з допомогою співвідношень (1.5) та (1.3) можна записати також в зміщеннях. Для цього в перше рівняння (1.11) підставимо узагальнений закон Гука у зворотній формі (1.5)

$$P_{nx} = (\lambda(c, T)\varepsilon_\theta + 2\mu(c, T)\varepsilon_x - (3\lambda(c, T) + 2\mu(c, T))\alpha_T \bar{T})n_x + 2\mu(c, T)\varepsilon_{xy}n_y + 2\mu(c, T)\varepsilon_{xz}n_z.$$

Підставивши в отриманий вираз значення деформацій (1.3) і згрупувавши відповідні доданки, отримаємо

$$P_{nx} = (\lambda(c, T)\varepsilon_\theta - (3\lambda(c, T) + 2\mu(c, T))\alpha_T \bar{T})n_x + \mu(c, T) \left( \frac{\partial U}{\partial x} n_x + \frac{\partial U}{\partial y} n_y + \frac{\partial U}{\partial z} n_z \right) + \mu(c, T) \left( \frac{\partial V}{\partial x} n_x + \frac{\partial V}{\partial y} n_y + \frac{\partial V}{\partial z} n_z \right).$$

Оскільки  $\frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial U}{\partial x} n_x + \frac{\partial U}{\partial y} n_y + \frac{\partial U}{\partial z} n_z$ , то маємо

$$P_{nx} = (\lambda(c, T)\varepsilon_\theta - (3\lambda(c, T) + 2\mu(c, T))\alpha_T \bar{T})n_x + \mu(c, T) \frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}} + \mu(c, T) \left( \frac{\partial V}{\partial x} n_x + \frac{\partial V}{\partial y} n_y + \frac{\partial V}{\partial z} n_z \right).$$

Аналогічним чином можна перетворити два інших рівняння (1.11). В результаті отримаємо наступні три граничні умови на поверхні, що виражені через зміщення:

$$\begin{aligned}
P_{nx} &= \left( \lambda(c,T) \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) - (3\lambda(c,T) + 2\mu(c,T))\alpha_T \bar{T} \right) n_x + \mu(c,T) \frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}} + \\
&\quad + \mu(c,T) \left( \frac{\partial U}{\partial x} n_x + \frac{\partial V}{\partial y} n_y + \frac{\partial W}{\partial z} n_z \right), \\
P_{ny} &= \left( \lambda(c,T) \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) - (3\lambda(c,T) + 2\mu(c,T))\alpha_T \bar{T} \right) n_y + \mu(c,T) \frac{\partial V}{\partial \mathbf{n}} + \\
&\quad + \mu(c,T) \left( \frac{\partial U}{\partial x} n_x + \frac{\partial V}{\partial y} n_y + \frac{\partial W}{\partial z} n_z \right), \\
P_{nz} &= \left( \lambda(c,T) \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) - (3\lambda(c,T) + 2\mu(c,T))\alpha_T \bar{T} \right) n_z + \mu(c,T) \frac{\partial W}{\partial \mathbf{n}} + \\
&\quad + \mu(c,T) \left( \frac{\partial U}{\partial x} n_x + \frac{\partial V}{\partial y} n_y + \frac{\partial W}{\partial z} n_z \right).
\end{aligned} \tag{1.12}$$

Також можуть задаватись змішані граничні умови: на одній частині поверхні – кінематичні умови, а на іншій – статичні.

В дисертаційній роботі вибрано зворотній спосіб розв'язання задач НДС, згідно якого спочатку знаходять зміщення точок  $U$ ,  $V$  та  $W$  з виведених рівнянь рівноваги в формі Ламе для зміщень (1.7) та граничних умов вигляду (1.10), (1.11) або (1.12), далі на підставі співвідношень Коші (1.3) знаходять складові тензора деформації  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ ,  $\varepsilon_z$ ,  $\varepsilon_{xy}$ ,  $\varepsilon_{xz}$ ,  $\varepsilon_{yz}$ , а за ними за допомогою зворотної форми Гука (1.5) знаходять складові тензора напружень  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$ . При цьому потрібно розв'язати рівняння теплоперенесення (1.9), масоперенесення в неізотермічних умовах (1.8) та задачу фільтрації, які доповнюються описаними нижче крайовими умовами.

Початкові умови для напору, концентрації сольового розчину та температури мають вигляд

$$h(\mathbf{X},0) = \tilde{H}_0(\mathbf{X}), \quad c(\mathbf{X},0) = \tilde{C}_0(\mathbf{X}), \quad T(\mathbf{X},0) = \tilde{T}_0(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X} \in \Omega,$$

де  $\tilde{H}_0(\mathbf{X})$ ,  $\tilde{C}_0(\mathbf{X})$ ,  $\tilde{T}_0(\mathbf{X})$  – деякі функції, які будуть задані для кожної задачі.

Граничні умови для напору, концентрації сольового розчину та температури залежать від нижченаведених чинників [38].

### **Межа (частина межі) області $\Omega$ дренажна**

В даному випадку для напору задається гранична умова першого роду

$$h(\mathbf{X}, t)|_{\mathbf{X} \in \Gamma} = \tilde{H}_1(\mathbf{X}, t), \mathbf{X} \in \Gamma,$$

де  $\tilde{H}_1(\mathbf{X}, t)$  – задана функція.

Для концентрації можуть задаватись граничні умови одного з трьох родів:

1) гранична умова 1-го роду (відома концентрація розчинів, які омивають дану досліджувану область на водопроникних ділянках)

$$c(\mathbf{X}, t)|_{\mathbf{X} \in \Gamma} = \tilde{C}_1(\mathbf{X}, t), \mathbf{X} \in \Gamma, \text{ де } \tilde{C}_1(\mathbf{X}, t) \text{ – задана функція;}$$

2) гранична умова 2-го роду (умова швидкого виносу розчинених солей в неізотермічних умовах, яка враховує переважання конвективного переносу над молекулярним)

$$(\mathbf{D}\nabla c + \mathbf{D}_T\nabla T, \mathbf{n})|_{\mathbf{X} \in \Gamma} = 0, \mathbf{X} \in \Gamma;$$

3) гранична умова 3-го роду (умова Данквертса в неізотермічних умовах, яка враховує як конвективний, так і фільтраційний механізми виводу розчиненої речовини на водопроникній ділянці області фільтрації)

$$\left[ (\mathbf{D}\nabla c + \mathbf{D}_T\nabla T, \mathbf{n}) - (\mathbf{v}, \mathbf{n})(c(\mathbf{X}, t) - \tilde{C}_1) \right]_{\mathbf{X} \in \Gamma} = 0, \mathbf{X} \in \Gamma;$$

де  $\tilde{C}_1$  – задана функція,  $\mathbf{n}$  – вектор напрямних косинусів зовнішньої нормалі до межі  $\Gamma$ .

### **Межа (частина межі) $\Gamma$ області $\Omega$ непроникна**

Тоді для швидкості фільтрації задається гранична умова непроникності

$$(\mathbf{v}, \mathbf{n})|_{\mathbf{X} \in \Gamma} = 0, \mathbf{X} \in \Gamma.$$

Якщо непроникність зумовлюється заляганням пласту солі, то для концентрації задається гранична умова 1-го роду

$$c(\mathbf{X}, t)|_{\mathbf{X} \in \Gamma} = C_m, \mathbf{X} \in \Gamma,$$

або нова балансна гранична умова [43], яка для ізотропного ґрунту в ізотермічних умовах має вигляд

$$\left[ \mathbf{D}(\nabla c, \mathbf{n}) + \left( \frac{D}{\delta} - (\mathbf{v}, \mathbf{n}) \right) \cdot c \right]_{\mathbf{X} \in \Gamma} = -\frac{D \cdot C_m}{\delta}, \quad \mathbf{X} \in \Gamma,$$

де  $\delta$  – товщина дифузійного примежового шару в околі фронту розчинення;  $C_m$  – концентрація граничного насичення.

Оскільки пласт солі моделюється абсолютно непроникним тілом, з вищенаведеної умови в неізотермічних умовах отримуємо наступну умову [140]

$$\left[ \mathbf{D}(\nabla c, \mathbf{n}) + \mathbf{D}_T(\nabla T, \mathbf{n}) + \frac{D}{\delta} \cdot c \right]_{\mathbf{X} \in \Gamma} = -\frac{D \cdot C_m}{\delta}, \quad \mathbf{X} \in \Gamma.$$

Якщо непроникність зумовлюється заляганням кам'яного пласта або ґрунту з набагато меншим коефіцієнтом фільтрації, то для концентрації сольового розчину в неізотермічних умовах задається гранична умова непроникності

$$(\mathbf{D}\nabla c + \mathbf{D}_T\nabla T, \mathbf{n})|_{\mathbf{X} \in \Gamma} = 0, \quad \mathbf{X} \in \Gamma.$$

Граничні умови для температури залежать від наступних факторів:

1) **задано температуру на межі (частині межі)  $\Gamma$  області  $\Omega$ .** Тоді для температури задається гранична умова 1-го роду

$$T(\mathbf{X}, t)|_{\mathbf{X} \in \Gamma} = \tilde{T}_1(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in \Gamma,$$

де  $\tilde{T}_1(\mathbf{X}, t)$  – відома функція;

2) **межа (частина межі)  $\Gamma$  області  $\Omega$  є непроникною** для фільтраційного потоку і величина теплового потоку є відомою. Тоді маємо граничну умову 2-го роду для температури

$$(\lambda_T \nabla T, \mathbf{n})|_{\mathbf{X} \in \Gamma} = Q_T(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in \Gamma,$$

де  $Q_T(\mathbf{X}, t)$  – величина теплового потоку;

3) **відома величина теплового потоку на межі (частині межі)  $\Gamma$  області  $\Omega$ .** Тоді для температури задається гранична умова третього роду

$$(\mathbf{q}_T, \mathbf{n})|_{\mathbf{X} \in \Gamma} = Q_T(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in \Gamma;$$

4) **межа (частина межі)  $\Gamma$  області  $\Omega$  теплоізолювана.** В даному випадку задається однорідна гранична умова 3-го роду

$$(\mathbf{q}_T, \mathbf{n})|_{\mathbf{X} \in \Gamma} = 0, \quad \mathbf{X} \in \Gamma.$$

### 1.7. Додаткові умови на вільній поверхні

В загальному випадку вільна поверхня розділяє область дослідження на дві підобласті – область водонасиченого ґрунтового масиву та масиву ґрунту, що знаходиться у природному стані (ненасичений стан). Тоді задача знаходження зміщень, деформацій, напружень та температури розв’язується в двох областях – під і над вільною поверхнею, а на вільній поверхні для невідомих функцій задаються відповідні умови спряження ідеального контакту [38].

В дисертаційній роботі вважається, що на вільній поверхні (рухомій або нерухомій) для зміщень та напружень можуть задаватись граничні умови 1-го роду

$$[u_n]_{\Gamma_0} = [u_s]_{\Gamma_0} = 0, [\sigma_n]_{\Gamma_0} = [\tau_s]_{\Gamma_0} = 0, \mathbf{X} \in \Gamma_0,$$

де  $[ ]$  – стрибок функції, а для температури – граничні умови наступного вигляду:

$$[T(\mathbf{X}, t)]_{\Gamma_0} = 0, [\mathbf{q}_T]_{\Gamma_0} = 0, \mathbf{X} \in \Gamma_0, t > 0.$$

Оскільки на вільній рухомій вільній поверхні  $\Gamma_0$  тиск сольового розчину води дорівнює атмосферному, а атмосферний приймається рівним нулю, то покладаючи вісь  $Oz$  напрямленою вгору і враховуючи зв’язок тиску в поровій рідині з напором

$$h = \frac{P}{\gamma_1} \pm z,$$

де  $\gamma_1$  – питома вага сольового розчину, знак “+” відповідає напрямку осі  $Oz$  вгору, знак “-” – вниз; гранична умова для напору запишеться у вигляді

$$h(\mathbf{X}, t)|_{\Gamma_0} = z, \mathbf{X} \in \Gamma_0.$$

Для швидкості фільтрації задається гранична умова [38]

$$(\mathbf{v}, \mathbf{n})|_{\mathbf{X} \in \Gamma_0} = n_p \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \mathbf{X} \in \Gamma_0,$$

де співвідношення  $\varphi(\mathbf{X}, t) = (z - h(\mathbf{X}, t))|_{\Gamma_0} = 0$  описує вільну поверхню  $\Gamma_0$ .

Гранична умова для концентрації сольового розчину на рухомій вільній поверхні має вигляд [38]

$$(\mathbf{D}(c, T) \nabla c + \mathbf{D}_T \nabla T, \mathbf{n})|_{\Gamma_0} = 0, \mathbf{X} \in \Gamma_0.$$

## 1.8. Експериментальні дослідження залежностей коефіцієнтів фільтрації, Ламе та модуля Юнга від фізико-хімічного стану ґрунтового середовища

В реальних умовах відбувається фільтрація підземних вод, що знаходяться під впливом певних джерел забруднень, зокрема різних солей та ще й під дією температурних факторів. Термічне розширення порової рідини може призвести до виникнення надлишкових напорів в порах ґрунту. Дані напори можуть зменшувати стійкість ґрунтових основ та будівель, зведених на таких ґрунтах. Також при нагріванні розширюється і твердий скелет ґрунту, що може змінити картину НДС пористого середовища.

Детальний огляд робіт з питань експериментальних досліджень залежностей коефіцієнта фільтрації від концентрації солей та температури подано в [38].

Для вивчення фізико-хімічних процесів, що проходять при фільтрації сольових розчинів і встановлення кількісної оцінки їх впливу на проникливість ґрунтів Власюком А. П. та Кузлю М. Т. в геотехнічній лабораторії кафедри механіки ґрунтів, основ і фундаментів Національного університету водного господарства та природокористування (НУВГП) було виконано серію експериментів з визначення коефіцієнта фільтрації для піщаних ґрунтів [36, 91]. Фільтруючою рідиною був розчин NaCl з концентрацією від 1,0 до 16 %. Досліди проводились для однорідних кварцових пісків з крупністю фракцій 0,25 мм. Визначення коефіцієнта фільтрації виконувалось на стандартному приладі КФ-00М, а проведення експерименту виконувалось за стандартною методикою у відповідності з ГОСТ 25584-83.

Результати проведених досліджень коефіцієнта фільтрації сольових розчинів в піщаних ґрунтах для одиничного градієнту напору наведено в таблиці 1.1.

Таблиця 1.1

Результати досліджень коефіцієнта фільтрації сольових розчинів в піщаних ґрунтах

$c, \%$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$K, \text{ м/доба}$	18,4	20,7	25,3	29	30,4	31	23	19,8	18,4

Продовження таблиці 1.1

$c, \%$	9	10	11	12	13	14	15	16
$K, \text{ м/доба}$	17,5	16,1	15,2	13,8	12,9	12,4	11,5	19,2

Отримані дані експериментів коефіцієнта фільтрації від концентрації сольового розчину оброблені з використанням програмного комплексу для обробки даних експерименту, розробленого на кафедрі прикладної математики НУВГП. Математична обробка результатів експерименту здійснена шляхом поліноміальної апроксимації введених даних з використанням методу найменших квадратів.

В результаті проведених експериментальних досліджень фільтрації солевих розчинів у піщаних ґрунтах, їх математичної обробки та поширення цих досліджень для глинистих ґрунтів, отримана наступна залежність коефіцієнта фільтрації від концентрації сольового розчину (рис.1.9):

$$K_1(c) = a_5^1 \cdot c^5 + a_4^1 \cdot c^4 + a_3^1 \cdot c^3 + a_2^1 \cdot c^2 + a_1^1 \cdot c + a_0^1,$$

де  $a_5^1 = 5,9404 \cdot 10^{-2}$ ,  $a_4^1 = -1,6703 \cdot 10^{-1}$ ,  $a_3^1 = 1,7051 \cdot 10^{-1}$ ,  $a_2^1 = -7,4311 \cdot 10^{-2}$ ,  $a_1^1 = 1,0563 \cdot 10^{-2}$ ,  $a_0^1 = 1,0054 \cdot 10^{-3}$ ,  $c \in [0,1]$  – безрозмірна величина.

На даний час відомі експериментальні дослідження, в яких вказується на залежність коефіцієнта фільтрації від температури [15, 105].

На рис 1.10. наведені графіки залежностей коефіцієнта фільтрації від температури для каоліну та гумбрину [15]. Як видно, для гумбрину в інтервалі температур від  $3^{\circ}\text{C}$  до  $70^{\circ}\text{C}$  коефіцієнт фільтрації зростає на чотири порядки.

Залежність коефіцієнта фільтрації від температури визначалась апроксимацією за методом найменших квадратів результатів експериментів, наведених в [15] для каоліну на нижній межі пластичності

$$K_2(T) = b_5 \cdot T^5 + b_4 \cdot T^4 + b_3 \cdot T^3 + b_2 \cdot T^2 + b_1 \cdot T + b_0,$$

де  $b_5 = 1,4154 \cdot 10^{-2}$ ,  $b_4 = -2,6097 \cdot 10^{-2}$ ,  $b_3 = 1,0819 \cdot 10^{-2}$ ,  $b_2 = 1,2844 \cdot 10^{-4}$ ,  $b_1 = 1,0404 \cdot 10^{-2}$ ,  $b_0 = 3,0925 \cdot 10^{-3}$ ,  $T \in [0,1]$  – безрозмірна величина.

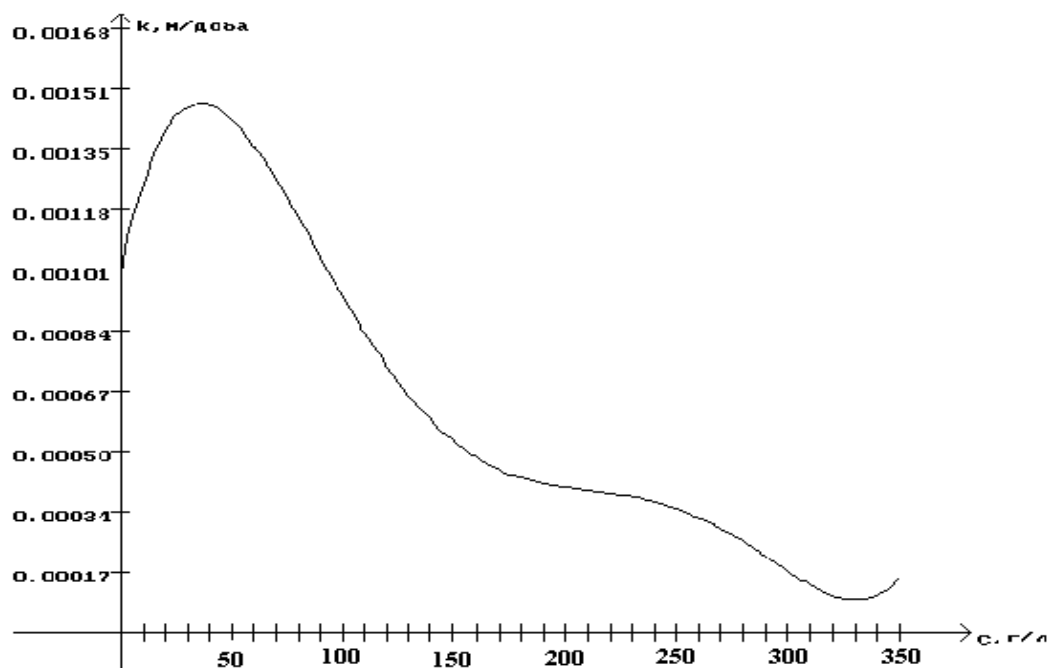


Рис.1.9. Залежність коефіцієнта фільтрації глинистого ґрунту від концентрації сольового розчину

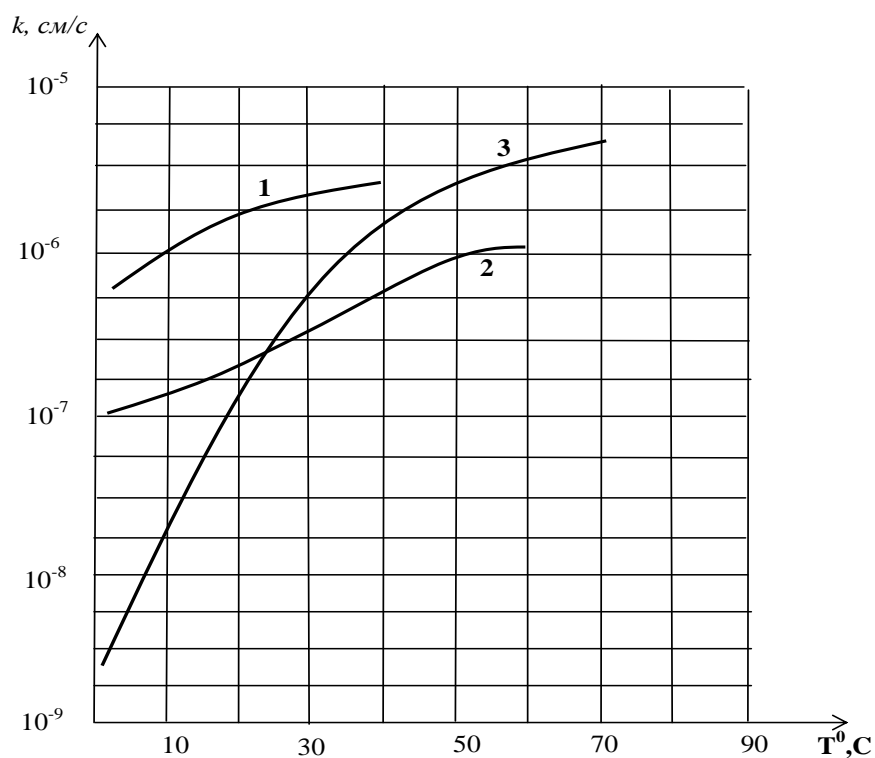


Рис.1.10. Залежність коефіцієнта фільтрації від температури: 1, 2 – каолін на верхній та нижній межах пластичності; 3 – гумбрин на верхній межі пластичності



Оскільки комплексні експериментальні дані щодо одночасної залежності коефіцієнта фільтрації від концентрації сольового розчину та температури відсутні, то можна покласти  $K(c, T) = \frac{1}{k_0^2} K_1(c) \cdot K_2(T)$ , де  $k_0$  – коефіцієнт фільтрації для чистої води при температурі  $20^\circ\text{C}$ .

Для встановлення залежностей коефіцієнтів Ламе та модуля Юнга від концентрації солевих розчинів було виконано серію експериментів в геотехнічній лабораторії кафедри основ та фундаментів НУВГП [91]. В якості солевих розчинів було взято розчин солей КСІ, який використовують в аграрному секторі.

Таблиця 1.2

Дані експериментальних досліджень залежностей модуля Юнга та коефіцієнтів Ламе для різних концентрацій солевих розчинів

с, %	0	1	3	6	12	20
$E$ , кПа	4367	4312	3774	3698	3700	4240
$\mu$ , кПа	1680	1658	1452	1423	1423	1630
$\lambda$ , кПа	2522	2487	2179	2135	2134	2447

Таким чином, отримано наступні залежності (рис. 1.11 – рис. 1.13):

$$E(c) = a_3^2 \cdot c^3 + a_2^2 \cdot c^2 + a_1^2 \cdot c + a_0^2,$$

де  $a_3^2 = -0,000393$ ,  $a_2^2 = 0,1878866$ ,  $a_1^2 = -22,70202$ ,  $a_0^2 = 4410,552$ ;

$$\mu(c) = a_3^3 \cdot c^3 + a_2^3 \cdot c^2 + a_1^3 \cdot c + a_0^3,$$

де  $a_3^3 = -1205,28$ ,  $a_2^3 = 2880,321$ ,  $a_1^3 = -1741,92$ ,  $a_0^3 = 1696,324$ ;

$$\lambda(c) = a_3^4 \cdot c^3 + a_2^4 \cdot c^2 + a_1^4 \cdot c + a_0^4,$$

де  $a_3^4 = -1798,96$ ,  $a_2^4 = 4314,732$ ,  $a_1^4 = 2615,37$ ,  $a_0^4 = 2545,743$ .

Дані результати наведені для безрозмірених величин  $c$  та  $T$  згідно формул

$\bar{c} = \frac{c}{C_m}$ ,  $\bar{T} = \frac{T}{T_{\max}}$ , де  $C_m$  – максимальна концентрація (г/літр),  $T_{\max}$  – максимальна температура,  $C^0$ ,  $c \in [0, C_m]$  – задана концентрація (г/літр),  $T \in [0, T_{\max}]$  – задана температура,  $\bar{c} \in [0, 1]$ ,  $\bar{T} \in [0, 1]$  – безрозмірені величини.

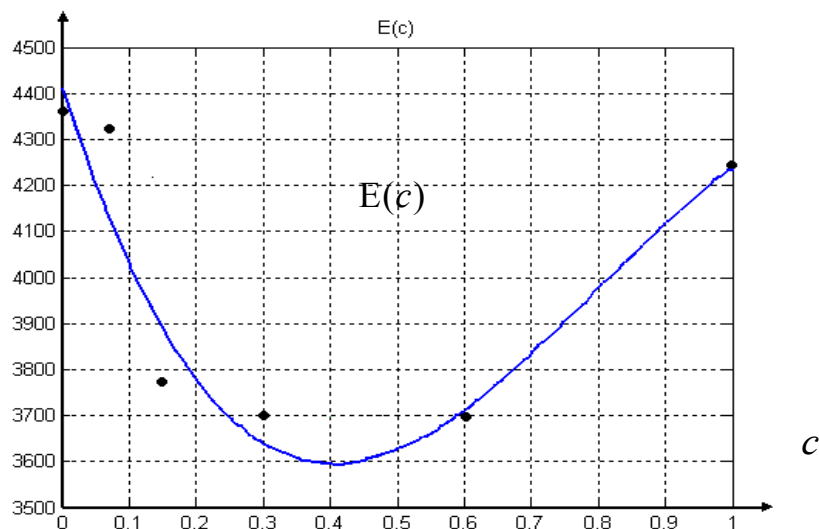


Рис. 1.11. Залежність модуля Юнга  $E$  від концентрації сольового розчину

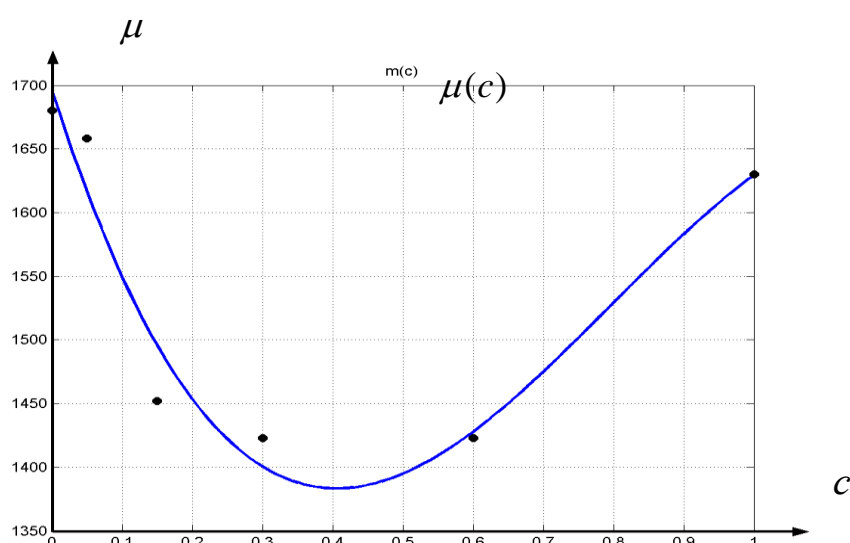


Рис. 1.12. Залежність коефіцієнта Ламе  $\mu$  від концентрації сольового розчину

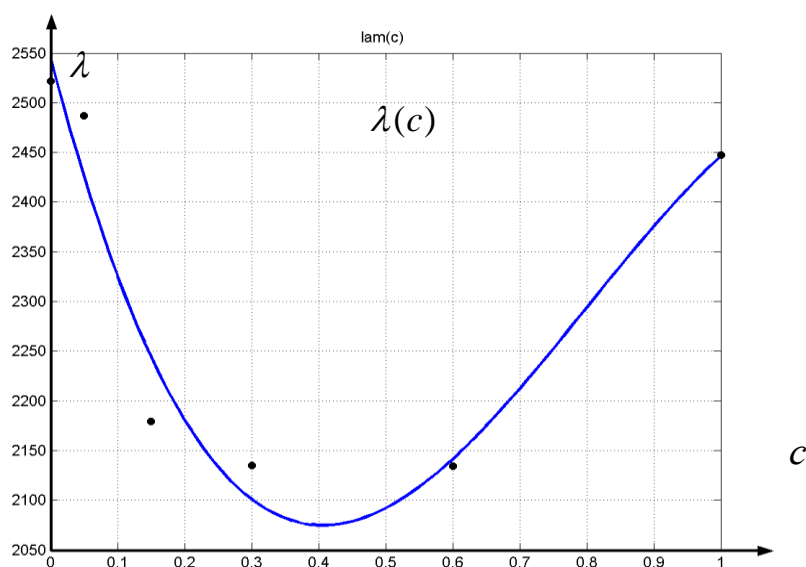


Рис. 1.13. Залежність коефіцієнта Ламе  $\lambda$  від концентрації сольового розчину

Отримані поліноміальні залежності коефіцієнтів фільтрації, Ламе та модуля Юнга були надалі використані для розв'язання задач НДС ґрунтового середовища при наявності тепло-масоперенесення сольових розчинів.

## 1.9. Висновки до розділу 1

В даному розділі отримано наступні результати:

1. Проведено огляд літератури за темою дисертаційних досліджень. Показано, що питання впливу процесів тепло-масоперенесення при фільтрації сольових розчинів у неізотермічних умовах на НДС ґрунтових масивів і основ недостатньо вивчені та потребують подальшого розвитку.

2. Розглянуто основні характеристики НДС, а також механічні та фізико-хімічні процеси, що відбуваються в ґрунтових середовищах та наведено для них основні співвідношення, диференціальні рівняння та додаткові умови, а також експериментальні дослідження впливу концентрації сольових розчинів та температури на фільтраційні й деформаційні властивості ґрунту.

3. Отримано рівняння рівноваги для зміщень в формі Ламе на основі узагальнення закону Гука та граничні умови на поверхні в зміщеннях при врахуванні тепло-масоперенесення та залежностей коефіцієнтів Ламе, модуля Юнга від концентрації сольового розчину та температури.

4. Побудовано математичну модель НДС ґрунтових середовищ з урахуванням тепло-масоперенесення при фільтрації сольових розчинів у неізотермічних умовах та залежностей коефіцієнтів фільтрації, Ламе, модуля Юнга від концентрації сольових розчинів та температури. А саме:

$$\begin{aligned} & \mu(c, T) \Delta U + (\lambda(c, T) + \mu(c, T)) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) + \frac{\partial \lambda(c, T)}{\partial x} \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) + \\ & + 2 \frac{\partial \mu(c, T)}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial \mu(c, T)}{\partial y} \left( \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial \mu(c, T)}{\partial z} \left( \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right) - \\ & - \left( \left( 3 \frac{\partial \lambda(c, T)}{\partial x} + 2 \frac{\partial \mu(c, T)}{\partial x} \right) T + (3\lambda(c, T) + 2\mu(c, T)) \frac{\partial T}{\partial x} \right) \alpha_T + X = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \mu(c,T)\Delta V + (\lambda(c,T) + \mu(c,T)) \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) + \frac{\partial \lambda(c,T)}{\partial y} \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) + \\ & + 2 \frac{\partial \mu(c,T)}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial \mu(c,T)}{\partial x} \left( \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial \mu(c,T)}{\partial z} \left( \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right) - \\ & - \left( \left( 3 \frac{\partial \lambda(c,T)}{\partial y} + 2 \frac{\partial \mu(c,T)}{\partial y} \right) T + (3\lambda(c,T) + 2\mu(c,T)) \frac{\partial T}{\partial y} \right) \alpha_T + Y = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \mu(c,T)\Delta W + (\lambda(c,T) + \mu(c,T)) \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) + \frac{\partial \lambda(c,T)}{\partial z} \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) + \\ & + 2 \frac{\partial \mu(c,T)}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{\partial \mu(c,T)}{\partial x} \left( \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right) + \frac{\partial \mu(c,T)}{\partial y} \left( \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right) - \\ & - \left( \left( 3 \frac{\partial \lambda(c,T)}{\partial z} + 2 \frac{\partial \mu(c,T)}{\partial z} \right) T + (3\lambda(c,T) + 2\mu(c,T)) \frac{\partial T}{\partial z} \right) \alpha_T + Z = 0, \quad \mathbf{X} \in \Omega, \end{aligned}$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial W}{\partial z},$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right), \quad \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right), \quad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right), \quad \mathbf{X} \in \Omega,$$

$$\sigma_x = \lambda(c,T)\varepsilon_\theta + 2\mu(c,T)\varepsilon_x - (3\lambda(c,T) + 2\mu(c,T))\alpha_T \bar{T},$$

$$\sigma_y = \lambda(c,T)\varepsilon_\theta + 2\mu(c,T)\varepsilon_y - (3\lambda(c,T) + 2\mu(c,T))\alpha_T \bar{T},$$

$$\sigma_z = \lambda(c,T)\varepsilon_\theta + 2\mu(c,T)\varepsilon_z - (3\lambda(c,T) + 2\mu(c,T))\alpha_T \bar{T},$$

$$\tau_{xy} = 2\mu(c,T) \cdot \varepsilon_{xy}, \quad \tau_{yz} = 2\mu(c,T) \cdot \varepsilon_{yz}, \quad \tau_{xz} = 2\mu(c,T) \cdot \varepsilon_{xz}, \quad \mathbf{X} \in \Omega,$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{D}\nabla c) + \nabla \cdot (\mathbf{D}_T \nabla T) - (\mathbf{v}, \nabla c) = n_p \frac{\partial c}{\partial t}, \quad \nabla \cdot (\lambda_T \nabla T) - \rho c_\rho (\mathbf{v}, \nabla T) = c_T \frac{\partial T}{\partial t}, \quad \mathbf{X} \in \Omega, \quad t > 0,$$

$$\mathbf{v} - e\mathbf{v} = -\mathbf{K}(c,T)\nabla h + \mathbf{v}_c \nabla c + \mathbf{v}_T \nabla T,$$

$$h(\mathbf{X},0) = \tilde{H}_0(\mathbf{X}), \quad c(\mathbf{X},0) = \tilde{C}_0(\mathbf{X}), \quad T(\mathbf{X},0) = \tilde{T}_0(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X} \in \Omega,$$

$$l_1 \mathbf{u}(\mathbf{X}) = \mathbf{u}_s(\mathbf{X}), \quad l_2 h(\mathbf{X},t)|_\Gamma = \tilde{H}_1(\mathbf{X},t), \quad l_3 c(\mathbf{X},t)|_\Gamma = \tilde{C}_1(\mathbf{X},t), \quad l_4 T(\mathbf{X},t)|_\Gamma = \tilde{T}_1(\mathbf{X},t), \quad \mathbf{X} \in \Gamma,$$

де  $t \in [0; t_0]$ ,  $l_i$ ,  $i = \overline{1,4}$  – деякі диференціальні оператори, що задають граничні умови для зміщень, напору, концентрації солей та температури на межі  $\Gamma$ ;  $\mathbf{u}_s(\mathbf{X}) = (U_s, V_s, W_s)$  – деякі відомі функції (проекції зміщень на відповідні осі).

Результати даного розділу опубліковано в роботах [51, 62, 65].

## РОЗДІЛ 2

### МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВПЛИВУ ТЕПЛО-МАСОПЕРЕНЕСЕННЯ ПРИ ФІЛЬТРАЦІЇ СОЛЬОВИХ РОЗЧИНІВ НА НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН ҐРУНТОВОГО МАСИВУ

У даному розділі побудовано математичну модель НДС ґрунтового масиву з урахуванням тепло-масоперенесення за фільтрації сольових розчинів у неізотермічних умовах та залежностей коефіцієнтів фільтрації, Ламе і модуля Юнга від концентрації сольового розчину та температури в одно- та двовимірному випадках. Ґрунтовий масив розглядається однорідним, ізотропним та водонасиченим. Знайдено чисельні розв'язки поставлених крайових задач. Для цього було створено програмний комплекс у середовищі Microsoft Visual Studio Express 2013 для Windows Desktop на мові програмування C# (Додаток В). Проведено серію чисельних експериментів та здійснено їх аналіз.

#### **2.1. Математичне моделювання впливу тепло-масоперенесення при фільтрації сольових розчинів на напружено-деформований стан ґрунтового масиву в одновимірному випадку**

##### **2.1.1. Постановка задачі**

Нехай дано масив ґрунту товщиною  $l$  при наявності в ньому тепло-масоперенесення та фільтрації сольових розчинів у неізотермічних умовах (рис.2.1).

На рис. 2.1 область  $\Omega$  – це область водонасиченого ґрунту. Ґрунтовий масив вважається пружно-деформівним в межах лінійної теорії пружності з коефіцієнтами Ламе  $\lambda(c, T)$ ,  $\mu(c, T)$ , які залежать від концентрації сольового розчину та температури. На ґрунт діє сила тяжіння, архімедова та фільтраційна сили.

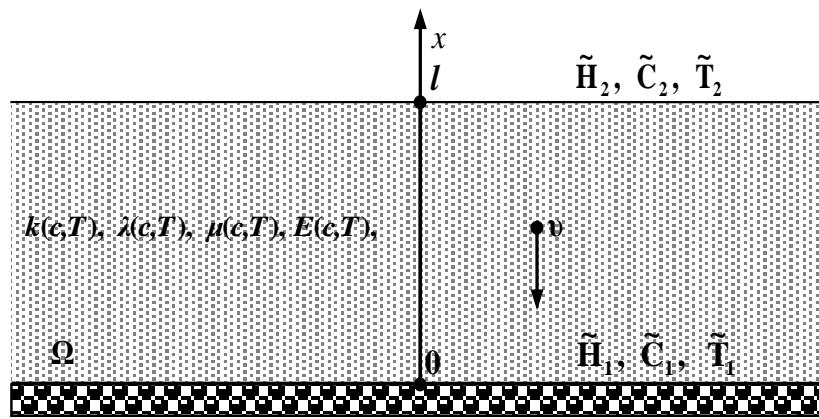


Рис.2.1. Схема ґрунтового масиву в одновимірному випадку при наявності тепло-масоперенесення розчинених у фільтраційному потоці речовин

Нехай на нижній поверхні ґрунту (скельна основа) на межі  $x=0$  задано п'єзометричний напір  $\tilde{H}_1$ , концентрація розчинених у воді солей  $\tilde{C}_1$  та температура  $\tilde{T}_1$ , а значення п'єзометричного напору  $\tilde{H}_2$ , концентрації солей  $\tilde{C}_2$  та температури  $\tilde{T}_2$  – на верхній поверхні ґрунту ( $x=l$ ), причому  $\tilde{H}_2 > \tilde{H}_1$ ,  $\tilde{C}_2 > \tilde{C}_1$ ,  $\tilde{T}_2 > \tilde{T}_1$ . В результаті різниці напорів відбувається перенесення розчинених у воді речовин та тепла фільтраційним потоком. При цьому процес фільтрації розчинених у воді речовин та тепла підлягають відповідно законам Дарсі, Фіка та Фур'є.

Потрібно розрахувати НДС ґрунтового масиву з урахуванням тепло-масоперенесення при умові, що відсутнє зміщення нижньої та верхньої меж ґрунту або лише нижньої межі ґрунту.

### 2.1.2. Математична модель задачі

Математичну модель одновимірної задачі НДС ґрунтового масиву в умовах тепло-масоперенесення, враховуючи міркування розділу 1 та результати робіт [64, 57, 59, 67], можна описати наступною крайовою задачею:

$$\begin{aligned} & (\lambda(c,T) + 2\mu(c,T)) \frac{d^2 U}{dx^2} + \frac{d(\lambda(c,T) + 2\mu(c,T))}{dx} \frac{dU}{dx} - \\ & - \left( \frac{d(\lambda(c,T) + 2\mu(c,T))}{dx} T + (\lambda(c,T) + 2\mu(c,T)) \frac{\partial T}{\partial x} \right) \alpha_T = X, \quad x \in (0; l), \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( D(c, T) \frac{\partial c}{\partial x} \right) - \nu \frac{\partial c}{\partial x} - \gamma(c - C_m) + \frac{\partial}{\partial x} \left( D_T \frac{\partial T}{\partial x} \right) = n_p \frac{\partial c}{\partial t}, \quad x \in (0; l), \quad t > 0, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_T \frac{\partial T}{\partial x} \right) - \rho c_p \nu \frac{\partial T}{\partial x} = c_T \frac{\partial T}{\partial t}, \quad x \in (0; l), \quad t > 0, \quad (2.3)$$

$$\nu = -K(c, T) \frac{dh}{dx} + \nu_c(c) \frac{\partial c}{\partial x} + \nu_T \frac{\partial T}{\partial x}, \quad \frac{d\nu}{dx} + \frac{\partial n_p}{\partial t} = 0, \quad x \in (0; l), \quad t > 0, \quad (2.4)$$

$$L_1 U(0) = 0, \quad L_2 U(l) = 0, \quad (2.5)$$

$$h(0) = \tilde{H}_1, \quad h(l) = \tilde{H}_2, \quad (2.6)$$

$$L_3 c(0, t) = \tilde{C}_1(t), \quad L_4 c(l, t) = \tilde{C}_2(t), \quad t > 0, \quad (2.7)$$

$$L_5 T(0, t) = \tilde{T}_1(t), \quad L_6 T(l, t) = \tilde{T}_2(t), \quad t > 0, \quad (2.8)$$

$$c(x, 0) = \tilde{C}_0(x), \quad T(x, 0) = \tilde{T}_0(x), \quad x \in (0; l), \quad (2.9)$$

де  $x \in (0; l)$ ,  $x$  – вертикальна координата;  $U(x)$  – зміщення в ґрунті вздовж осі  $Ox$ ;  $\lambda(c, T)$ ,  $\mu(c, T)$  – коефіцієнти Ламе, які залежать від концентрації сольових розчинів та температури;  $c(x, t)$  – концентрація сольового розчину в ґрунтовому масиві;  $T(x, t)$  – температура;  $X$  – масова сила, яка визначається за формулою

$$X = \gamma_{зв.} + \frac{dp}{dx}, \quad (2.10)$$

$\gamma_{зв.}$  – питома вага ґрунту в зваженому стані;  $p$  – фільтраційний тиск сольового розчину, який визначається за наступною формулою:

$$p = \gamma_p (h - x), \quad (2.11)$$

$h$  – п'єзометричний напір;  $\gamma_p$  – питома вага рідини;  $\nu$  – швидкість фільтрації;  $K(c, T)$  – коефіцієнт фільтрації, який залежить від концентрації сольових розчинів та температури;  $D(c, T)$ ,  $D_T$  – коефіцієнти конвективної дифузії та термодифузії відповідно (в дисертаційній роботі приймаються константами);  $n_p$  – пористість;  $\gamma$  – константа швидкості масообміну;  $C_m$  – концентрація граничного насичення;  $\lambda_T$ ,  $c_T$  – коефіцієнти ефективної теплопровідності вологого ґрунту та об'ємної теплоємності ґрунту відповідно (в дисертаційній роботі приймаються константами);

$\rho$ ,  $c_\rho$  – густина та питома теплоємність сольового розчину відповідно (приймаються константами);  $L_i$ ,  $i = \overline{1,6}$  – диференціальні оператори, що задають граничні умови відповідно при  $x=0$  та  $x=l$  для зміщень ( $i=1,2$ ), концентрації сольових розчинів ( $i=3,4$ ) та температури ( $i=5,6$ );  $\tilde{H}_1$ ,  $\tilde{H}_2$  – напори відповідно на нижній та верхній межах ґрунту;  $\tilde{C}_1(t)$ ,  $\tilde{C}_2(t)$ ,  $\tilde{T}_1(t)$ ,  $\tilde{T}_2(t)$ ,  $\tilde{C}_0(x)$ ,  $\tilde{T}_0(x)$  – задані функції.

Тут: (2.1) – це рівняння рівноваги в формі Ламе для зміщень ґрунту з урахуванням тепло-масоперенесення; (2.2) – рівняння масоперенесення в неізотермічних умовах; (2.3) – рівняння теплоперенесення; (2.4) – узагальнений закон Дарсі-Герсеванова на випадок руху сольових розчинів при наявності градієнта температури та рівняння нерозривності; (2.5) – граничні умови для зміщень, що означають відсутність зміщень на нижній та верхній межах ґрунту; (2.6) – граничні умови для напору; (2.7) – (2.9) – крайові умови для концентрації та температури.

Як відомо (див. напр., [87]), деформації та напруження в одновимірному випадку з урахуванням неізотермічного режиму обчислюються за формулами

$$\varepsilon = \frac{dU}{dx}, \quad \sigma = E(c, T) \left( \frac{dU}{dx} - \alpha_T \bar{T} \right), \quad x \in (0, l), \quad (2.12)$$

де  $E(c, T)$  – модуль Юнга, залежність якого від концентрації сольових розчинів отримана в [91].

### 2.1.3. Чисельний розв'язок крайової задачі

Для чисельного розв'язування поставленої задачі покриємо область  $\bar{Q} = [0; l] \times [0; t_1]$  рівномірною сіткою  $\bar{Q}^{(m_1, n_1)} = [0; m_1 h_1] \times [0; n_1 \tau]$  з кроками  $h_1$  та  $\tau$  відповідно по змінній  $x$  та часу  $t$ . Нехай  $m_1$  – кількість кроків по просторовій змінній,  $n_1$  – кількість кроків по часу.



Для дискретизації рівнянь (2.1), (2.5) та (2.8) використаємо монотонну різницеву схему О.А.Самарського [131–133]. В результаті отримаємо скінченно-різницеві аналоги даних диференціальних рівнянь.

Скінченнорізницевий аналог диференціального рівняння (2.1) має вигляд

$$\begin{aligned} & \frac{\chi_j^{(s)} U_{j-1} - 2U_j + U_{j+1}}{h_1} + (r^+)_j^{(s)} \frac{U_{j+1} - U_j}{h_1} + (r^-)_j^{(s)} \frac{U_j - U_{j-1}}{h_1} - \\ & - \left( \left( \frac{\lambda_{j+1}^{(s)}(c_{j+1}^{(s)}, T_{j+1}^{(s)}) - \lambda_{j-1}^{(s)}(c_{j-1}^{(s)}, T_{j-1}^{(s)})}{2h_1} + \frac{2(\mu_{j+1}^{(s)}(c_{j+1}^{(s)}, T_{j+1}^{(s)}) - \mu_{j-1}^{(s)}(c_{j-1}^{(s)}, T_{j-1}^{(s)}))}{2h_1} \right) T_j^{(s)} + \right. \\ & \left. + \left( \lambda_j^{(s)}(c_j^{(s)}, T_j^{(s)}) + 2\mu_j^{(s)}(c_j^{(s)}, T_j^{(s)}) \right) \frac{T_{j+1}^{(s)} - T_{j-1}^{(s)}}{2h_1} \right) \alpha_T = X_j, \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$j = \overline{1, m_1 - 1}, \quad s = \overline{0, n_1 - 1},$$

$$\text{де} \quad \chi_j^{(s)} = \frac{1}{1 + 0,5h_1 |r_j^{(s)}|}, \quad \lambda_j^{(s)} = \lambda_j^{(s)}(c_j^{(s)}, T_j^{(s)}), \quad \mu_j^{(s)} = \mu_j^{(s)}(c_j^{(s)}, T_j^{(s)}),$$

$$r_j^{(s)} = \frac{1}{\lambda_j^{(s)} + 2\mu_j^{(s)}} \cdot \frac{\lambda_{j+1}^{(s)} + 2\mu_{j+1}^{(s)} - \lambda_{j-1}^{(s)} + 2\mu_{j-1}^{(s)}}{2h_1}, \quad (r^+)_j^{(s)} = \frac{-r_j^{(s)} + |r_j^{(s)}|}{2} \geq 0,$$

$$(r^-)_j^{(s)} = \frac{-r_j^{(s)} - |r_j^{(s)}|}{2} \leq 0.$$

Для обчислення масової сили за формулою (2.10) маємо

$$X_j = \gamma_{zs} + \frac{P_{j+1} - P_{j-1}}{2h_1}, \quad P_j = \gamma_p (h_j - jh_1), \quad j = \overline{1, m_1 - 1}. \quad (2.14)$$

Скінченнорізницевий аналог (2.2) має наступний вигляд:

$$\begin{aligned} & n_p \frac{c_j^{(s+1)} - c_j^{(s)}}{\tau} = \frac{\eta_j^{(s)}}{h_1} \left( d_{j+1}^{(s)} \frac{c_{j+1}^{(s+1)} - c_j^{(s+1)}}{h_1} - d_j^{(s)} \frac{c_j^{(s+1)} - c_{j-1}^{(s+1)}}{h_1} \right) + \\ & + \frac{(v^+)_j^{(s)}}{D_j^{(s)}(c_j^{(s)}, (T_1)_j^{(s)})} d_{j+1}^{(s)} \frac{c_{j+1}^{(s+1)} - c_j^{(s+1)}}{h_1} + \frac{(v^-)_j^{(s)}}{D_j^{(s)}(c_j^{(s)}, (T_1)_j^{(s)})} d_j^{(s)} \frac{c_j^{(s+1)} - c_{j-1}^{(s+1)}}{h_1} - \\ & - \gamma(c_j^{(s+1)} - C_m) + \frac{1}{h_1} \left( (d_T)_{j+1}^{(s)} \frac{T_{j+1}^{(s+1)} - T_j^{(s+1)}}{h_1} - (d_T)_j^{(s)} \frac{T_j^{(s+1)} - T_{j-1}^{(s+1)}}{h_1} \right), \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$j = \overline{1, m_1 - 1}, \quad s = \overline{0, n_1 - 1},$$

$$\begin{aligned}
\text{де} \quad d_j^{(s)} &= \frac{1}{2} \left( D_j^{(s)}(c_j^{(s)}, T_j^{(s)}) + D_{j-1}^{(s)}(c_{j-1}^{(s)}, T_j^{(s)}) \right), & (d_T)_j^{(s)} &= \frac{1}{2} \left( (D_T)_j^{(s)} + (D_T)_{j-1}^{(s)} \right), \\
\eta_j^{(s)} &= \frac{1}{1 + \frac{h_1 |v_j^{(s)}|}{2D_j^{(s)}(c_j^{(s)}, T_j^{(s)})}} = 1 - \frac{h_1 |v_j^{(s)}|}{2D_j^{(s)}(c_j^{(s)}, T_j^{(s)})} + O(h_1^2), & (v^+)_j^{(s)} &= \frac{-v_j^{(s)} + |v_j^{(s)}|}{2} \geq 0, \\
(v^-)_j^{(s)} &= \frac{-v_j^{(s)} - |v_j^{(s)}|}{2} \leq 0.
\end{aligned}$$

Скінченнорізницевий аналог диференціального рівняння теплоперенесення (2.3) запишеться наступним чином:

$$\begin{aligned}
c_T \frac{T_j^{(s+1)} - T_j^{(s)}}{\tau} &= \frac{\bar{\eta}_j^{(s)}}{h_1} \left( (\bar{\lambda}_T)_{j+1}^{(s)} \frac{T_{j+1}^{(s+1)} - T_j^{(s+1)}}{h_1} - (\bar{\lambda}_T)_j^{(s)} \frac{T_j^{(s+1)} - T_{j-1}^{(s+1)}}{h_1} \right) + \\
&+ \rho c_\rho \left( \frac{(v^+)_j^{(s)}}{(\lambda_T)_j^{(s)}} (\bar{\lambda}_T)_{j+1}^{(s)} \frac{T_{j+1}^{(s+1)} - T_j^{(s+1)}}{h_1} + \frac{(v^-)_j^{(s)}}{(\lambda_T)_j^{(k)}} (\bar{\lambda}_T)_j^{(s)} \frac{T_j^{(s+1)} - T_{j-1}^{(s+1)}}{h_1} \right), \quad (2.16)
\end{aligned}$$

$$j = \overline{1, m_1 - 1}, \quad s = \overline{0, n_1 - 1},$$

$$\text{де } (\bar{\lambda}_T)_j^{(s)} = \frac{1}{2} \left( (\lambda_T)_j^{(s)} + (\lambda_T)_{j-1}^{(s)} \right), \quad \bar{\eta}_j^{(s)} = \frac{1}{1 + \frac{h_1 \rho c_\rho |v_j^{(s)}|}{2(\lambda_T)_j^{(s)}}} = 1 - \frac{h_1 \rho c_\rho |v_j^{(s)}|}{2(\lambda_T)_j^{(s)}} + O(h_1^2).$$

Для закону (2.4) маємо

$$v_j^{(s)} = -K_j^{(s)}(c_j^{(s)}, T_j^{(s)}) \frac{h_{j+1} - h_{j-1}}{2h_1} + (v_c)_j^{(s)}(c_j^{(s)}) \frac{c_{j+1}^{(s)} - c_{j-1}^{(s)}}{2h_1} + v_T \frac{T_{j+1}^{(s)} - T_{j-1}^{(s)}}{2h_1}, \quad (2.17)$$

$$j = \overline{1, m_1 - 1}, \quad s = \overline{1, n_1 - 1}.$$

З рівняння нерозривності (2.4) при  $\frac{\partial n_p}{\partial t} = 0$  отримаємо

$$\frac{dv}{dx} = \frac{d \left( -K(c, T) \frac{dh}{dx} + v_c(c) \frac{\partial c}{\partial x} + v_T \frac{\partial T}{\partial x} \right)}{dx} = 0.$$

Звідки маємо

$$-K(c, T) \frac{d^2 h}{dx^2} - \frac{d(-K(c, T))}{dx} \frac{dh}{dx} + v_c(c) \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial(v_c(c))}{\partial x} \frac{\partial c}{\partial x} + v_T \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0. \quad (2.18)$$

Для дискретизації рівняння (2.18) використаємо монотонну різницьку схему О.А.Самарського [131–133]. В результаті отримаємо скінченнорізницьвий аналог даного диференціального рівняння

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\chi}_j^{(s)}}{h_1} \frac{h_{j-1} - 2h_j + h_{j+1}}{h_1} + (\bar{r}^+)_j^{(s)} \frac{h_{j+1} - h_j}{h_1} + (\bar{r}^-)_j^{(s)} \frac{h_j - h_{j-1}}{h_1} + (v_c)_j^{(s)} (c_j^{(s)}) \frac{c_{j-1}^{(s)} - 2c_j^{(s)} + c_{j+1}^{(s)}}{h_1^2} + \\ + \frac{(v_c)_{j+1}^{(s)} (c_{j+1}^{(s)}) - (v_c)_{j-1}^{(s)} (c_{j-1}^{(s)})}{2h_1} \frac{c_{j-1}^{(s)} - c_{j+1}^{(s)}}{2h_1} + v_T \frac{T_{j-1}^{(s)} - 2T_j^{(s)} + T_{j+1}^{(s)}}{h_1^2} = 0, \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$j = \overline{1, m_1 - 1}, \quad s = \overline{1, n_1 - 1},$$

$$\text{де} \quad \bar{\chi}_j^{(s)} = \frac{1}{1 + 0,5h_1 |\bar{r}_j^{(s)}|}, \quad \bar{r}_j^{(s)} = \frac{1}{K_j^{(s)}(c_j^{(s)}, T_j^{(s)})} \cdot \frac{K_{j+1}^{(s)}(c_{j+1}^{(s)}, T_{j+1}^{(s)}) - K_{j-1}^{(s)}(c_{j-1}^{(s)}, T_{j-1}^{(s)})}{2h_1},$$

$$(\bar{r}^+)_j^{(s)} = \frac{-\bar{r}_j^{(s)} + |\bar{r}_j^{(s)}|}{2} \geq 0, \quad (\bar{r}^-)_j^{(s)} = \frac{-\bar{r}_j^{(s)} - |\bar{r}_j^{(s)}|}{2} \leq 0.$$

Для початкових умов (2.9) маємо наступні скінченнорізницьві аналоги:

$$c_j^{(0)} = \tilde{C}_0(jh_1), \quad T_j^{(0)} = \tilde{T}_0(jh_1), \quad j = \overline{0, m_1}. \quad (2.20)$$

Для граничних умов (2.5)–(2.8) першого роду скінченнорізницьві аналоги мають наступний вигляд:

$$U_0 = U_{m_1} = 0, \quad (2.21)$$

$$h_0 = \tilde{H}_1, \quad h_{m_1} = \tilde{H}_2, \quad (2.22)$$

$$c_0^{(s)} = \tilde{C}_1(s\tau), \quad c_{m_1}^{(s)} = \tilde{C}_2(s\tau), \quad T_0^{(s)} = \tilde{T}_1(s\tau), \quad T_{m_1}^{(s)} = \tilde{T}_2(s\tau), \quad s = \overline{1, n_1}. \quad (2.23)$$

Скінченнорізницьві аналоги для деформацій та напружень (2.12) мають вигляд

$$\varepsilon_j = \frac{U_{j+1} - U_{j-1}}{2h_1}, \quad \sigma_j = E_j^{(s)}(c_j^{(s)}, T_j^{(s)}) \left( \frac{U_{j+1} - U_{j-1}}{2h_1} - \alpha_T (T_j^{(s)} - T_j^{(0)}) \right), \quad (2.24)$$

$$j = \overline{1, m_1}, \quad s = \overline{0, n_1}.$$

Для знаходження невідомих функцій  $U(x)$ ,  $\varepsilon(x)$ ,  $\sigma(x)$ ,  $c(x, t)$ ,  $T(x, t)$ ,  $h(x)$  на часовому шарі  $(s+1)$  використаємо нижченаведений алгоритм, вважаючи що на часовому шарі  $(s)$  задача вже розв'язана.

1. Використовуючи монотонні різницеві схеми (2.15) та (2.16), а також апроксимацію відповідних граничних умов, знаходимо температуру  $T(x, t)$  ґрунту та концентрацію сольового розчину  $c(x, t)$  на часовому шарі  $(s + 1)$ .
2. За монотонною різницевою схемою (2.13), використовуючи апроксимацію відповідних граничних умов, обчислюємо значення зміщень  $U(x)$ , а відповідно і за формулами (2.24) – значення деформації  $\varepsilon(x)$  та напруження  $\sigma(x)$ .
3. Використовуючи монотонну різницеву схему (2.19), апроксимацію відповідних граничних умов, знаходимо напір  $h(x)$ , а також за формулою (2.17) знаходимо швидкість фільтрації.
4. Переходимо на наступний часовий шар і повторюємо алгоритм, починаючи з першого кроку.

Для знаходження значень зміщень  $U(x)$  з різницевого рівняння (2.13) використаємо метод прогонки [131–133]. Для цього зведемо дане рівняння до прогнотного вигляду

$$a_j U_{j-1} - \bar{c}_j U_j + b_j U_{j+1} = -F_j^{(s)},$$

де

$$a_j = r' - r'', \quad b_j = r' + r'', \quad \bar{c}_j = 2r',$$

$$F_j^{(s)} = -X_j - \left( \left( \lambda_j^{(s)}(c_j^{(s)}, T_j^{(s)}) + 2\mu_j^{(s)}(c_j^{(s)}, T_j^{(s)}) \right) \frac{T_{j+1}^{(s)} - T_{j-1}^{(s)}}{2h_1} + \left( \frac{\lambda_{j+1}^{(s)}(c_{j+1}^{(s)}, T_{j+1}^{(s)}) - \lambda_{j-1}^{(s)}(c_{j-1}^{(s)}, T_{j-1}^{(s)})}{2h_1} + \frac{2(\mu_{j+1}^{(s)}(c_{j+1}^{(s)}, T_{j+1}^{(s)}) - \mu_{j-1}^{(s)}(c_{j-1}^{(s)}, T_{j-1}^{(s)}))}{2h_1} \right) T_j^{(s)} \right) \alpha_T,$$

$$r' = \frac{\lambda_j^{(s)}(c_j^{(s)}, T_j^{(s)}) + 2\mu_j^{(s)}(c_j^{(s)}, T_j^{(s)})}{h_1^2},$$

$$r'' = \frac{(\lambda_{j+1}^{(s)}(c_{j+1}^{(s)}, T_{j+1}^{(s)}) - \lambda_{j-1}^{(s)}(c_{j-1}^{(s)}, T_{j-1}^{(s)})) + 2(\mu_{j+1}^{(s)}(c_{j+1}^{(s)}, T_{j+1}^{(s)}) - \mu_{j-1}^{(s)}(c_{j-1}^{(s)}, T_{j-1}^{(s)}))}{4h_1^2}.$$

Можна показати, що умови стійкості прогонки  $|\bar{c}_j| \geq |a_j| + |b_j|$  виконуються.

Значення зміщень послідовно знаходимо, використовуючи співвідношення

$$U_j = \alpha_{j+1}U_{j+1} + \beta_{j+1}, \quad (2.25)$$

$$\text{де } \alpha_{j+1} = \frac{b_j}{\bar{c}_j - a_j\alpha_j}, \quad \beta_{j+1} = \frac{a_j\beta_j + F_j^{(s)}}{\bar{c}_j - a_j\alpha_j}, \quad \alpha_1 = 0, \quad \beta_1 = 0.$$

Для знаходження концентрації солей  $c(x, t)$  використаємо метод прогонки [131–133]. Для цього зведемо рівняння (2.15) до прогоночного вигляду

$$a_j c_{j-1}^{(s+1)} - \bar{c}_j c_j^{(s+1)} + b_j c_{j+1}^{(s+1)} = -c_j^{(s)} - \bar{s}_j^{(s+1)},$$

де

$$a_j = \frac{\tau}{n_p} \frac{d_j^{(s)}}{h_1} \left( \frac{\eta_j^{(s)}}{h_1} - \frac{(v^-)^{(s)}}{D_j^{(s)}} \right), \quad b_j = \frac{\tau}{n_p} \frac{d_{j+1}^{(s)}}{h_1} \left( \frac{\eta_j^{(s)}}{h_1} + \frac{(v^+)^{(s)}}{D_j^{(s)}} \right),$$

$$\bar{c}_j = 1 + \frac{\tau}{n_p} \left( \frac{\eta_j^{(s)}(d_{j+1}^{(s)} + d_j^{(s)})}{h_1^2} + \frac{1}{D_j^{(s)}} ((v^+)^{(s)} d_{j+1}^{(s)} - (v^-)^{(s)} d_j^{(s)}) + \gamma \right),$$

$$\bar{s}_j^{(s+1)} = \frac{\tau}{n_p} \left( \gamma C_m + \frac{1}{h_1} \left( (d_T)_{j+1}^{(s)} \frac{T_{j+1}^{(s+1)} - T_j^{(s+1)}}{h_1} - (d_T)_j^{(s)} \frac{T_j^{(s+1)} - T_{j-1}^{(s+1)}}{h_1} \right) \right).$$

Легко бачити, що умови стійкості прогонки  $|\bar{c}_j| > |a_j| + |b_j|$  виконуються. Значення  $c(x, t)$  на часовому шарі  $(s+1)$  знаходимо, використовуючи співвідношення

$$c_j^{(s+1)} = \alpha_{j+1} \cdot c_{j+1}^{(s+1)} + \beta_{j+1}, \quad (2.26)$$

$$\text{де } \alpha_{j+1} = \frac{b_j}{\bar{c}_j - a_j\alpha_j}, \quad \beta_{j+1} = \frac{a_j\beta_j + c_j^{(s)} + \bar{s}_j^{(s+1)}}{\bar{c}_j - a_j\alpha_j}, \quad \alpha_1 = 0, \quad \beta_1 = \tilde{C}_1(s\tau).$$

Для знаходження температури  $T(x, t)$  з різницевого рівняння (2.16) використаємо метод прогонки [131–133]. В результаті отримаємо

$$a_j T_{j-1}^{(s+1)} - \bar{c}_j T_j^{(s+1)} + b_j T_{j+1}^{(s+1)} = -T_j^{(s)},$$

де

$$a_j = \frac{\tau}{c_T} \frac{(\bar{\lambda}_T)_j^{(s)}}{h_1} \left( \frac{\bar{\eta}_j^{(s)}}{h_1} - \frac{\rho c_\rho (v^-)^{(s)}}{(\lambda_T)_j^{(s)}} \right), \quad b_j = \frac{\tau}{c_T} \frac{(\bar{\lambda}_T)_{j+1}^{(s)}}{h_1} \left( \frac{\bar{\eta}_j^{(s)}}{h_1} + \frac{\rho c_\rho (v^+)^{(s)}}{(\lambda_T)_j^{(s)}} \right),$$

$$\bar{c}_j = 1 + \frac{\tau}{c_T} \left( \frac{\bar{\eta}_j^{(s)} \left( (\bar{\lambda}_T)_{j+1}^{(s)} + (\bar{\lambda}_T)_j^{(s)} \right)}{h_1^2} + \frac{\rho c_\rho}{(\lambda_T)_j^{(s)}} \left( (v^+)^{(s)} (\bar{\lambda}_T)_{j+1}^{(s)} - (v^-)^{(s)} (\bar{\lambda}_T)_j^{(s)} \right) \right).$$

Неважко показати, що умови стійкості прогонки  $|\bar{c}_j| > |a_j| + |b_j|$  виконуються.

Значення температури на часовому шарі  $(s+1)$  послідовно знаходимо за (2.27)

$$T_j^{(s+1)} = \alpha_{j+1} \cdot T_{j+1}^{(s+1)} + \beta_{j+1}, \quad (2.27)$$

$$\text{де } \alpha_{j+1} = \frac{b_j}{\bar{c}_j - a_j \alpha_j}, \quad \beta_{j+1} = \frac{a_j \beta_j + T_j^{(s)}}{\bar{c}_j - a_j \alpha_j}, \quad \alpha_1 = 0, \quad \beta_1 = \tilde{T}_1(s\tau).$$

Для знаходження п'єзометричного напору  $h(x)$  використаємо метод прогонки [131–133]. Прогоночний вигляд рівняння (2.19) наступний:

$$a_j h_{j-1} - \bar{c}_j h_j + b_j h_{j+1} = -\bar{F}_j^{(s)},$$

де

$$a_j = \frac{\bar{\chi}_j^{(s)}}{h_1^2} - \frac{(\bar{r}^-)_j^{(s)}}{h_1}, \quad b_j = \frac{\bar{\chi}_j^{(s)}}{h_1^2} + \frac{(\bar{r}^+)_j^{(s)}}{h_1}, \quad \bar{c}_j = \frac{2\bar{\chi}_j^{(s)}}{h_1^2} + \frac{(\bar{r}^+)_j^{(s)}}{h_1} - \frac{(\bar{r}^-)_j^{(s)}}{h_1},$$

$$\bar{F}_j^{(s)} = (v_c)_j^{(s)} (c_j^{(s)}) \frac{c_{j-1}^{(s)} - 2c_j^{(s)} + c_{j+1}^{(s)}}{h_1^2} + \frac{(v_c)_{j+1}^{(s)} (c_{j+1}^{(s)}) - (v_c)_{j-1}^{(s)} (c_{j-1}^{(s)})}{2h_1} \frac{c_{j-1}^{(s)} - c_{j+1}^{(s)}}{2h_1} + v_T \frac{T_{j-1}^{(s)} - 2T_j^{(s)} + T_{j+1}^{(s)}}{h_1^2}.$$

Неважко показати, що умови стійкості прогонки  $|\bar{c}_j| > |a_j| + |b_j|$  виконуються.

Значення напору послідовно знаходимо, використовуючи співвідношення

$$h_j = \alpha_{j+1} h_{j+1} + \beta_{j+1}, \quad (2.28)$$

$$\text{де } \alpha_{j+1} = \frac{b_j}{\bar{c}_j - a_j \alpha_j}, \quad \beta_{j+1} = \frac{a_j \beta_j + \bar{F}_j^{(s)}}{\bar{c}_j - a_j \alpha_j}, \quad \alpha_1 = 0, \quad \beta_1 = \tilde{H}_1.$$

#### 2.1.4. Результати чисельних експериментів та їх аналіз

Як приклад, розглянуто одновимірну задачу НДС водонасиченого ґрунтового масиву товщиною  $l = 10$  м з урахуванням впливу тепло-масоперенесення при фільтрації сольових розчинів.

Значення вхідних даних брались наступними [36, 38, 91, 109, 158]:

$$n_p = 0,4, \quad D = D_T = 2 \cdot 10^{-3} \frac{\text{м}^2}{\text{доба}}, \quad \alpha_T = 1 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{град}}, \quad \gamma_p = 1 \cdot 10^4 \frac{\text{Па}}{\text{м}}, \quad \gamma_{ze} = 1,3 \cdot 10^4 \frac{\text{Па}}{\text{м}},$$

$$\rho = 1100 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \quad \rho_{cp} = 1650 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \quad \rho_p = 1000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \quad c_p = 4,2 \cdot 10^3 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{град}},$$

$$c_T = 2,137 \cdot 10^6 \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3 \cdot \text{град}}, \quad \lambda_T = 108 \cdot 10^3 \frac{\text{Дж}}{\text{м} \cdot \text{град} \cdot \text{доба}}, \quad \gamma = 6,5 \cdot 10^{-5} \text{ доба}^{-1},$$

$$v_c = 2,8 \cdot 10^{-5} \frac{\text{м}^5}{\text{кг} \cdot \text{доба}}, \quad v_T = 2,8 \cdot 10^{-6} \frac{\text{м}^2}{\text{град} \cdot \text{доба}}, \quad \tilde{C}_1(t) = \tilde{C}_0(x) = 8 \frac{\text{г}}{\text{літр}},$$

$$\tilde{C}_2(t) = 350 \frac{\text{г}}{\text{літр}}, \quad \tilde{T}_1(t) = \tilde{T}_0(x) = 5^\circ \text{C}, \quad \tilde{T}_2(t) = 25^\circ \text{C}, \quad \tilde{H}_1 = 0 \text{ м}, \quad \tilde{H}_2 = 1 \text{ м}.$$

Час, протягом якого розглядався процес НДС, дорівнював 4 рокам. Нижче наведено результати чисельних експериментів у вигляді графіків.

На рис. 2.2–2.7 наведено розподіли зміщень, деформацій, напружень та напорів з урахуванням тепло-масоперенесення при фільтрації сольових розчинів та концентрації сольових розчинів і температури в часі. На рис. 2.8–2.10 наведені при  $t = 1440$  діб: 1) без тепло-масоперенесення; 2) при наявності масоперенесення; 3) при наявності тепло-масоперенесення.

Як видно з рис. 2.2–2.4, при врахуванні впливу тепло-масоперенесення за фільтрації сольових розчинів у ґрунтовому масиві значення зміщень, деформацій та напружень з часом зростають. З рис. 2.5–2.7 видно, що напір в умовах тепло-масоперенесення, концентрація сольових розчинів у неізотермічному режимі та температура при фільтрації сольових розчинів також зростають з часом. Як видно з рис. 2.8–2.10, зміщення, деформації і напруження збільшуються при врахуванні тепло-масоперенесення в порівнянні з відповідними величинами без урахування тепло-масоперенесення. Крім того, зміщення, деформації і напруження також збільшуються з урахуванням тепло-масоперенесення по відношенню до відповідних величин при врахуванні лише масоперенесення (рис. 2.8–2.11). Масоперенесення в неізотермічних умовах дещо впливає на картину НДС у порівнянні із масоперенесенням в ізотермічних умовах.

Результати аналітичного розв'язання одновимірної задачі НДС для різних типів ґрунтових середовищ та їх аналіз наведені в Додатку Г. Результати чисельних експериментів та їх аналіз при наявності теплоперенесення наведені в Додатку Д.

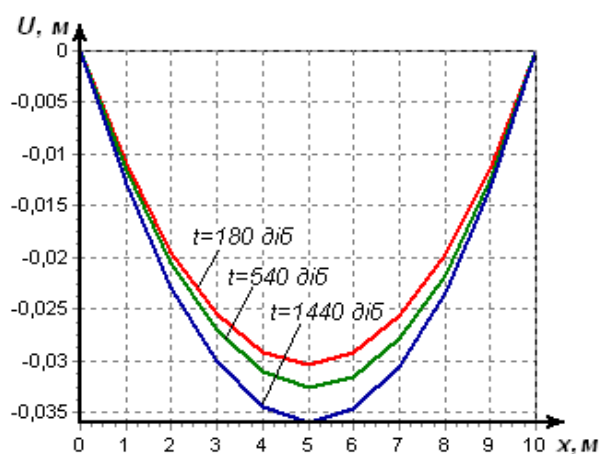


Рис. 2.2. Розподіли зміщень

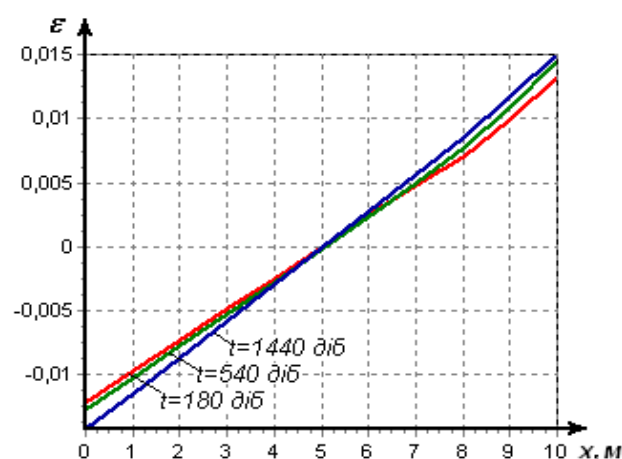


Рис. 2.3. Розподіли деформацій

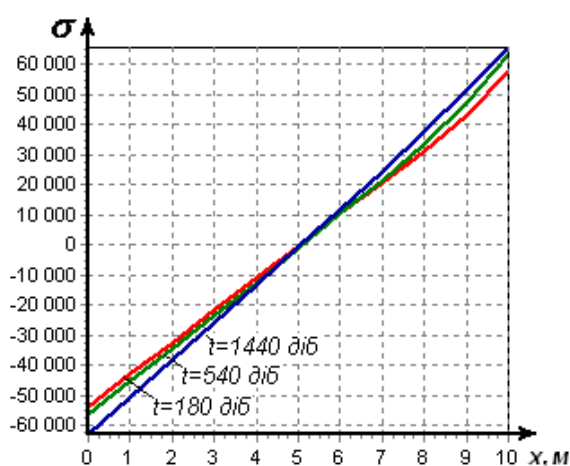


Рис. 2.4. Розподіли напружень

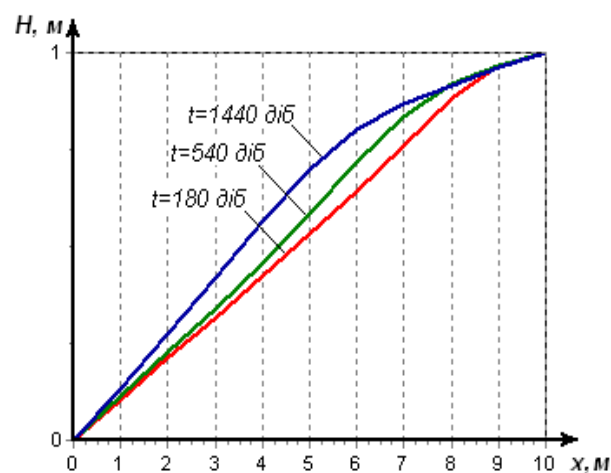
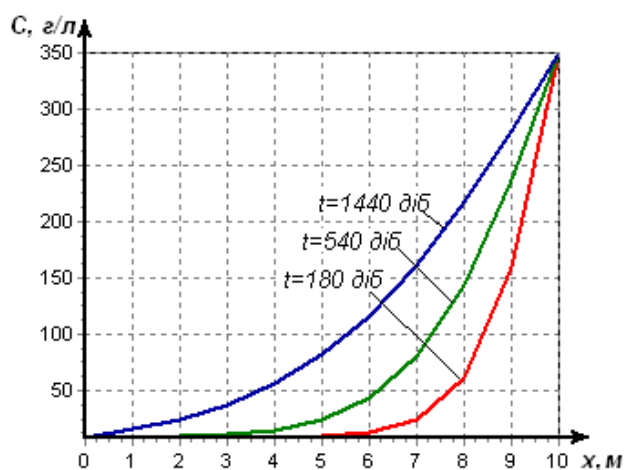
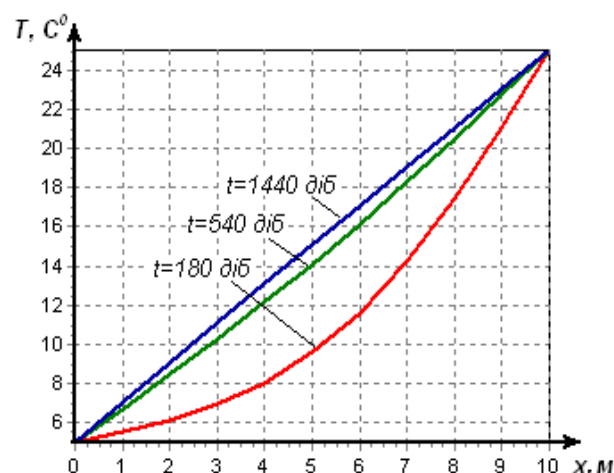


Рис. 2.5. Розподіли напорів

Рис. 2.6. Розподіли концентрації  
сольових розчинів у неізотермічному  
режиміРис. 2.7. Розподіли температури при  
фільтрації сольових розчинів



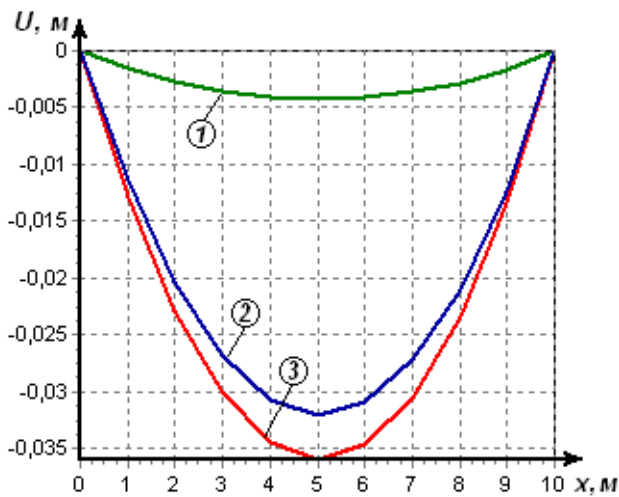


Рис. 2.8. Розподіли зміщень

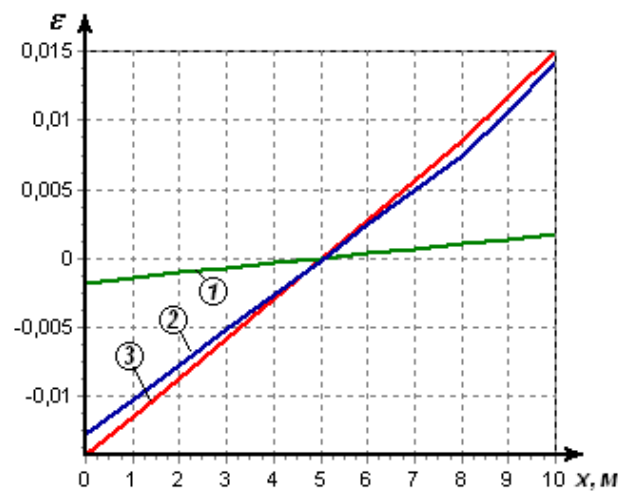


Рис. 2.9. Розподіли деформацій



Рис. 2.10. Розподіли напружень

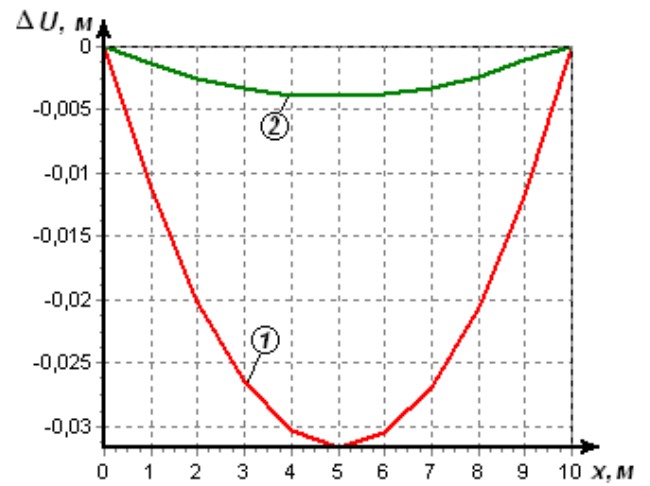


Рис. 2.11. Графіки різниць між розподілом зміщень при  $t = 1440$  діб :

- 1) з урахуванням та без урахування тепло-масоперенесення;
- 2) з урахуванням тепло-масоперенесення та без урахування теплоперенесення

## 2.2. Математичне моделювання впливу тепло-масоперенесення при фільтрації сольових розчинів на напружено-деформований стан ґрунтового масиву в двовимірному випадку

Двовимірною задачею НДС зводиться до знаходження у довільній точці пружного тіла (в нашому випадку – ґрунтового середовища) двох компонент зміщень  $U$  та  $V$ , трьох компонент деформацій  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  та  $\varepsilon_{xy}$ , а також трьох компонент напружень  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  та  $\tau_{xy}$ .

### 2.2.1. Постановка задачі

Розглянемо ґрунтовий масив прямокутної форми, що займає область  $\Omega = \{(x, y) : 0 < x < l_1, 0 < y < l_2\}$ .

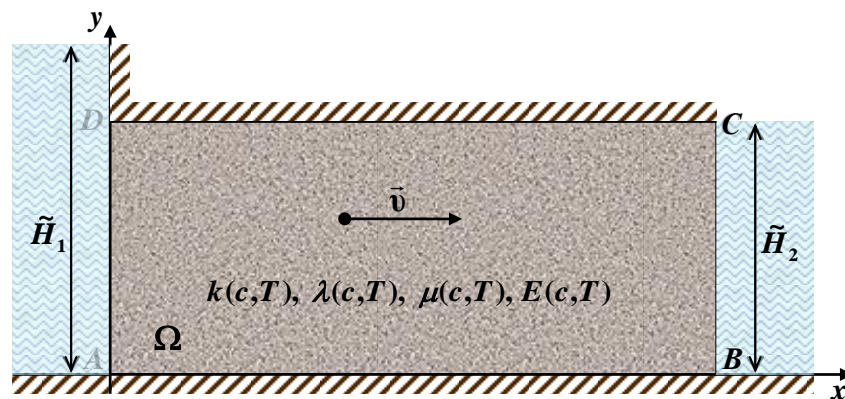


Рис.2.12. Схема ґрунтового масиву в двовимірному випадку

ґрунтовий масив вважається пружно-деформівним в межах лінійної теорії пружності з пружними параметрами (коефіцієнтами Ламе)  $\lambda(c, T)$ ,  $\mu(c, T)$ , які залежать від концентрації сольового розчину та температури.

На рис. 2.12 область  $\Omega$  ґрунтового масиву вважається водонасиченою, на яку діють сила тяжіння, архімедова та фільтраційна сили.

Задані значення п'єзометричних напорів  $\tilde{H}_1$ ,  $\tilde{H}_2$ , температур  $\tilde{T}_1$  та  $\tilde{T}_2$  у лівому ( $AD$ ) та правому ( $BC$ ) водних басейнах відповідно, причому  $\tilde{H}_1 > \tilde{H}_2$ ,  $\tilde{T}_1 > \tilde{T}_2$ . У лівому водному басейні задано значення концентрації сольових розчинів  $\tilde{C}_1$ , а у

правому – умову швидкого виносу солей. Під впливом градієнтів напорів, концентрації солей та температури відбувається перенесення розчинених у воді речовин та тепла фільтраційним потоком. При цьому процеси фільтрації розчинених у воді речовин та тепла підлягають відповідно законам Дарсі, Фіка та Фур'є.

Припускається, що відсутні зміщення нижньої (скельної основи) ( $AB$ ) та верхньої ( $CD$ ) меж ґрунтового масиву, а також нижня і верхня межі ґрунтового масиву є теплоізольованими та непроникними.

Таким чином, в досліджуваній області ґрунтового масиву  $\mathbf{X} \in \Omega$  необхідно розрахувати розподіл вектора зміщень  $\mathbf{u}(\mathbf{X}) = (U(\mathbf{X}), V(\mathbf{X}))$ ; розподіли нормальних  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  та дотичних  $\varepsilon_{xy}$  деформацій; розподіли нормальних  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  та дотичних  $\tau_{xy}$  напружень; розподіли п'єзометричного напору  $h(\mathbf{X})$ , концентрації сольових розчинів  $c(\mathbf{X}, t)$  та температури  $T(\mathbf{X}, t)$ .

### 2.2.2. Математична модель задачі

Математичну модель вищеописаної задачі в двовимірному випадку, враховуючи результати розділу 1 та результати робіт [64, 57, 59, 67], можна описати наступною крайовою задачею:

$$\begin{aligned}
 & \mu(c, T) \Delta U + (\lambda(c, T) + \mu(c, T)) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) + \frac{\partial \lambda(c, T)}{\partial x} \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) + \\
 & \quad + 2 \frac{\partial \mu(c, T)}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial \mu(c, T)}{\partial y} \left( \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) - \\
 & \quad - \left( \left( 2 \frac{\partial \lambda(c, T)}{\partial x} + 2 \frac{\partial \mu(c, T)}{\partial x} \right) T + (2\lambda(c, T) + 2\mu(c, T)) \frac{\partial T}{\partial x} \right) \alpha_T = X, \\
 & \mu(c, T) \Delta V + (\lambda(c, T) + \mu(c, T)) \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) + \frac{\partial \lambda(c, T)}{\partial y} \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) + \\
 & \quad + 2 \frac{\partial \mu(c, T)}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial \mu(c, T)}{\partial x} \left( \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) - \\
 & \quad - \left( \left( 2 \frac{\partial \lambda(c, T)}{\partial y} + 2 \frac{\partial \mu(c, T)}{\partial y} \right) T + (2\lambda(c, T) + 2\mu(c, T)) \frac{\partial T}{\partial y} \right) \alpha_T = Y, \quad \mathbf{X} \in \Omega,
 \end{aligned} \tag{2.29}$$

$$X = \frac{dp_1}{dx}, Y = \gamma_{36} + \frac{dp_2}{dy}, \quad (2.30)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{D}(c, T) \nabla c) - \mathbf{v} \nabla c - \gamma(c - C_m) + \nabla \cdot (\mathbf{D}_T \nabla T) = n_p \frac{\partial c}{\partial t}, \quad \mathbf{X} \in \Omega, t > 0, \quad (2.31)$$

$$\nabla \cdot (\lambda_T \nabla T) - \rho c_\rho \mathbf{v} \nabla T = c_T \frac{\partial T}{\partial t}, \quad \mathbf{X} \in \Omega, t > 0, \quad (2.32)$$

$$\mathbf{v} = -\mathbf{K}(c, T) \nabla h + \mathbf{v}_c(c) \nabla c + \mathbf{v}_T \nabla T, \quad \text{div } \mathbf{v} + \frac{\partial n_p}{\partial t} = 0, \quad \mathbf{X} \in \Omega, t > 0, \quad (2.33)$$

$$\mathbf{q}_c = \mathbf{v} c - \mathbf{D}(c, T) \nabla c - \mathbf{D}_T \nabla T, \quad \mathbf{X} \in \Omega, t > 0, \quad (2.34)$$

$$\mathbf{q}_T = \rho c_\rho \mathbf{v} T - \lambda_T \nabla T, \quad \mathbf{X} \in \Omega, t > 0, \quad (2.35)$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right), \quad \mathbf{X} \in \Omega, \quad (2.36)$$

$$\sigma_x = \frac{\theta}{1+\nu} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) - \alpha_T \bar{T} \theta, \quad \sigma_y = \frac{\theta}{1+\nu} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x) - \alpha_T \bar{T} \theta, \quad \tau_{xy} = \frac{E(c, T)}{2(1+\nu)} \varepsilon_{xy}, \quad \mathbf{X} \in \Omega, \quad (2.37)$$

$$(\mathbf{v}, \mathbf{n})|_{AB \cup CD} = 0, \quad h(\mathbf{X})|_{AD} = \tilde{H}_1(\mathbf{X}), \quad h(\mathbf{X})|_{BC} = \tilde{H}_2(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X} \in \Omega, \quad (2.38)$$

$$(\mathbf{q}_c, \mathbf{n})|_{AB \cup CD} = 0, \quad c(\mathbf{X}, t)|_{AD} = \tilde{C}_1(\mathbf{X}, t), \quad \left. \frac{\partial c(\mathbf{X}, t)}{\partial n} \right|_{BC} = 0, \quad \mathbf{X} \in \Omega, t > 0, \quad (2.39)$$

$$(\mathbf{q}_T, \mathbf{n})|_{AB \cup CD} = 0, \quad T(\mathbf{X}, t)|_{AD} = \tilde{T}_1(\mathbf{X}, t), \quad T(\mathbf{X}, t)|_{BC} = \tilde{T}_2(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in \Omega, t > 0, \quad (2.40)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}) = 0, \quad \mathbf{X} \in AB \cup CD, \quad \sigma_n = 0, \quad \tau_s = 0, \quad \mathbf{X} \in AD \cup BC, \quad (2.41)$$

$$c(\mathbf{X}, 0) = \tilde{C}_0(\mathbf{X}), \quad T(\mathbf{X}, 0) = \tilde{T}_0(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X} \in \Omega, \quad (2.42)$$

де  $\mathbf{u}(\mathbf{X}) = (U(\mathbf{X}), V(\mathbf{X}))$  – вектор зміщень,  $U(\mathbf{X})$  – зміщення вздовж осі  $Ox$ ,  $V(\mathbf{X})$  – зміщення вздовж осі  $Oy$ ;  $\mathbf{X} = (x, y)$  – точка;  $\lambda(c, T)$ ,  $\mu(c, T)$  – коефіцієнти Ламе;  $c(\mathbf{X}, t)$  – концентрація сольових розчинів;  $T(\mathbf{X}, t)$  – температура;  $\alpha_T$  – середній коефіцієнт лінійного теплового розширення в інтервалі температур  $(T_0, T)$  [87];  $p_1 = \gamma_p(h(\mathbf{X}) - x)$ ,  $p_2 = \gamma_p(h(\mathbf{X}) - y)$  – фільтраційні тиски сольового розчину;  $\gamma_{36}$  – питома вага ґрунту, що знаходиться у зваженому стані;  $\mathbf{v}$  – вектор швидкості фільтрації;  $n_p$  – пористість;  $\mathbf{D}(c, T)$  – коефіцієнт (тензор) конвективної дифузії;  $\mathbf{D}_T$  – коефіцієнт (тензор) термодифузії;  $\lambda_T$  – коефіцієнт (тензор) ефективної

теплопровідності вологого ґрунту;  $\rho$  – густина сольового розчину;  $c_\rho$  – питома теплоємність сольового розчину;  $c_T$  – об’ємна теплоємність ґрунту при сталому об’ємі;  $\mathbf{K}(c, T)$  – коефіцієнт (тензор) фільтрації, що залежить від концентрації сольового розчину та температури;  $h(\mathbf{X})$  – п’єзометричний напір,  $\mathbf{v}_c$  – коефіцієнт (тензор) хімічного осмосу,  $\mathbf{v}_T$  – коефіцієнт (тензор) термічного осмосу;  $\theta = \frac{E(c, T)}{1 - \nu}$ ;  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона;  $\bar{T} = T(\mathbf{X}, t) - T(\mathbf{X}, 0)$  – різниця температур в даний момент часу та в початковий момент часу в заданій точці;  $\tilde{C}_0(\mathbf{X})$ ,  $\tilde{T}_0(\mathbf{X})$ ,  $\tilde{H}_1(\mathbf{X})$ ,  $\tilde{H}_2(\mathbf{X})$ ,  $\tilde{C}_1(\mathbf{X}, t)$ ,  $\tilde{T}_1(\mathbf{X}, t)$ ,  $\tilde{T}_2(\mathbf{X}, t)$  – задані функції;  $\mathbf{n}$  – вектор напрямних косинусів зовнішньої нормалі до межі  $\Gamma$ ;  $t$  – час.

Тут: (2.29) – це система рівнянь рівноваги в формі Ламе для зміщень ґрунту з врахуванням тепло-масоперенесення при фільтрації сольових розчинів; (2.30) – компоненти масової сили; (2.31) – рівняння конвективної дифузії при наявності тепло-масоперенесення; (2.32) – рівняння конвективного теплоперенесення; (2.33) – узагальнене рівняння фільтрації сольових розчинів у неізотермічних умовах та рівняння нерозривності процесу; (2.34) – питомий потік розчинених солей на випадок неізотермічних умов; (2.35) – узагальнений закон Фур’є на випадок конвективного тепло-масоперенесення; (2.36), (2.37) – нормальні та дотичні деформації і напруження. Крайові умови на границях ґрунтового масиву для шуканих функцій мають вигляд (2.38)–(2.42) відповідно.

### 2.2.3. Чисельний розв’язок крайової задачі

Покриємо область  $\bar{Q}_T = \bar{\Omega} \times [0, t_0]$  рівномірною сіткою  $\bar{Q}^{(m_1, m_2, n_1)} = ([0; m_1 h_1] \times [0; m_2 h_2]) \times [0; n_1 \tau]$  з кроками  $h_1$ ,  $h_2$  та  $\tau$  відповідно по змінних  $x$ ,  $y$  та часу  $t$  (рис. 2.13), де  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $n_1$  – кількість кроків по просторових змінних та часу відповідно.

Для апроксимації системи рівнянь (2.29) використаємо дев'ятиточковий шаблон типу «ящик» (рис.2.14).

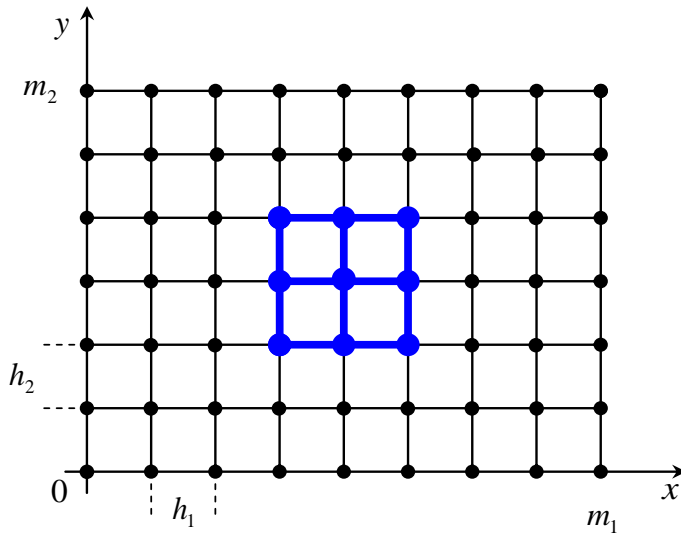


Рис 2.13. Різницева сітка в фізичній області

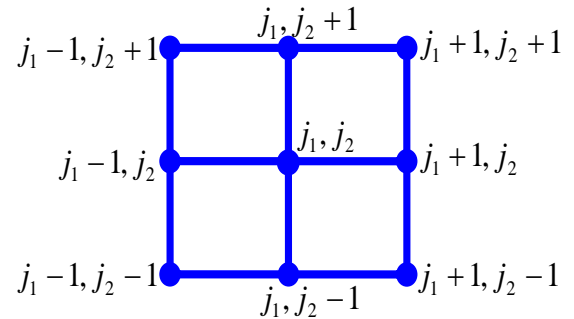


Рис 2.14. Дев'ятиточковий шаблон типу «ящик»

Запишемо систему рівнянь (2.29) у вигляді

$$\begin{aligned}
 & \mu(c, T) \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) + (\lambda(c, T) + \mu(c, T)) \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \left( \frac{\partial \lambda(c, T)}{\partial x} + 2 \frac{\partial \mu(c, T)}{\partial x} \right) \frac{\partial U}{\partial x} + \\
 & + \frac{\partial \mu(c, T)}{\partial y} \frac{\partial U}{\partial y} = X - (\lambda(c, T) + \mu(c, T)) \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \lambda(c, T)}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial \mu(c, T)}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial x} + \\
 & + \left( \left( 2 \frac{\partial \lambda(c, T)}{\partial x} + 2 \frac{\partial \mu(c, T)}{\partial x} \right) T + (2\lambda(c, T) + 2\mu(c, T)) \frac{\partial T}{\partial x} \right) \alpha_T, \\
 & \mu(c, T) \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) + (\lambda(c, T) + \mu(c, T)) \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \left( \frac{\partial \lambda(c, T)}{\partial y} + 2 \frac{\partial \mu(c, T)}{\partial y} \right) \frac{\partial V}{\partial y} + \\
 & + \frac{\partial \mu(c, T)}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} = Y - (\lambda(c, T) + \mu(c, T)) \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \lambda(c, T)}{\partial y} \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial \mu(c, T)}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial y} + \\
 & + \left( \left( 2 \frac{\partial \lambda(c, T)}{\partial y} + 2 \frac{\partial \mu(c, T)}{\partial y} \right) T + (2\lambda(c, T) + 2\mu(c, T)) \frac{\partial T}{\partial y} \right) \alpha_T, \quad \mathbf{X} \in \Omega.
 \end{aligned} \tag{2.43}$$

Побудуємо різницеву схему для (2.43). Для цього замінимо частинні похідні 2-го порядку їх наступними скінченими різницевиими аналогами:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &\approx \frac{U_{j_1+1,j_2} - 2U_{j_1,j_2} + U_{j_1-1,j_2}}{h_1^2}, & \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} &\approx \frac{U_{j_1,j_2+1} - 2U_{j_1,j_2} + U_{j_1,j_2-1}}{h_2^2}, \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} &\approx \frac{U_{j_1+1,j_2+1} - U_{j_1+1,j_2-1} - U_{j_1-1,j_2+1} + U_{j_1-1,j_2-1}}{4h_1h_2}, \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &\approx \frac{V_{j_1+1,j_2} - 2V_{j_1,j_2} + V_{j_1-1,j_2}}{h_1^2}, & \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} &\approx \frac{V_{j_1,j_2+1} - 2V_{j_1,j_2} + V_{j_1,j_2-1}}{h_2^2}, \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} &\approx \frac{V_{j_1+1,j_2+1} - V_{j_1+1,j_2-1} - V_{j_1-1,j_2+1} + V_{j_1-1,j_2-1}}{4h_1h_2}.\end{aligned}$$

Тоді скінченнорізницевої аналог системи (2.29) має вигляд (2.44) та (2.45)

$$\begin{aligned}&\mu_{j_1,j_2} \left( \frac{U_{j_1+1,j_2} - 2U_{j_1,j_2} + U_{j_1-1,j_2}}{h_1^2} + \frac{U_{j_1,j_2+1} - 2U_{j_1,j_2} + U_{j_1,j_2-1}}{h_2^2} \right) + \\ &+ (\lambda_{j_1,j_2} + \mu_{j_1,j_2}) \frac{U_{j_1+1,j_2} - 2U_{j_1,j_2} + U_{j_1-1,j_2}}{h_1^2} + \left( \frac{\lambda_{j_1+1,j_2} - \lambda_{j_1,j_2}}{h_1} + \right. \\ &\left. + 2 \frac{\mu_{j_1+1,j_2} - \mu_{j_1,j_2}}{h_1} \right) \frac{U_{j_1+1,j_2} - U_{j_1,j_2}}{h_1} + \frac{\mu_{j_1,j_2+1} - \mu_{j_1,j_2}}{h_2} \frac{U_{j_1,j_2+1} - U_{j_1,j_2}}{h_2} = f_{j_1,j_2}^1(V,T),\end{aligned}\quad (2.44)$$

$$\begin{aligned}&\mu_{j_1,j_2} \left( \frac{V_{j_1+1,j_2} - 2V_{j_1,j_2} + V_{j_1-1,j_2}}{h_1^2} + \frac{V_{j_1,j_2+1} - 2V_{j_1,j_2} + V_{j_1,j_2-1}}{h_2^2} \right) + \\ &+ (\lambda_{j_1,j_2} + \mu_{j_1,j_2}) \frac{V_{j_1,j_2+1} - 2V_{j_1,j_2} + V_{j_1,j_2-1}}{h_2^2} + \left( \frac{\lambda_{j_1,j_2+1} - \lambda_{j_1,j_2}}{h_2} + \right. \\ &\left. + 2 \frac{\mu_{j_1,j_2+1} - \mu_{j_1,j_2}}{h_2} \right) \frac{V_{j_1,j_2+1} - V_{j_1,j_2}}{h_2} + \frac{\mu_{j_1+1,j_2} - \mu_{j_1,j_2}}{h_1} \frac{V_{j_1+1,j_2} - V_{j_1,j_2}}{h_1} = f_{j_1,j_2}^2(U,T),\end{aligned}\quad (2.45)$$

де

$$\begin{aligned}f_{j_1,j_2}^1(V,T) &= X_{j_1,j_2} - (\lambda_{j_1,j_2} + \mu_{j_1,j_2}) \frac{V_{j_1+1,j_2+1} - V_{j_1+1,j_2-1} - V_{j_1-1,j_2+1} + V_{j_1-1,j_2-1}}{4h_1h_2} - \\ &- \frac{\lambda_{j_1+1,j_2} - \lambda_{j_1,j_2}}{h_1} \frac{V_{j_1,j_2+1} - V_{j_1,j_2}}{h_2} - \frac{\mu_{j_1,j_2+1} - \mu_{j_1,j_2}}{h_2} \frac{V_{j_1+1,j_2} - V_{j_1,j_2}}{h_1} + \\ &+ \left( \left( 2 \frac{\lambda_{j_1+1,j_2} - \lambda_{j_1,j_2}}{h_1} + 2 \frac{\mu_{j_1+1,j_2} - \mu_{j_1,j_2}}{h_1} \right) T_{j_1,j_2}^{(s)} + (2\lambda_{j_1,j_2} + 2\mu_{j_1,j_2}) \frac{T_{j_1+1,j_2}^{(s)} - T_{j_1-1,j_2}^{(s)}}{2h_1} \right) \alpha_T,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{j_1, j_2}^2(U, T) = & Y_{j_1, j_2} - (\lambda_{j_1, j_2} + \mu_{j_1, j_2}) \frac{U_{j_1+1, j_2+1} - U_{j_1+1, j_2-1} - U_{j_1-1, j_2+1} + U_{j_1-1, j_2-1}}{4h_1 h_2} - \\
& - \frac{\lambda_{j_1, j_2+1} - \lambda_{j_1, j_2}}{h_2} \frac{U_{j_1+1, j_2} - U_{j_1, j_2}}{h_1} - \frac{\mu_{j_1+1, j_2} - \mu_{j_1, j_2}}{h_1} \frac{U_{j_1, j_2+1} - U_{j_1, j_2}}{h_2} + \\
& + \left( \left( 2 \frac{\lambda_{j_1, j_2+1} - \lambda_{j_1, j_2}}{h_2} + 2 \frac{\mu_{j_1, j_2+1} - \mu_{j_1, j_2}}{h_2} \right) T_{j_1, j_2}^{(s)} + (2\lambda_{j_1, j_2} + 2\mu_{j_1, j_2}) \frac{T_{j_1, j_2+1}^{(s)} - T_{j_1, j_2-1}^{(s)}}{2h_2} \right) \alpha_T.
\end{aligned}$$

Тут:  $\lambda_{j_1, j_2} = \lambda_{j_1, j_2}(c_{j_1, j_2}^{(s)}, T_{j_1, j_2}^{(s)})$ ,  $\mu_{j_1, j_2} = \mu_{j_1, j_2}(c_{j_1, j_2}^{(s)}, T_{j_1, j_2}^{(s)})$ ,  $j_1 = \overline{1, m_1 - 1}$ ,  $j_2 = \overline{1, m_2 - 1}$ ,  $s = \overline{0, n_1}$ .

Скінченнорізницеві аналоги для (2.30) мають наступний вигляд:

$$X_{j_1, j_2} = \frac{(p_1)_{j_1+1, j_2} - (p_1)_{j_1-1, j_2}}{2h_1}, \quad Y_{j_1, j_2} = \gamma_{36} + \frac{(p_2)_{j_1, j_2+1} - (p_2)_{j_1, j_2-1}}{2h_2}, \quad (2.46)$$

де  $(p_1)_{j_1, j_2} = \gamma_p(h_{j_1, j_2} - j_1 h_1)$ ,  $(p_2)_{j_1, j_2} = \gamma_p(h_{j_1, j_2} - j_2 h_2)$ ,  $j_1 = \overline{1, m_1 - 1}$ ,  $j_2 = \overline{1, m_2 - 1}$ .

Диференціальне рівняння (2.31) згідно локально-одновимірного методу О.А. Самарського [131–133] подамо у вигляді наступної системи одновимірних рівнянь:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( D_1(c, T) \frac{\partial c}{\partial x} \right) - \nu_1 \frac{\partial c}{\partial x} - \frac{1}{2} \gamma(c - C_m) + \frac{\partial}{\partial x} \left( D_{T_1} \frac{\partial T}{\partial x} \right) = \frac{n_p}{2} \frac{\partial c}{\partial t}, \quad (2.47)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( D_2(c, T) \frac{\partial c}{\partial y} \right) - \nu_2 \frac{\partial c}{\partial y} - \frac{1}{2} \gamma(c - C_m) + \frac{\partial}{\partial y} \left( D_{T_2} \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{n_p}{2} \frac{\partial c}{\partial t}, \quad \mathbf{X} \in \Omega, \quad t > 0. \quad (2.48)$$

Скінченнорізницевий аналог (2.31) запишеться у вигляді

$$\begin{aligned}
n_p \frac{c_{j_1, j_2}^{(s+0,5)} - c_{j_1, j_2}^{(s)}}{\tau} = & \frac{(\eta_1)_{j_1, j_2}^{(s)}}{h_1} \left( (d_1)_{j_1+1, j_2}^{(s)} \frac{c_{j_1+1, j_2}^{(s+0,5)} - c_{j_1, j_2}^{(s+0,5)}}{h_1} - (d_1)_{j_1, j_2}^{(s)} \frac{c_{j_1, j_2}^{(s+0,5)} - c_{j_1-1, j_2}^{(s+0,5)}}{h_1} \right) + \\
& + \frac{(v_1^+)_{j_1, j_2}^{(s)}}{(D_1)_{j_1, j_2}^{(s)}} \cdot (d_1)_{j_1+1, j_2}^{(s)} \frac{c_{j_1+1, j_2}^{(s+0,5)} - c_{j_1, j_2}^{(s+0,5)}}{h_1} + \frac{(v_1^-)_{j_1, j_2}^{(s)}}{(D_1)_{j_1, j_2}^{(s)}} \cdot (d_1)_{j_1, j_2}^{(s)} \frac{c_{j_1, j_2}^{(s+0,5)} - c_{j_1-1, j_2}^{(s+0,5)}}{h_1} - \\
& - \frac{\gamma}{2} (c_{j_1, j_2}^{(s+0,5)} - C_m) + \frac{1}{h_1} \left( (d_{T_1})_{j_1+1, j_2}^{(s)} \frac{T_{j_1+1, j_2}^{(s+0,5)} - T_{j_1, j_2}^{(s+0,5)}}{h_1} - (d_{T_1})_{j_1, j_2}^{(s)} \frac{T_{j_1, j_2}^{(s+0,5)} - T_{j_1-1, j_2}^{(s+0,5)}}{h_1} \right),
\end{aligned} \quad (2.49)$$



$$\begin{aligned}
n_p \frac{c_{j_1, j_2}^{(s+1)} - c_{j_1, j_2}^{(s+0,5)}}{\tau} &= \frac{(\eta_2)_{j_1, j_2}^{(s)}}{h_2} \left( (d_2)_{j_1, j_2+1}^{(s)} \frac{c_{j_1, j_2+1}^{(s+1)} - c_{j_1, j_2}^{(s+1)}}{h_2} - (d_2)_{j_1, j_2}^{(s)} \frac{c_{j_1, j_2}^{(s+1)} - c_{j_1, j_2-1}^{(s+1)}}{h_2} \right) + \\
&+ \frac{(v_2^+)_{j_1, j_2}^{(s)}}{(D_2)_{j_1, j_2}^{(s)}} \cdot (d_2)_{j_1, j_2+1}^{(s)} \frac{c_{j_1, j_2+1}^{(s+1)} - c_{j_1, j_2}^{(s+1)}}{h_2} + \frac{(v_2^-)_{j_1, j_2}^{(s)}}{(D_2)_{j_1, j_2}^{(s)}} \cdot (d_2)_{j_1, j_2}^{(s)} \frac{c_{j_1, j_2}^{(s+1)} - c_{j_1, j_2-1}^{(s+1)}}{h_2} - \\
&- \frac{\gamma}{2} (c_{j_1, j_2}^{(s+1)} - C_m) + \frac{1}{h_2} \left( (d_{T_2})_{j_1, j_2+1}^{(s)} \frac{T_{j_1, j_2+1}^{(s+1)} - T_{j_1, j_2}^{(s+1)}}{h_2} - (d_{T_2})_{j_1, j_2}^{(s)} \frac{T_{j_1, j_2}^{(s+1)} - T_{j_1, j_2-1}^{(s+1)}}{h_2} \right), \tag{2.50}
\end{aligned}$$

$$j_1 = \overline{1, m_1 - 1}, \quad j_2 = \overline{1, m_2 - 1}, \quad s = \overline{1, n_1 - 1},$$

де

$$\begin{aligned}
(d_1)_{j_1, j_2}^{(s)} &= \frac{1}{2} \left( (D_1)_{j_1, j_2}^{(s)} + (D_1)_{j_1-1, j_2}^{(s)} \right), \quad (d_2)_{j_1, j_2}^{(s)} = \frac{1}{2} \left( (D_2)_{j_1, j_2}^{(s)} + (D_2)_{j_1, j_2-1}^{(s)} \right), \\
(D_1)_{j_1, j_2}^{(s)} &= (D_1)_{j_1, j_2}^{(s)} (c_{j_1, j_2}^{(s)}, T_{j_1, j_2}^{(s)}), \quad (D_2)_{j_1, j_2}^{(s)} = (D_2)_{j_1, j_2}^{(s)} (c_{j_1, j_2}^{(s)}, T_{j_1, j_2}^{(s)}), \\
(d_{T_1})_{j_1, j_2}^{(s)} &= \frac{1}{2} \left( (D_{T_1})_{j_1, j_2}^{(s)} + (D_{T_1})_{j_1-1, j_2}^{(s)} \right), \quad (d_{T_2})_{j_1, j_2}^{(s)} = \frac{1}{2} \left( (D_{T_2})_{j_1, j_2}^{(s)} + (D_{T_2})_{j_1, j_2-1}^{(s)} \right), \\
(\eta_{i_3})_{j_1, j_2}^{(s)} &= \frac{1}{1 + \frac{h_{j_3} |(v_{j_3}^-)_{j_1, j_2}^{(s)}|}{2(D_{j_3})_{j_1, j_2}^{(s)}}} = 1 - \frac{h_{j_3} |(v_{j_3}^-)_{j_1, j_2}^{(s)}|}{2(D_{j_3})_{j_1, j_2}^{(s)}} + O(h_{j_3}^2), \quad (v_{j_3}^+)_{j_1, j_2}^{(s)} = \frac{-(v_{j_3}^-)_{j_1, j_2}^{(s)} + |(v_{j_3}^-)_{j_1, j_2}^{(s)}|}{2} \geq 0, \\
(v_{i_3}^-)_{j_1, j_2}^{(s)} &= \frac{-(v_{j_3}^-)_{j_1, j_2}^{(s)} - |(v_{j_3}^-)_{j_1, j_2}^{(s)}|}{2} \leq 0, \quad j_3 = 1, 2.
\end{aligned}$$

Згідно локально-одновимірного методу О.А. Самарського [131–133] диференціальне рівняння (2.32) подамо у вигляді системи одновимірних рівнянь

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_{T_1} \frac{\partial T}{\partial x} \right) - \rho c_{\rho} v_1 \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{c_T}{2} \frac{\partial T}{\partial t}, \tag{2.51}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda_{T_2} \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \rho c_{\rho} v_2 \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{c_T}{2} \frac{\partial T}{\partial t}, \quad \mathbf{X} \in \Omega, \quad t > 0. \tag{2.52}$$

Тоді скінченнорізницевий аналог (2.32) запишеться у вигляді

$$\begin{aligned}
c_T \frac{T_{j_1, j_2}^{(s+0,5)} - T_{j_1, j_2}^{(s)}}{\tau} &= \frac{(\bar{\eta}_1)_{j_1, j_2}^{(s)}}{h_1} \left( (\bar{\lambda}_{T_1})_{j_1+1, j_2}^{(s)} \frac{T_{j_1+1, j_2}^{(s+0,5)} - T_{j_1, j_2}^{(s+0,5)}}{h_1} - (\bar{\lambda}_{T_1})_{j_1, j_2}^{(s)} \frac{T_{j_1, j_2}^{(s+0,5)} - T_{j_1-1, j_2}^{(s+0,5)}}{h_1} \right) + \\
&+ \rho c_{\rho} \left( \frac{(v_1^+)_{j_1, j_2}^{(s)}}{(\lambda_{T_1})_{j_1, j_2}^{(s)}} \cdot (\bar{\lambda}_{T_1})_{j_1+1, j_2}^{(s)} \frac{T_{j_1+1, j_2}^{(s+0,5)} - T_{j_1, j_2}^{(s+0,5)}}{h_1} + \frac{(v_1^-)_{j_1, j_2}^{(s)}}{(\lambda_{T_1})_{j_1, j_2}^{(s)}} \cdot (\bar{\lambda}_{T_1})_{j_1, j_2}^{(s)} \frac{T_{j_1, j_2}^{(s+0,5)} - T_{j_1-1, j_2}^{(s+0,5)}}{h_1} \right), \tag{2.53}
\end{aligned}$$

$$c_T \frac{T_{j_1, j_2}^{(s+1)} - T_{j_1, j_2}^{(s+0,5)}}{\tau} = \frac{(\bar{\eta}_2)_{j_1, j_2}^{(s)}}{h_2} \left( (\bar{\lambda}_{T_2})_{j_1, j_2+1}^{(s)} \frac{T_{j_1, j_2+1}^{(s+1)} - T_{j_1, j_2}^{(s+1)}}{h_2} - (\bar{\lambda}_{T_2})_{j_1, j_2}^{(s)} \frac{T_{j_1, j_2}^{(s+1)} - T_{j_1, j_2-1}^{(s+1)}}{h_2} \right) + \quad (2.54)$$

$$+ \rho c_\rho \left( \frac{(v_2^+)_{j_1, j_2}^{(s)}}{(\lambda_{T_2})_{j_1, j_2}^{(s)}} \cdot (\bar{\lambda}_{T_2})_{j_1, j_2+1}^{(s)} \frac{T_{j_1, j_2+1}^{(s+1)} - T_{j_1, j_2}^{(s+1)}}{h_2} + \frac{(v_2^-)_{j_1, j_2}^{(s)}}{(\lambda_{T_2})_{j_1, j_2}^{(s)}} \cdot (\bar{\lambda}_{T_2})_{j_1, j_2}^{(s)} \frac{T_{j_1, j_2}^{(s+1)} - T_{j_1, j_2-1}^{(s+1)}}{h_2} \right),$$

$$j_1 = \overline{1, m_1 - 1}, \quad j_2 = \overline{1, m_2 - 1}, \quad s = \overline{0, n_1 - 1},$$

де

$$(\bar{\lambda}_{T_1})_{j_1, j_2}^{(s)} = \frac{1}{2} \left( (\lambda_{T_1})_{j_1, j_2}^{(s)} + (\lambda_{T_1})_{j_1-1, j_2}^{(s)} \right), \quad (\bar{\lambda}_{T_2})_{j_1, j_2}^{(s)} = \frac{1}{2} \left( (\lambda_{T_2})_{j_1, j_2}^{(s)} + (\lambda_{T_2})_{j_1, j_2-1}^{(s)} \right),$$

$$(\bar{\eta}_{i_3})_{j_1, j_2}^{(s)} = \frac{1}{1 + \frac{h_{j_3} \rho c_\rho |(\nu_{j_3})_{j_1, j_2}^{(s)}|}{2(\lambda_{T_{j_3}})_{j_1, j_2}^{(s)}}}} = 1 - \frac{h_{j_3} \rho c_\rho |(\nu_{j_3})_{j_1, j_2}^{(s)}|}{2(\lambda_{T_{j_3}})_{j_1, j_2}^{(s)}} + O(h_{j_3}^2), \quad j_3 = 1, 2.$$

Для значень компонент швидкості фільтрації (2.33) отримаємо

$$(\nu_1)_{j_1, j_2}^{(s)} = -(K_1)_{j_1, j_2}^{(s)} \frac{h_{j_1+1, j_2} - h_{j_1-1, j_2}}{2h_1} + (v_{c_1})_{j_1, j_2}^{(s)} \frac{c_{j_1+1, j_2}^{(s)} - c_{j_1-1, j_2}^{(s)}}{2h_1} + v_{T_1} \frac{T_{j_1+1, j_2}^{(s)} - T_{j_1-1, j_2}^{(s)}}{2h_1}, \quad (2.55)$$

$$(\nu_2)_{j_1, j_2}^{(s)} = -(K_2)_{j_1, j_2}^{(s)} \frac{h_{j_1, j_2+1} - h_{j_1, j_2-1}}{2h_2} + (v_{c_2})_{j_1, j_2}^{(s)} \frac{c_{j_1, j_2+1}^{(s)} - c_{j_1, j_2-1}^{(s)}}{2h_2} + v_{T_2} \frac{T_{j_1, j_2+1}^{(s)} - T_{j_1, j_2-1}^{(s)}}{2h_2}, \quad (2.56)$$

$$j_1 = \overline{1, m_1 - 1}, \quad j_2 = \overline{1, m_2 - 1}, \quad s = \overline{0, n_1}.$$

Значення п'єзометричного напору знаходимо із розв'язку задачі фільтрації

(2.33). В результаті при  $\frac{\partial n_p}{\partial t} = 0$  отримаємо

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( -\mathbf{K}(c, T) \frac{\partial h}{\partial x} + \mathbf{v}_c(c) \frac{\partial c}{\partial x} + \mathbf{v}_T \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( -\mathbf{K}(c, T) \frac{\partial h}{\partial y} + \mathbf{v}_c(c) \frac{\partial c}{\partial y} + \mathbf{v}_T \frac{\partial T}{\partial y} \right) = 0,$$

або

$$\mathbf{K}(c, T) \left( \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial \mathbf{K}(c, T)}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{K}(c, T)}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial y} -$$

$$- \mathbf{v}_c(c) \left( \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial \mathbf{v}_c(c)}{\partial x} \frac{\partial c}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{v}_c(c)}{\partial y} \frac{\partial c}{\partial y} - \mathbf{v}_T \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) = 0.$$

Замінивши частинні похідні їх скінченнорізницевиими аналогами, отримаємо

$$\begin{aligned}
& K_{j_1, j_2}^{(s)} \left( \frac{h_{j_1+1, j_2} - 2h_{j_1, j_2} + h_{j_1-1, j_2}}{h_1^2} + \frac{h_{j_1, j_2+1} - 2h_{j_1, j_2} + h_{j_1, j_2-1}}{h_2^2} \right) + \frac{K_{j_1+1, j_2}^{(s)} - K_{j_1, j_2}^{(s)}}{h_1} \frac{h_{j_1+1, j_2} - h_{j_1, j_2}}{h_1} + \\
& + \frac{K_{j_1, j_2+1}^{(s)} - K_{j_1, j_2}^{(s)}}{h_2} \frac{h_{j_1, j_2+1} - h_{j_1, j_2}}{h_2} - (v_c)_{j_1, j_2}^{(s)} \left( \frac{c_{j_1+1, j_2}^{(s)} - 2c_{j_1, j_2}^{(s)} + c_{j_1-1, j_2}^{(s)}}{h_1^2} + \frac{c_{j_1, j_2+1}^{(s)} - 2c_{j_1, j_2}^{(s)} + c_{j_1, j_2-1}^{(s)}}{h_2^2} \right) - \\
& - \frac{(v_c)_{j_1+1, j_2}^{(s)} - (v_c)_{j_1, j_2}^{(s)}}{h_1} \frac{c_{j_1+1, j_2}^{(s)} - c_{j_1, j_2}^{(s)}}{h_1} - \frac{(v_c)_{j_1, j_2+1}^{(s)} - (v_c)_{j_1, j_2}^{(s)}}{h_2} \frac{c_{j_1, j_2+1}^{(s)} - c_{j_1, j_2}^{(s)}}{h_2} - \\
& - v_T \left( \frac{T_{j_1+1, j_2}^{(s)} - 2T_{j_1, j_2}^{(s)} + T_{j_1-1, j_2}^{(s)}}{h_1^2} + \frac{T_{j_1, j_2+1}^{(s)} - 2T_{j_1, j_2}^{(s)} + T_{j_1, j_2-1}^{(s)}}{h_2^2} \right) = 0,
\end{aligned} \tag{2.57}$$

$$j_1 = \overline{1, m_1 - 1}, \quad j_2 = \overline{1, m_2 - 1}, \quad s = \overline{0, n_1}.$$

Скінченнорізницеві аналоги для (2.36) матимуть наступний вигляд:

$$\begin{aligned}
(\varepsilon_x)_{j_1, j_2} &= \frac{U_{j_1+1, j_2} - U_{j_1-1, j_2}}{2h_1}, \quad (\varepsilon_y)_{j_1, j_2} = \frac{V_{j_1, j_2+1} - V_{j_1, j_2-1}}{2h_2}, \\
(\varepsilon_{xy})_{j_1, j_2} &= \frac{1}{2} \left( \frac{U_{j_1, j_2+1} - U_{j_1, j_2-1}}{2h_2} + \frac{V_{j_1+1, j_2} - V_{j_1-1, j_2}}{2h_1} \right), \quad j_1 = \overline{1, m_1 - 1}, \quad j_2 = \overline{1, m_2 - 1}.
\end{aligned} \tag{2.58}$$

Для компонент тензора напружень (2.37) маємо

$$\begin{aligned}
(\sigma_x)_{j_1, j_2} &= \frac{\theta}{1+\nu} ((\varepsilon_x)_{j_1, j_2} + \nu(\varepsilon_y)_{j_1, j_2}) - \alpha_T \bar{T}_{j_1, j_2}^{(s)} \theta, \\
(\sigma_y)_{j_1, j_2} &= \frac{\theta}{1+\nu} ((\varepsilon_y)_{j_1, j_2} + \nu(\varepsilon_x)_{j_1, j_2}) - \alpha_T \bar{T}_{j_1, j_2}^{(s)} \theta, \\
(\tau_{xy})_{j_1, j_2} &= \frac{E_{j_1, j_2}(c_{j_1, j_2}^{(s)}, T_{j_1, j_2}^{(s)})}{2(1+\nu)} \cdot (\varepsilon_{xy})_{j_1, j_2},
\end{aligned} \tag{2.59}$$

$$\text{де } \theta = \frac{E_{j_1, j_2}(c_{j_1, j_2}^{(s)}, T_{j_1, j_2}^{(s)})}{1-\nu}, \quad \bar{T}_{j_1, j_2}^{(s)} = T_{j_1, j_2}^{(s)} - T_{j_1, j_2}^{(0)}, \quad j_1 = \overline{1, m_1 - 1}, \quad j_2 = \overline{1, m_2 - 1}, \quad s = \overline{0, n_1}.$$

Для знаходження невідомих функцій  $U(\mathbf{X})$ ,  $V(\mathbf{X})$ ,  $\varepsilon_x(\mathbf{X})$ ,  $\varepsilon_y(\mathbf{X})$ ,  $\varepsilon_{xy}(\mathbf{X})$ ,  $\sigma_x(\mathbf{X})$ ,  $\sigma_y(\mathbf{X})$ ,  $\tau_{xy}(\mathbf{X})$ ,  $h(\mathbf{X})$ ,  $c(\mathbf{X}, t)$ ,  $T(\mathbf{X}, t)$  використаємо наступний алгоритм:

1. Згідно ітераційного методу Гауса-Зейделя, використовуючи апроксимацію відповідних граничних умов, обчислюємо значення зміщень  $U(\mathbf{X})$  та  $V(\mathbf{X})$ , п'єзометричного напору  $h(\mathbf{X})$ , а також значення нормальних та дотичних деформацій та напружень для часового шару  $s = 0$ .

2. Використовуючи монотонні різницеві схеми, апроксимації відповідних граничних умов, знаходимо температуру  $T(\mathbf{X}, t)$  та концентрацію сольового розчину  $c(\mathbf{X}, t)$  на часовому шарі  $(s + 0,5)$ , а потім на часовому шарі  $(s + 1)$ .

3. Згідно ітераційного методу Гауса-Зейделя, використовуючи апроксимацію відповідних граничних умов, обчислюємо значення зміщень  $U(\mathbf{X})$  та  $V(\mathbf{X})$ , п'єзометричного напору  $h(\mathbf{X})$ , а також значення нормальних та дотичних деформацій і напружень відповідно для часового шару  $(s + 1)$ .

4. Переходимо на наступний часовий шар і повторюємо алгоритм, починаючи з другого кроку.

Для знаходження зміщень  $U(\mathbf{X})$  та  $V(\mathbf{X})$  з (2.44), (2.45) модифікуємо ітераційний метод Гауса-Зейделя. Для цього зведемо дані рівняння до рівнянь вигляду

$$\begin{aligned} U_{j_1, j_2}^{(z+1)} &= \bar{A}_1 U_{j_1+1, j_2}^{(z)} + \bar{B}_1 U_{j_1-1, j_2}^{(z+1)} + \bar{C}_1 U_{j_1, j_2+1}^{(z)} + \bar{D}_1 U_{j_1, j_2-1}^{(z+1)} + \bar{F}_1(V_{j_1, j_2}^{(z)}, T_{j_1, j_2}^{(s)}), \\ V_{j_1, j_2}^{(z+1)} &= \bar{A}_2 V_{j_1+1, j_2}^{(z)} + \bar{B}_2 V_{j_1-1, j_2}^{(z+1)} + \bar{C}_2 V_{j_1, j_2+1}^{(z)} + \bar{D}_2 V_{j_1, j_2-1}^{(z+1)} + \bar{F}_2(U_{j_1, j_2}^{(z+1)}, T_{j_1, j_2}^{(s)}), \end{aligned} \quad (2.60)$$

де

$$\begin{aligned} \bar{A}_1 &= \frac{\lambda_{j_1+1, j_2} + 2\mu_{j_1+1, j_2}}{\Lambda_1 h_1^2}, \quad \bar{B}_1 = \frac{\lambda_{j_1, j_2} + 2\mu_{j_1, j_2}}{\Lambda_1 h_1^2}, \quad \bar{C}_1 = \frac{\mu_{j_1, j_2+1}}{\Lambda_1 h_2^2}, \quad \bar{D}_1 = \frac{\mu_{j_1, j_2}}{\Lambda_1 h_2^2}, \\ \bar{F}_1(V_{j_1, j_2}^{(z)}, T_{j_1, j_2}^{(s)}) &= \frac{-f_{i_1, i_2}^1(V, T)}{\Lambda_1}, \quad \bar{A}_2 = \frac{\mu_{j_1+1, j_2}}{\Lambda_2 h_1^2}, \quad \bar{B}_2 = \frac{\mu_{j_1, j_2}}{\Lambda_2 h_1^2}, \quad \bar{C}_2 = \frac{\lambda_{j_1, j_2+1} + 2\mu_{j_1, j_2+1}}{\Lambda_2 h_2^2}, \\ \bar{D}_2 &= \frac{\lambda_{j_1, j_2} + 2\mu_{j_1, j_2}}{\Lambda_2 h_2^2}, \quad \bar{F}_2(U_{j_1, j_2}^{(z+1)}, T_{j_1, j_2}^{(s)}) = \frac{-f_{j_1, j_2}^2(U, T)}{\Lambda_2}, \\ \Lambda_1 &= \frac{(\lambda_{j_1+1, j_2} + \lambda_{j_1, j_2}) + 2(\mu_{j_1+1, j_2} + \mu_{j_1, j_2})}{h_1^2} + \frac{\mu_{j_1, j_2+1} + \mu_{j_1, j_2}}{h_2^2}, \\ \Lambda_2 &= \frac{(\lambda_{j_1, j_2+1} + \lambda_{j_1, j_2}) + 2(\mu_{j_1, j_2+1} + \mu_{j_1, j_2})}{h_2^2} + \frac{\mu_{j_1+1, j_2} + \mu_{j_1, j_2}}{h_1^2}. \end{aligned}$$

Для знаходження значень  $h(\mathbf{X})$  з різницевого рівняння (2.57) модифікуємо ітераційний метод Гауса-Зейделя. Зведемо дане рівняння до вигляду

$$h_{j_1, j_2}^{(z+1)} = \tilde{A} h_{j_1+1, j_2}^{(z)} + \tilde{B} h_{j_1-1, j_2}^{(z+1)} + \tilde{C} h_{j_1, j_2+1}^{(z)} + \tilde{D} h_{j_1, j_2-1}^{(z+1)} + \tilde{f}_{j_1, j_2}^{(s)}, \quad (2.61)$$

де

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \frac{K_{j_1+1, j_2}^{(s)}}{\tilde{\Lambda} h_1^2}, \quad \tilde{B} = \frac{K_{j_1, j_2}^{(s)}}{\tilde{\Lambda} h_1^2}, \quad \tilde{C} = \frac{K_{j_1, j_2+1}^{(s)}}{\tilde{\Lambda} h_2^2}, \quad \tilde{D} = \frac{K_{j_1, j_2}^{(s)}}{\tilde{\Lambda} h_2^2}, \quad \tilde{\Lambda} = \frac{K_{j_1+1, j_2}^{(s)} + K_{j_1, j_2}^{(s)}}{h_1^2} + \frac{K_{j_1, j_2+1}^{(s)} + K_{j_1, j_2}^{(s)}}{h_2^2}, \\ \tilde{f}_{j_1, j_2}^{(s)} &= -\frac{1}{\tilde{\Lambda}} \left( (v_c)_{j_1, j_2}^{(s)} \left( \frac{c_{j_1+1, j_2}^{(s)} - 2c_{j_1, j_2}^{(s)} + c_{j_1-1, j_2}^{(s)}}{h_1^2} + \frac{c_{j_1, j_2+1}^{(s)} - 2c_{j_1, j_2}^{(s)} + c_{j_1, j_2-1}^{(s)}}{h_2^2} \right) + \right. \\ &+ \frac{(v_c)_{j_1+1, j_2}^{(s)} - (v_c)_{j_1, j_2}^{(s)}}{h_1} \frac{c_{j_1+1, j_2}^{(s)} - c_{j_1, j_2}^{(s)}}{h_1} + \frac{(v_c)_{j_1, j_2+1}^{(s)} - (v_c)_{j_1, j_2}^{(s)}}{h_2} \frac{c_{j_1, j_2+1}^{(s)} - c_{j_1, j_2}^{(s)}}{h_2} + \\ &\left. + v_T \left( \frac{T_{j_1+1, j_2}^{(s)} - 2T_{j_1, j_2}^{(s)} + T_{j_1-1, j_2}^{(s)}}{h_1^2} + \frac{T_{j_1, j_2+1}^{(s)} - 2T_{j_1, j_2}^{(s)} + T_{j_1, j_2-1}^{(s)}}{h_2^2} \right) \right). \end{aligned}$$

Ітерації за формулами (2.60), (2.61) проводяться до тих пір, поки різниця значень не стане меншою за деяку задану точність  $\varepsilon$

$$\left| U_{j_1, j_2}^{(z+1)} - U_{j_1, j_2}^{(z)} \right| \leq \varepsilon, \quad \left| V_{j_1, j_2}^{(z+1)} - V_{j_1, j_2}^{(z)} \right| \leq \varepsilon, \quad \left| h_{j_1, j_2}^{(z+1)} - h_{j_1, j_2}^{(z)} \right| \leq \varepsilon,$$

де  $j_1 = \overline{1, m_1 - 1}$ ,  $j_2 = \overline{1, m_2 - 1}$ ,  $z$  – номер ітерації.

Для знаходження  $c(\mathbf{X}, t)$  необхідно розв'язати систему скінченнорізницевих рівнянь (2.49), (2.50) з відповідними крайовими умовами. Рівняння (2.49) розв'яжемо, використовуючи метод прогонки по змінній  $x$ . Для цього зведемо дане рівняння до прогоночного вигляду

$$a_{j_1} c_{j_1-1, j_2}^{(s+0,5)} - \bar{c}_{j_1} c_{j_1, j_2}^{(s+0,5)} + b_{j_1} c_{j_1+1, j_2}^{(s+0,5)} = -c_{j_1, j_2}^{(s)} - \bar{s}_{j_1, j_2}^{(s+0,5)},$$

де

$$\begin{aligned} a_{j_1} &= \frac{\tau}{n_p} \frac{(d_1)_{j_1, j_2}^{(s)}}{h_1} \left( \frac{(\eta_1)_{j_1, j_2}^{(s)}}{h_1} - \frac{(v_1^-)_{j_1, j_2}^{(s)}}{(D_1)_{j_1, j_2}^{(s)}} \right), \quad b_{j_1} = \frac{\tau}{n_p} \frac{(d_1)_{j_1+1, j_2}^{(s)}}{h_1} \left( \frac{(\eta_1)_{j_1, j_2}^{(s)}}{h_1} + \frac{(v_1^+)_{j_1, j_2}^{(s)}}{(D_1)_{j_1, j_2}^{(s)}} \right), \\ \bar{c}_{j_1} &= 1 + \frac{\tau}{n_p} \left( \frac{(\eta_1)_{j_1, j_2}^{(s)} \left( (d_1)_{j_1+1, j_2}^{(s)} + (d_1)_{j_1, j_2}^{(s)} \right)}{h_1^2} + \frac{1}{h_1 (D_1)_{j_1, j_2}^{(s)}} \left( (v_1^+)_{j_1, j_2}^{(s)} (d_1)_{j_1+1, j_2}^{(s)} - (v_1^-)_{j_1, j_2}^{(s)} (d_1)_{j_1, j_2}^{(s)} \right) + \gamma \right), \\ \bar{s}_{j_1, j_2}^{(s+0,5)} &= \frac{\tau}{n_p} \left( \gamma \mathcal{C}_m + \frac{1}{h_1} \left( (d_{T_1})_{j_1+1, j_2}^{(s)} \frac{T_{j_1+1, j_2}^{(s+0,5)} - T_{j_1, j_2}^{(s+0,5)}}{h_1} - (d_{T_1})_{j_1, j_2}^{(s)} \frac{T_{j_1, j_2}^{(s+0,5)} - T_{j_1-1, j_2}^{(s+0,5)}}{h_1} \right) \right). \end{aligned}$$

Неважко показати, що умови стійкості прогонки  $|\bar{c}_{j_1}| > |a_{j_1}| + |b_{j_1}|$  виконуються. Значення концентрації на часовому шарі  $(s+0,5)$  послідовно обчислюємо, використовуючи співвідношення

$$c_{j_1, j_2}^{(s+0,5)} = \alpha_{j_1+1} \cdot c_{j_1+1, j_2}^{(s+0,5)} + \beta_{j_1+1}, \quad (2.62)$$

$$\text{де } \alpha_{j_1+1} = \frac{b_{j_1}}{\bar{c}_{j_1} - a_{j_1} \alpha_{j_1}}, \quad \beta_{j_1+1} = \frac{a_{j_1} \beta_{j_1} + c_{j_1, j_2}^{(s)} + \bar{s}_{j_1, j_2}^{(s+0,5)}}{\bar{c}_{j_1} - a_{j_1} \alpha_{j_1}}.$$

Рівняння (2.50) розв'яжемо, використовуючи метод прогонки по змінній  $y$ . Для цього зведемо дане рівняння до прогоночного вигляду

$$a_{j_2} c_{j_1, j_2-1}^{(s+1)} - \bar{c}_{j_2} c_{j_1, j_2}^{(s+1)} + b_{j_2} c_{j_1, j_2+1}^{(s+1)} = -c_{j_1, j_2}^{(s+0,5)} - \bar{s}_{j_1, j_2}^{(s+1)},$$

де

$$a_{j_2} = \frac{\tau}{n_p} \frac{(d_2)_{j_1, j_2}^{(s)}}{h_2} \left( \frac{(\eta_2)_{j_1, j_2}^{(s)}}{h_2} - \frac{(v_2^-)_{j_1, j_2}^{(s)}}{(D_2)_{j_1, j_2}^{(s)}} \right), \quad b_{j_2} = \frac{\tau}{n_p} \frac{(d_2)_{j_1, j_2+1}^{(s)}}{h_2} \left( \frac{(\eta_2)_{j_1, j_2}^{(s)}}{h_2} + \frac{(v_2^+)_{j_1, j_2}^{(s)}}{(D_2)_{j_1, j_2}^{(s)}} \right),$$

$$\bar{c}_{j_2} = 1 + \frac{\tau}{n_p} \left( \frac{(\eta_2)_{j_1, j_2}^{(s)} \left( (d_2)_{j_1, j_2+1}^{(s)} + (d_2)_{j_1, j_2}^{(s)} \right)}{h_2^2} + \frac{1}{h_2 (D_2)_{j_1, j_2}^{(s)}} \left( (v_2^+)_{j_1, j_2}^{(s)} (d_2)_{j_1, j_2+1}^{(s)} - (v_2^-)_{j_1, j_2}^{(s)} (d_2)_{j_1, j_2}^{(s)} \right) + \gamma \right),$$

$$\bar{s}_{j_1, j_2}^{(s+1)} = \frac{\tau}{n_p} \left( \gamma C_m + \frac{1}{h_2} \left( (d_{T_2})_{j_1, j_2+1}^{(s)} \frac{T_{j_1, j_2+1}^{(s+1)} - T_{j_1, j_2}^{(s+1)}}{h_2} - (d_{T_2})_{j_1, j_2}^{(s)} \frac{T_{j_1, j_2}^{(s+1)} - T_{j_1, j_2-1}^{(s+1)}}{h_2} \right) \right).$$

Можна показати, що умови стійкості прогонки  $|\bar{c}_{j_2}| > |a_{j_2}| + |b_{j_2}|$  виконуються. Значення концентрації на часовому шарі  $(s+1)$  будемо послідовно обчислювати, використовуючи співвідношення

$$c_{j_1, j_2}^{(s+1)} = \alpha_{j_2+1} \cdot c_{j_1, j_2+1}^{(s+1)} + \beta_{j_2+1}, \quad (2.63)$$

$$\text{де } \alpha_{j_2+1} = \frac{b_{j_2}}{\bar{c}_{j_2} - a_{j_2} \alpha_{j_2}}, \quad \beta_{j_2+1} = \frac{a_{j_2} \beta_{j_2} + c_{j_1, j_2}^{(s+0,5)} + \bar{s}_{j_1, j_2}^{(s+1)}}{\bar{c}_{j_2} - a_{j_2} \alpha_{j_2}}.$$

Для знаходження температури  $T(\mathbf{X}, t)$  необхідно розв'язати систему скінченнорізницевого рівнянь (2.53), (2.54) з відповідними крайовими умовами. Рівняння (2.53), аналогічно до (2.49), розв'яжемо, використовуючи метод прогонки по змінній  $x$ . Для цього зведемо дане рівняння до прогоночного вигляду

$$a_{j_1} T_{j_1-1, j_2}^{(s+0,5)} - \bar{c}_{j_1} T_{j_1, j_2}^{(s+0,5)} + b_{j_1} T_{j_1+1, j_2}^{(s+0,5)} = -T_{j_1, j_2}^{(s)},$$

де

$$a_{j_1} = \frac{\tau}{c_T} \frac{(\bar{\lambda}_{T_1})_{j_1, j_2}^{(s)}}{h_1} \left( \frac{(\bar{\eta}_1)_{j_1, j_2}^{(s)}}{h_1} - \frac{\rho c_\rho (v_1^-)_{j_1, j_2}^{(s)}}{(\lambda_{T_1})_{j_1, j_2}^{(s)}} \right), \quad b_{j_1} = \frac{\tau}{c_T} \frac{(\bar{\lambda}_{T_1})_{j_1+1, j_2}^{(s)}}{h_1} \left( \frac{(\bar{\eta}_1)_{j_1, j_2}^{(s)}}{h_1} + \frac{\rho c_\rho (v_1^+)_{j_1, j_2}^{(s)}}{(\lambda_{T_1})_{j_1, j_2}^{(s)}} \right),$$

$$\bar{c}_{j_1} = 1 + \frac{\tau}{c_T} \left( \frac{(\bar{\eta}_1)_{j_1, j_2}^{(s)} \left( (\bar{\lambda}_{T_1})_{j_1+1, j_2}^{(s)} + (\bar{\lambda}_{T_1})_{j_1, j_2}^{(s)} \right)}{h_1^2} + \frac{\rho c_\rho}{h_1 (\lambda_{T_1})_{j_1, j_2}^{(s)}} \left( (v_1^+)_{j_1, j_2}^{(s)} (\bar{\lambda}_{T_1})_{j_1+1, j_2}^{(s)} - (v_1^-)_{j_1, j_2}^{(s)} (\bar{\lambda}_{T_1})_{j_1, j_2}^{(s)} \right) \right).$$

Неважко показати, що умови стійкості прогонки  $|\bar{c}_{j_1}| > |a_{j_1}| + |b_{j_1}|$  виконуються.

Значення температури на часовому шарі  $(s+0,5)$  послідовно обчислюємо, використовуючи співвідношення

$$T_{j_1, j_2}^{(s+0,5)} = \alpha_{j_1+1} \cdot T_{j_1+1, j_2}^{(s+0,5)} + \beta_{j_1+1}, \quad (2.64)$$

$$\text{де } \alpha_{j_1+1} = \frac{b_{j_1}}{\bar{c}_{j_1} - a_{j_1} \alpha_{j_1}}, \quad \beta_{j_1+1} = \frac{a_{j_1} \beta_{j_1} + T_{j_1, j_2}^{(s)}}{\bar{c}_{j_1} - a_{j_1} \alpha_{j_1}}.$$

Рівняння (2.54), аналогічно до (2.50), розв'язуємо, використовуючи метод прогонки по змінній  $u$ . Для цього зведемо дане рівняння до прогоночного вигляду

$$a_{j_2} T_{j_1, j_2-1}^{(s+1)} - \bar{c}_{j_2} T_{j_1, j_2}^{(s+1)} + b_{j_2} T_{j_1, j_2+1}^{(s+1)} = -T_{j_1, j_2}^{(s+0,5)},$$

де

$$a_{j_2} = \frac{\tau}{c_T} \frac{(\bar{\lambda}_{T_2})_{j_1, j_2}^{(s)}}{h_2} \left( \frac{(\bar{\eta}_2)_{j_1, j_2}^{(s)}}{h_2} - \frac{\rho c_\rho (v_2^-)_{j_1, j_2}^{(s)}}{(\lambda_{T_2})_{j_1, j_2}^{(s)}} \right), \quad b_{j_2} = \frac{\tau}{c_T} \frac{(\bar{\lambda}_{T_2})_{j_1, j_2+1}^{(s)}}{h_2} \left( \frac{(\bar{\eta}_2)_{j_1, j_2}^{(s)}}{h_2} + \frac{\rho c_\rho (v_2^+)_{j_1, j_2}^{(s)}}{(\lambda_{T_2})_{j_1, j_2}^{(s)}} \right),$$

$$\bar{c}_{j_2} = 1 + \frac{\tau}{c_T} \left( \frac{(\bar{\eta}_2)_{j_1, j_2}^{(s)} \left( (\bar{\lambda}_{T_2})_{j_1, j_2+1}^{(s)} + (\bar{\lambda}_{T_2})_{j_1, j_2}^{(s)} \right)}{h_2^2} + \frac{\rho c_\rho}{h_2 (\lambda_{T_2})_{j_1, j_2}^{(s)}} \left( (v_2^+)_{j_1, j_2}^{(s)} (\bar{\lambda}_{T_2})_{j_1, j_2+1}^{(s)} - (v_2^-)_{j_1, j_2}^{(s)} (\bar{\lambda}_{T_2})_{j_1, j_2}^{(s)} \right) \right).$$

Можна показати, що умови стійкості прогонки  $|\bar{c}_{j_2}| > |a_{j_2}| + |b_{j_2}|$  виконуються.

Значення температури на часовому шарі  $(s+1)$  послідовно обчислюємо, використовуючи співвідношення

$$T_{j_1, j_2}^{(s+1)} = \alpha_{j_2+1} \cdot T_{j_1, j_2+1}^{(s+1)} + \beta_{j_2+1}, \quad (2.65)$$

$$\text{де } \alpha_{j_2+1} = \frac{b_{j_2}}{\bar{c}_{j_2} - a_{j_2} \alpha_{j_2}}, \quad \beta_{j_2+1} = \frac{a_{j_2} \beta_{j_2} + T_{j_1, j_2}^{(s+0,5)}}{\bar{c}_{j_2} - a_{j_2} \alpha_{j_2}}.$$

Для початкових умов (2.42) отримаємо наступні скінченнорізницеві аналоги:

$$c_{j_1, j_2}^{(0)} = \tilde{C}_0(j_1 h_1, j_2 h_2), \quad T_{j_1, j_2}^{(0)} = \tilde{T}_0(j_1 h_1, j_2 h_2), \quad j_1 = \overline{0, m_1}, \quad j_2 = \overline{0, m_2}. \quad (2.66)$$

Для граничних умов першого роду (2.39), (2.40) та (2.41) маємо

$$h_{0, j_2} = \tilde{H}_1(j_2 h_2), \quad c_{0, j_2}^{(s)} = \tilde{C}_1(j_2 h_2, s \tau), \quad T_{0, j_2}^{(s)} = \tilde{T}_1(j_2 h_2, s \tau), \quad j_2 = \overline{0, m_2}, \quad s = \overline{0, n_1}. \quad (2.67)$$

$$h_{m_1, j_2} = \tilde{H}_2(j_2 h_2), \quad T_{m_1, j_2}^{(s)} = \tilde{T}_2(j_2 h_2, s \tau), \quad j_2 = \overline{0, m_2}, \quad s = \overline{0, n_1}. \quad (2.68)$$

На межі  $AD$  для граничних умов першого роду для концентрації (2.39) отримаємо  $\alpha_1 = 0$ ,  $\beta_1 = c_{0, j_2}^{(s+0,5)}$ ; для температури (2.40) –  $\alpha_1 = 0$ ,  $\beta_1 = T_{0, j_2}^{(s+0,5)}$ .

Апроксимуємо граничні умови другого роду [38].

На межі  $CD$  гранична умова для температури (2.40) має вигляд

$$\left( \rho c_{\rho} v_2 T - \lambda_{T_2} \frac{\partial T}{\partial y} \right) \Big|_{CD} = 0. \quad (2.69)$$

Зі співвідношення

$$(\bar{\lambda}_{T_2})_{j_1, m_2}^{(s)} T_{m_2 j_1, \bar{y}}^{(s+1)} = (\lambda_{T_2})_{j_1, m_2}^{(s)} \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{(x_{j_1}, y_{m_2})}^{t_{s+1}} - 0,5 h_2 \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda_{T_2} \frac{\partial T}{\partial y} \right) \Big|_{(x_{j_1}, y_{m_2})}^{t_{s+1}} + O(\tau + h_2^2)$$

отримуємо  $(\lambda_{T_2})_{j_1, m_2}^{(s)} \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{(x_{j_1}, y_{m_2})}^{t_{s+1}} = (\bar{\lambda}_{T_2})_{j_1, m_2}^{(s)} T_{m_2 j_1, \bar{y}}^{(s+1)} + 0,5 h_2 \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda_{T_2} \frac{\partial T}{\partial y} \right) \Big|_{(x_{j_1}, y_{m_2})}^{t_{s+1}} + O(\tau + h_2^2).$

Підставляючи  $\frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda_{T_2} \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{c_T}{2} \frac{\partial T}{\partial t} - \rho c_{\rho} v_2 \frac{\partial T}{\partial y}$  у вищенаведену залежність та

використовуючи

скінченнорізницеве

представлення

$$-v_2 \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{(x_{j_1}, y_{m_2})}^{t_{s+1}} = (v_2^+)_{j_1, m_2}^{(s)} T_{m_2 j_1, y}^{(s+1)} + (v_2^-)_{j_1, m_2}^{(s)} T_{m_2 j_1, \bar{y}}^{(s+1)} + O(\tau + h_2), \text{ маємо}$$

$$\begin{aligned} & \left( (\lambda_{T_2})_{j_1, m_2}^{(s)} + 0,5 h_2 \rho c_{\rho} (v_2^+)_{j_1, m_2}^{(s)} \right) \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{(x_{j_1}, y_{m_2})}^{t_{s+1}} = ((\bar{\lambda}_{T_2})_{j_1, m_2}^{(s)} - \\ & - 0,5 h_2 \rho c_{\rho} (v_2^-)_{j_1, m_2}^{(s)}) T_{m_2 j_1, \bar{y}}^{(s+1)} + 0,5 h_2 \left( \frac{c_T}{2} \frac{\partial T}{\partial t} \right) \Big|_{(x_{j_1}, y_{m_2})}^{t_{s+1}} + O(\tau + h_2^2). \end{aligned}$$

Оскільки  $((\lambda_{T_2})_{j_1, m_2}^{(s)} + 0,5 h_2 \rho c_{\rho} (v_2^+)_{j_1, m_2}^{(s)}) \neq 0$ , то для граничної умови (2.69)

поставиться у відповідність наступна залежність:



$$((\bar{\lambda}_{T_2})_{j_1, m_2}^{(s)} - 0,5h_2 \rho c_\rho (\nu_2^-)_{j_1, m_2}^{(s)}) T_{m_2 j_1, \bar{y}}^{(s+1)} + 0,5h_2 \left( \frac{c_T}{2} \frac{\partial T}{\partial t} \right) \Big|_{(x_{j_1}, y_{m_2})}^{t_{s+1}} + O(\tau + h_2^2) = 0, \quad j_1 = \overline{0, m_1}.$$

Апроксимуючи похідні у вищенаведеній рівності та групуючи відповідні доданки, отримаємо

$$T_{j_1, m_2}^{(s+1)} = \eta_2 \cdot T_{j_1, m_2 - 1}^{(s+1)} + \mu_2, \quad j_1 = \overline{0, m_1}, \quad s = \overline{0, n_1}, \quad (2.70)$$

де

$$\eta_2 = \frac{\tau \left( (\bar{\lambda}_{T_2})_{j_1, m_2}^{(s)} - 0,5h_2 \rho c_\rho (\nu_2^-)_{j_1, m_2}^{(s)} \right)}{\tau \left( (\bar{\lambda}_{T_2})_{j_1, m_2}^{(s)} - 0,5h_2 \rho c_\rho (\nu_2^-)_{j_1, m_2}^{(s)} \right) + 0,5h_2^2 c_T},$$

$$\mu_2 = \frac{0,5h_2^2 \cdot c_T T_{j_1, m_2}^{(s+0,5)}}{\tau \left( (\bar{\lambda}_{T_2})_{j_1, m_2}^{(s)} - 0,5h_2 \rho c_\rho (\nu_2^-)_{j_1, m_2}^{(s)} \right) + 0,5h_2^2 c_T}.$$

Використовуючи співвідношення (2.70) та (2.65) при  $j_2 = m_2 - 1$ , знаходимо

$$T_{j_1, m_2}^{(s+1)} = \frac{\eta_2 \cdot \beta_{m_2} + \mu_2}{1 - \eta_2 \cdot \alpha_{m_2}}.$$

Апроксимуємо умову теплоізоляваності для температури (2.40) на межі  $AB$  з точністю  $O(\tau + h_2^2)$ . Маємо

$$\left( \rho c_\rho \nu_2 T - \lambda_{T_2} \frac{\partial T}{\partial y} \right) \Big|_{AB} = 0. \quad (2.71)$$

Діючи аналогічним чином, як і в апроксимації умови (2.69), отримаємо

$$T_{j_1, 0}^{(s+1)} = \alpha_1 \cdot T_{j_1, 1}^{(s+1)} + \beta_1, \quad j_1 = \overline{0, m_1}, \quad s = \overline{0, n_1},$$

де

$$\alpha_1 = \frac{\tau \left( (\bar{\lambda}_{T_2})_{j_1, 1}^{(s)} + 0,5h_2 \rho c_\rho (\nu_2^+)_{j_1, 0}^{(s)} \right)}{\tau \left( (\bar{\lambda}_{T_2})_{j_1, 1}^{(s)} + 0,5h_2 \rho c_\rho (\nu_2^+)_{j_1, 0}^{(s)} \right) + 0,5h_2^2 c_T},$$

$$\beta_1 = \frac{0,5h_2^2 \cdot c_T T_{j_1, 0}^{(s+0,5)}}{\tau \left( (\bar{\lambda}_{T_2})_{j_1, 1}^{(s)} + 0,5h_2 \rho c_\rho (\nu_2^+)_{j_1, 0}^{(s)} \right) + 0,5h_2^2 c_T}.$$

Отже, при використанні методу прогонки (2.65) отримали вирази для  $\alpha_1$  та  $\beta_1$  для знаходження температури на межі  $AB$ .

Апроксимуємо граничну умову непроникності для концентрації солей (2.39) на межі  $CD$  з точністю  $O(\tau + h_2^2)$ . Маємо

$$\left( v_2 c - D_2(c, T) \frac{\partial c}{\partial y} + D_{T_2} \frac{\partial c}{\partial y} \right) \Big|_{CD} = 0.$$

Аналогічно до апроксимації умови (2.70) отримаємо

$$c_{j_1, m_2}^{(s+1)} = \eta_2 \cdot c_{j_1, m_2-1}^{(s+1)} + \mu_2, \quad j_1 = \overline{0, m_1}, \quad s = \overline{0, n_1}, \quad (2.72)$$

де

$$\eta_2 = \frac{\tau \left( (d_2)_{j_1, m_2}^{(s)} - 0,5 h_2 (v_2^-)_{j_1, m_2}^{(s)} \right)}{\tau \left( (d_2)_{j_1, m_2}^{(s)} - 0,5 h_2 (v_2^-)_{j_1, m_2}^{(s)} \right) + 0,5 h_2^2 \left( n_p + \tau \frac{\gamma}{2} \right)},$$

$$\mu_2 = \frac{0,5 h_2^2 \left( n_p \cdot c_{j_1, m_2}^{(s+0,5)} + \tau \frac{\gamma}{2} C_m \right) - h_2 \tau (d_{T_2})_{j_1, m_2}^{(s)} T_{m_2, j_1, \bar{y}}^{(s+1)}}{\tau \left( (d_2)_{j_1, m_2}^{(s)} - 0,5 h_2 (v_2^-)_{j_1, m_2}^{(s)} \right) + 0,5 h_2^2 \left( n_p + \tau \frac{\gamma}{2} \right)}.$$

Використовуючи співвідношення (2.72) та (2.63) при  $j_2 = m_2 - 1$ , знаходимо

$$c_{j_1, m_2}^{(s+1)} = \frac{\eta_2 \cdot \beta_{m_2} + \mu_2}{1 - \eta_2 \cdot \alpha_{m_2}}.$$

Для умови

$$\left( v_2 c - D_2(c, T) \frac{\partial c}{\partial y} + D_{T_2} \frac{\partial c}{\partial y} \right) \Big|_{AB} = 0 \quad (2.73)$$

поставиться у відповідність співвідношення

$$c_{j_1, 0}^{(s+1)} = \alpha_1 \cdot c_{j_1, 1}^{(s+1)} + \beta_1, \quad j_1 = \overline{0, m_1}, \quad s = \overline{0, n_1},$$

де

$$\alpha_1 = \frac{\tau \left( (d_2)_{j_1, 1}^{(s)} + 0,5 h_2 (v_2^+)_{j_1, 0}^{(s)} \right)}{\tau \left( (d_2)_{j_1, 1}^{(s)} + 0,5 h_2 (v_2^+)_{j_1, 0}^{(s)} \right) + 0,5 h_2^2 \left( n_p + \tau \frac{\gamma}{2} \right)},$$

$$\beta_1 = \frac{0,5 h_2^2 \left( n_p \cdot c_{j_1, 0}^{(s+0,5)} + \tau \frac{\gamma}{2} C_m \right) - h_2 \tau (d_{T_2})_{j_1, 1}^{(s)} T_{x, (j_1, 0)}^{(s+1)}}{\tau \left( (d_2)_{j_1, 1}^{(s)} + 0,5 h_2 (v_2^+)_{j_1, 0}^{(s)} \right) + 0,5 h_2^2 \left( n_p + \tau \frac{\gamma}{2} \right)}.$$

Таким чином, при використанні методу прогонки (2.63) отримали вирази для  $\alpha_1$  та  $\beta_1$  для знаходження концентрації солей на межі  $AB$ .

Апроксимуємо граничну умову другого роду (2.39) на межі  $BC$ . Маємо

$$\left. \frac{\partial c(\mathbf{X}, t)}{\partial n} \right|_{BC} = \left. \frac{\partial c(\mathbf{X}, t)}{\partial x} \right|_{BC} = 0.$$

Аналогічно до (2.69), отримаємо наступне співвідношення:

$$c_{m_1, j_2}^{(s+0,5)} = \eta_2 \cdot c_{m_1-1, j_2}^{(s+0,5)} + \mu_2, \quad j_2 = \overline{0, m_2}, \quad s = \overline{0, n_1}, \quad (2.74)$$

де

$$\eta_2 = \frac{\tau \left( (d_1)_{m_1, j_2}^{(s)} - 0,5 h_1 (v_1^-)_{m_1, j_2}^{(s)} \right)}{\tau \left( (d_1)_{m_1, j_2}^{(s)} - 0,5 h_1 (v_1^-)_{m_1, j_2}^{(s)} \right) + 0,5 h_1^2 \left( n_p + \tau \frac{\gamma}{2} \right)},$$

$$\mu_2 = \frac{0,5 h_1^2 \left( n_p \cdot c_{m_1, j_2}^{(j+0,5)} + \tau \frac{\gamma}{2} C_m \right)}{\tau \left( (d_1)_{m_1, j_2}^{(s)} - 0,5 h_1 (v_1^-)_{m_1, j_2}^{(s)} \right) + 0,5 h_1^2 \left( n_p + \tau \frac{\gamma}{2} \right)}.$$

Використовуючи співвідношення (2.74) та (2.62) при  $j_1 = m_1 - 1$ , знаходимо

$$c_{m_1, j_2}^{(j+0,5)} = \frac{\eta_2 \cdot \beta_{m_1} + \mu_2}{1 - \eta_2 \cdot \alpha_{m_1}}.$$

Гранична умова непроникності для швидкості фільтрації (2.38) на межі  $CD$  має вигляд  $(\mathbf{v}, \mathbf{n})|_{CD} = (-\mathbf{K}(c, T) \nabla h, \mathbf{n}) + (\mathbf{v}_c \nabla c, \mathbf{n}) + (\mathbf{v}_T \nabla T, \mathbf{n})|_{CD} = 0$ ,

або

$$\left( -K_2(c, T) \frac{\partial h}{\partial y} + v_{c_2} \frac{\partial c}{\partial y} + v_{T_2} \frac{\partial T}{\partial y} \right) \Big|_{CD} = 0. \quad (2.75)$$

Скінченнорізницевий аналог (2.75) має вигляд

$$-(K_2)_{j_1, m_2}^{(s)} \frac{h_{j_1, m_2} - h_{j_1, m_2-1}}{h_2} + (v_{c_2})_{j_1, m_2}^{(s)} \frac{c_{j_1, m_2}^{(s)} - c_{j_1, m_2-1}^{(s)}}{h_2} + v_{T_2} \frac{T_{j_1, m_2}^{(s)} - T_{j_1, m_2-1}^{(s)}}{h_2} = 0,$$

або

$$h_{j_1, m_2} = \frac{1}{(K_2)_{j_1, m_2}^{(s)}} \left( h_{j_1, m_2-1} + (v_{c_2})_{j_1, m_2}^{(s)} (c_{j_1, m_2}^{(s)} - c_{j_1, m_2-1}^{(s)}) + v_{T_2} (T_{j_1, m_2}^{(s)} - T_{j_1, m_2-1}^{(s)}) \right), \quad (2.76)$$

$$j_1 = \overline{1, m_1 - 1}, \quad s = \overline{0, n_1}.$$

Повторюючи аналогічні міркування, на межі  $AB$  для граничних умов (2.38) маємо

$$h_{j_1,0} = \frac{1}{(K_2)_{j_1,0}^{(s)}} \left( h_{j_1,1} - (v_{c_2})_{j_1,0}^{(s)} (c_{j_1,1}^{(s)} - c_{j_1,0}^{(s)}) - v_{T_2} (T_{j_1,1}^{(s)} - T_{j_1,0}^{(s)}) \right), \quad j_1 = \overline{1, m_1 - 1}, \quad s = \overline{0, n_1}. \quad (2.77)$$

Для зміщень з умови (2.41) для нижньої  $AB$  та верхньої  $CD$  меж ґрунтового масиву маємо  $U_{j_1,0} = U_{j_1,m_2} = 0$ ,  $V_{j_1,0} = V_{j_1,m_2} = 0$ .

Щоб отримати скінченнорізницеві аналоги граничних умов (2.41) на межах лівого та правого водних басейнів, проведемо деякі математичні перетворення.

На границях водних басейнів  $AD$  та  $BC$  маємо  $\sigma_n = 0$ ,  $\tau_s = 0$ . Як відомо,

$$\sigma_n = \sigma_x \cdot l^2 + \sigma_y \cdot m^2 + 2 \cdot \tau_{xy} \cdot l \cdot m,$$

$$\tau_s = \sigma_x \cdot l \cdot m + \tau_{xy} \cdot (m^2 - l^2) - \sigma_y \cdot l \cdot m = (\sigma_x - \sigma_y) \cdot l \cdot m + \tau_{xy} \cdot (m^2 - l^2),$$

де  $l = \cos(\mathbf{n}, x)$ ,  $m = \cos(\mathbf{n}, y)$  – напрямні косинуси вектора  $\mathbf{n}$ .

Таким чином, для межі  $AD$  для умови  $\sigma_n = 0$  отримаємо наступне:

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2(\mathbf{n}, x) + \sigma_y \cos^2(\mathbf{n}, y) + 2\tau_{xy} \cos(\mathbf{n}, x) \cdot \cos(\mathbf{n}, y) = 0.$$

Звідси випливає, що  $\sigma_n = \sigma_x = 0$ .

Для умови  $\tau_s = 0$  для межі  $AD$  маємо

$$\tau_s = \sigma_x \cos(\mathbf{n}, x) \cos(\mathbf{n}, y) + \tau_{xy} (\cos^2(\mathbf{n}, y) - \cos^2(\mathbf{n}, x)) - \sigma_y \cos(\mathbf{n}, x) \cdot \cos(\mathbf{n}, y) = 0.$$

Тоді отримаємо  $\tau_s = -\tau_{xy} = 0$ .

В зміщеннях граничні умови (2.41) для  $AD$ , враховуючи

$$\sigma_x = \frac{\theta}{1+\nu} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) - \alpha_T \bar{T} \theta, \quad \tau_{xy} = \frac{E(c, T)}{4(1+\nu)} \left( \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right),$$

матимуть вигляд

$$\begin{cases} \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \nu \frac{\partial V}{\partial y} \right) - \alpha_T \bar{T} (1+\nu) = 0, \\ \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0. \end{cases} \quad (2.78)$$

Скінченнорізницевий аналог (2.78) має вигляд

$$\begin{cases} \left( \frac{U_{1,j_2} - U_{0,j_2}}{h_1} + \nu \frac{V_{0,j_2+1} - V_{0,j_2-1}}{2h_2} \right) - \alpha_T \bar{T}_{0,j_2}^{(s)} (1 + \nu) = 0, \\ \frac{U_{0,j_2+1} - U_{0,j_2-1}}{2h_2} + \frac{V_{1,j_2} - V_{0,j_2}}{h_1} = 0, \quad j_2 = \overline{0, m_2}, \quad s = \overline{0, n_1}. \end{cases}$$

Звідси отримуємо

$$\begin{cases} U_{0,j_2} = U_{1,j_2} + h_1 \left( \nu \frac{V_{0,j_2+1} - V_{0,j_2-1}}{2h_2} - \alpha_T \bar{T}_{0,j_2}^{(s)} (1 + \nu) \right), \\ V_{0,j_2} = V_{1,j_2} + h_1 \left( \frac{U_{0,j_2+1} - U_{0,j_2-1}}{2h_2} \right), \quad j_2 = \overline{0, m_2}, \quad s = \overline{0, n_1}. \end{cases} \quad (2.79)$$

Для  $BC$  для граничних умов (2.41) отримаємо  $\sigma_n = \sigma_x = 0$ ,  $\tau_s = -\tau_{xy} = 0$ , або

$$\begin{cases} \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \nu \frac{\partial V}{\partial y} \right) - \alpha_T \bar{T} (1 + \nu) = 0, \\ \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0. \end{cases} \quad (2.80)$$

Скінченнорізницевий аналог (2.80) має вигляд

$$\begin{cases} \left( \frac{U_{m_1,j_2} - U_{m_1-1,j_2}}{h_1} + \nu \frac{V_{m_1,j_2+1} - V_{m_1,j_2-1}}{2h_2} \right) - \alpha_T \bar{T}_{m_1,j_2}^{(s)} (1 + \nu) = 0, \\ \frac{U_{m_1,j_2+1} - U_{m_1,j_2-1}}{2h_2} + \frac{V_{m_1,j_2} - V_{m_1-1,j_2}}{h_1} = 0, \quad j_2 = \overline{0, m_2}, \quad s = \overline{0, n_1}. \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} U_{m_1,j_2} = U_{m_1-1,j_2} + h_1 \left( \nu \frac{V_{m_1,j_2+1} - V_{m_1,j_2-1}}{2h_2} - \alpha_T \bar{T}_{m_1,j_2}^{(s)} (1 + \nu) \right), \\ V_{m_1,j_2} = V_{m_1-1,j_2} + h_1 \left( \frac{U_{m_1,j_2+1} - U_{m_1,j_2-1}}{2h_2} \right), \quad j_2 = \overline{0, m_2}, \quad s = \overline{0, n_1}. \end{cases} \quad (2.81)$$

#### 2.2.4. Результати чисельних експериментів та їх аналіз

Як приклад, розглянуто двовимірну задачу НДС у водонасиченому ґрунтовому масиві  $\Omega = \{(x, y) : 0 < x < l_1, 0 < y < l_2\}$  довжиною  $l_1 = 20$  м та товщиною  $l_2 = 10$  м.

Значення решти вхідних даних брались наступними [36, 38, 91, 109, 158]:

$$\begin{aligned}
 n_p &= 0,2, \quad \alpha_T = 1 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{град}}, \quad \gamma_p = 1 \cdot 10^4 \frac{\text{Па}}{\text{м}}, \quad \gamma_{36} = 1,3 \cdot 10^4 \frac{\text{Па}}{\text{м}}, \quad \rho = 1100 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \quad \rho_{cp} = 1650 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \\
 \rho_p &= 1000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \quad c_T = 2,137 \cdot 10^6 \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3 \cdot \text{град}}, \quad c_p = 4,2 \cdot 10^3 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{град}}, \quad D = 2 \cdot 10^{-2} \frac{\text{м}^2}{\text{доба}}, \\
 D_T &= 2 \cdot 10^{-3} \frac{\text{м}^2}{\text{доба}}, \quad \nu = 0,35, \quad \gamma = 6,5 \cdot 10^{-5} \text{ доба}^{-1}, \quad \nu_c = 2,8 \cdot 10^{-5} \frac{\text{м}^5}{\text{кг} \cdot \text{доба}}, \\
 \nu_T &= 2,8 \cdot 10^{-6} \frac{\text{м}^2}{\text{град} \cdot \text{доба}}, \quad \lambda_T = 108 \cdot 10^3 \frac{\text{Дж}}{\text{м} \cdot \text{град} \cdot \text{доба}}, \quad \tilde{T}_1(\mathbf{X}, t) = 30^\circ \text{C}, \quad \tilde{T}_2(\mathbf{X}, t) = 15^\circ \text{C}, \\
 \tilde{H}_1(\mathbf{X}) &= 10 \text{ м}, \quad \tilde{H}_2(\mathbf{X}) = 1 \text{ м}, \quad \tilde{C}_1(\mathbf{X}, t) = C_m = 350 \frac{\text{г}}{\text{літр}}, \quad \tilde{C}_2(\mathbf{X}, t) = 8 \frac{\text{г}}{\text{літр}}, \\
 \tilde{C}_0(\mathbf{X}, 0) &= 8 \frac{\text{г}}{\text{літр}}, \quad \tilde{T}_0(\mathbf{X}, 0) = 5^\circ \text{C}.
 \end{aligned}$$

Коефіцієнт фільтрації чистої води приймався  $K = 0,001 \frac{\text{м}}{\text{доба}}$ .

Час, протягом якого розглядався процес НДС, дорівнював 3 рокам. Проведено серію чисельних експериментів, результати яких наведено у вигляді графіків при  $t = 1080$  діб.

На рис. 2.15-2.19 наведені графіки функцій з урахуванням тепло-масоперенесення, а на рис. 2.20-2.23 – у перерізі площиною  $yOz$  при  $x = 10$  м:

1) з урахуванням тепло-масоперенесення; 2) без тепло-масоперенесення; 3) при наявності теплоперенесення; 4) з урахуванням масоперенесення.

Як видно з рис. 2.15, а, 2.16, а, 2.17, а, значення зміщень, деформацій та напружень ґрунтового масиву вздовж осі  $Ox$  досягають найбільших значень в області лівого водного басейну (області високих напорів, температури та та висококонцентрованих розчинів солей). Значення зміщень по осі  $Oy$  (рис. 2.15, б) значно зменшуються по всій області дослідження при  $y = 5$  м. Деформації та напруження вздовж осі  $Oy$  (рис. 2.16, б, 2.17, б) досягають найбільших значень на нижній та верхній межах ґрунту. Дотичні деформації та напруження (рис. 2.18) значно збільшуються в області нижньої межі ґрунтового масиву.

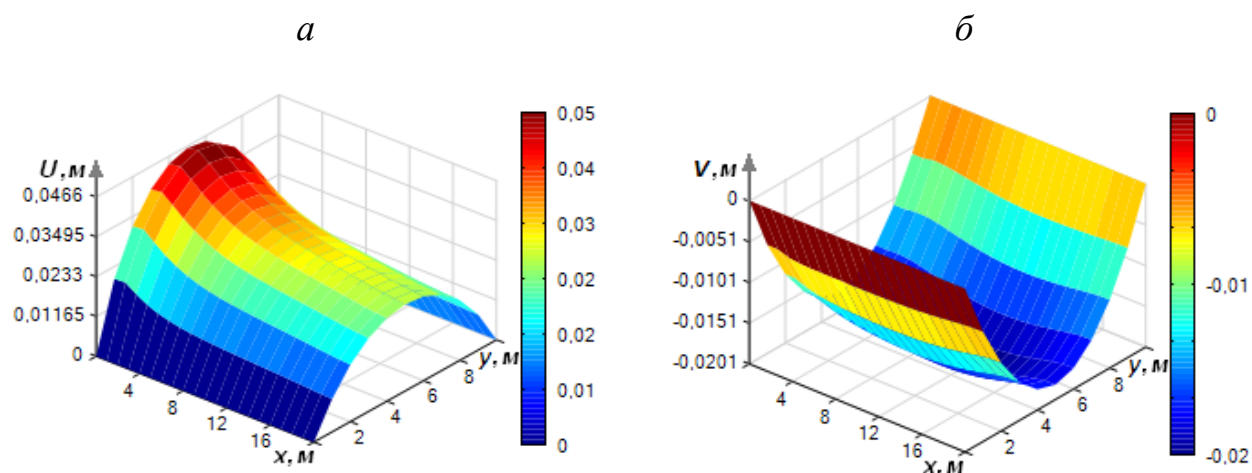


Рис. 2.15. Розподіли полів зміщень вздовж осей  $Ox$  (а) та  $Oy$  (б)

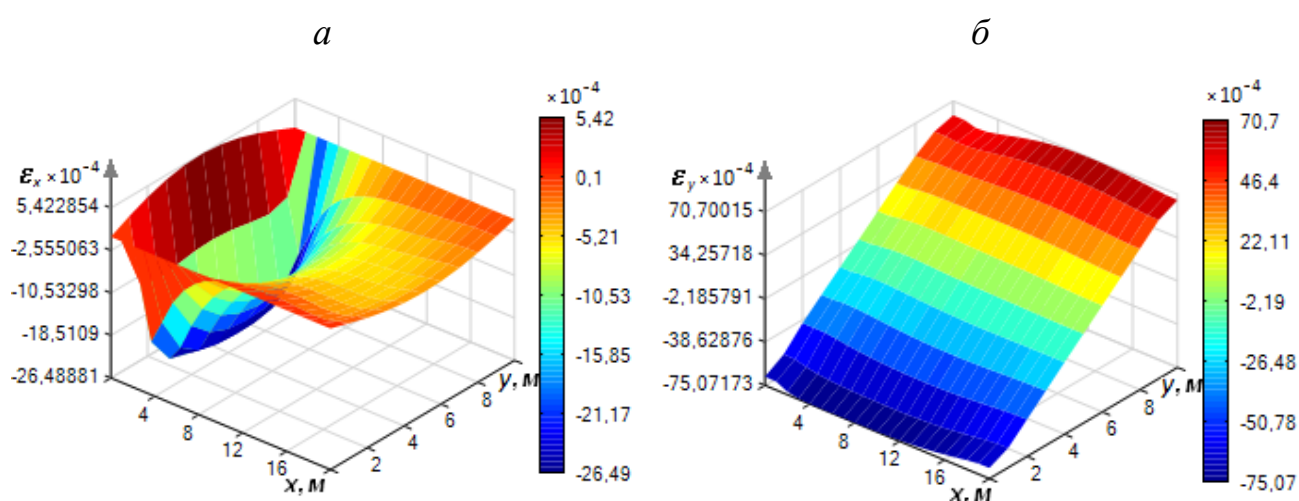


Рис. 2.16. Розподіли полів деформацій вздовж осей  $Ox$  (а) та  $Oy$  (б)

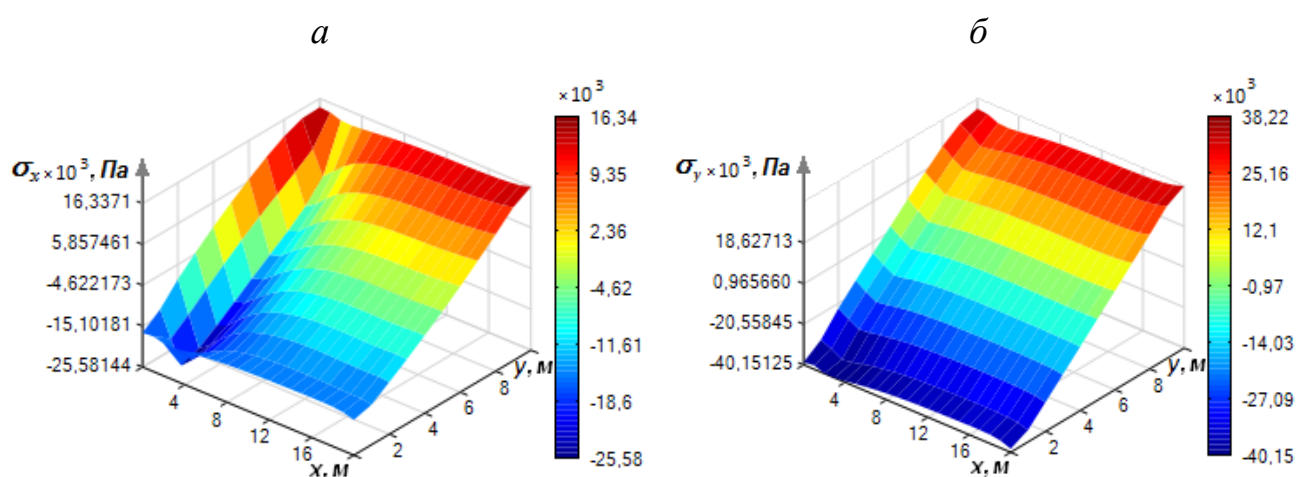


Рис. 2.17. Розподіли полів напружень вздовж осей  $Ox$  (а) та  $Oy$  (б)

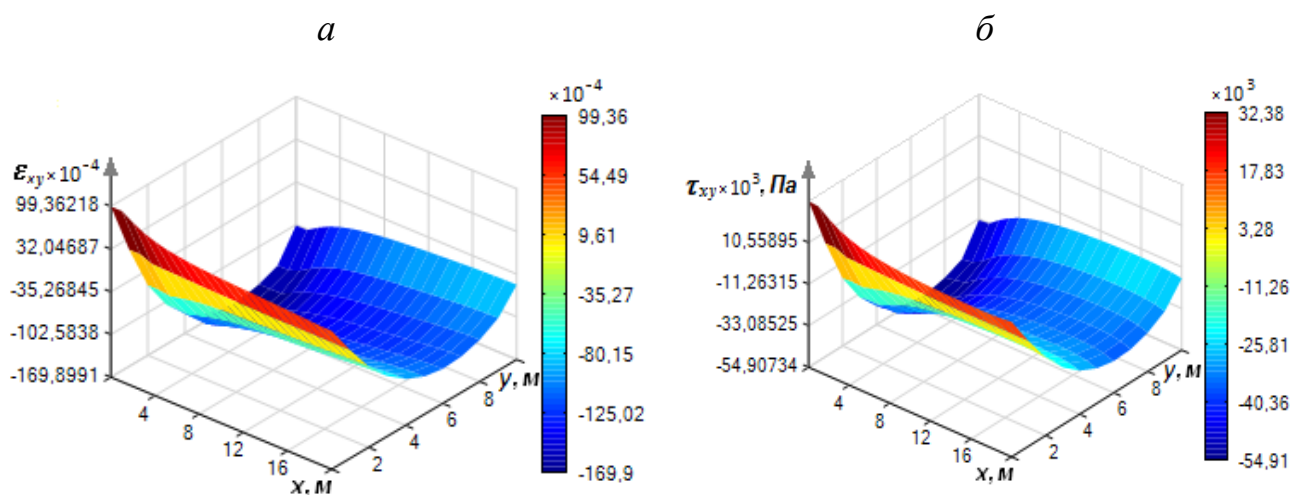


Рис. 2.18. Розподіли полів дотичних деформацій  $\varepsilon_{xy}$  (а) та напружень  $\tau_{xy}$  (б)

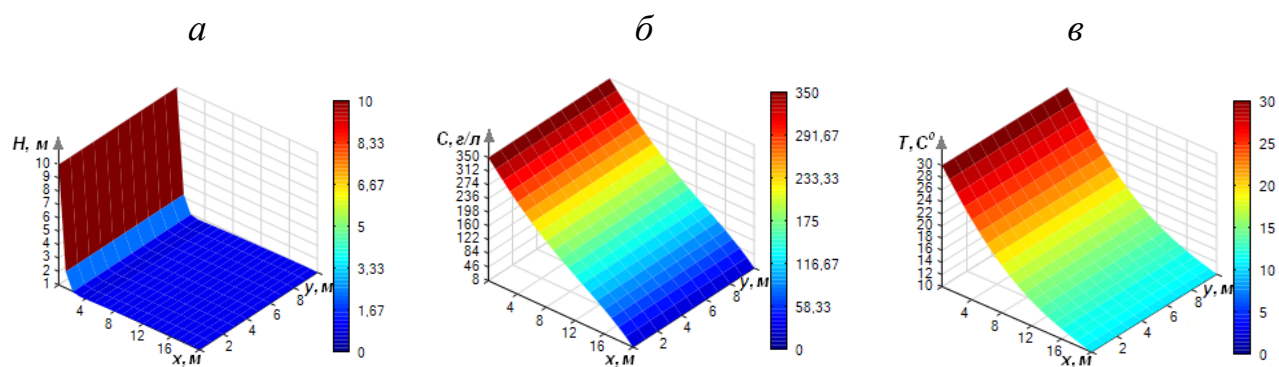


Рис. 2.19. Розподіли полів п'єзометричного напору з урахуванням фільтрації сольових розчинів (а), концентрації сольових розчинів у неізотермічних умовах (б) та температури при фільтрації сольових розчинів (в)

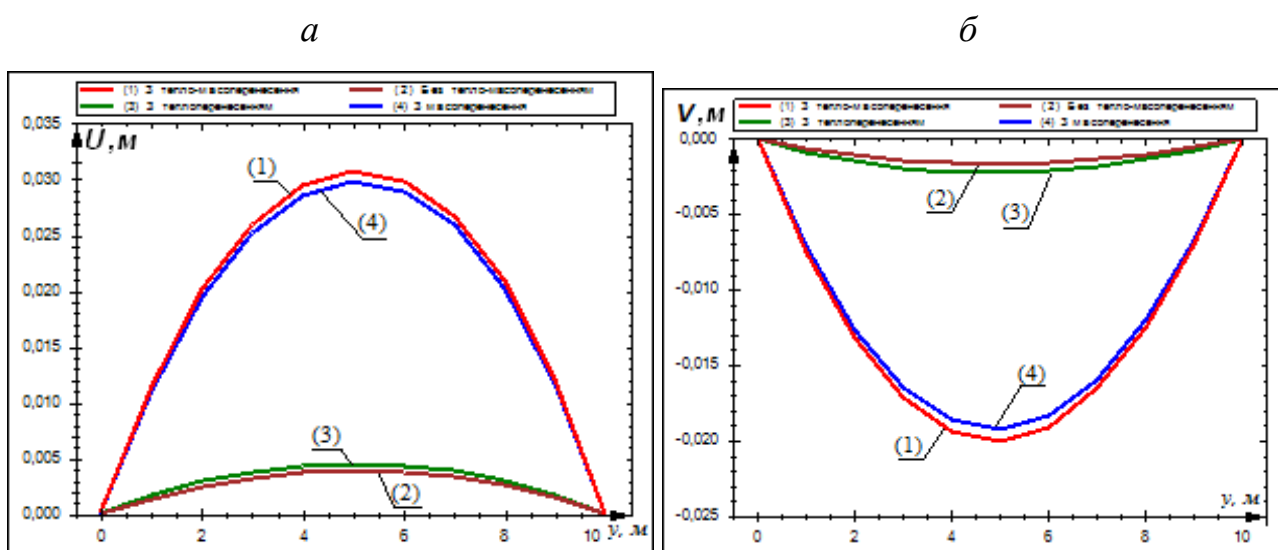


Рис. 2.20. Розподіли зміщень вздовж осей  $Ox$  (а) та  $Oy$  (б)



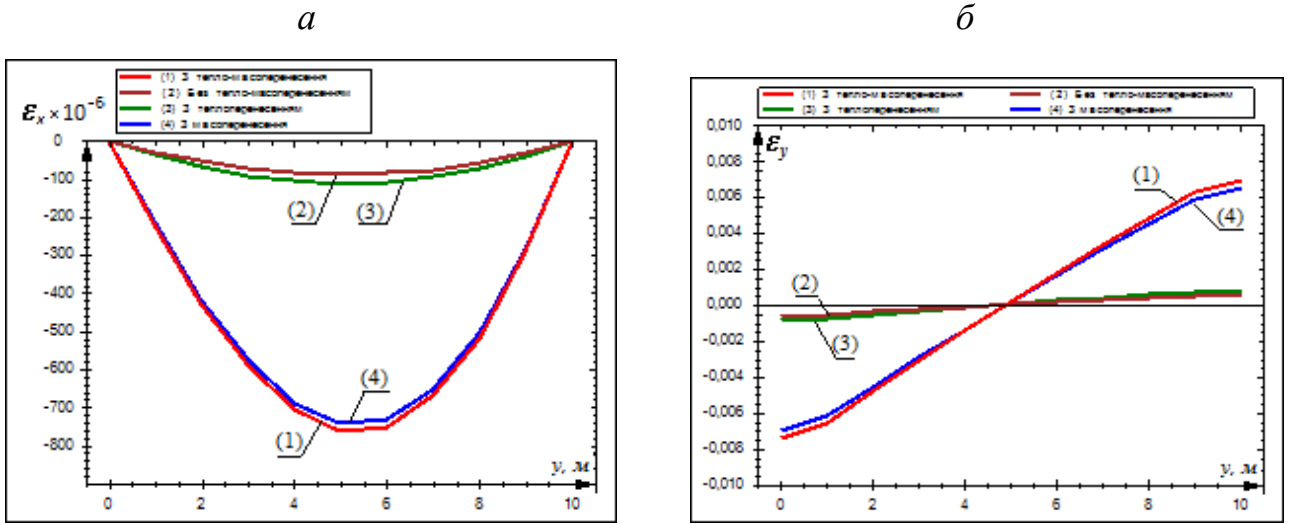


Рис. 2.21. Розподіли деформацій вздовж осей  $Ox$  (а) та  $Oy$  (б)

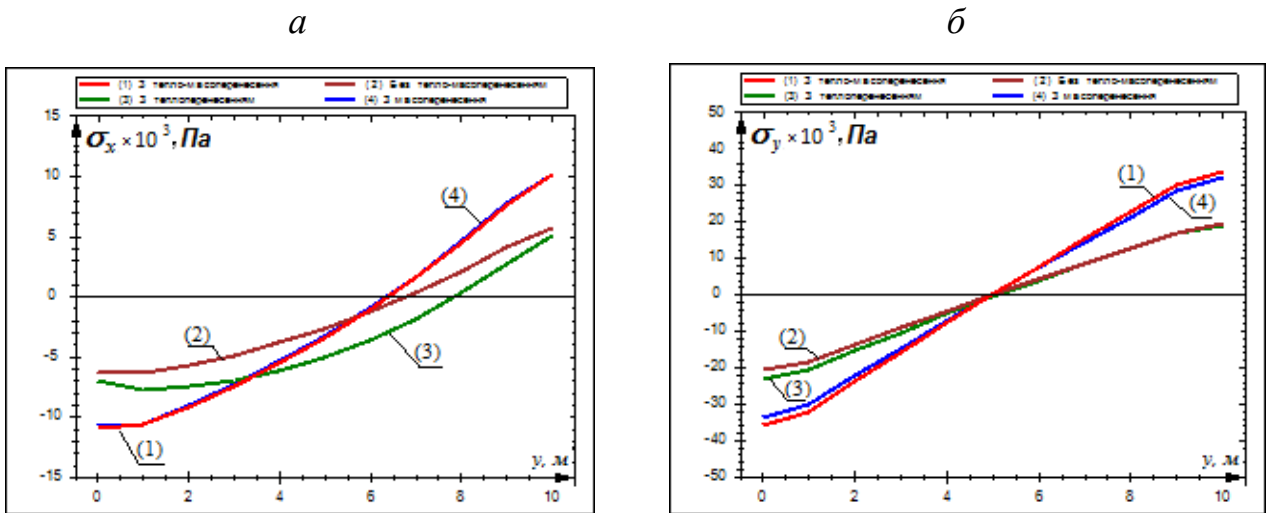


Рис. 2.22. Розподіли напружень вздовж осей  $Ox$  (а) та  $Oy$  (б)

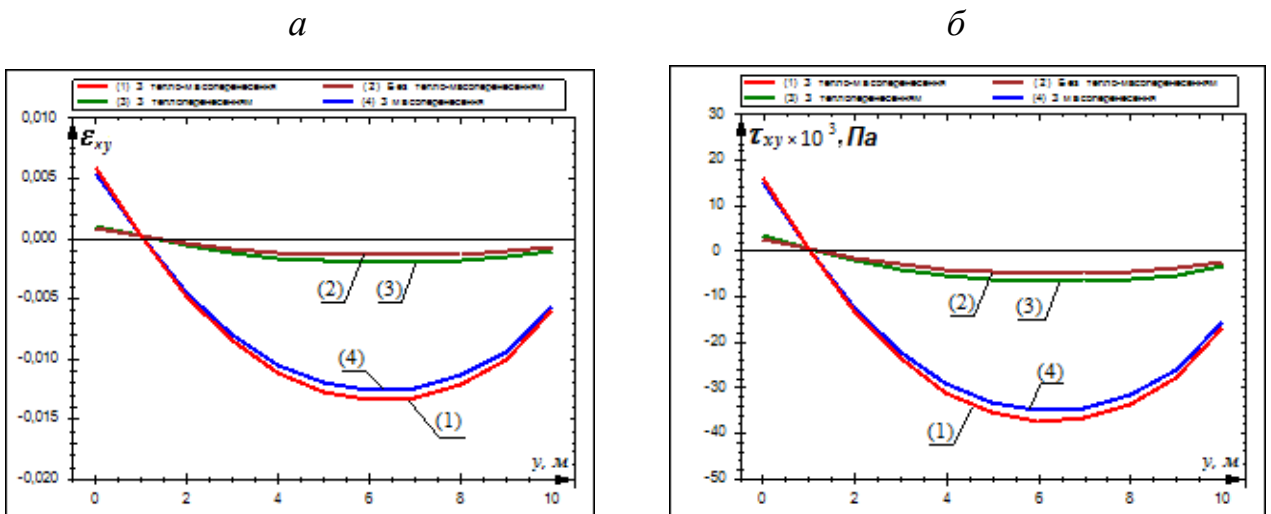


Рис. 2.23. Розподіли дотичних деформацій  $\epsilon_{xy}$  (а) та дотичних напружень  $\tau_{xy}$  (б)

За результатами чисельних експериментів (результати наведені для середніх значень отриманих величин) отримано наступне:

1. Зміщення по осі  $Ox$  (рис. 2.20, *a*) з урахуванням теплоперенесення збільшуються в 1,15 разів, з урахуванням масоперенесення – 6,55 разів, з урахуванням тепло-масоперенесення – 6,76 разів у порівнянні зі зміщеннями без урахування тепло-масоперенесення.

2. Зміщення по осі  $Oy$  (рис. 2.20, *б*) з урахуванням теплоперенесення зменшуються в 1,27 разів, з урахуванням масоперенесення – 9,52 рази, з урахуванням тепло-масоперенесення – 9,9 рази у порівнянні зі зміщеннями без урахування тепло-масоперенесення.

3. Деформації по осі  $Ox$  (рис. 2.21, *a*) з урахуванням теплоперенесення зменшуються в 1,22 рази, з урахуванням масоперенесення – 6,93 рази, з урахуванням тепло-масоперенесення – 7,12 разів у порівнянні зі зміщеннями без урахування тепло-масоперенесення.

4. Деформації по осі  $Oy$  (рис. 2.21, *б*) з урахуванням теплоперенесення збільшуються в 1,49 рази, з урахуванням масоперенесення – 10 разів, з урахуванням тепло-масоперенесення – 11 разів у порівнянні зі зміщеннями без урахування тепло-масоперенесення.

5. Напруження по осі  $Ox$  (рис. 2.22, *a*) з урахуванням теплоперенесення зменшуються у 2,32 рази, з урахуванням масоперенесення – збільшуються у 2,06 рази, з урахуванням тепло-масоперенесення – збільшуються у 2,02 рази у порівнянні зі зміщеннями без урахування тепло-масоперенесення.

6. Напруження по осі  $Oy$  (рис. 2.22, *б*) з урахуванням теплоперенесення збільшуються в 1,33 рази, з урахуванням масоперенесення – 1,59 разів, з урахуванням тепло-масоперенесення – 1,71 рази у порівнянні зі зміщеннями без урахування тепло-масоперенесення.

7. Дотичні деформації (рис. 2.23, *a*) з урахуванням теплоперенесення зменшуються в 1,38 разів, з урахуванням масоперенесення – 7,85 рази, з урахуванням тепло-масоперенесення – 8,36 рази у порівнянні зі зміщеннями без урахування тепло-масоперенесення.

8. Дотичні напруження (рис. 2.23, *б*) з урахуванням теплоперенесення

зменшуються в 1,38 разів, з урахуванням масоперенесення – 6,42 рази, з урахуванням тепло-масоперенесення – 6,83 рази у порівнянні зі зміщеннями без урахування тепло-масоперенесення.

Таким чином, урахування тепло-масоперенесення у водонасиченому фільтруючому ґрунтовому масиві змінює розподіл вектора зміщень, компонент нормальних та дотичних деформацій та напружень у декілька разів.

### 2.3. Висновки до розділу 2

В даному розділі отримані наступні результати:

1. Сформульовано постановки задач НДС водонасиченого ґрунтового масиву з урахуванням тепло-масоперенесення при фільтрації сольових розчинів у неізотермічних умовах та залежностей коефіцієнтів фільтрації, Ламе та модуля Юнга від концентрації сольових розчинів та температури в одно- та двовимірному випадках.

2. Використовуючи результати розділу 1, побудовано нові математичні моделі поставлених крайових задач у нелінійній постановці, які описуються системами диференціальних рівнянь рівноваги в формі Ламе для зміщень та нелінійних рівнянь параболічного типу, що містять першу похідну, з відповідними крайовими умовами для невідомих функцій.

3. Розвинуто обчислювальні методи для знаходження чисельних розв'язків відповідних нелінійних крайових задач в одно- та двовимірному випадках, а саме: метод скінченних різниць для чисельного розв'язування крайових задач тепло-масоперенесення для нелінійних рівнянь параболічного типу, що містять першу похідну; метод скінченних різниць для чисельного розв'язування системи рівнянь рівноваги в формі Ламе для зміщень ґрунту.

4. Проведено серію чисельних експериментів. Показано, що тепло-масоперенесення значно впливає на розподіл зміщень, компонент нормальних та дотичних деформацій і напружень як в одновимірному, так і у двовимірному випадках, зокрема може змінювати дані значення у декілька разів.

Результати даного розділу опубліковані в роботах [64, 57, 59, 67].

### РОЗДІЛ 3

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВПЛИВУ ТЕПЛО- МАСОПЕРЕНЕСЕННЯ ПРИ ФІЛЬТРАЦІЇ СОЛЬОВИХ РОЗЧИНІВ НА НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН ҐРУНТОВОГО МАСИВУ З ВІЛЬНОЮ ПОВЕРХНЕЮ

У даному розділі побудовано математичну модель НДС фільтруючого ґрунтового масиву з вільною поверхнею ґрунтових вод з урахуванням тепло-масоперенесення за фільтрації сольових розчинів у неізотермічних умовах та залежностей коефіцієнтів фільтрації, Ламе та модуля Юнга від концентрації сольового розчину та температури в одно- та двовимірному випадках. Область ґрунтового масиву, що знаходиться під вільною поверхнею є водонасиченою, а область ґрунту над вільною поверхнею знаходиться в природному стані. Чисельний розв'язок поставлених крайових задач знайдено методом скінченних різниць. Розглянуто двовимірні задачі математичного моделювання НДС ґрунтової греблі з вільною поверхнею та ґрунтового масиву внаслідок утворення депресійної лунки під впливом тепло-масоперенесення. Чисельний розв'язок даних крайових задач знайдено методом скінченних різниць з використанням чисельних конформних відображень. Проведено серію чисельних експериментів та здійснено їх аналіз.

### **3.1. Математичне моделювання впливу тепло-масоперенесення при фільтрації сольових розчинів на напружено-деформований стан ґрунтового масиву з вільною межею в одновимірному випадку**

#### **3.1.1. Постановка задачі**

Нехай дано масив ґрунту товщиною  $l$  в умовах тепло-масоперенесення при фільтрації сольових розчинів у неізотермічних умовах та наявності рівня ґрунтових вод (РГВ) (рис.3.1).

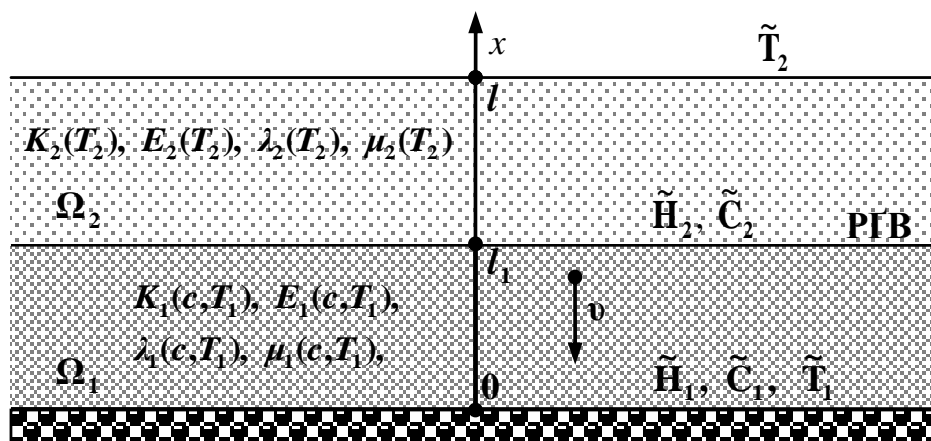


Рис.3.1. Схема ґрунтового масиву при наявності РГВ в одновимірному випадку

На рис. 3.1 область  $\Omega_1$  – це область повністю водонасиченого ґрунту, а  $\Omega_2$  – область ґрунту в природному стані. РГВ розміщений на глибині  $l_1$  від водоупору ( $x=0$ ) і вважається нерухомим.

Шари ґрунту вважаються пружно-деформівними в межах лінійної теорії пружності з різними коефіцієнтами Ламе  $\lambda_i$ ,  $\mu_i$ ,  $i=1,2$ , причому  $\lambda_i = \lambda_1(c, T_1)$ ,  $\mu_i = \mu_1(c, T_1)$  у водонасиченій області  $\Omega_1$  та  $\lambda_i = \lambda_2(T_2)$ ,  $\mu_i = \mu_2(T_2)$  в області ґрунту в природному стані  $\Omega_2$ . На ґрунт діє сила тяжіння, а у випадку водонасиченого ґрунту – архімедова та фільтраційна сили.

Нехай на нижній поверхні ґрунту ( $x=0$ ) задано п'єзометричний напір  $\tilde{H}_1$ , концентрація розчинених у воді солей  $\tilde{C}_1$  та температура  $\tilde{T}_1$ , а на вільній поверхні РГВ ( $x=l_1$ ) значення п'єзометричного напору  $\tilde{H}_2$  та концентрації сольових розчинів  $\tilde{C}_2$ . Значення температури  $\tilde{T}_2$  задано на верхній поверхні ґрунту ( $x=l$ ), причому  $\tilde{H}_2 > \tilde{H}_1$ ,  $\tilde{C}_2 > \tilde{C}_1$ ,  $\tilde{T}_2 > \tilde{T}_1$ . В результаті різниці напорів відбувається перенесення розчинених у воді речовин та тепла фільтраційним потоком. При цьому процеси фільтрації розчинених у воді речовин та тепла підлягають відповідно законам Дарсі, Фіка та Фур'є.

Потрібно розрахувати НДС ґрунтового масиву з урахуванням тепломасоперенесення при умові, що відсутнє зміщення нижньої та верхньої меж ґрунту або лише нижньої межі ґрунту (скельної основи).

### 3.1.2. Математична модель задачі

Математичну модель одновимірної задачі впливу тепло-масоперенесення на НДС ґрунтового масиву за наявності РГВ, враховуючи міркування розділу 1 та результати робіт [48–50, 54–56, 60, 61, 63, 66, 68, 71, 72, 155, 201, 202], можна описати наступною крайовою задачею.

Рівняння рівноваги в формі Ламе для зміщень ґрунту, що знаходиться у водонасиченому та природному станах мають вигляд

$$(\lambda_i + 2\mu_i) \frac{d^2 U_i}{dx^2} + \frac{d(\lambda_i + 2\mu_i)}{dx} \frac{dU_i}{dx} - \left( \frac{d(\lambda_i + 2\mu_i)}{dx} T_i + (\lambda_i + 2\mu_i) \frac{\partial T_i}{\partial x} \right) \alpha_T^{(i)} = X_i, \quad i = 1, 2, \quad (3.1)$$

$$X_i = \begin{cases} \gamma_{зв} + \frac{dp}{dx}, & i = 1, \\ \gamma_{np}, & i = 2, \end{cases} \quad (3.2)$$

де  $x \in (0; l)$ ,  $U_i(x)$ ,  $i = 1, 2$  – зміщення в ґрунті вздовж осі  $Ox$  відповідно у водонасиченому (зваженому) ( $x \in (0; l_1)$ ,  $i = 1$ ) та природному ( $x \in (l_1; l)$ ,  $i = 2$ ) станах;  $X_i$  – масові сили;  $\lambda_i(c, T_i)$ ,  $\mu_i(c, T_i)$ ,  $i = \overline{1, 2}$  – параметри Ламе, причому  $\lambda_i = \lambda_1(c, T_1)$ ,  $\mu_i = \mu_1(c, T_1)$  при  $x \in (0; l_1)$ ,  $i = 1$  та  $\lambda_i = \lambda_2(T_2)$ ,  $\mu_i = \mu_2(T_2)$  при  $x \in (l_1; l)$ ,  $i = 2$ ;  $c(x, t)$  – концентрація сольового розчину у водонасиченому шарі ґрунту;  $T_i(x, t)$ ,  $i = 1, 2$  – температура в обох шарах ґрунтового масиву;  $\alpha_T^{(i)}$ ,  $i = 1, 2$  – середні коефіцієнти лінійного теплового розширення в інтервалі температур  $(T_0, T)$  [87];  $\gamma_{зв}$ ,  $\gamma_{np}$  – питомі ваги ґрунту, що знаходиться в зваженому та у природному станах;  $p$  – фільтраційний тиск сольового розчину, який визначається як

$$p = \gamma_p (h - x), \quad x \in (0; l_1), \quad (3.3)$$

де  $h$  – п'єзометричний напір;  $x$  – вертикальна координата;  $\gamma_p$  – питома вага рідини.

Граничні умови для зміщень мають вигляд

$$L_1 U_1(0) = 0, \quad L_2 U_2(l) = 0, \quad (3.4)$$

де  $L_i$ ,  $i = 1, 2$  – диференціальні оператори, що задають граничні умови відповідно при  $x = 0$  та  $x = l$ . Умови (3.4) означають відсутність зміщень на нижній та верхній границях ґрунту.

Умови спряження на поверхні РГВ для зміщень записуються так:

$$U_1(l_1) = U_2(l_1), \quad (3.5)$$

$$E_1(c, T_1) \frac{dU_1(l_1)}{dx} - \alpha_T^{(1)} (T_1 - T_0) = E_2(T_2) \frac{dU_2(l_1)}{dx} - \alpha_T^{(2)} (T_2 - T_0), \quad (3.6)$$

де  $E_1(c, T_1)$  – модуль Юнга (для ґрунту, що знаходиться у водонасиченому стані), залежність якого від концентрації сольових розчинів отримана в [91],  $E_2(T_2)$  – модуль деформації ґрунту в природному стані.

Рівняння масоперенесення в неізотермічних умовах у водонасиченому шарі ґрунту має наступний вигляд:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( D(c, T_1) \frac{\partial c}{\partial x} \right) - \nu \frac{\partial c}{\partial x} - \gamma(c - C_m) + \frac{\partial}{\partial x} \left( D_T \frac{\partial T_1}{\partial x} \right) = n_p \frac{\partial c}{\partial t}, \quad x \in (0; l_1), \quad t > 0. \quad (3.7)$$

Тут:  $\nu$  – швидкість фільтрації у водонасиченому шарі;  $D(c, T_1)$ ,  $D_T$  – коефіцієнти конвективної дифузії та термодифузії відповідно;  $n_p$  – пористість;  $\gamma$  – константа швидкості масообміну;  $C_m$  – концентрація граничного насичення.

Крайові умови для концентрації мають вигляд

$$c(x, 0) = \tilde{C}_0(x), \quad x \in (0, l_1), \quad (3.8)$$

$$L_3 c(0, t) = \tilde{C}_1(t), \quad L_4 c(l_1, t) = \tilde{C}_2(t), \quad t > 0, \quad (3.9)$$

де  $\tilde{C}_0(x)$ ,  $\tilde{C}_1(t)$ ,  $\tilde{C}_2(t)$  – задані функції;  $L_i$ ,  $i = 3, 4$  – диференціальні оператори, що задають граничні умови для концентрації при  $x = 0$  та  $x = l_1$ .

Рівняння теплоперенесення в обох шарах ґрунту має наступний вигляд:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_T^{(i)} \frac{\partial T_i}{\partial x} \right) - \rho c_\rho \bar{\nu} \frac{\partial T_i}{\partial x} = c_T^{(i)} \frac{\partial T_i}{\partial t}, \quad i = 1, 2, \quad x \in (0; l), \quad t > 0. \quad (3.10)$$

Тут:  $\lambda_T^{(i)}$ ,  $c_T^{(i)}$ ,  $i = 1, 2$  – коефіцієнти ефективної теплопровідності вологого ґрунту та об'ємної теплоємності ґрунту відповідно;  $\rho$ ,  $c_\rho$  – густина та питома теплоємність порового розчину;  $\bar{\nu} = \nu$  при  $i = 1$  та  $\bar{\nu} = 0$  при  $i = 2$ .

Крайові умови та умови спряження для температури мають вигляд

$$T_i(x, 0) = \tilde{T}_0^{(i)}(x), \quad x \in (0, l), \quad i = 1, 2, \quad (3.11)$$

$$L_5 T_1(0, t) = \tilde{T}_1(t), \quad L_6 T_2(l, t) = \tilde{T}_2(t), \quad t > 0, \quad (3.12)$$

$$T_1(l_1) = T_2(l_1), \quad (3.13)$$

$$\lambda_T^{(1)} \frac{\partial T_1(l_1, t)}{\partial x} - \rho c_\rho \nu T_1(l_1, t) = \lambda_T^{(2)} \frac{\partial T_2(l_1, t)}{\partial x}, \quad (3.14)$$

де  $\tilde{T}_0^{(i)}(x)$ ,  $i=1,2$ ,  $\tilde{T}_1(t)$ ,  $\tilde{T}_2(t)$  – задані функції;  $L_i$ ,  $i=5,6$  – диференціальні оператори, що задають граничні умови для температури при  $x=0$  та  $x=l$ .

Фільтрація сольових розчинів із вільної межі у водонасиченому шарі ґрунту описується наступною крайовою задачею:

$$\nu = -K(c, T_1) \frac{dh}{dx} + \nu_c \frac{\partial c}{\partial x} + \nu_T \frac{\partial T_1}{\partial x}, \quad \frac{d\nu}{dx} + \frac{\partial n_p}{\partial t} = 0, \quad x \in (0, l_1), \quad t > 0, \quad (3.15)$$

$$h(0) = \tilde{H}_1, \quad h(l_1) = \tilde{H}_2. \quad (3.16)$$

Тут:  $K(c, T_1)$  – коефіцієнт фільтрації, що залежить від концентрації сольових розчинів та температури;  $\tilde{H}_1$ ,  $\tilde{H}_2$  – напори при  $x=0$  та  $x=l_1$  відповідно.

Деформації та напруження в кожному шарі ґрунту обчислюються за формулами

$$\varepsilon_i = \frac{dU_i}{dx}, \quad \sigma_i = E_i \left( \frac{dU_i}{dx} - \alpha_T^{(i)} \bar{T}_i \right), \quad i=1,2, \quad x \in (0, l), \quad (3.17)$$

де  $E_i = E_1(c, T_1)$  при  $i=1$  та  $E_i = E_2(T_2)$  при  $i=2$ .

### 3.1.3. Чисельний розв'язок крайової задачі

Для чисельного розв'язування поставленої крайової задачі покриємо область  $\bar{Q} = [0; l] \times [0; t_1]$  рівномірною сіткою  $\bar{Q}^{(m_1, n_1)} = [0; m_1 h_1] \times [0; n_1 \tau]$  з кроками  $h_1$  та  $\tau$  відповідно по змінній  $x$  та часу  $t$ . Нехай  $m_1$  – кількість кроків по просторовій змінній,  $n_1$  – кількість кроків по часу.

Для дискретизації рівнянь (3.1), (3.7) та (3.10) використаємо монотонну різницеву схему О.А. Самарського [131–133] або іншу монотонну схему [40]. Зокрема, наприклад, згідно [131] отримаємо



$$\begin{aligned} & \frac{\chi_j^{(s)} U_{i,j-1} - 2U_{i,j} + U_{i,j+1}}{h_1} + (r^+)_j^{(s)} \frac{U_{i,j+1} - U_{i,j}}{h_1} + (r^-)_j^{(s)} \frac{U_{i,j} - U_{i,j-1}}{h_1} - \\ & - \left( \left( \frac{\lambda_{i,j+1}^{(s)} - \lambda_{i,j-1}^{(s)}}{2h_1} + \frac{2(\mu_{i,j+1}^{(s)} - \mu_{i,j-1}^{(s)})}{2h_1} \right) T_{i,j}^{(s)} + (\lambda_{i,j}^{(s)} + 2\mu_{i,j}^{(s)}) \frac{T_{i,j+1}^{(s)} - T_{i,j-1}^{(s)}}{2h_1} \right) \alpha_T^{(i)} = X_{i,j}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$j = \overline{1, m_1 - 1}, \quad s = \overline{0, n_1 - 1}, \quad i = \overline{1, 2},$$

$$\text{де} \quad \chi_j^{(s)} = \frac{1}{1 + 0,5h_1 |r_j^{(s)}|}, \quad r_j^{(s)} = \frac{1}{\lambda_{i,j}^{(s)} + 2\mu_{i,j}^{(s)}} \cdot \frac{\lambda_{i,j+1}^{(s)} + 2\mu_{i,j+1}^{(s)} - \lambda_{i,j-1}^{(s)} + 2\mu_{i,j-1}^{(s)}}{2h_1},$$

$$\lambda_{i,j}^{(s)} = \lambda_{1,j}^{(s)}(c_j^{(s)}, (T_1)_j^{(s)}), \quad \mu_{i,j}^{(s)} = \mu_{1,j}^{(s)}(c_j^{(s)}, (T_1)_j^{(s)}) \quad \text{при} \quad j = \overline{1, m_1^* - 1} \quad \text{та} \quad \lambda_{i,j}^{(s)} = \lambda_{2,j}^{(s)}((T_2)_j^{(s)}),$$

$$\mu_{i,j}^{(s)} = \mu_{2,j}^{(s)}((T_2)_j^{(s)}) \quad \text{при} \quad j = \overline{m_1^* + 1, m_1}, \quad (r^+)_j^{(s)} = \frac{-r_j^{(s)} + |r_j^{(s)}|}{2} \geq 0,$$

$$(r^-)_j^{(s)} = \frac{-r_j^{(s)} - |r_j^{(s)}|}{2} \leq 0, \quad m_1^* - \text{кількість кроків по просторовій змінній до РГВ.}$$

Для (3.2) отримаємо

$$X_{i,j} = \begin{cases} \gamma_{zg} + \frac{p_{j+1} - p_{j-1}}{2h_1}, & j = \overline{1, m_1^*}, \quad i = 1, \\ \gamma_{np}, & j = \overline{m_1^* + 1, m_1}, \quad i = 2. \end{cases} \quad (3.19)$$

$$\text{Тут: } p_j = \gamma_p (h_j - jh_1), \quad j = \overline{1, m_1^* - 1}.$$

Скінченнорізницевий аналог диференціального рівняння масоперенесення в неізотермічних умовах (3.7) має наступний вигляд:

$$\begin{aligned} & n_p \frac{c_j^{(s+1)} - c_j^{(s)}}{\tau} = \frac{\eta_j^{(s)}}{h_1} \left( d_{j+1}^{(s)} \frac{c_{j+1}^{(s+1)} - c_j^{(s+1)}}{h_1} - d_j^{(s)} \frac{c_j^{(s+1)} - c_{j-1}^{(s+1)}}{h_1} \right) + \\ & + \frac{(v^+)_j^{(s)}}{D_j^{(s)}(c_j^{(s)}, (T_1)_j^{(s)})} d_{j+1}^{(s)} \frac{c_{j+1}^{(s+1)} - c_j^{(s+1)}}{h_1} + \frac{(v^-)_j^{(s)}}{D_j^{(s)}(c_j^{(s)}, (T_1)_j^{(s)})} d_j^{(s)} \frac{c_j^{(s+1)} - c_{j-1}^{(s+1)}}{h_1} - \\ & - \gamma(c_j^{(s+1)} - C_m) + \frac{1}{h_1} \left( (d_T)_{j+1}^{(s)} \frac{(T_1)_{j+1}^{(s+1)} - (T_1)_j^{(s+1)}}{h_1} - (d_T)_j^{(s)} \frac{(T_1)_j^{(s+1)} - (T_1)_{j-1}^{(s+1)}}{h_1} \right), \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$j = \overline{1, m_1^* - 1}, \quad s = \overline{0, n_1 - 1}.$$

$$\text{де} \quad d_j^{(s)} = \frac{1}{2} (D_j^{(s)}(c_j^{(s)}, (T_1)_j^{(s)}) + D_{j-1}^{(s)}(c_{j-1}^{(s)}, (T_1)_j^{(s)})), \quad (d_T)_j^{(s)} = \frac{1}{2} ((D_T)_j^{(s)} + (D_T)_{j-1}^{(s)}),$$

$$\eta_j^{(s)} = \frac{1}{1 + \frac{h_1 |\nu_j^{(s)}|}{2D_j^{(k)}(c_j^{(s)}, (T_1)_j^{(s)})}} = 1 - \frac{h_1 |\nu_j^{(s)}|}{2D_j^{(s)}(c_j^{(s)}, (T_1)_j^{(s)})} + O(h_1^2), \quad (\nu^+)_j^{(s)} = \frac{-\nu_j^{(s)} + |\nu_j^{(s)}|}{2} \geq 0,$$

$$(\nu^-)_j^{(s)} = \frac{-\nu_j^{(s)} - |\nu_j^{(s)}|}{2} \leq 0.$$

Скінченнорізницевий аналог диференціального рівняння теплоперенесення (3.10) запишеться наступним чином:

$$c_T^{(i)} \frac{T_{i,j}^{(s+1)} - T_{i,j}^{(s)}}{\tau} = \frac{\bar{\eta}_j^{(s)}}{h_1} \left( (\bar{\lambda}_T)_{j+1}^{(s)} \frac{T_{i,j+1}^{(s+1)} - T_{i,j}^{(s+1)}}{h_1} - (\bar{\lambda}_T)_j^{(s)} \frac{T_{i,j}^{(s+1)} - T_{i,j-1}^{(s+1)}}{h_1} \right) +$$

$$+ \rho c_\rho \left( \frac{(\bar{\nu}^+)_j^{(s)}}{(\lambda_T)_j^{(s)}} (\bar{\lambda}_T)_{j+1}^{(s)} \frac{T_{i,j+1}^{(s+1)} - T_{i,j}^{(s+1)}}{h_1} + \frac{(\bar{\nu}^-)_j^{(s)}}{(\lambda_T)_j^{(s)}} (\bar{\lambda}_T)_j^{(s)} \frac{T_{i,j}^{(s+1)} - T_{i,j-1}^{(s+1)}}{h_1} \right), \quad (3.21)$$

$$j = \overline{1, m_1 - 1}, \quad s = \overline{0, n_1 - 1}, \quad i = 1, 2,$$

$$\text{де} \quad (\bar{\lambda}_T)_j^{(s)} = \frac{1}{2} \left( (\lambda_T)_j^{(s)} + (\lambda_T)_{j-1}^{(s)} \right), \quad \bar{\eta}_j^{(s)} = \frac{1}{1 + \frac{h_1 \rho c_\rho |\bar{\nu}_j^{(s)}|}{2(\lambda_T)_j^{(s)}}} = 1 - \frac{h_1 \rho c_\rho |\bar{\nu}_j^{(s)}|}{2(\lambda_T)_j^{(s)}} + O(h_1^2),$$

$$(\bar{\nu}^+)_j^{(s)} = (\nu^+)_j^{(s)}, \quad (\bar{\nu}^-)_j^{(s)} = (\nu^-)_j^{(s)} \quad \text{при } i=1 \text{ та } (\bar{\nu}^+)_j^{(s)} = (\bar{\nu}^-)_j^{(s)} = 0 \quad \text{при } i=2.$$

Для закону (3.15) маємо

$$\nu_j^{(s)} = -K_j^{(s)}(c_j^{(s)}, (T_1)_j^{(s)}) \frac{h_{j+1} - h_{j-1}}{2h_1} + (\nu_c)_j^{(s)} \frac{c_{j+1}^{(s)} - c_{j-1}^{(s)}}{2h_1} + (\nu_T)_j^{(s)} \frac{(T_1)_{j+1}^{(s)} - (T_1)_{j-1}^{(s)}}{2h_1}, \quad (3.22)$$

$$j = \overline{1, m_1^* - 1}, \quad s = \overline{1, n_1 - 1}.$$

Діючи аналогічним чином як в розділі 2, з рівняння нерозривності (3.15) маємо

$$\frac{\bar{\chi}_j^{(s)} h_{j-1} - 2h_j + h_{j+1}}{h_1} + (\bar{r}^+)_j^{(s)} \frac{h_{j+1} - h_j}{h_1} + (\bar{r}^-)_j^{(s)} \frac{h_j - h_{j-1}}{h_1} +$$

$$+ (\nu_c)_j^{(s)} \frac{c_{j-1}^{(s)} - 2c_j^{(s)} + c_{j+1}^{(s)}}{h_1^2} + \frac{(\nu_c)_{j+1}^{(s)} - (\nu_c)_{j-1}^{(s)}}{2h_1} \frac{c_{j-1}^{(s)} - c_{j+1}^{(s)}}{2h_1} + \nu_T \frac{(T_1)_{j-1}^{(s)} - 2(T_1)_j^{(s)} + (T_1)_{j+1}^{(s)}}{h_1^2} = 0, \quad (3.23)$$

$$j = \overline{1, m_1^* - 1}, \quad s = \overline{1, n_1 - 1},$$

$$\text{де} \quad \bar{\chi}_j^{(s)} = \frac{1}{1 + 0,5h_1 |\bar{r}_j^{(s)}|}, \quad (\bar{r}^+)_j^{(s)} = \frac{-\bar{r}_j^{(s)} + |\bar{r}_j^{(s)}|}{2} \geq 0, \quad (\bar{r}^-)_j^{(s)} = \frac{-\bar{r}_j^{(s)} - |\bar{r}_j^{(s)}|}{2} \leq 0,$$

$$\bar{r}_j^{(s)} = \frac{1}{K_j^{(s)}(c_j^{(s)}, (T_1)_j^{(s)})} \cdot \frac{K_{j+1}^{(s)}(c_{j+1}^{(s)}, (T_1)_{j+1}^{(s)}) - K_{j-1}^{(s)}(c_{j-1}^{(s)}, (T_1)_{j-1}^{(s)})}{2h_1}.$$

Умови спряження (3.5)–(3.6) та (3.13)–(3.14) апроксимуються наступним чином:

$$(U_1)_{m_1^*} = (U_2)_{m_1^*}, \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} E_1(c, T_1) \left( \left( (U_1)_{m_1^*} - (U_1)_{m_1^*-1} \right) - h_1 \alpha_T^{(1)} \left( (T_1)_{m_1^*}^{(s+1)} - (T_1)_{m_1^*}^{(0)} \right) \right) = \\ = E_2(T_2) \left( \left( (U_2)_{m_1^*+1} - (U_2)_{m_1^*} \right) - h_1 \alpha_T^{(2)} \left( (T_2)_{m_1^*}^{(s+1)} - (T_2)_{m_1^*}^{(0)} \right) \right), \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$(T_1)_{m_1^*}^{(s+1)} = (T_2)_{m_1^*}^{(s+1)}, \quad (3.26)$$

$$\lambda_T^{(1)} \left( (T_1)_{m_1^*}^{(s+1)} - (T_1)_{m_1^*-1}^{(s+1)} \right) - h_1 \rho c \nu_{m_1^*-1}^{(s+1)} (T_1)_{m_1^*}^{(s+1)} = \lambda_T^{(2)} \left( (T_2)_{m_1^*+1}^{(s+1)} - (T_2)_{m_1^*}^{(s+1)} \right), \quad (3.27)$$

$$s = \overline{0, n_1 - 1}.$$

Для початкових умов (3.8) та (3.11) отримаємо

$$c_j^{(0)} = \tilde{C}_0(jh_1), \quad j = \overline{0, m_1^*}, \quad T_j^{(0)} = \tilde{T}_0(jh_1), \quad j = \overline{0, m_1^*}.$$

Для граничних умов (3.4), (3.9), (3.12) та (3.16) першого роду маємо

$$U_0 = U_{m_1} = 0, \quad (3.28)$$

$$h_0 = \tilde{H}_1, \quad h_{m_1^*} = \tilde{H}_2, \quad (3.29)$$

$$c_0^{(s)} = \tilde{C}_1(s\tau), \quad c_{m_1^*}^{(s)} = \tilde{C}_2(s\tau), \quad T_0^{(s)} = \tilde{T}_1(s\tau), \quad T_{m_1^*}^{(s)} = \tilde{T}_2(s\tau) \quad s = \overline{1, n_1}. \quad (3.30)$$

Скінченнорізницеві аналоги для деформацій та напружень (3.17) мають вигляд

$$\varepsilon_j = \frac{U_{i,j+1} - U_{i,j-1}}{2h_1}, \quad \sigma_j = E_{i,j}^{(s)} \left( \frac{U_{i,j+1} - U_{i,j-1}}{2h_1} - \alpha_T^{(i)} (T_{i,j}^{(s)} - T_{i,j}^{(0)}) \right), \quad j = \overline{1, m_1^*}, \quad s = \overline{0, n_1}, \quad i = 1, 2, \quad (3.31)$$

де  $E_{i,j}^{(s)} = E_{1,j}^{(s)}(c_j^{(s)}, (T_1)_j^{(s)})$  при  $j = \overline{1, m_1^*}$ ,  $i = 1$  та  $E_{i,j}^{(s)} = E_{2,j}^{(s)}((T_2)_j^{(s)})$  при  $i = \overline{m_1^* + 1, m_1}$ ,  $i = 2$ .

Для знаходження невідомих функцій  $U_i(x)$ ,  $\varepsilon_i(x)$ ,  $\sigma_i(x)$ ,  $c(x, t)$ ,  $T_i(x, t)$ ,  $h(x)$  на часовому шарі  $(s + 1)$  використаємо нижченаведений алгоритм, вважаючи що на часовому шарі  $(s)$  задача вже розв'язана.

1. Використовуючи монотонну різницеву схему (3.21), апроксимацію відповідних граничних умов та умов спряження, знаходимо температуру  $T_i(x, t)$  на часовому шарі  $(s + 1)$  у водонасиченому шарі та шарі ґрунту в природному стані.
2. Використовуючи монотонну різницеву схему (3.20) та апроксимацію відповідних граничних умов, знаходимо концентрацію сольового розчину  $c(x, t)$  у водонасиченому шарі ґрунту на часовому шарі  $(s + 1)$ .
3. За монотонною різницевою схемою (3.18), використовуючи апроксимацію відповідних граничних умов та умов спряження, обчислюємо значення зміщень  $U_i(x)$ , а відповідно і за формулами (3.31) – значення деформацій  $\varepsilon_i(x)$  та напружень  $\sigma_i(x)$  у водонасиченому шарі та шарі ґрунту в природному стані.
4. Використовуючи монотонну різницеву схему (3.23), апроксимацію відповідних граничних умов, знаходимо напір  $h(x)$  у водонасиченому шарі ґрунту та за формулою (3.22) знаходимо швидкість фільтрації.
5. Переходимо на наступний часовий шар і повторюємо алгоритм, починаючи з першого кроку.

Для знаходження значень зміщень  $U_i(x)$  з рівняння (3.18) використаємо метод прогонки [131–133]. Для цього зведемо дане рівняння до прогоночного вигляду

$$a_j U_{i,j-1} - \bar{c}_j U_{i,j} + b_j U_{i,j+1} = -F_{i,j}^{(s)},$$

$$\text{де } a_j = r' - r'', \quad b_j = r' + r'', \quad \bar{c}_j = 2r', \quad r' = \frac{\lambda_{i,j}^{(s)} + 2\mu_{i,j}^{(s)}}{h_1^2}, \quad r'' = \frac{(\lambda_{i,j+1}^{(s)} - \lambda_{i,j-1}^{(s)}) + 2(\mu_{i,j+1}^{(s)} - \mu_{i,j-1}^{(s)})}{4h_1^2},$$

$$F_{i,j}^{(s)} = -X_{i,j} - \left( (\lambda_{i,j}^{(s)} + 2\mu_{i,j}^{(s)}) \frac{T_{i,j+1}^{(s)} - T_{i,j-1}^{(s)}}{2h_1} + \left( \frac{\lambda_{i,j+1}^{(s)} - \lambda_{i,j-1}^{(s)}}{2h_1} + \frac{2(\mu_{i,j+1}^{(s)} - \mu_{i,j-1}^{(s)})}{2h_1} \right) T_{i,j}^{(s)} \right) \alpha_T^{(i)}.$$

Можна показати, що умови стійкості прогонки  $|\bar{c}_j| \geq |a_j| + |b_j|$  виконуються.

Значення зміщень послідовно знаходимо, використовуючи співвідношення

$$U_{i,j} = \alpha_{j+1} U_{i,j+1} + \beta_{j+1}, \quad (3.32)$$

де

$$\alpha_{j+1} = \begin{cases} \frac{b_j}{\bar{c}_j - a_j^s \alpha_j}, & j = \overline{1, m_1^* - 1}, \\ \frac{(E_2)_{j+1}^{(s)}}{(E_2)_{j+1}^{(s)} + (E_1)_j^{(s)}(1 - \alpha_j)}, & j = m_1^*, \\ \frac{b_j}{\bar{c}_j - a_j^s \alpha_j}, & j = \overline{m_1^* + 1, m_1 - 1}, \end{cases} \quad \beta_{j+1}^s = \begin{cases} \frac{a_j \beta_j + F_{i,j}^{(s)}}{\bar{c}_j - a_j \alpha_j}, & j = \overline{1, m_1^* - 1}, \\ \frac{(E_1)_j^{(s)} \beta_j - \tilde{F}_{i,j}^{(s)}}{(E_2)_{j+1}^{(s)} + (E_1)_j^{(s)}(1 - \alpha_j)}, & j = m_1^*, \\ \frac{a_j \beta_j + F_{i,j}^{(s)}}{\bar{c}_j - a_j \alpha_j}, & j = \overline{m_1^* + 1, m_1 - 1}. \end{cases}$$

Тут: з урахуванням (3.26)  $\tilde{F}_{i,j}^{(s)} = h_1((E_2)_{j+1}^{(s)} \alpha_T^{(2)} - (E_1)_j^{(s)} \alpha_T^{(1)})(T_2)_{m_1^*}^{(s)} - (T_2)_{m_1^*}^{(0)}$ ;  $\alpha_1 = 0$ ,  $\beta_1 = 0$ .

Для знаходження  $T_i(x, t)$  з (3.21) використаємо метод прогонки [131-133]. Маємо

$$a_j T_{i,j-1}^{(s+1)} - \bar{c}_j T_{i,j}^{(s+1)} + b_j T_{i,j+1}^{(s+1)} = -T_{i,j}^{(s)},$$

де

$$a_j = \frac{\tau}{c_T} \frac{(\bar{\lambda}_T)_j^{(s)}}{h_1} \left( \frac{\bar{\eta}_j^{(s)}}{h_1} - \frac{\rho c_\rho (v^-)_j^{(s)}}{(\lambda_T)_j^{(s)}} \right), \quad b_j = \frac{\tau}{c_T} \frac{(\bar{\lambda}_T)_{j+1}^{(s)}}{h_1} \left( \frac{\bar{\eta}_j^{(s)}}{h_1} + \frac{\rho c_\rho (v^+)_j^{(s)}}{(\lambda_T)_j^{(s)}} \right),$$

$$\bar{c}_j = 1 + \frac{\tau}{c_T} \left( \frac{\bar{\eta}_j^{(s)} ((\bar{\lambda}_T)_{j+1}^{(s)} + (\bar{\lambda}_T)_j^{(s)})}{h_1^2} + \frac{\rho c_\rho}{(\lambda_T)_j^{(s)}} ((v^+)_j^{(s)} (\bar{\lambda}_T)_{j+1}^{(s)} - (v^-)_j^{(s)} (\bar{\lambda}_T)_j^{(s)}) \right).$$

Неважко показати, що умови стійкості прогонки  $|\bar{c}_j| > |a_j| + |b_j|$  виконуються.

Значення температури на часовому шарі  $(s+1)$  знаходимо за формулою

$$T_{i,j}^{(s+1)} = \alpha_{j+1} \cdot T_{i,j+1}^{(s+1)} + \beta_{j+1}, \quad \alpha_1 = 0, \quad \beta_1 = \tilde{T}_1(s\tau), \quad (3.33)$$

де

$$\alpha_{j+1} = \begin{cases} \frac{b_j}{\bar{c}_j - a_j \alpha_j}, & j = \overline{1, m_1^* - 1}, \\ \frac{\lambda_T^{(2)}}{\lambda_T^{(2)} + \lambda_T^{(1)}(1 - \alpha_j)}, & j = m_1^*, \\ \frac{b_j}{\bar{c}_j - a_j \alpha_j}, & j = \overline{m_1^* + 1, m_1 - 1}, \end{cases} \quad \beta_{j+1} = \begin{cases} \frac{a_j \beta_j + T_j^{(s)}}{\bar{c}_j - a_j \alpha_j}, & j = \overline{1, m_1^* - 1}, \\ \frac{\lambda_T^{(1)} \beta_j}{\lambda_T^{(2)} + \lambda_T^{(1)}(1 - \alpha_j)}, & j = m_1^*, \\ \frac{a_j \beta_j + T_j^{(s)}}{\bar{c}_j - a_j \alpha_j}, & j = \overline{m_1^* + 1, m_1 - 1}. \end{cases}$$

Значення концентрації солей  $c(x, t)$  та напору  $h(x)$  у водонасиченому шарі ґрунту знайдено з різницевих рівнянь (3.20), (3.23), використовуючи метод прогонки [131–133], аналогічним чином як і в розділі 2 при  $j = \overline{1, m_1^* - 1}$ .

### 3.1.4. Результати чисельних експериментів та їх аналіз

Як приклад, розглянуто одновимірну задачу НДС в ґрунті товщиною  $l = 10$  м з наявності РГВ, що знаходиться на глибині  $l_1 = 7$  м.

Значення решти вхідних даних брались наступні [36, 38, 91, 109, 158]:

$$n_p = 0,2, \quad D = D_T = 2 \cdot 10^{-3} \frac{\text{м}^2}{\text{доба}}, \quad \alpha_T = 1 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{град}}, \quad \gamma_p = 1 \cdot 10^4 \frac{\text{Па}}{\text{м}}, \quad \gamma_{зв} = 1,3 \cdot 10^4 \frac{\text{Па}}{\text{м}},$$

$$\gamma_{np} = 1,7 \cdot 10^4 \frac{\text{Па}}{\text{м}}, \quad \lambda_2 = 1,7 \cdot 10^7 \text{ Па}, \quad \mu_2 = 1,15 \cdot 10^7 \text{ Па}, \quad E_2 = 3 \cdot 10^7 \text{ Па}, \quad \rho = 1100 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3},$$

$$c_\rho^{(1)} = c_\rho^{(2)} = 4,2 \cdot 10^3 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{град}}, \quad \gamma = 6,5 \cdot 10^{-5} \text{ доба}^{-1} \quad c_T^{(1)} = c_T^{(2)} = 2,137 \cdot 10^6 \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3 \cdot \text{град}},$$

$$\lambda_T^{(1)} = \lambda_T^{(2)} = 108 \cdot 10^3 \frac{\text{Дж}}{\text{м} \cdot \text{град} \cdot \text{доба}}, \quad \tilde{C}_1(t) = 8 \frac{\text{г}}{\text{літр}}, \quad \tilde{C}_2(t) = 350 \frac{\text{г}}{\text{літр}},$$

$$\tilde{T}_1(t) = 5^\circ \text{C}, \quad \tilde{T}_2(t) = 25^\circ \text{C}, \quad \tilde{H}_1 = 0 \text{ м}, \quad \tilde{H}_2 = 1 \text{ м}, \quad \tilde{C}_0(x) = 8 \frac{\text{г}}{\text{літр}},$$

$\tilde{T}_0(x) = 5^\circ \text{C}$ . Час, протягом якого розглядався процес НДС, дорівнював 4 рокам.

Нижче наведено результати чисельних експериментів у вигляді графіків та табличних даних при  $t = 1440$  діб.

Як видно з рис. 3.3 та табл. 3.1, зміщення збільшуються при врахуванні тепло-масоперенесення у порівнянні з відповідними величинами без врахування тепло-масоперенесення. Однак, зміщення незначно збільшуються з урахуванням тепло-масоперенесення по відношенню до відповідних величин при врахуванні лише масоперенесення, а також зміщення дещо збільшуються з урахуванням теплоперенесення по відношенню до відповідних величин без урахування теплоперенесення.

Крім того, як видно із рис. 3.2, зміщення в умовах тепло-масоперенесення при фільтрації сольових розчинів у неізотермічних умовах та наявності РГВ зменшуються у порівнянні з відповідними величинами, але при відсутності РГВ.

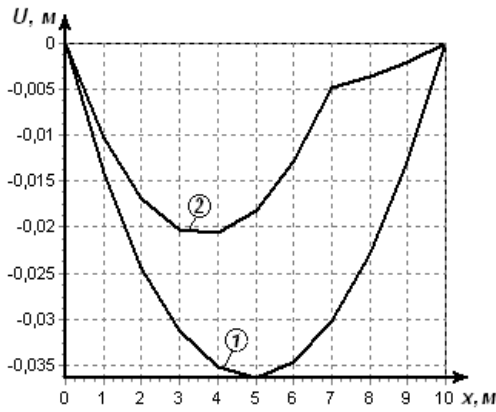


Рис. 3.2. Розподіли зміщень

в умовах тепло-масоперенесення при фільтрації сольових розчинів:

- 1) без урахування РГВ;
- 2) з урахуванням РГВ

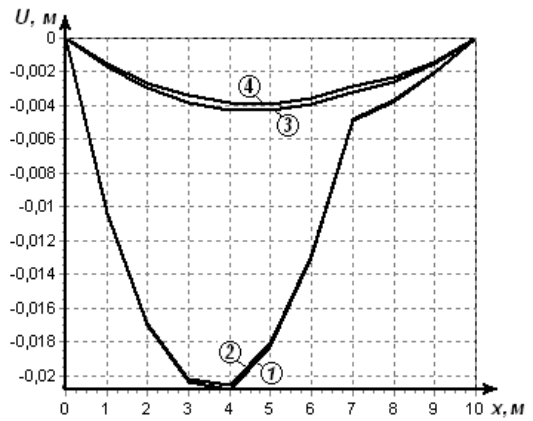


Рис. 3.3. Розподіли зміщень з

урахуванням РГВ:

- 1) при наявності тепло-масоперенесення;
- 2) при наявності масоперенесення;
- 3) при наявності теплоперенесення;
- 4) без тепло-масоперенесення

Таблиця 3.1

Значення зміщень при наявності РГВ в умовах тепло-масоперенесення ( $u^1(x)$ ), в умовах масоперенесення ( $u^2(x)$ ), в умовах теплоперенесення ( $u^3(x)$ ) та при відсутності тепло-масоперенесення ( $u^4(x)$ )

	x, м	$u^1(x), \times 10^{-2}$	$u^2(x), \times 10^{-2}$	$u^3(x), \times 10^{-2}$	$u^4(x), \times 10^{-2}$
Ґрунт в природному стані	10	0	0	0	0
	9	-0,203	-0,202	-0,142	-0,138
	8	-0,364	-0,362	-0,242	-0,234
	7	-0,481	-0,480	-0,298	-0,288
Ґрунт водонасичений у зваженому стані при фільтрації сольових розчинів	7	-0,481	-0,480	-0,298	-0,288
	6	-1,286	-1,282	-0,371	-0,356
	5	-1,815	-1,809	-0,405	-0,388
	4	-2,061	-2,055	-0,400	-0,383
	3	-2,020	-2,019	-0,356	-0,342
	2	-1,686	-1,689	-0,275	-0,265
	1	-1,032	-1,035	-0,156	-0,151
	0	0	0	0	0

### 3.2. Математичне моделювання впливу тепло-масоперенесення при фільтрації сольових розчинів на напружено-деформований стан ґрунтового масиву з вільною поверхнею у двовимірному випадку

#### 3.2.1. Постановка задачі

Розглянемо ґрунтовий масив прямокутної форми з вільною поверхнею, що займає область  $\Omega = \{(x, y) : 0 < x < l_1, 0 < y < l_2\}$ .

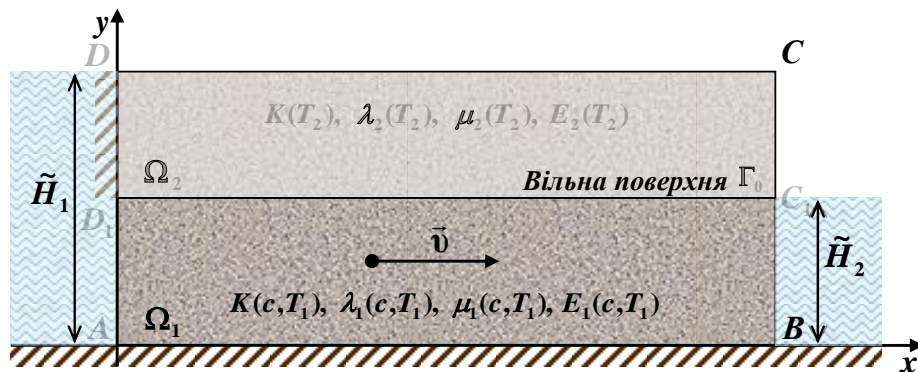


Рис.3.4. Схема ґрунтового масиву з вільною поверхнею у двовимірному випадку

На рис.3.4 введено такі позначення:  $\Omega_1$  – область водонасиченого ґрунтового масиву;  $\Omega_2$  – область ґрунтового масиву в природному стані,  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ .

Ґрунтовий масив вважається пружно-деформівним у межах лінійної теорії пружності з різними коефіцієнтами Ламе  $\lambda_i$ ,  $\mu_i$ , які залежать від концентрації сольового розчину та температури у водонасиченій області та від температури у всій області дослідження. На ґрунт діють сила тяжіння, архімедова та фільтраційна сили.

Межа  $AB$  вважається теплоізолюваною та непроникною,  $CD$  – теплоізолюваною, а межі  $AD_1$ ,  $D_1D$ ,  $BC_1$ ,  $C_1C$  – дренажними. Вільна поверхня ґрунтових вод  $\Gamma_0$  знаходиться на рівні  $l_2^1$  і вважається нерухомою. Припускається, що відсутні зміщення нижньої ( $AB$ ) та верхньої ( $CD$ ) меж ґрунтового масиву.

Задано значення п'єзометричних напорів  $\tilde{H}_1$ ,  $\tilde{H}_2$  та температур  $\tilde{T}_1$  та  $\tilde{T}_2$  у лівому та правому водних басейнах на границях ґрунтового масиву  $AD_1$  та  $BC_1$  відповідно, причому  $\tilde{H}_1 > \tilde{H}_2$ ,  $\tilde{T}_1 > \tilde{T}_2$ . У лівому водному басейні задано значення



концентрації сольових розчинів  $\tilde{C}_1$ , а у правому – умову швидкого виносу солей. Під впливом градієнтів напорів, концентрації сольових розчинів та температури відбувається перенесення розчинених у воді речовин та тепла фільтраційним потоком. При цьому процеси фільтрації розчинених у воді речовин та тепла підлягають відповідно законам Дарсі, Фіка та Фур'є.

Таким чином, у досліджуваній області ґрунтового масиву  $\mathbf{X} \in \Omega_i$ ,  $i = \overline{1,2}$  необхідно розрахувати розподіли вектора зміщень  $\mathbf{u}_i(\mathbf{X}) = (U_i(\mathbf{X}), V_i(\mathbf{X}))$ , нормальних  $\varepsilon_x^{(i)}$ ,  $\varepsilon_y^{(i)}$  та дотичних  $\varepsilon_{xy}^{(i)}$  деформацій, нормальних  $\sigma_x^{(i)}$ ,  $\sigma_y^{(i)}$  та дотичних  $\tau_{xy}^{(i)}$  напружень та температури  $T_i(\mathbf{X}, t)$  для ґрунтового масиву, що знаходиться у водонасиченому та природному станах; розподіли п'єзометричного напору  $h(\mathbf{X})$  та концентрації сольових розчинів  $c(\mathbf{X}, t)$  у водонасиченій області ґрунтового масиву ( $\mathbf{X} \in \Omega_1$ ).

### 3.2.2. Математична модель задачі

Математичну модель задачі НДС ґрунтового масиву з вільною поверхнею в умовах тепло-масоперенесення у двовимірному випадку, враховуючи результати розділу 1 та робіт [48–50, 54–56, 60, 61, 63, 66, 68, 71, 72, 155, 201, 202], можна описати наступною крайовою задачею.

Система рівнянь рівноваги для зміщень ґрунту в формі Ламе з урахуванням тепло-масоперенесення сольових розчинів для масиву ґрунту, що знаходиться у водонасиченому та природному станах має наступний вигляд:

$$\begin{aligned} & \mu_i(c, T_i) \Delta U_i + (\lambda_i(c, T_i) + \mu_i(c, T_i)) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x} + \frac{\partial V_i}{\partial y} \right) + \frac{\partial \lambda_i(c, T_i)}{\partial x} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x} + \frac{\partial V_i}{\partial y} \right) + \\ & + 2 \frac{\partial \mu_i(c, T_i)}{\partial x} \frac{\partial U_i}{\partial x} + \frac{\partial \mu_i(c, T_i)}{\partial y} \left( \frac{\partial U_i}{\partial y} + \frac{\partial V_i}{\partial x} \right) - \\ & - \left( \left( 2 \frac{\partial \lambda_i(c, T_i)}{\partial x} + 2 \frac{\partial \mu_i(c, T_i)}{\partial x} \right) T_i + (2\lambda_i(c, T_i) + 2\mu_i(c, T_i)) \frac{\partial T_i}{\partial x} \right) \alpha_T^{(i)} = X_i, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \mu_i(c, T_i) \Delta V_i + (\lambda_i(c, T_i) + \mu_i(c, T_i)) \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x} + \frac{\partial V_i}{\partial y} \right) + \frac{\partial \lambda_i(c, T_i)}{\partial y} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x} + \frac{\partial V_i}{\partial y} \right) + \\
& + 2 \frac{\partial \mu_i(c, T_i)}{\partial y} \frac{\partial V_i}{\partial y} + \frac{\partial \mu_i(c, T_i)}{\partial x} \left( \frac{\partial U_i}{\partial y} + \frac{\partial V_i}{\partial x} \right) - \\
& - \left( \left( 2 \frac{\partial \lambda_i(c, T_i)}{\partial y} + 2 \frac{\partial \mu_i(c, T_i)}{\partial y} \right) T_i + (2\lambda_i(c, T_i) + 2\mu_i(c, T_i)) \frac{\partial T_i}{\partial y} \right) \alpha_T^{(i)} = Y_i, \\
& \mathbf{X} \in \Omega_i, \quad i = \overline{1, 2},
\end{aligned} \tag{3.34}$$

де компоненти масової сили обчислюються за формулами

$$X_i = \begin{cases} \frac{dp_1}{dx}, & i = 1, \\ 0, & i = 2, \end{cases} \quad Y_i = \begin{cases} \gamma_{зв} + \frac{dp_2}{dy}, & i = 1, \\ \gamma_{np}, & i = 2. \end{cases} \tag{3.35}$$

Тут:  $\mathbf{u}_i(\mathbf{X}) = (U_i(\mathbf{X}), V_i(\mathbf{X}))$  – вектор зміщень, де  $U_i(\mathbf{X}), V_i(\mathbf{X}), i = \overline{1, 2}$  – зміщення вздовж осей  $Ox, Oy$  відповідно;  $\mathbf{X} = (x, y)$  – точка;  $\lambda_i(c, T_i), \mu_i(c, T_i), i = \overline{1, 2}$  – коефіцієнти Ламе, причому  $\lambda_i(c, T_i) = \lambda_1(c, T_1), \mu_i(c, T_i) = \mu_1(c, T_1)$  при  $\mathbf{X} \in \Omega_1, i = 1$  та  $\lambda_i(c, T_i) = \lambda_2(T_2), \mu_i(c, T_i) = \mu_2(T_2)$  при  $\mathbf{X} \in \Omega_2, i = 2$ ;  $c(\mathbf{X}, t)$  – концентрація сольових розчинів;  $T_i(\mathbf{X}, t), i = \overline{1, 2}$  – температура;  $\alpha_T^{(i)}$  – середні коефіцієнти лінійного теплового розширення в інтервалі температур  $(T_0, T)$  [87];  $p_1 = \gamma_p(h - x), p_2 = \gamma_p(h - y)$  – фільтраційні тиски сольового розчину у водонасиченій області ґрунтового масиву;  $\gamma_{зв}, \gamma_{np}$  – питомі ваги ґрунту, що знаходиться в зваженому та у природному станах.

Рівняння конвективної дифузії за наявності тепло-масоперенесення для водонасиченого ґрунтового масиву має наступний вигляд:

$$\nabla \cdot (\mathbf{D}(c, T_1) \nabla c) - \mathbf{v} \nabla c - \gamma(c - C_m) + \nabla \cdot (\mathbf{D}_T \nabla T_1) = n_p \frac{\partial c}{\partial t}, \quad \mathbf{X} \in \Omega_1, \quad t > 0, \tag{3.36}$$

де  $\mathbf{v}$  – вектор швидкості фільтрації;  $n_p$  – пористість ґрунту;  $\mathbf{D}(c, T_1), \mathbf{D}_T$  – коефіцієнти (тензори) конвективної дифузії та термодифузії відповідно;  $t$  – час.

Рівняння конвективного теплоперенесення у всій області дослідження

$$\nabla \cdot (\lambda_T^{(i)} \nabla T_i) - \rho c_p \bar{\mathbf{v}} \nabla T_i = c_T^{(i)} \frac{\partial T_i}{\partial t}, \quad \mathbf{X} \in \Omega_i, \quad i = \overline{1, 2}, \quad t > 0, \tag{3.37}$$

де  $\lambda_T^{(i)}$  – коефіцієнти (тензори) ефективної теплопровідності вологого ґрунту;  $\rho$  – густина сольового розчину;  $c_\rho$  – питома теплоємність сольового розчину;  $c_T^{(i)}$  – об’ємні теплоємності ґрунту при сталому об’ємі;  $\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{v}$  при  $\mathbf{X} \in \Omega_1$  та  $\bar{\mathbf{v}} = 0$  при  $\mathbf{X} \in \Omega_2$ .

Узагальнене рівняння фільтрації сольових розчинів у неізотермічних умовах та рівняння нерозривності процесу у водонасиченій області ґрунтового масиву

$$\mathbf{v} = -\mathbf{K}(c, T_1) \nabla h + \mathbf{v}_c \nabla c + \mathbf{v}_T \nabla T_1, \quad \text{div } \mathbf{v} + \frac{\partial n_p}{\partial t} = 0, \quad \mathbf{X} \in \Omega_1, \quad t > 0, \quad (3.38)$$

де  $\mathbf{K}(c, T_1)$  – коефіцієнт (тензор) фільтрації, що залежить від концентрації сольового розчину та температури у водонасиченій області ґрунтового масиву;  $h(\mathbf{X}, t)$  – п’єзометричний напір,  $\mathbf{v}_c$  – коефіцієнт (тензор) хімічного осмосу,  $\mathbf{v}_T$  – коефіцієнт (тензор) термічного осмосу.

Питомий потік розчинених солей на випадок неізотермічних умов у водонасиченому ґрунтовому масиві

$$\mathbf{q}_c = \mathbf{v}c - \mathbf{D}(c, T_1) \nabla c - \mathbf{D}_T \nabla T_1, \quad \mathbf{X} \in \Omega_1, \quad t > 0. \quad (3.39)$$

Узагальнений закон Фур’є на випадок конвективного тепло-масоперенесення [38]

$$\mathbf{q}_T^{(i)} = \rho c_\rho \bar{\mathbf{v}} T_i - \lambda_T^{(i)} \nabla T_i, \quad \mathbf{X} \in \Omega_i, \quad i = \overline{1, 2}, \quad t > 0. \quad (3.40)$$

Нормальні та дотичні деформації обчислюються за формулами

$$\varepsilon_x^{(i)} = \frac{\partial U_i}{\partial x}, \quad \varepsilon_y^{(i)} = \frac{\partial V_i}{\partial y}, \quad \varepsilon_{xy}^{(i)} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial y} + \frac{\partial V_i}{\partial x} \right), \quad \mathbf{X} \in \Omega_i, \quad i = \overline{1, 2}. \quad (3.41)$$

Нормальні та дотичні напруження мають наступний вигляд: [11, 100, 125]

$$\sigma_x^{(i)} = \frac{\theta}{1+\nu} (\varepsilon_x^{(i)} + \nu \varepsilon_y^{(i)}) - \alpha_T^{(i)} \bar{T}_i \theta, \quad \sigma_y^{(i)} = \frac{\theta}{1+\nu} (\varepsilon_y^{(i)} + \nu \varepsilon_x^{(i)}) - \alpha_T^{(i)} \bar{T}_i \theta, \quad (3.42)$$

$$\tau_{xy}^{(i)} = \frac{E_i(c, T_i)}{2(1+\nu)} \varepsilon_{xy}^{(i)}, \quad \mathbf{X} \in \Omega_i, \quad i = \overline{1, 2},$$

де  $\theta = \frac{E_i(c, T_i)}{1-\nu}$ , причому  $E_i(c, T_i) = E_1(c, T_1)$  при  $\mathbf{X} \in \Omega_1$ ,  $i = 1$  та  $E_i(c, T_i) = E_2(T_2)$

при  $\mathbf{X} \in \Omega_2$ ,  $i = 2$ ;  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона;  $\bar{T}_i = T_i(\mathbf{X}, t) - T_i(\mathbf{X}, 0)$  – різниця

температур у даний момент часу та в початковий момент часу в заданій точці.

Крайові умови на границях ґрунтового масиву та умови спряження ідеального контакту для зміщень та температури, а також крайові умови для п'єзометричного напору та концентрації сольових розчинів мають вигляд

$$(\mathbf{v}, \mathbf{n})|_{AB} = 0, h(\mathbf{X})|_{AD_1} = \tilde{H}_1(\mathbf{X}), h(\mathbf{X})|_{BC_1} = \tilde{H}_2(\mathbf{X}), \mathbf{X} \in \Omega_1, \quad (3.43)$$

$$(\mathbf{q}_c, \mathbf{n})|_{AB} = 0, c(\mathbf{X}, t)|_{AD_1} = \tilde{C}_1(\mathbf{X}, t), \left. \frac{\partial c(\mathbf{X}, t)}{\partial n} \right|_{BC_1} = 0, \mathbf{X} \in \Omega_1, t > 0, \quad (3.44)$$

$$(\mathbf{q}_T^{(i)}, \mathbf{n})|_{AB \cup CD} = 0, T_i(\mathbf{X}, t)|_{AD} = \tilde{T}_1(\mathbf{X}, t), T_i(\mathbf{X}, t)|_{BC} = \tilde{T}_2(\mathbf{X}, t), \mathbf{X} \in \Omega_i, i = \overline{1, 2}, t > 0, \quad (3.45)$$

$$\mathbf{u}_1(\mathbf{X}) = 0, \mathbf{X} \in AB, \mathbf{u}_2(\mathbf{X}) = 0, \mathbf{X} \in CD, \sigma_n = 0, \tau_s = 0, \mathbf{X} \in AD \cup BC, \quad (3.46)$$

$$[T_i(\mathbf{X}, t)]|_{\Gamma_0} = 0, [\mathbf{q}_T^{(i)}]|_{\Gamma_0} = 0, \mathbf{X} \in \Gamma_0, i = \overline{1, 2}, t > 0, \quad (3.47)$$

$$[u_n^{(i)}]|_{\Gamma_0} = [u_s^{(i)}]|_{\Gamma_0} = 0, [\sigma_n^{(i)}]|_{\Gamma_0} = [\tau_s^{(i)}]|_{\Gamma_0} = 0, \mathbf{X} \in \Gamma_0, i = \overline{1, 2}, \quad (3.48)$$

$$c(\mathbf{X}, 0) = \tilde{C}_0(\mathbf{X}), \mathbf{X} \in \Omega_1, T(\mathbf{X}, 0) = \begin{cases} \tilde{T}_0^1(\mathbf{X}), & \mathbf{X} \in \Omega_1, \\ \tilde{T}_0^2(\mathbf{X}), & \mathbf{X} \in \Omega_2, \end{cases} \quad (3.49)$$

де  $\tilde{C}_0(\mathbf{X}), \tilde{T}_0^1(\mathbf{X}), \tilde{T}_0^2(\mathbf{X}), \tilde{H}_1(\mathbf{X}, t), \tilde{H}_2(\mathbf{X}, t), \tilde{C}_1(\mathbf{X}, t), \tilde{T}_1(\mathbf{X}, t), \tilde{T}_2(\mathbf{X}, t)$  – задані функції;  $\mathbf{n}$  – вектор напрямних косинусів зовнішньої нормалі до межі  $\Gamma$ ;  $[\ ]$  – стрибок функції.

На вільній поверхні  $\Gamma_0$  (депресійній кривій) функція  $h(\mathbf{X}, t)$  задовольняє наступним умовам [38]:

$$h(\mathbf{X})|_{\Gamma_0} = y, (\mathbf{v}, \mathbf{n})|_{\Gamma_0} = n_p \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \varphi(\mathbf{X}, t) = (y - h(\mathbf{X}))|_{\Gamma_0} = 0, \mathbf{X} \in \Gamma_0, t > 0, \quad (3.50)$$

де співвідношення  $\varphi(\mathbf{X}, t)$  описує вільну поверхню  $\Gamma_0$ .

Для концентрації сольових розчинів у неізотермічних умовах на кривій депресії виконується наступна гранична умова [38]:

$$(\mathbf{D}(c, T_1) \nabla c + \mathbf{D}_T \nabla T_1, \mathbf{n})|_{\Gamma_0} = 0, \mathbf{X} \in \Gamma_0, t > 0. \quad (3.51)$$

Крайова задача (3.34)–(3.51) визначена в області  $\overline{Q_T} = \Omega \times (0, T]$  і з математичної точки зору являє собою систему диференціальних рівнянь рівноваги в

формі Ламе для зміщень ґрунту та нелінійних рівнянь параболічного типу, що містять першу похідну, з відповідними крайовими умовами та умовами спряження.

### 3.2.3. Чисельний розв'язок крайової задачі

Покриємо область  $\bar{Q}_T = \bar{\Omega} \times [0, t_0]$  рівномірною сіткою  $\bar{Q}^{(m_1, m_2, n_1)} = ([0; m_1 h_1] \times [0; m_2 h_2]) \times [0; n_1 \tau]$  з кроками  $h_1$ ,  $h_2$  та  $\tau$  відповідно по змінних  $x$ ,  $y$  та часу  $t$ , де  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $n_1$  – кількість кроків по просторових змінних та часу відповідно.

Для апроксимації системи рівнянь (3.34) використаємо дев'ятиточковий шаблон типу “ящик”. Тоді отримаємо наступні скінченнорізницеві аналоги:

$$\begin{aligned} \mu_{i,j_1,j_2} & \left( \frac{U_{i,j_1+1,j_2} - 2U_{i,j_1,j_2} + U_{i,j_1-1,j_2}}{h_1^2} + \frac{U_{i,j_1,j_2+1} - 2U_{i,j_1,j_2} + U_{i,j_1,j_2-1}}{h_2^2} \right) + \\ & + (\lambda_{i,j_1,j_2} + \mu_{i,j_1,j_2}) \frac{U_{i,j_1+1,j_2} - 2U_{i,j_1,j_2} + U_{i,j_1-1,j_2}}{h_1^2} + \\ & + \left( \frac{\lambda_{i,j_1+1,j_2} - \lambda_{i,j_1,j_2}}{h_1} + 2 \frac{\mu_{i,j_1+1,j_2} - \mu_{i,j_1,j_2}}{h_1} \right) \frac{U_{i,j_1+1,j_2} - U_{i,j_1,j_2}}{h_1} + \\ & + \frac{\mu_{i,j_1,j_2+1} - \mu_{i,j_1,j_2}}{h_2} \frac{U_{i,j_1,j_2+1} - U_{i,j_1,j_2}}{h_2} = f_{i,j_1,j_2}^1(V_i, T_i), \end{aligned} \quad (3.52)$$

$$\begin{aligned} \mu_{i,j_1,j_2} & \left( \frac{V_{i,j_1+1,j_2} - 2V_{i,j_1,j_2} + V_{i,j_1-1,j_2}}{h_1^2} + \frac{V_{i,j_1,j_2+1} - 2V_{i,j_1,j_2} + V_{i,j_1,j_2-1}}{h_2^2} \right) + \\ & + (\lambda_{i,j_1,j_2} + \mu_{i,j_1,j_2}) \frac{V_{i,j_1,j_2+1} - 2V_{i,j_1,j_2} + V_{i,j_1,j_2-1}}{h_2^2} + \\ & + \left( \frac{\lambda_{i,j_1,j_2+1} - \lambda_{i,j_1,j_2}}{h_2} + 2 \frac{\mu_{i,j_1,j_2+1} - \mu_{i,j_1,j_2}}{h_2} \right) \frac{V_{i,j_1,j_2+1} - V_{i,j_1,j_2}}{h_2} + \\ & + \frac{\mu_{i,j_1+1,j_2} - \mu_{i,j_1,j_2}}{h_1} \frac{V_{i,j_1+1,j_2} - V_{i,j_1,j_2}}{h_1} = f_{i,j_1,j_2}^2(U_i, T_i), \end{aligned} \quad (3.53)$$

де

$$\begin{aligned}
f_{i,j_1,j_2}^1(V_i, T_i) &= X_{i,j_1,j_2} - (\lambda_{i,j_1,j_2} + \mu_{i,j_1,j_2}) \frac{V_{i,j_1+1,j_2+1} - V_{i,j_1+1,j_2-1} - V_{i,j_1-1,j_2+1} + V_{i,j_1-1,j_2-1}}{4h_1h_2} - \\
&\quad - \frac{\lambda_{i,j_1+1,j_2} - \lambda_{i,j_1,j_2}}{h_1} \frac{V_{i,j_1,j_2+1} - V_{i,j_1,j_2}}{h_2} - \frac{\mu_{i,j_1,j_2+1} - \mu_{i,j_1,j_2}}{h_2} \frac{V_{i,j_1+1,j_2} - V_{i,j_1,j_2}}{h_1} + \\
&\quad + \left( \left( 2 \frac{\lambda_{i,j_1+1,j_2} - \lambda_{i,j_1,j_2}}{h_1} + 2 \frac{\mu_{i,j_1+1,j_2} - \mu_{i,j_1,j_2}}{h_1} \right) T_{i,j_1,j_2}^{(s)} + (2\lambda_{i,j_1,j_2} + 2\mu_{i,j_1,j_2}) \frac{T_{i,j_1+1,j_2}^{(s)} - T_{i,j_1-1,j_2}^{(s)}}{2h_1} \right) \alpha_T^{(i)}, \\
f_{i,j_1,j_2}^2(U_i, T_i) &= Y_{i,j_1,j_2} - (\lambda_{i,j_1,j_2} + \mu_{i,j_1,j_2}) \frac{U_{i,j_1+1,j_2+1} - U_{i,j_1+1,j_2-1} - U_{i,j_1-1,j_2+1} + U_{i,j_1-1,j_2-1}}{4h_1h_2} - \\
&\quad - \frac{\lambda_{i,j_1,j_2+1} - \lambda_{i,j_1,j_2}}{h_2} \frac{U_{i,j_1+1,j_2} - U_{i,j_1,j_2}}{h_1} - \frac{\mu_{i,j_1+1,j_2} - \mu_{i,j_1,j_2}}{h_1} \frac{U_{i,j_1,j_2+1} - U_{i,j_1,j_2}}{h_2} + \\
&\quad + \left( \left( 2 \frac{\lambda_{i,j_1,j_2+1} - \lambda_{i,j_1,j_2}}{h_2} + 2 \frac{\mu_{i,j_1,j_2+1} - \mu_{i,j_1,j_2}}{h_2} \right) T_{i,j_1,j_2}^{(s)} + (2\lambda_{i,j_1,j_2} + 2\mu_{i,j_1,j_2}) \frac{T_{i,j_1,j_2+1}^{(s)} - T_{i,j_1,j_2-1}^{(s)}}{2h_2} \right) \alpha_T^{(i)}.
\end{aligned}$$

Тут:  $\lambda_{i,j_1,j_2} = \lambda_{1,j_1,j_2}(c_{j_1,j_2}^{(s)}, T_{1,j_1,j_2}^{(s)})$ ,  $\mu_{i,j_1,j_2} = \mu_{1,j_1,j_2}(c_{j_1,j_2}^{(s)}, T_{1,j_1,j_2}^{(s)})$  при  $i = 1$  та  $\lambda_{i,j_1,j_2} = \lambda_{2,j_1,j_2}(T_{2,j_1,j_2}^{(s)})$ ,  $\mu_{i,j_1,j_2} = \mu_{2,j_1,j_2}(T_{2,j_1,j_2}^{(s)})$  при  $i = 2$ ,  $j_1 = \overline{1, m_1 - 1}$ ,  $j_2 = \overline{1, m_2 - 1}$ ,  $s = \overline{0, n_1}$ ,  $i = \overline{1, 2}$ .

Скінченнорізницеві аналоги для (3.35) мають наступний вигляд:

$$X_{i,j_1,j_2} = \begin{cases} \frac{(p_1)_{j_1+1,j_2} - (p_1)_{j_1-1,j_2}}{2h_1}, & i = 1, \\ 0, & i = 2, \end{cases} \quad Y_{i,j_1,j_2} = \begin{cases} \gamma_{3s} + \frac{(p_2)_{j_1,j_2+1} - (p_2)_{j_1,j_2-1}}{2h_2}, & i = 1, \\ \gamma_{np}, & i = 2, \end{cases} \quad (3.54)$$

де  $(p_1)_{j_1,j_2} = \gamma_p(h_{j_1,j_2} - j_1h_1)$ ,  $(p_2)_{j_1,j_2} = \gamma_p(h_{j_1,j_2} - j_2h_2)$ ,  $j_1 = \overline{1, m_1 - 1}$ ,  $j_2 = \overline{1, m_2 - 1}$ ,  $s = \overline{1, n_1 - 1}$ .

Диференціальне рівняння (3.37) згідно локально-одновимірного методу О.А. Самарського [131–133] подамо у вигляді системи одновимірних рівнянь

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_{T_1}^{(i)} \frac{\partial T_i}{\partial x} \right) - \rho c_{\rho} \bar{v}_1 \frac{\partial T_i}{\partial x} = \frac{c_T^{(i)}}{2} \frac{\partial T_i}{\partial t}, \quad (3.55)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda_{T_2}^{(i)} \frac{\partial T_i}{\partial y} \right) - \rho c_{\rho} \bar{v}_2 \frac{\partial T_i}{\partial y} = \frac{c_T^{(i)}}{2} \frac{\partial T_i}{\partial t}, \quad \mathbf{X} \in \Omega_i, \quad i = \overline{1, 2}, \quad t > 0. \quad (3.56)$$

Скінченнорізницеві аналоги (3.37) запишуться у вигляді

$$c_T^{(i)} \frac{T_{i,j_1,j_2}^{(s+0,5)} - T_{i,j_1,j_2}^{(s)}}{\tau} = \frac{(\bar{\eta}_1^{(i)})^{(s)}}{h_1} \left( (\bar{\lambda}_{T_1})_{j_1+1,j_2}^{(s)} \frac{T_{i,j_1+1,j_2}^{(s+0,5)} - T_{i,j_1,j_2}^{(s+0,5)}}{h_1} - (\bar{\lambda}_{T_1})_{j_1,j_2}^{(s)} \frac{T_{i,j_1,j_2}^{(s+0,5)} - T_{i,j_1-1,j_2}^{(s+0,5)}}{h_1} \right) +$$

$$+ \rho c_\rho \left( \frac{(v_1^+)^{(s)}}{(\lambda_{T_1})_{j_1,j_2}^{(s)}} \cdot (\bar{\lambda}_{T_1})_{j_1+1,j_2}^{(s)} \frac{T_{i,j_1+1,j_2}^{(s+0,5)} - T_{i,j_1,j_2}^{(s+0,5)}}{h_1} + \frac{(v_1^-)^{(s)}}{(\lambda_{T_1})_{j_1,j_2}^{(s)}} \cdot (\bar{\lambda}_{T_1})_{j_1,j_2}^{(s)} \frac{T_{i,j_1,j_2}^{(s+0,5)} - T_{i,j_1-1,j_2}^{(s+0,5)}}{h_1} \right), \quad (3.57)$$

$$c_T^{(i)} \frac{T_{i,j_1,j_2}^{(s+1)} - T_{i,j_1,j_2}^{(s+0,5)}}{\tau} = \frac{(\bar{\eta}_2^{(i)})^{(s)}}{h_2} \left( (\bar{\lambda}_{T_2})_{j_1,j_2+1}^{(s)} \frac{T_{i,j_1,j_2+1}^{(s+1)} - T_{i,j_1,j_2}^{(s+1)}}{h_2} - (\bar{\lambda}_{T_2})_{j_1,j_2}^{(s)} \frac{T_{i,j_1,j_2}^{(s+1)} - T_{i,j_1,j_2-1}^{(s+1)}}{h_2} \right) +$$

$$+ \rho c_\rho \left( \frac{(v_2^+)^{(s)}}{(\lambda_{T_2})_{j_1,j_2}^{(s)}} \cdot (\bar{\lambda}_{T_2})_{j_1,j_2+1}^{(s)} \frac{T_{i,j_1,j_2+1}^{(s+1)} - T_{i,j_1,j_2}^{(s+1)}}{h_2} + \frac{(v_2^-)^{(s)}}{(\lambda_{T_2})_{j_1,j_2}^{(s)}} \cdot (\bar{\lambda}_{T_2})_{j_1,j_2}^{(s)} \frac{T_{i,j_1,j_2}^{(s+1)} - T_{i,j_1,j_2-1}^{(s+1)}}{h_2} \right), \quad (3.58)$$

$$j_1 = \overline{1, m_1 - 1}, \quad j_2 = \overline{1, m_2 - 1}, \quad s = \overline{0, n_1 - 1}, \quad i = \overline{1, 2},$$

де

$$(\bar{\lambda}_{T_1})_{j_1,j_2}^{(s)} = \frac{1}{2} \left( (\lambda_{T_1}^{(i)})_{j_1,j_2}^{(s)} + (\lambda_{T_1}^{(i)})_{j_1-1,j_2}^{(s)} \right), \quad (\bar{\lambda}_{T_2})_{j_1,j_2}^{(s)} = \frac{1}{2} \left( (\lambda_{T_2}^{(i)})_{j_1,j_2}^{(s)} + (\lambda_{T_2}^{(i)})_{j_1,j_2-1}^{(s)} \right)$$

$$(\bar{\eta}_{j_3}^{(i)})_{j_1,j_2}^{(s)} = \frac{1}{1 + \frac{h_{j_3} \rho c_\rho |(v_{j_3})_{j_1,j_2}^{(s)}|}{2(\lambda_{T_{j_3}}^{(i)})_{j_1,j_2}^{(s)}}} = 1 - \frac{h_{j_3} \rho c_\rho |(v_{j_3})_{j_1,j_2}^{(s)}|}{2(\lambda_{T_{j_3}}^{(i)})_{j_1,j_2}^{(s)}} + O(h_{j_3}^2), \quad j_3 = 1, 2.$$

Для значень компонент швидкості фільтрації (3.38) отримаємо

$$(v_1)_{j_1,j_2}^{(s)} = -(K_1)_{j_1,j_2}^{(s)} \frac{h_{j_1+1,j_2} - h_{j_1-1,j_2}}{2h_1} + (v_{c_1})_{j_1,j_2}^{(s)} \frac{c_{j_1+1,j_2}^{(s)} - c_{j_1-1,j_2}^{(s)}}{2h_1} + (v_{T_1})_{j_1,j_2}^{(s)} \frac{T_{1,j_1+1,j_2}^{(s)} - T_{1,j_1-1,j_2}^{(s)}}{2h_1}, \quad (3.59)$$

$$(v_2)_{j_1,j_2}^{(s)} = -(K_2)_{j_1,j_2}^{(s)} \frac{h_{j_1,j_2+1} - h_{j_1,j_2-1}}{2h_2} + (v_{c_2})_{j_1,j_2}^{(s)} \frac{c_{j_1,j_2+1}^{(s)} - c_{j_1,j_2-1}^{(s)}}{2h_2} + (v_{T_2})_{j_1,j_2}^{(s)} \frac{T_{1,j_1,j_2+1}^{(s)} - T_{1,j_1,j_2-1}^{(s)}}{2h_2}, \quad (3.60)$$

$$j_1 = \overline{1, m_1 - 1}, \quad j_2 = \overline{1, m_2^* - 1}, \quad s = \overline{0, n_1}.$$

Скінченнорізницеві аналоги для компонент тензора деформацій (3.41) матимуть

ВИГЛЯД

$$(\varepsilon_x^{(i)})_{j_1,j_2} = \frac{U_{i,j_1+1,j_2} - U_{i,j_1-1,j_2}}{2h_1}, \quad (\varepsilon_y^{(i)})_{j_1,j_2} = \frac{V_{i,j_1,j_2+1} - V_{i,j_1,j_2-1}}{2h_2},$$

$$(\varepsilon_{xy}^{(i)})_{j_1,j_2} = \frac{1}{2} \left( \frac{U_{i,j_1,j_2+1} - U_{i,j_1,j_2-1}}{2h_2} + \frac{V_{i,j_1+1,j_2} - V_{i,j_1-1,j_2}}{2h_1} \right), \quad (3.61)$$

$$j_1 = \overline{1, m_1 - 1}, \quad j_2 = \overline{1, m_2 - 1}, \quad i = \overline{1, 2}.$$

Для компонент тензора напружень (3.42) маємо

$$\begin{aligned}(\sigma_x^{(i)})_{j_1, j_2} &= \frac{\theta}{1+\nu} ((\varepsilon_x^{(i)})_{j_1, j_2} + \nu(\varepsilon_y^{(i)})_{j_1, j_2}) - \alpha_T^{(i)} \bar{T}_{i, j_1, j_2}^{(s)} \theta, \\(\sigma_y^{(i)})_{j_1, j_2} &= \frac{\theta}{1+\nu} ((\varepsilon_y^{(i)})_{j_1, j_2} + \nu(\varepsilon_x^{(i)})_{j_1, j_2}) - \alpha_T^{(i)} \bar{T}_{i, j_1, j_2}^{(s)} \theta, \\(\tau_{xy}^{(i)})_{j_1, j_2} &= \frac{E_{i, j_1, j_2} (c_{j_1, j_2}^{(s)}, T_{i, j_1, j_2}^{(s)})}{2(1+\nu)} \cdot (\varepsilon_{xy}^{(i)})_{j_1, j_2},\end{aligned}\quad (3.62)$$

де  $\theta = \frac{E_{i, j_1, j_2} (c_{j_1, j_2}^{(s)}, T_{i, j_1, j_2}^{(s)})}{1-\nu}$ ,  $E_{i, j_1, j_2} (c_{j_1, j_2}^{(s)}, T_{i, j_1, j_2}^{(s)}) = E_{1, j_1, j_2} (c_{j_1, j_2}^{(s)}, T_{1, j_1, j_2}^{(s)})$  при  $i=1$  та  $E_{i, j_1, j_2} (c_{j_1, j_2}^{(s)}, T_{i, j_1, j_2}^{(s)}) = E_{2, j_1, j_2} (T_{2, j_1, j_2}^{(s)})$  при  $i=2$ ;  $\bar{T}_{i, j_1, j_2}^{(s)} = T_{i, j_1, j_2}^{(s)} - T_{i, j_1, j_2}^{(0)}$ ,  $j_1 = \overline{1, m_1 - 1}$ ,  $j_2 = \overline{1, m_2 - 1}$ ,  $s = \overline{0, n_1}$ ,  $i = \overline{1, 2}$ .

Для початкових умов (3.49) отримаємо наступні скінченнорізницеві аналоги:

$$c_{j_1, j_2}^{(0)} = \tilde{C}_0(j_1 h_1, j_2 h_2), \quad j_1 = \overline{0, m_1}, \quad j_2 = \overline{0, m_2}^*, \quad (3.63)$$

$$T_{i, j_1, j_2}^{(0)} = \tilde{T}_0^{(i)}(j_1 h_1, j_2 h_2), \quad j_1 = \overline{0, m_1}, \quad j_2 = \overline{0, m_2}, \quad i = \overline{1, 2}. \quad (3.64)$$

Для граничних умов першого роду (3.43)–(3.45) маємо наступні скінченнорізницеві аналоги:

$$h_{0, j_2} = \tilde{H}_1(j_2 h_2), \quad h_{m_1, j_2} = \tilde{H}_2(j_2 h_2), \quad c_{0, j_2}^{(s)} = \tilde{C}_1(j_2 h_2, s\tau), \quad j_2 = \overline{0, m_2}^*, \quad s = \overline{0, n_1}, \quad (3.65)$$

$$T_{i, 0, j_2}^{(s)} = \tilde{T}_1^{(s)}(j_2 h_2, s\tau), \quad T_{i, m_1, j_2}^{(s)} = \tilde{T}_2^{(s)}(j_2 h_2, s\tau), \quad j_2 = \overline{0, m_2}, \quad s = \overline{0, n_1}, \quad i = \overline{1, 2}. \quad (3.66)$$

З умови (3.46) для зміщень маємо  $U_{1, j_1, 0} = U_{2, j_1, m_2} = 0$ ,  $V_{1, j_1, 0} = V_{2, j_1, m_2} = 0$ ,  $j_1 = \overline{0, m_1}$ .

Граничні умови другого роду (3.43)–(3.46) апроксимовано аналогічно до описаного в розділі 2, пункті 2.2.3 для напору за формулами (2.78), концентрації солей – (2.74), температури – (2.71), (2.72) та зміщень – (2.80), (2.82).

З умов спряження (3.48) отримаємо

$$\begin{cases} U_{1, j_1, m_2}^* = \frac{h_2}{2h_1} (V_{2, j_1+1, m_2} - 2V_{2, j_1, m_2} + V_{1, j_1-1, m_2}) + \frac{U_{1, j_1, m_2-1} + U_{2, j_1, m_2+1}}{2}, \\ V_{1, j_1, m_2}^* = \frac{h_2}{2} \left( \frac{\nu}{h_1} (U_{2, j_1+1, m_2} - 2U_{2, j_1, m_2} + U_{1, j_1-1, m_2}) + (\alpha_T^{(1)} - \alpha_T^{(2)})(1+\nu)\bar{T} \right) + \frac{V_{1, j_1, m_2-1} + V_{2, j_1, m_2+1}}{2}, \end{cases} \quad (3.67)$$

де  $j_1 = \overline{1, m_1} - 1$ .



Для знаходження невідомих функцій  $U_i(\mathbf{X})$ ,  $V_i(\mathbf{X})$ ,  $\varepsilon_x^{(i)}(\mathbf{X})$ ,  $\varepsilon_y^{(i)}(\mathbf{X})$ ,  $\varepsilon_{xy}^{(i)}(\mathbf{X})$ ,  $\sigma_x^{(i)}(\mathbf{X})$ ,  $\sigma_y^{(i)}(\mathbf{X})$ ,  $\tau_{xy}^{(i)}(\mathbf{X})$ ,  $h(\mathbf{X})$ ,  $c(\mathbf{X}, t)$ ,  $T_i(\mathbf{X}, t)$  використано алгоритм, наведений в Додатку Ж.

Для знаходження значень зміщень  $U_i(\mathbf{X})$  та  $V_i(\mathbf{X})$ ,  $i = \overline{1, 2}$  з різницевих рівнянь (3.52), (3.53) використаємо ітераційний метод Гауса-Зейделя. Для цього зведемо дані рівняння до рівнянь вигляду

$$\begin{aligned} U_{i,j_1,j_2}^{(z+1)} &= \bar{A}_1 U_{i,j_1+1,j_2}^{(z)} + \bar{B}_1 U_{i,j_1-1,j_2}^{(z+1)} + \bar{C}_1 U_{i,j_1,j_2+1}^{(z)} + \bar{D}_1 U_{i,j_1,j_2-1}^{(z+1)} + \bar{F}_1(V_{i,j_1,j_2}^{(z)}, T_{i,j_1,j_2}^{(s)}), \\ V_{i,j_1,j_2}^{(z+1)} &= \bar{A}_2 V_{i,j_1+1,j_2}^{(z)} + \bar{B}_2 V_{i,j_1-1,j_2}^{(z+1)} + \bar{C}_2 V_{i,j_1,j_2+1}^{(z)} + \bar{D}_2 V_{i,j_1,j_2-1}^{(z+1)} + \bar{F}_2(U_{i,j_1,j_2}^{(z+1)}, T_{i,j_1,j_2}^{(s)}), \end{aligned} \quad (3.68)$$

де

$$\begin{aligned} \bar{A}_1 &= \frac{\lambda_{i,j_1+1,j_2} + 2\mu_{i,j_1+1,j_2}}{\Lambda_1 h_1^2}, \quad \bar{B}_1 = \frac{\lambda_{i,j_1,j_2} + 2\mu_{i,j_1,j_2}}{\Lambda_1 h_1^2}, \quad \bar{C}_1 = \frac{\mu_{i,j_1,j_2+1}}{\Lambda_1 h_2^2}, \quad \bar{D}_1 = \frac{\mu_{i,j_1,j_2}}{\Lambda_1 h_2^2}, \\ \bar{F}_1(V_{i,j_1,j_2}^{(z)}, T_{i,j_1,j_2}^{(s)}) &= \frac{-f_{i,i_1,i_2}^1(V_i, T_i)}{\Lambda_1}, \quad \bar{A}_2 = \frac{\mu_{i,j_1+1,j_2}}{\Lambda_2 h_1^2}, \quad \bar{B}_2 = \frac{\mu_{i,j_1,j_2}}{\Lambda_2 h_1^2}, \\ \bar{C}_2 &= \frac{\lambda_{i,j_1,j_2+1} + 2\mu_{i,j_1,j_2+1}}{\Lambda_2 h_2^2}, \quad \bar{D}_2 = \frac{\lambda_{i,j_1,j_2} + 2\mu_{i,j_1,j_2}}{\Lambda_2 h_2^2}, \quad \bar{F}_2(U_{i,j_1,j_2}^{(z+1)}, T_{i,j_1,j_2}^{(s)}) = \frac{-f_{i,j_1,j_2}^2(U_i, T_i)}{\Lambda_2}, \\ \Lambda_1 &= \frac{(\lambda_{i,j_1+1,j_2} + \lambda_{i,j_1,j_2}) + 2(\mu_{i,j_1+1,j_2} + \mu_{i,j_1,j_2})}{h_1^2} + \frac{\mu_{i,j_1,j_2+1} + \mu_{i,j_1,j_2}}{h_2^2}, \\ \Lambda_2 &= \frac{(\lambda_{i,j_1,j_2+1} + \lambda_{i,j_1,j_2}) + 2(\mu_{i,j_1,j_2+1} + \mu_{i,j_1,j_2})}{h_2^2} + \frac{\mu_{i,j_1+1,j_2} + \mu_{i,j_1,j_2}}{h_1^2}. \end{aligned}$$

Ітерації за формулами (3.68) проводяться до тих пір, поки різниця значень не стане меншою за деяку задану точність  $\varepsilon$

$$\left| U_{i,j_1,j_2}^{(z+1)} - U_{i,j_1,j_2}^{(z)} \right| \leq \varepsilon, \quad \left| V_{i,j_1,j_2}^{(z+1)} - V_{i,j_1,j_2}^{(z)} \right| \leq \varepsilon,$$

де  $j_1 = \overline{1, m_1 - 1}$ ,  $j_2 = \overline{1, m_2 - 1}$ ,  $s = \overline{0, n_1}$ ,  $z$  – номер ітерації,  $i = \overline{1, 2}$ .

Для знаходження температури  $T_i(\mathbf{X}, t)$  у всій області ґрунтового масиву необхідно розв'язати систему скінченнорізницевих рівнянь (3.57), (3.58) з відповідними додатковими умовами. Рівняння (3.57) розв'яжемо, використовуючи метод прогонки по змінній  $x$ . Для цього зведемо його до прогоночного вигляду

$$a_{j_1} T_{i,j_1-1,j_2}^{(s+0,5)} - \bar{c}_{j_1} T_{i,j_1,j_2}^{(s+0,5)} + b_{j_1} T_{i,j_1+1,j_2}^{(s+0,5)} = -T_{i,j_1,j_2}^{(s)},$$

де

$$a_{j_1} = \frac{\tau}{c_T^{(i)}} \frac{(\bar{\lambda}_{T_1})_{j_1, j_2}^{(s)}}{h_1} \left( \frac{(\bar{\eta}_1)_{j_1, j_2}^{(s)}}{h_1} - \frac{\rho c_\rho (v_1^-)_{j_1, j_2}^{(s)}}{(\lambda_{T_1})_{j_1, j_2}^{(s)}} \right), \quad b_{j_1} = \frac{\tau}{c_T^{(i)}} \frac{(\bar{\lambda}_{T_1})_{j_1+1, j_2}^{(s)}}{h_1} \left( \frac{(\bar{\eta}_1)_{j_1, j_2}^{(s)}}{h_1} + \frac{\rho c_\rho (v_1^+)_{j_1, j_2}^{(s)}}{(\lambda_{T_1})_{j_1, j_2}^{(s)}} \right),$$

$$\bar{c}_{j_1} = 1 + \frac{\tau}{c_T^{(i)}} \left( \frac{(\bar{\eta}_1)_{j_1, j_2}^{(s)} \left( (\bar{\lambda}_{T_1})_{j_1+1, j_2}^{(s)} + (\bar{\lambda}_{T_1})_{j_1, j_2}^{(s)} \right)}{h_1^2} + \frac{\rho c_\rho}{h_1 (\lambda_{T_1})_{j_1, j_2}^{(s)}} \left( (v_1^+)_{j_1, j_2}^{(s)} (\bar{\lambda}_{T_1})_{j_1+1, j_2}^{(s)} - (v_1^-)_{j_1, j_2}^{(s)} (\bar{\lambda}_{T_1})_{j_1, j_2}^{(s)} \right) \right).$$

Неважко показати, що умови стійкості прогонки  $|\bar{c}_{j_1}| > |a_{j_1}| + |b_{j_1}|$  виконуються.

Значення температури на часовому шарі  $(s+0,5)$  послідовно обчислюємо, використовуючи співвідношення

$$T_{i, j_1, j_2}^{(s+0,5)} = \alpha_{j_1+1} \cdot T_{i, j_1+1, j_2}^{(s+0,5)} + \beta_{j_1+1}, \quad (3.69)$$

$$\text{де } \alpha_{j_1+1} = \frac{b_{j_1}}{\bar{c}_{j_1} - a_{j_1} \alpha_{j_1}}, \quad \beta_{j_1+1} = \frac{a_{j_1} \beta_{j_1} + T_{i, j_1, j_2}^{(s)}}{\bar{c}_{j_1} - a_{j_1} \alpha_{j_1}}, \quad \alpha_1 = 0, \quad \beta_1 = T_{i, 0, j_2}^{(s+0,5)}.$$

Рівняння (3.58), аналогічно до (3.57), розв'язуємо, використовуючи метод прогонки по змінній  $u$ . Для цього зведемо дане рівняння до прогоночного вигляду

$$a_{j_2} T_{i, j_1, j_2-1}^{(s+1)} - \bar{c}_{j_2} T_{i, j_1, j_2}^{(s+1)} + b_{j_2} T_{i, j_1, j_2+1}^{(s+1)} = -T_{i, j_1, j_2}^{(s+0,5)},$$

$$\text{де } a_{j_2} = \frac{\tau}{c_T^{(i)}} \frac{(\bar{\lambda}_{T_2})_{j_1, j_2}^{(s)}}{h_2} \left( \frac{(\bar{\eta}_2)_{j_1, j_2}^{(s)}}{h_2} - \frac{\rho_i c_\rho^{(i)} (v_2^-)_{j_1, j_2}^{(s)}}{(\lambda_{T_2})_{j_1, j_2}^{(s)}} \right), \quad b_{j_2} = \frac{\tau}{c_T^{(i)}} \frac{(\bar{\lambda}_{T_2})_{j_1, j_2+1}^{(s)}}{h_2} \left( \frac{(\bar{\eta}_2)_{j_1, j_2}^{(s)}}{h_2} + \frac{\rho_i c_\rho^{(i)} (v_2^+)_{j_1, j_2}^{(s)}}{(\lambda_{T_2})_{j_1, j_2}^{(s)}} \right),$$

$$\bar{c}_{j_2} = 1 + \frac{\tau}{c_T^{(i)}} \left( \frac{(\bar{\eta}_2)_{j_1, j_2}^{(s)} \left( (\bar{\lambda}_{T_2})_{j_1, j_2+1}^{(s)} + (\bar{\lambda}_{T_2})_{j_1, j_2}^{(s)} \right)}{h_2^2} + \frac{\rho c_\rho}{h_2 (\lambda_{T_2})_{j_1, j_2}^{(s)}} \left( (v_2^+)_{j_1, j_2}^{(s)} (\bar{\lambda}_{T_2})_{j_1, j_2+1}^{(s)} - (v_2^-)_{j_1, j_2}^{(s)} (\bar{\lambda}_{T_2})_{j_1, j_2}^{(s)} \right) \right).$$

Можна показати, що умови стійкості прогонки  $|\bar{c}_{j_2}| > |a_{j_2}| + |b_{j_2}|$  виконуються.

Значення температури на часовому шарі  $(s+1)$  з урахуванням умов спряження (3.47) послідовно обчислюємо, використовуючи співвідношення

$$T_{i, j_1, j_2}^{(s+1)} = \alpha_{j_2+1} \cdot T_{i, j_1, j_2+1}^{(s+1)} + \beta_{j_2+1}, \quad (3.70)$$

де

$$\alpha_{j_2+1} = \begin{cases} \frac{b_{j_2}}{\bar{c}_{j_2} - a_{j_2} \alpha_{j_2}}, & j_2 = \overline{0, m_2^* - 1}, \\ \frac{(\lambda_{T_2}^{(i+1)})^{(s+1)}}{(\lambda_{T_2}^{(i+1)})^{(s+1)}_{j_1, j_2+1} + ((\lambda_{T_2}^{(i)})^{(s+1)}_{j_1, j_2} - \rho c_\rho (\nu_2)^{(s)}_{j_1, j_2-1})(1 - \alpha_{j_2})}, & j_2 = m_2^*, \\ \frac{b_{j_2}}{\bar{c}_{j_2} - a_{j_2} \alpha_{j_2}}, & j_2 = \overline{m_2^* + 1, m_2 - 1}, \end{cases}$$

$$\beta_{j_2+1} = \begin{cases} \frac{a_{j_2} \beta_{j_2} + T_{i, j_1, j_2}^{(s)}}{\bar{c}_{j_2} - a_{j_2} \alpha_{j_2}}, & j_2 = \overline{0, m_2^* - 1}, \\ \frac{(\lambda_{T_2}^{(i)})^{(s+1)} \beta_{j_2}}{(\lambda_{T_2}^{(i+1)})^{(s+1)}_{j_1, j_2+1} + ((\lambda_{T_2}^{(i)})^{(s+1)}_{j_1, j_2} - \rho c_\rho (\nu_2)^{(s)}_{j_1, j_2-1})(1 - \alpha_{j_2})}, & j_2 = m_2^*, \\ \frac{a_{j_2} \beta_{j_2} + T_{i, j_1, j_2}^{(s)}}{\bar{c}_{j_2} - a_{j_2} \alpha_{j_2}}, & j_2 = \overline{m_2^* + 1, m_2 - 1}. \end{cases}$$

Для розв'язання диференціального рівняння (3.36) використано локально-одновимірний метод О.А. Самарського [131–133] з використанням монотонної різницевої схеми. Значення концентрації солей  $c(\mathbf{X}, t)$  у водонасиченій області знайдено методом прогонки, аналогічно до знаходження концентрації солей, описаного в розділі 2, пункті 2.2.3 при  $T_{j_1, j_2}^{(s)} = T_{1, j_1, j_2}^{(s)}$ ,  $j_2 = \overline{1, m_2^* - 1}$ , де  $m_2^*$  – кількість кроків по змінній  $y$  до вільної поверхні.

Значення  $h(\mathbf{X})$  у водонасиченій області ґрунтового масиву знайдено з розв'язку задачі фільтрації (3.38). Для цього узагальнено ітераційний метод Гауса-Зейделя аналогічним чином, як описано в розділі 2, пункті 2.2.3 при  $j_2 = \overline{1, m_2^* - 1}$ .

### 3.2.4. Результати чисельних експериментів та їх аналіз

Як приклад, розглянуто двовимірну задачу НДС у ґрунтовому масиві довжиною  $l_1 = 20$  м та товщиною  $l_2 = 10$  м при фільтрації сольових розчинів. Область  $\Omega_1$  – це область повністю водонасиченого глинистого ґрунту, а  $\Omega_2$  – область ґрунту в природному стані. Вільна поверхня знаходиться на глибині  $l_2^1 = 5$  м.

Значення решти вхідних даних брались наступними [36, 38, 91, 109, 158]:

$$\begin{aligned}
 n_p^{(1)} &= 0,2, \quad n_p^{(2)} = 0,4 \quad \alpha_T = 1 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{град}}, \quad \gamma_{p.} = 1 \cdot 10^4 \frac{\text{Па}}{\text{м}}, \quad \gamma_{\text{зв}} = 1,3 \cdot 10^4 \frac{\text{Па}}{\text{м}}, \quad \rho = 1100 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \\
 \rho_{zp} &= 1650 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \quad \rho_p = 1000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \quad c_T = 2,137 \cdot 10^6 \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3 \cdot \text{град}}, \quad c_p = 4,2 \cdot 10^3 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{град}}, \\
 D &= 2 \cdot 10^{-2} \frac{\text{м}^2}{\text{доба}}, \quad D_T = 2 \cdot 10^{-3} \frac{\text{м}^2}{\text{доба}}, \quad \gamma = 6,5 \cdot 10^{-5} \text{ доба}^{-1}, \quad \nu_c = 2,8 \cdot 10^{-5} \frac{\text{м}^5}{\text{кг} \cdot \text{доба}}, \\
 \nu_T &= 2,8 \cdot 10^{-6} \frac{\text{м}^2}{\text{град} \cdot \text{доба}}, \quad \lambda_T = 108 \cdot 10^3 \frac{\text{Дж}}{\text{м} \cdot \text{град} \cdot \text{доба}}, \quad \lambda_1 = 1,2 \cdot 10^{10} \text{ Па}, \quad \mu_1 = 1,2 \cdot 10^{10} \text{ Па}, \\
 E_1 &= 2,34 \cdot 10^{10} \text{ Па}, \quad \lambda_2 = 1,7 \cdot 10^7 \text{ Па}, \quad \mu_2 = 1,15 \cdot 10^7 \text{ Па}, \quad E_2 = 3 \cdot 10^7 \text{ Па}, \quad \nu = 0,35, \\
 \tilde{T}_1(\mathbf{X}, t) &= 30^{\circ}\text{C}, \quad \tilde{T}_2(\mathbf{X}, t) = 15^{\circ}\text{C}, \quad \tilde{H}_1(\mathbf{X}) = 10 \text{ м}, \quad \tilde{H}_2(\mathbf{X}) = 1 \text{ м}, \quad \tilde{T}_0(\mathbf{X}) = 5^{\circ}\text{C}, \\
 \tilde{C}_1(\mathbf{X}, t) &= C_m = 350 \frac{\text{г}}{\text{літр}}, \quad \tilde{C}_2(\mathbf{X}, t) = \tilde{C}_0(\mathbf{X}) = 8 \frac{\text{г}}{\text{літр}}.
 \end{aligned}$$

Час, протягом якого розглядався процес НДС, дорівнював 3 рокам.

Проведено серію чисельних експериментів, результати яких наведено у вигляді графіків при  $t = 1080$  діб. На рис. 3.5–3.8 наведені розподіли полів функцій  $U_i(\mathbf{X})$ ,  $V_i(\mathbf{X})$ ,  $\varepsilon_x^{(i)}(\mathbf{X})$ ,  $\varepsilon_y^{(i)}(\mathbf{X})$ ,  $\varepsilon_{xy}^{(i)}(\mathbf{X})$ ,  $\sigma_x^{(i)}(\mathbf{X})$ ,  $\sigma_y^{(i)}(\mathbf{X})$ ,  $\tau_{xy}^{(i)}(\mathbf{X})$  з урахуванням тепло-масоперенесення та наявності вільної поверхні, а на рис. 3.10–3.13 наведено графіки даних функцій у перерізі площиною  $yOz$  при  $x = 10$  м за наявності тепло-масоперенесення ( 1) без вільної поверхні; 2) при наявності вільної поверхні на глибині 5 м).

Як видно із рис. 3.5, а, 3.6, а, значення зміщень та деформацій по осі  $Ox$  досягають найбільших значень в області лівого водного басейну (області високих напорів, температури та концентрації солей). Значення зміщень по осі  $Oy$  (рис. 3.5, б) значно зменшуються в області водонасиченого ґрунту. Деформації по осі  $Oy$  (рис. 3.6, б) досягають найбільших значень на нижній та верхній межах ґрунтового масиву, а також в області вільної поверхні.

Напруження по осі  $Ox$  та  $Oy$  (рис. 3.7) досягають найбільших значень на нижній та верхній межах ґрунтового масиву. Дотичні деформації та напруження

(рис. 3.8) значно збільшуються в області нижньої межі ґрунтового масиву та області водонасиченого ґрунту.

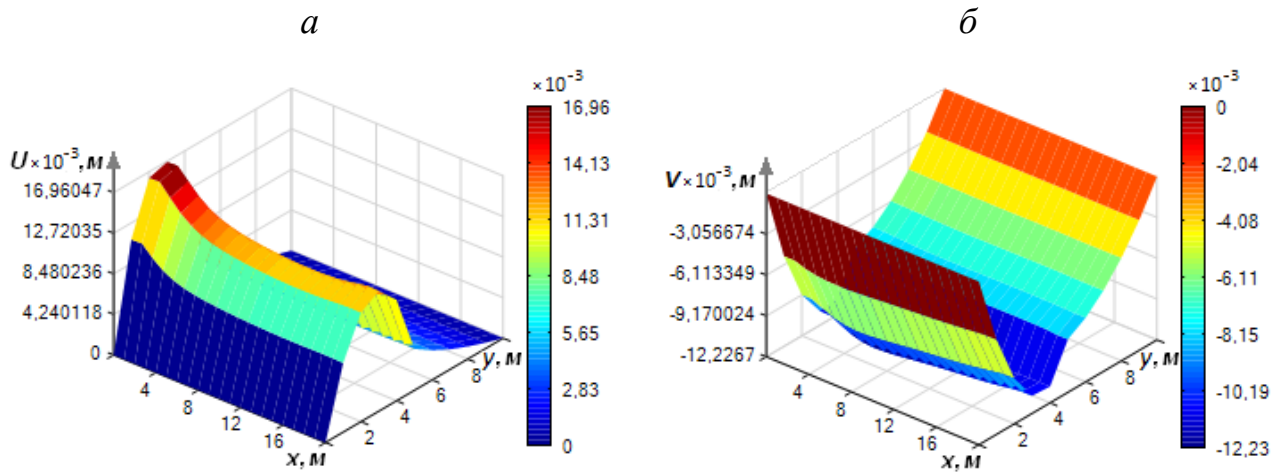


Рис. 3.5. Розподіли полів зміщень вздовж осей  $Ox$  (а) та  $Oy$  (б)

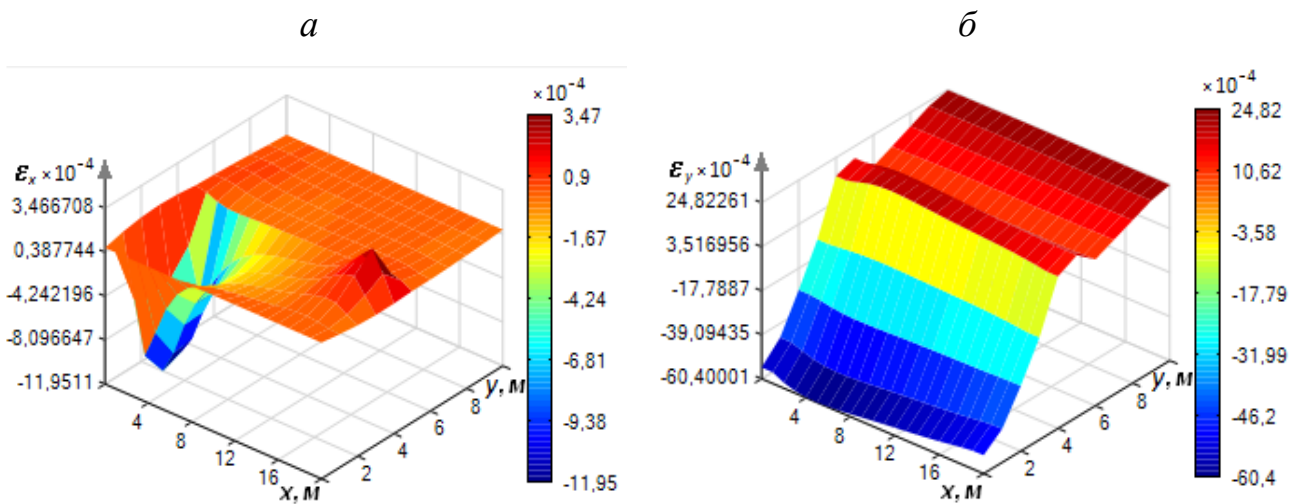


Рис. 3.6. Розподіли полів деформацій вздовж осей  $Ox$  (а) та  $Oy$  (б)

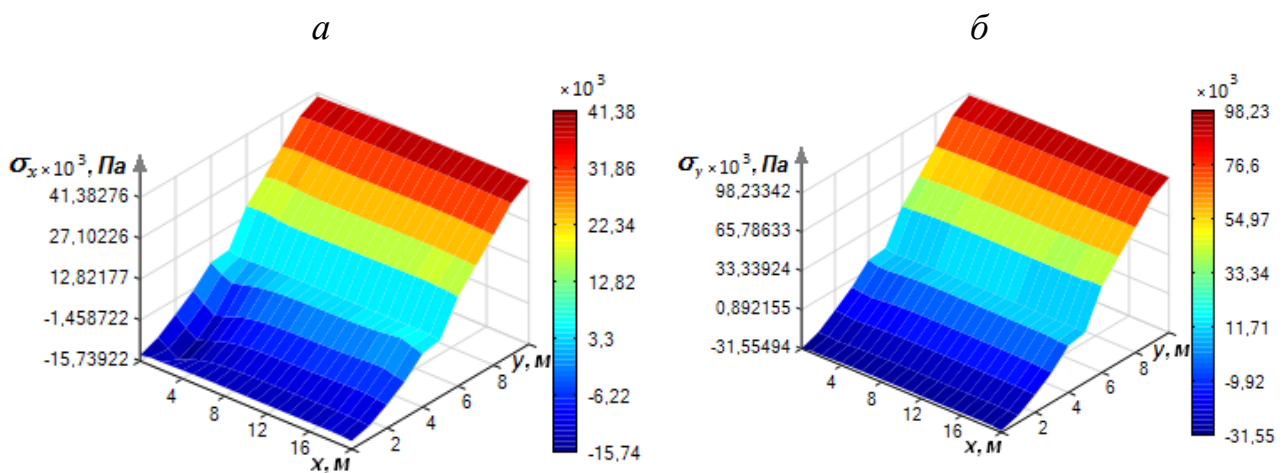


Рис. 3.7. Розподіли полів напружень вздовж осей  $Ox$  (а) та  $Oy$  (б)

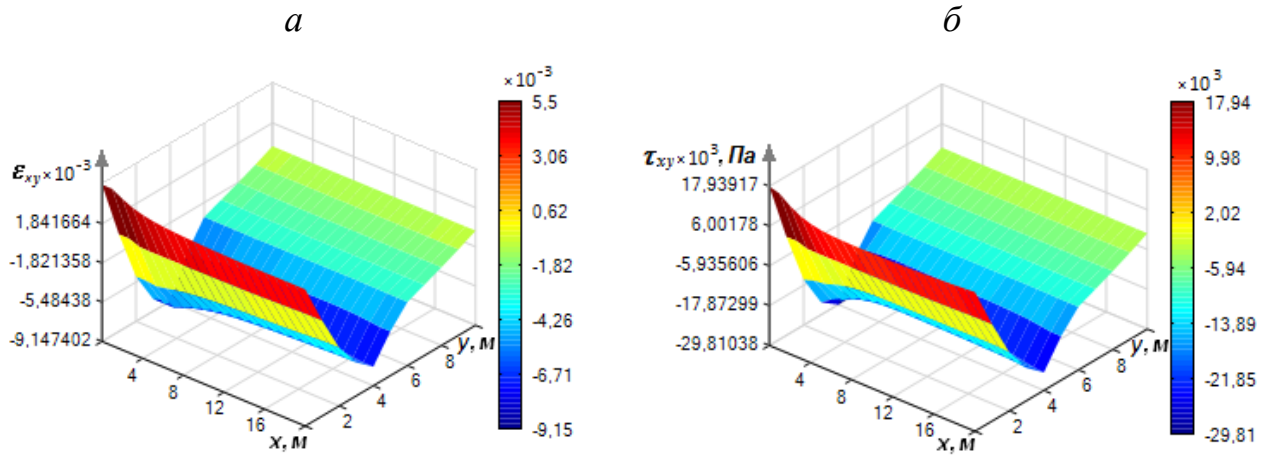


Рис. 3.8. Розподіл поля деформацій  $\varepsilon_{xy}$  (а) та розподіл поля напружень  $\tau_{xy}$  (б)

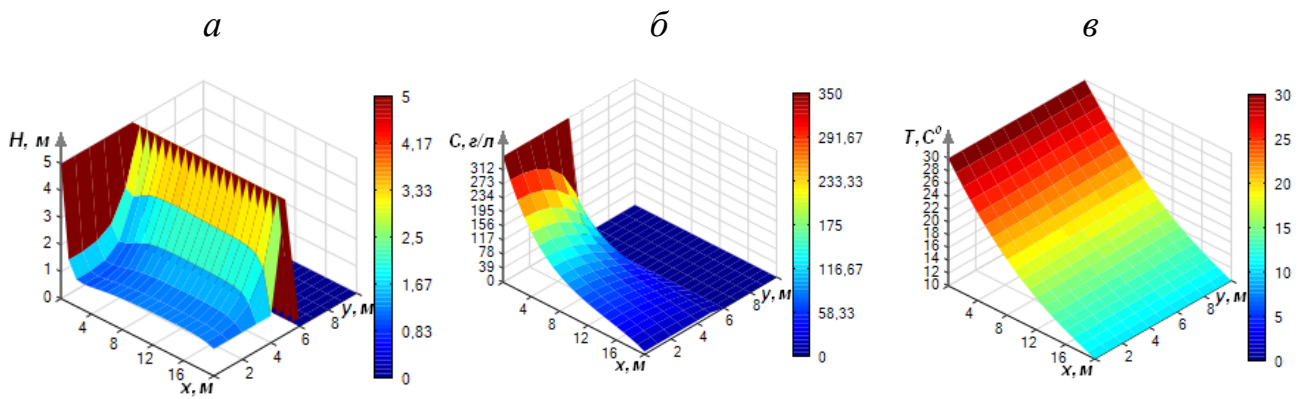


Рис. 3.9. Розподіли полів п'єзометричного напору з врахуванням фільтрації сольових розчинів (а), концентрації солей в неізотермічних умовах (б) та температури при фільтрації сольових розчинів (в) при наявності вільної поверхні

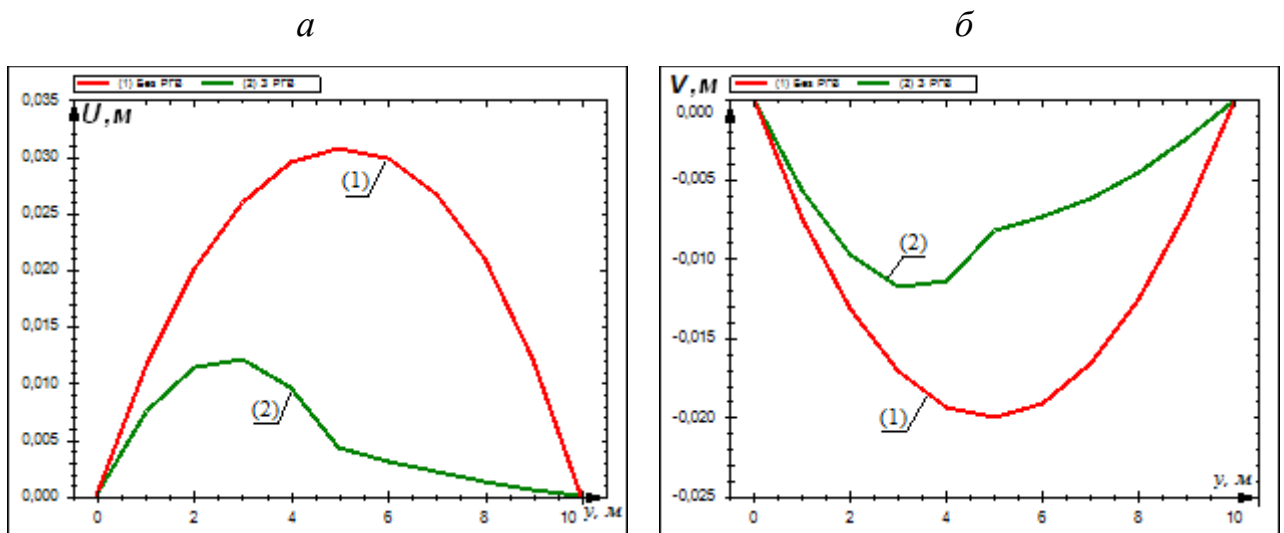
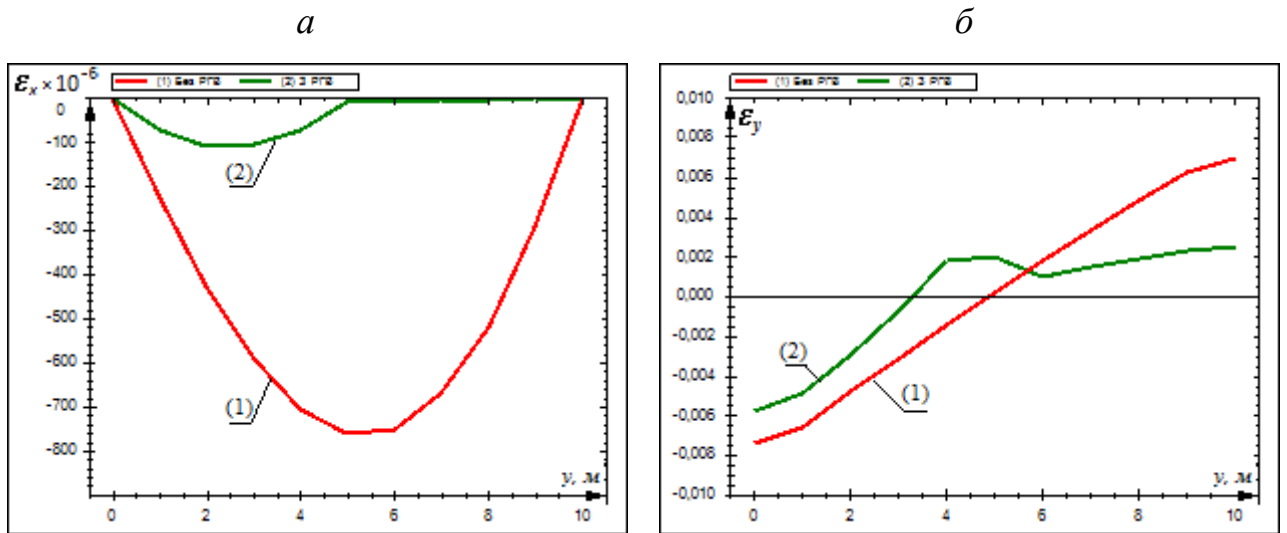
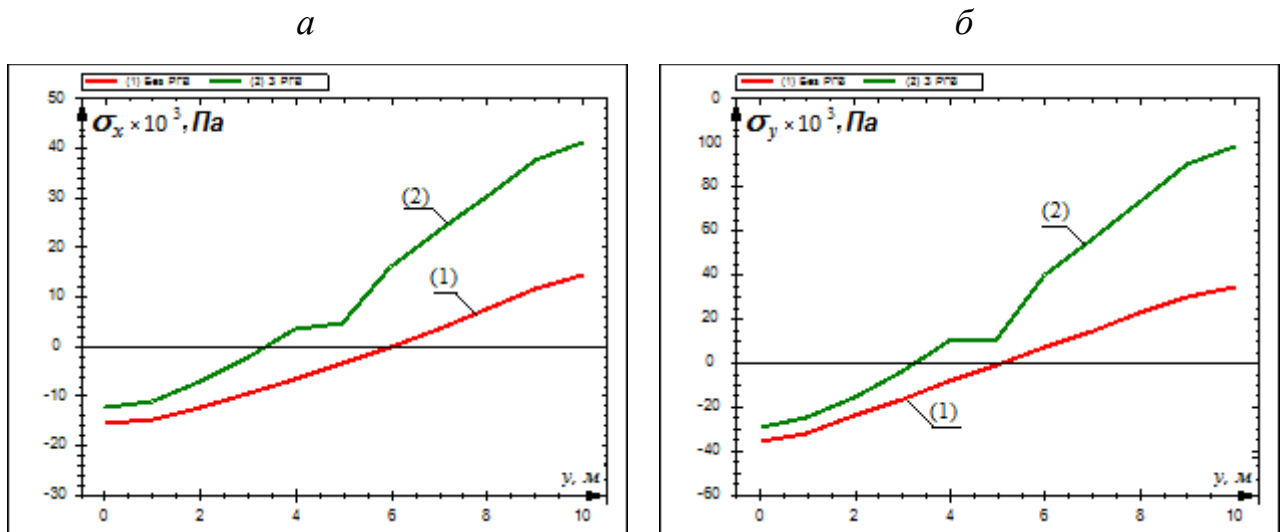
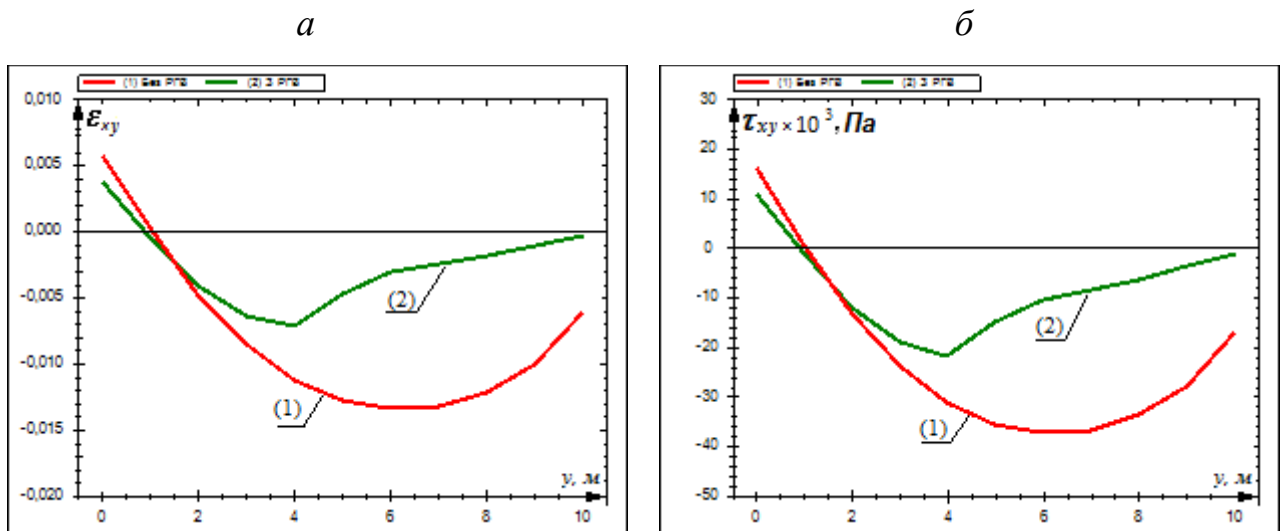


Рис. 3.10. Розподіли зміщень вздовж осей  $Ox$  (а) та  $Oy$  (б)

Рис. 3.11. Розподіли деформацій вздовж осей  $Ox$  (а) та  $Oy$  (б)Рис. 3.12. Розподіли напружень вздовж осей  $Ox$  (а) та  $Oy$  (б)Рис. 3.13. Розподіли дотичних деформацій  $\epsilon_{xy}$  (а) та дотичних напружень  $\tau_{xy}$  (б)

За результатами чисельних експериментів для ґрунтового масиву з вільною поверхнею на глибині 5 м при розглянутих вхідних даних отримано наступні результати (результати наведені для середніх значень отриманих величин):

Наявність вільної поверхні на глибині 5 м у порівнянні з водонасиченим ґрунтовим масивом зменшує зміщення по осі  $Ox$  у 6,58 рази (рис. 3.10, *a*), збільшує зміщення по осі  $Oy$  (рис. 3.10, *б*) в 1,91 рази, збільшує деформації по осі  $Ox$  (рис. 3.11, *a*) у 9 разів, зменшує деформації по осі  $Oy$  (рис. 3.11, *б*) у 2,28 рази, збільшує напруження по осі  $Ox$  (рис. 3.12, *a*) у 2,15 разів, збільшує напруження по осі  $Oy$  в 1,94 рази (рис. 3.12, *б*), збільшує дотичні деформації (рис. 3.13, *a*) у 4,88 рази, зменшує дотичні напруження (рис. 3.13, *б*) у 4,11 разів.

Графіки функцій  $U_i(\mathbf{X})$ ,  $V_i(\mathbf{X})$ ,  $\varepsilon_x^{(i)}(\mathbf{X})$ ,  $\varepsilon_y^{(i)}(\mathbf{X})$ ,  $\varepsilon_{xy}^{(i)}(\mathbf{X})$ ,  $\sigma_x^{(i)}(\mathbf{X})$ ,  $\sigma_y^{(i)}(\mathbf{X})$ ,  $\tau_{xy}^{(i)}(\mathbf{X})$ ,  $\mathbf{X} \in \Omega_i$ ,  $i = \overline{1,2}$  у перерізі площиною  $yOz$  при  $x = 10$  м за наявності вільної поверхні на глибині 5 м (з урахуванням тепло-масоперенесення; без тепло-масоперенесення; при наявності теплоперенесення; з урахуванням масоперенесення), а також аналіз отриманих результатів наведено в Додатку 3.

Таким чином, урахування тепло-масоперенесення та наявність вільної поверхні у ґрунтовому масиві значно змінює розподіл вектора зміщень, компонент нормальних та дотичних деформацій та напружень, зокрема у декілька разів.



### 3.3. Математичне моделювання напружено-деформованого стану фільтруючої ґрунтової греблі з вільною поверхнею під впливом тепло-масоперенесення у двовимірному випадку

#### 3.3.1. Постановка задачі

Розглянемо ґрунтову греблю з урахуванням переносу солей фільтраційним потоком у неізотермічних умовах за наявності вільної поверхні (рис. 3.14).

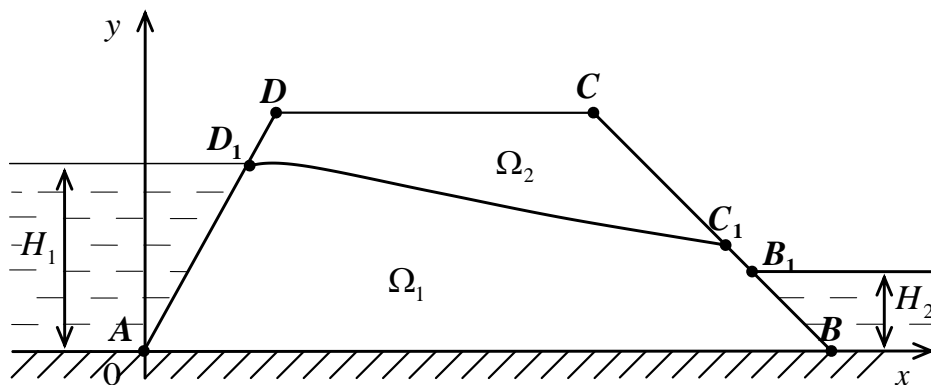


Рис.3.14. Схема ґрунтової греблі

Ґрунтова гребля вважається пружно-деформованою в межах лінійної теорії пружності з різними коефіцієнтами Ламе  $\lambda(c, T)$ ,  $\mu(c, T)$ , на які діє сила тяжіння, а у випадку водонасиченого ґрунту – архімедова та фільтраційна сили.

На рис. 3.14 введені наступні позначення:  $\Omega_1$  – це область водонасиченого ґрунту;  $\Omega_2$  – область ґрунту в природному стані,  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ . Задані значення п'єзометричних напорів  $\tilde{H}_1$ ,  $\tilde{H}_2$  у лівому ( $AD_1$ ) та правому ( $BB_1$ ) водних басейнах відповідно, причому  $\tilde{H}_1 > \tilde{H}_2$ . У лівому басейні задано значення концентрації солей  $\tilde{C}_1$ , а у правому – умову швидкого виносу солей. Значення температури задані у лівому та правому водних басейнах  $\tilde{T}_1$  та  $\tilde{T}_4$  відповідно ( $\tilde{T}_1 > \tilde{T}_4$ ), а також на границях області ґрунту, що знаходиться в природному стані ( $D_1D \cup DC \cup CC_1$ ), та проміжку височування ( $C_1B_1$ ) –  $\tilde{T}_2$  та  $\tilde{T}_3$  відповідно. Під впливом градієнтів напорів, концентрації солей та температури відбувається перенесення розчинених у воді речовин та тепла фільтраційним потоком. При цьому процеси фільтрації розчинених

у воді речовин та тепла підлягають відповідно законам Дарсі, Фіка та Фур'є. Нижня основа ґрунтової греблі ( $AB$ ) вважається теплоізолюваною та непроникною.

Необхідно розрахувати значення зміщень, напружень та деформацій, а також розподіли полів напорів, концентрації сольових розчинів та температури у тілі ґрунтової греблі при умові, що вільна поверхня ґрунтових вод  $D_1C_1$  вважається нерухомою, а також відсутні зміщення нижньої основи ( $AB$ ) ґрунтової греблі.

### 3.3.2. Математична модель задачі в змінних $x, y$ фізичної області

Математична модель НДС фільтруючої ґрунтової греблі з вільною поверхнею під впливом тепло-масоперенесення, зважаючи на результати розділу 1, 2 та 3 (пункти 3.1, 3.2), а також результати робіт [48–50, 54–56, 60, 61, 63, 66, 68, 71, 72, 155, 201, 202], у двовимірному випадку може бути описана наступною крайовою задачею:

$$\begin{aligned} & \mu_i(c, T_i) \Delta U_i + (\lambda_i(c, T_i) + \mu_i(c, T_i)) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x} + \frac{\partial V_i}{\partial y} \right) + \frac{\partial \lambda_i(c, T_i)}{\partial x} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x} + \frac{\partial V_i}{\partial y} \right) + \\ & + 2 \frac{\partial \mu_i(c, T_i)}{\partial x} \frac{\partial U_i}{\partial x} + \frac{\partial \mu_i(c, T_i)}{\partial y} \left( \frac{\partial U_i}{\partial y} + \frac{\partial V_i}{\partial x} \right) - \\ & - \left( \left( 2 \frac{\partial \lambda_i(c, T_i)}{\partial x} + 2 \frac{\partial \mu_i(c, T_i)}{\partial x} \right) T_i + (2\lambda_i(c, T_i) + 2\mu_i(c, T_i)) \frac{\partial T_i}{\partial x} \right) \alpha_T = X_i, \end{aligned} \quad (3.71)$$

$$\begin{aligned} & \mu_i(c, T_i) \Delta V_i + (\lambda_i(c, T_i) + \mu_i(c, T_i)) \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x} + \frac{\partial V_i}{\partial y} \right) + \frac{\partial \lambda_i(c, T_i)}{\partial y} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x} + \frac{\partial V_i}{\partial y} \right) + \\ & + 2 \frac{\partial \mu_i(c, T_i)}{\partial y} \frac{\partial V_i}{\partial y} + \frac{\partial \mu_i(c, T_i)}{\partial x} \left( \frac{\partial U_i}{\partial y} + \frac{\partial V_i}{\partial x} \right) - \\ & - \left( \left( 2 \frac{\partial \lambda_i(c, T_i)}{\partial y} + 2 \frac{\partial \mu_i(c, T_i)}{\partial y} \right) T_i + (2\lambda_i(c, T_i) + 2\mu_i(c, T_i)) \frac{\partial T_i}{\partial y} \right) \alpha_T = Y_i, \quad \mathbf{X} \in \Omega_i, \quad i = \overline{1, 2}, \end{aligned}$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{D}(c, T_1) \nabla c) - \mathbf{v} \nabla c - \gamma(c - C_m) + \nabla \cdot (\mathbf{D}_T \nabla T_1) = n_p \frac{\partial c}{\partial t}, \quad \mathbf{X} \in \Omega_1, \quad t > 0, \quad (3.72)$$

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{\lambda}_T^{(i)} \nabla T_i) - \rho c_p \bar{\mathbf{v}} \nabla T_i = c_T^{(i)} \frac{\partial T_i}{\partial t}, \quad \mathbf{X} \in \Omega_i, \quad i = \overline{1, 2}, \quad t > 0, \quad (3.73)$$

$$\mathbf{v} = -\mathbf{K}(c, T_1) \nabla h + \mathbf{v}_c \nabla c + \mathbf{v}_T \nabla T_1, \quad \text{div } \mathbf{v} + \frac{\partial n_p}{\partial t} = 0, \quad \mathbf{X} \in \Omega_1, \quad t > 0, \quad (3.74)$$

$$\mathbf{q}_c = \mathbf{v}c - \mathbf{D}(c, T_1)\nabla c - \mathbf{D}_T\nabla T_1, \mathbf{X} \in \Omega_1, \mathbf{q}_T^{(i)} = \rho c_\rho \bar{\mathbf{v}}T_i - \lambda_T^{(i)}\nabla T_i, \mathbf{X} \in \Omega_i, i = \overline{1,2}, t > 0, \quad (3.75)$$

$$\varepsilon_x^{(i)} = \frac{\partial U_i}{\partial x}, \varepsilon_y^{(i)} = \frac{\partial V_i}{\partial y}, \varepsilon_{xy}^{(i)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial y} + \frac{\partial V_i}{\partial x}\right), \mathbf{X} \in \Omega_i, i = \overline{1,2}, \quad (3.76)$$

$$\sigma_x^{(i)} = \frac{\theta}{1+\nu}(\varepsilon_x^{(i)} + \nu\varepsilon_y^{(i)}) - \alpha_T^{(i)}\bar{T}_i\theta, \sigma_y^{(i)} = \frac{\theta}{1+\nu}(\varepsilon_y^{(i)} + \nu\varepsilon_x^{(i)}) - \alpha_T^{(i)}\bar{T}_i\theta, \quad (3.77)$$

$$\tau_{xy}^{(i)} = \frac{E_i(c, T_i)}{2(1+\nu)}\varepsilon_{xy}^{(i)}, \mathbf{X} \in \Omega_i, i = \overline{1,2},$$

$$(\mathbf{v}, \mathbf{n})|_{AB} = 0, h(\mathbf{X}, t)|_{AD_1} = \tilde{H}_1(\mathbf{X}, t), h(\mathbf{X}, t)|_{BB_1} = \tilde{H}_2(\mathbf{X}, t), \mathbf{X} \in \Omega_1, t > 0, \quad (3.78)$$

$$h(\mathbf{X}, t)|_{C_1B_1 \cup C_1D_1} = y, (\mathbf{v}, \mathbf{n})|_{C_1B_1 \cup C_1D_1} = n_p \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \varphi(\mathbf{X}, t) = (y - h(\mathbf{X}, t))|_{C_1B_1 \cup C_1D_1} = 0, t > 0, \quad (3.79)$$

$$(\mathbf{q}_c, \mathbf{n})|_{AB} = 0, c(\mathbf{X}, t)|_{AD_1} = \tilde{C}_1(\mathbf{X}, t), \frac{\partial c(\mathbf{X}, t)}{\partial n}\Big|_{\Gamma_1} = 0, \Gamma_1 = BB_1 \cup B_1C_1 \cup C_1D_1, \mathbf{X} \in \Omega_1, t > 0, \quad (3.80)$$

$$(\mathbf{q}_T^{(i)}, \mathbf{n})|_{AB} = 0, T_1(\mathbf{X}, t)|_{AD_1} = \tilde{T}_1(\mathbf{X}, t), T_2(\mathbf{X}, t)|_{\Gamma_2} = \tilde{T}_2(\mathbf{X}, t), \Gamma_2 = D_1D \cup DC \cup CC_1, t > 0, \quad (3.81)$$

$$T_1(\mathbf{X}, t)|_{C_1B_1} = \tilde{T}_3(\mathbf{X}, t), T_1(\mathbf{X}, t)|_{BB_1} = \tilde{T}_4(\mathbf{X}, t), \mathbf{X} \in \Omega, t > 0, \quad (3.82)$$

$$[T_i(\mathbf{X}, t)]|_{C_1D_1} = 0, [\mathbf{q}_T^{(i)}]|_{C_1D_1} = 0, \mathbf{X} \in C_1D_1, i = \overline{1,2}, t > 0, \quad (3.83)$$

$$\mathbf{u}_1(\mathbf{X}) = 0, \mathbf{X} \in AB, \sigma_n = 0, \tau_s = 0, \mathbf{X} \in AD_1 \cup D_1D \cup DC \cup CC_1 \cup C_1B_1 \cup BB_1, \quad (3.84)$$

$$[u_n^{(i)}]|_{C_1D_1} = [u_s^{(i)}]|_{C_1D_1} = 0, [\sigma_n^{(i)}]|_{C_1D_1} = [\tau_s^{(i)}]|_{C_1D_1} = 0, \mathbf{X} \in C_1D_1, i = \overline{1,2}, \quad (3.85)$$

$$c(\mathbf{X}, 0) = \tilde{C}_0(\mathbf{X}), \mathbf{X} \in \Omega_1, T(\mathbf{X}, 0) = \begin{cases} \tilde{T}_0^1(\mathbf{X}), & \mathbf{X} \in \Omega_1, \\ \tilde{T}_0^2(\mathbf{X}), & \mathbf{X} \in \Omega_2, \end{cases} \quad (3.86)$$

де  $\mathbf{X} = (x, y) \in \Omega$ ,  $\tilde{C}_0(\mathbf{X})$ ,  $\tilde{T}_0^1(\mathbf{X})$ ,  $\tilde{T}_0^2(\mathbf{X})$ ,  $\tilde{H}_1(\mathbf{X}, t)$ ,  $\tilde{H}_2(\mathbf{X}, t)$ ,  $\tilde{C}_1(\mathbf{X}, t)$ ,  $\tilde{T}_1(\mathbf{X}, t)$ ,  $\tilde{T}_2(\mathbf{X}, t)$  – задані функції;  $\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{v}$  при  $\mathbf{X} \in \Omega_1$  та  $\bar{\mathbf{v}} = 0$  при  $\mathbf{X} \in \Omega_2$ ;  $\mathbf{n}$  – вектор напрямних косинусів зовнішньої нормалі до межі  $\Gamma$ ;  $[\ ]$  – стрибок функції.

Тут: система рівнянь (3.71) описує НДС ґрунтової греблі з вільною поверхнею для масиву ґрунту, що знаходиться у водонасиченому та природному станах з урахуванням тепло-масоперенесення для водонасиченого ґрунту та лише теплоперенесення для ґрунту в природному стані; (3.72) – рівняння конвективної дифузії при наявності тепло-масоперенесення у водонасиченій області ґрунтової

греблі, (3.73) – рівняння конвективного теплоперенесення у всій області дослідження; (3.74) – узагальнене рівняння фільтрації сольових розчинів у неізотермічних умовах та рівняння нерозривності процесу; (3.75) – питомий потік розчинених солей на випадок неізотермічних умов та узагальнений закон Фур'є на випадок конвективного тепло-масоперенесення; (3.76), (3.77) – компоненти нормальних та дотичних деформацій та напружень. Крайові умови та умови спряження ідеального контакту для зміщень та температури, а також крайові умови для напору та концентрації солей мають вигляд (3.78)–(3.86).

### 3.3.3. Математична модель задачі в змінних $\xi, \eta$

#### 3.3.3.1. Побудова чисельної конформної різничевої сітки

Для чисельного розв'язання задачі (3.71)–(3.86) використано метод скінченних різниць із застосуванням чисельних конформних відображень в оберненій постановці [23, 24, 47]. У зв'язку з цим здійснено чисельне конформне відображення області  $\Omega$  площини  $(x, y)$  (рис. 3.15, *a*) на параметричний прямокутник  $\Omega_\zeta$  площини  $(\xi, \eta)$  (рис. 3.15, *б*).

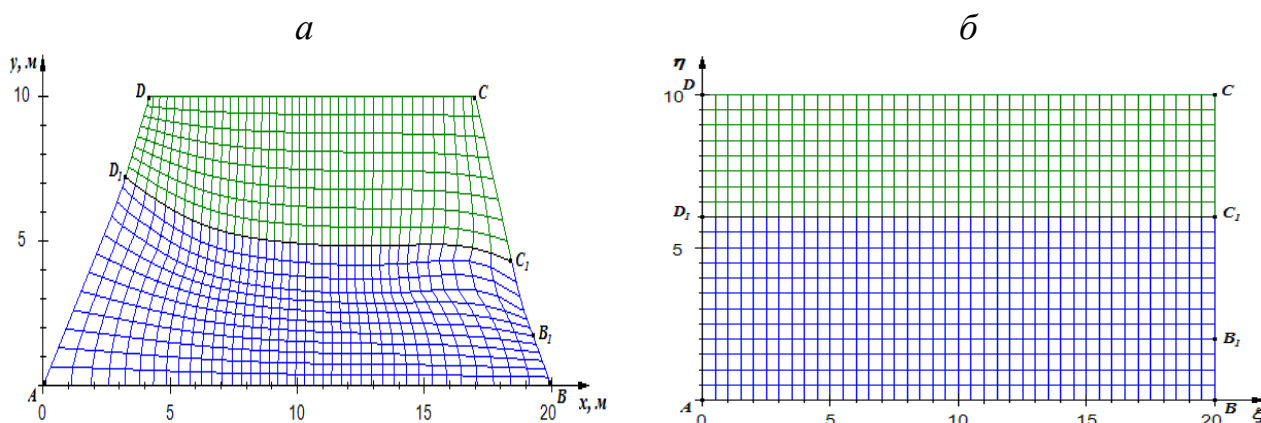


Рис. 3.15. Конформна різничева сітка в фізичній області (*a*) та її образ в параметричному прямокутнику (*б*)

Координати точок областей  $\Omega$  і  $\Omega_\zeta$  при оберненому конформному відображенні зв'язані умовами Коші-Рімана [23, 24, 47]:

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\partial y}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial x}{\partial \eta} = -\frac{\partial y}{\partial \xi}. \quad (3.87)$$

На сторонах параметричного прямокутника  $\Omega_\zeta$  і кривій депресії  $C_1D_1$  задані наступні крайові умови:

$$\begin{aligned} x(0, \eta) = f_1(y), \quad (\xi, \eta) \in AD_1 \cup D_1D, \quad x(a_1, \eta) = f_2(y), \quad (\xi, \eta) \in BB_1 \cup B_1C_1 \cup C_1C, \\ y(\xi, 0) = 0, \quad (\xi, \eta) \in AB, \quad y(\xi, b_1) = b_1, \quad (\xi, \eta) \in CD, \quad y(\xi, b_0) = h, \quad (\xi, \eta) \in C_1D_1, \end{aligned}$$

де  $f_1(y)$ ,  $f_2(y)$  – деякі функції, що задають бокові сторони ґрунтової греблі;  $h$  – значення п'езометричного напору на вільній поверхні (кривій депресії)  $C_1D_1$ .

При конформному відображенні областей маємо наступний зв'язок між похідними:

$$\begin{cases} \xi_x = \frac{y_\eta}{J_1}, & \eta_x = \frac{-y_\xi}{J_1}, \\ \xi_y = \frac{-x_\eta}{J_1}, & \eta_y = \frac{x_\xi}{J_1}, \\ \xi_t = -x_{\bar{t}}\xi_x - \xi_y y_{\bar{t}}, & \eta_t = -x_{\bar{t}}\eta_x - \eta_y y_{\bar{t}}, \end{cases} \quad (3.88)$$

$$J = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x = \frac{1}{J_1},$$

де  $J$ ,  $J_1$  – якобіани прямого та оберненого відображень відповідно,  $J_1 = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi$ .

На основі (3.88) отримуються аналогічні зв'язки для других похідних  $\xi_{xx}$ ,  $\xi_{xy}$ ,  $\xi_{yy}$ ,  $\eta_{xx}$ ,  $\eta_{xy}$ ,  $\eta_{yy}$ .

### 3.3.3.2. Перетворення рівнянь задачі до змінних $\xi$ , $\eta$

Перейдемо до нових змінних  $\xi$ ,  $\eta$  у системі (3.71). Отримаємо наступне:

$$P_1 \frac{\partial^2 U_i}{\partial \xi^2} + P_2 \frac{\partial^2 U_i}{\partial \eta^2} + P_3 \frac{\partial U_i}{\partial \xi} + P_4 \frac{\partial U_i}{\partial \eta} + P_5 \frac{\partial^2 U_i}{\partial \xi \partial \eta} = F_1(V_i, T_i), \quad (3.89)$$

$$L_1 \frac{\partial^2 V_i}{\partial \xi^2} + L_2 \frac{\partial^2 V_i}{\partial \eta^2} + L_3 \frac{\partial V_i}{\partial \xi} + L_4 \frac{\partial V_i}{\partial \eta} + L_5 \frac{\partial^2 V_i}{\partial \xi \partial \eta} = F_2(U_i, T_i), \quad (3.90)$$

де

$$P_1 = \frac{\mu_i(c, T_i)}{J_1} + (\lambda_i(c, T_i) + \mu_i(c, T_i)) \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2, \quad P_2 = \frac{\mu_i(c, T_i)}{J_1} + (\lambda_i(c, T_i) + \mu_i(c, T_i)) \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2,$$

$$P_3 = (\lambda_i(c, T_i) + \mu_i(c, T_i)) \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial \lambda_i(c, T_i)}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} + 2 \frac{\partial \mu_i(c, T_i)}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \mu_i(c, T_i)}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial y},$$

$$P_4 = (\lambda_i(c, T_i) + \mu_i(c, T_i)) \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial \lambda_i(c, T_i)}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + 2 \frac{\partial \mu_i(c, T_i)}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \mu_i(c, T_i)}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad P_5 = (\lambda_i(c, T_i) + \mu_i(c, T_i)) \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x},$$

$$L_1 = \frac{\mu_i(c, T_i)}{J_1} + (\lambda_i(c, T_i) + \mu_i(c, T_i)) \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2, \quad L_2 = \frac{\mu_i(c, T_i)}{J_1} + (\lambda_i(c, T_i) + \mu_i(c, T_i)) \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2,$$

$$L_3 = (\lambda_i(c, T_i) + \mu_i(c, T_i)) \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial \lambda_i(c, T_i)}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial y} + 2 \frac{\partial \mu_i(c, T_i)}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \mu_i(c, T_i)}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x},$$

$$L_4 = (\lambda_i(c, T_i) + \mu_i(c, T_i)) \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} + \frac{\partial \lambda_i(c, T_i)}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} + 2 \frac{\partial \mu_i(c, T_i)}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \mu_i(c, T_i)}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x},$$

$$L_5 = (\lambda_i(c, T_i) + \mu_i(c, T_i)) \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad F_1 = \bar{X} - f_1, \quad F_2 = \bar{Y} - f_2,$$

$$\bar{X} = X_i + (2\lambda_i(c, T_i) + 2\mu_i(c, T_i))\alpha_T \left( \frac{\partial T_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial T_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right), \quad \bar{Y} = Y_i + (2\lambda_i(c, T_i) + 2\mu_i(c, T_i))\alpha_T \left( \frac{\partial T_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial T_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right),$$

$$f_1 = (\lambda_i(c, T_i) + \mu_i(c, T_i)) \left( \frac{\partial^2 V_i}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 V_i}{\partial \xi \partial \eta} \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2 V_i}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \right. \\ \left. + \frac{\partial V_i}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial V_i}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} \right) + \frac{\partial \lambda_i(c, T_i)}{\partial x} \left( \left( \frac{\partial V_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial V_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \right) + \frac{\partial \mu_i(c, T_i)}{\partial y} \left( \frac{\partial V_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial V_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right),$$

$$f_2 = (\lambda_i(c, T_i) + \mu_i(c, T_i)) \left( \frac{\partial^2 U_i}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 U_i}{\partial \xi \partial \eta} \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2 U_i}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \right. \\ \left. + \frac{\partial U_i}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial U_i}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} \right) + \frac{\partial \lambda_i(c, T_i)}{\partial y} \left( \left( \frac{\partial U_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial U_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \right) + \frac{\partial \mu_i(c, T_i)}{\partial x} \left( \frac{\partial U_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial U_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right).$$

Для граничних умов та умов спряження (3.84), (3.85) для випадку, коли бічні сторони  $AD_1 \cup D_1D$ ,  $CC_1 \cup C_1B_1 \cup B_1B$  є вертикальними, а сторони  $DC$  та  $D_1C_1$  – горизонтальними, отримаємо наступне.

При перетворенні до змінних  $\xi$ ,  $\eta$  рівняння конвективної дифузії при наявності тепло-масоперенесення (3.72) набуде вигляду

$$\frac{\partial^2 c}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial \eta^2} + \bar{Q}_1 \frac{\partial c}{\partial \xi} + \bar{Q}_2 \frac{\partial c}{\partial \eta} + \bar{Q}_3 (c - C_m) + \bar{Q}_4 \left( \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} \right) = \bar{Q}_5 \frac{\partial c}{\partial \tilde{t}}, \quad (3.91)$$

де

$$\bar{Q}_1 = -\frac{1}{D(c, T)} [(\bar{V}_1 - nx_{\tilde{r}})y_{\eta} - (\bar{V}_2 - ny_{\tilde{r}})x_{\eta}], \quad \bar{Q}_2 = -\frac{1}{D(c, T)} [(-\bar{V}_1 + nx_{\tilde{r}})y_{\xi} + (\bar{V}_2 - ny_{\tilde{r}})x_{\xi}],$$

$$\bar{Q}_3 = \frac{-\gamma \cdot J_1}{D(c, T)}, \quad \bar{Q}_4 = \frac{D_T(c, T)}{D(c, T)J_1}, \quad \bar{Q}_5 = \frac{n_p J_1}{D(c, T)},$$

$$\bar{V}_1 = \frac{1}{J_1} \left[ \left( K(c, T) \frac{\partial h}{\partial \eta} + \frac{\partial D(c, T)}{\partial \eta} \right) y_{\xi} - \left( K(c, T) \frac{\partial h}{\partial \xi} + \frac{\partial D(c, T)}{\partial \xi} \right) y_{\eta} + v_c \left( \frac{\partial c}{\partial \xi} y_{\eta} - \frac{\partial c}{\partial \eta} y_{\xi} \right) + v_T \left( \frac{\partial T}{\partial \xi} y_{\eta} - \frac{\partial T}{\partial \eta} y_{\xi} \right) \right],$$

$$\bar{V}_2 = \frac{1}{J_1} \left[ - \left( K(c, T) \frac{\partial h}{\partial \eta} + \frac{\partial D(c, T)}{\partial \eta} \right) x_{\xi} + \left( K(c, T) \frac{\partial h}{\partial \xi} + \frac{\partial D(c, T)}{\partial \xi} \right) x_{\eta} + v_c \left( - \frac{\partial c}{\partial \xi} x_{\eta} + \frac{\partial c}{\partial \eta} x_{\xi} \right) + v_T \left( - \frac{\partial T}{\partial \xi} x_{\eta} + \frac{\partial T}{\partial \eta} x_{\xi} \right) \right].$$

Рівняння конвективного теплоперенесення в змінних  $\xi$ ,  $\eta$  (3.73) прийме вигляд

$$\frac{\partial^2 T_i}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 T_i}{\partial \eta^2} + Z_1 \frac{\partial T_i}{\partial \xi} + Z_2 \frac{\partial T_i}{\partial \eta} = Z_3 \frac{\partial T_i}{\partial \tilde{t}}, \quad (3.92)$$

де

$$Z_1 = -\frac{1}{\lambda_T^{(i)}} [(\tilde{V}_1 - c_T^{(i)} x_{\tilde{r}})y_{\eta} - (\tilde{V}_2 - c_T^{(i)} y_{\tilde{r}})x_{\eta}], \quad Z_2 = -\frac{1}{\lambda_T^{(i)}} [(\tilde{V}_2 - c_T^{(i)} y_{\tilde{r}})x_{\xi} - (\tilde{V}_1 + c_T^{(i)} x_{\tilde{r}})y_{\xi}], \quad Z_3 = \frac{c_T^{(i)} \cdot J_1}{\lambda_T^{(i)}},$$

$$\tilde{V}_1 = \frac{1}{J_1} \left[ \left( \rho c_{\rho} K(c, T) \frac{\partial h}{\partial \eta} + \frac{\partial \lambda_T^{(i)}}{\partial \eta} \right) y_{\xi} - \left( \rho c_{\rho} K(c, T) \frac{\partial h}{\partial \xi} + \frac{\partial \lambda_T^{(i)}}{\partial \xi} \right) y_{\eta} + v_c \left( \frac{\partial c}{\partial \xi} y_{\eta} - \frac{\partial c}{\partial \eta} y_{\xi} \right) + v_T \left( \frac{\partial T_i}{\partial \xi} y_{\eta} - \frac{\partial T_i}{\partial \eta} y_{\xi} \right) \right],$$

$$\tilde{V}_2 = \frac{1}{J_1} \left[ - \left( \rho c_{\rho} K(c, T) \frac{\partial h}{\partial \eta} + \frac{\partial \lambda_T^{(i)}}{\partial \eta} \right) x_{\xi} + \left( \rho c_{\rho} K(c, T) \frac{\partial h}{\partial \xi} + \frac{\partial \lambda_T^{(i)}}{\partial \xi} \right) x_{\eta} + v_c \left( - \frac{\partial c}{\partial \xi} x_{\eta} + \frac{\partial c}{\partial \eta} x_{\xi} \right) + v_T \left( - \frac{\partial T_i}{\partial \xi} x_{\eta} + \frac{\partial T_i}{\partial \eta} x_{\xi} \right) \right].$$

Компоненти вектора швидкості фільтрації в змінних  $\xi$ ,  $\eta$  матимуть вигляд

$$v_1 = \frac{1}{J_1} \left[ -K(c, T_1) \left( \frac{\partial h}{\partial \xi} y_\eta - \frac{\partial h}{\partial \eta} y_\xi \right) + v_c \left( \frac{\partial c}{\partial \xi} y_\eta - \frac{\partial c}{\partial \eta} y_\xi \right) + v_T \left( \frac{\partial T_1}{\partial \xi} y_\eta - \frac{\partial T_1}{\partial \eta} y_\xi \right) \right], \quad (3.93)$$

$$v_2 = \frac{1}{J_1} \left[ -K(c, T_1) \left( -\frac{\partial h}{\partial \xi} x_\eta + \frac{\partial h}{\partial \eta} x_\xi \right) + v_c \left( -\frac{\partial c}{\partial \xi} x_\eta + \frac{\partial c}{\partial \eta} x_\xi \right) + v_T \left( -\frac{\partial T_1}{\partial \xi} x_\eta + \frac{\partial T_1}{\partial \eta} x_\xi \right) \right]. \quad (3.94)$$

З умови (3.84) для нижньої основи ґрунтової греблі  $AB$  маємо  $U_1 = V_1 = 0$ .

Для  $AD_1 \cup D_1D$  у змінних  $\xi, \eta$  граничні умови (3.84) приймуть вигляд

$$\begin{cases} \left( \left( \frac{\partial U_i}{\partial \xi} \xi_x + \frac{\partial U_i}{\partial \eta} \eta_x \right) + v \left( \frac{\partial V_i}{\partial \xi} \xi_y + \frac{\partial V_i}{\partial \eta} \eta_y \right) \right) - \alpha_T \theta (1 + \nu) = 0, \\ \left( \frac{\partial U_i}{\partial \xi} \xi_y + \frac{\partial U_i}{\partial \eta} \eta_y \right) + \left( \frac{\partial V_i}{\partial \xi} \xi_x + \frac{\partial V_i}{\partial \eta} \eta_x \right) = 0, \quad i = \overline{1, 2}. \end{cases} \quad (3.95)$$

В змінних  $\xi, \eta$  граничні умови (3.84) для  $CC_1 \cup C_1B_1 \cup B_1B$  приймуть вигляд

$$\begin{cases} \left( \left( \frac{\partial U_i}{\partial \xi} \xi_x + \frac{\partial U_i}{\partial \eta} \eta_x \right) + v \left( \frac{\partial V_i}{\partial \xi} \xi_y + \frac{\partial V_i}{\partial \eta} \eta_y \right) \right) - \alpha_T \theta (1 + \nu) = 0, \\ \left( \frac{\partial U_i}{\partial \xi} \xi_y + \frac{\partial U_i}{\partial \eta} \eta_y \right) + \left( \frac{\partial V_i}{\partial \xi} \xi_x + \frac{\partial V_i}{\partial \eta} \eta_x \right) = 0, \quad i = \overline{1, 2}. \end{cases} \quad (3.96)$$

Для верхньої основи  $DC$  в змінних  $\xi, \eta$  граничні умови (3.84) матимуть вигляд

$$\begin{cases} \left( \left( \frac{\partial V_i}{\partial \xi} \xi_y + \frac{\partial V_i}{\partial \eta} \eta_y \right) + v \left( \frac{\partial U_i}{\partial \xi} \xi_x + \frac{\partial U_i}{\partial \eta} \eta_x \right) \right) - \alpha_T \theta (1 + \nu) = 0, \\ \left( \frac{\partial U_i}{\partial \xi} \xi_y + \frac{\partial U_i}{\partial \eta} \eta_y \right) + \left( \frac{\partial V_i}{\partial \xi} \xi_x + \frac{\partial V_i}{\partial \eta} \eta_x \right) = 0, \quad i = \overline{1, 2}. \end{cases} \quad (3.97)$$

На вільній поверхні  $D_1C_1$  умови спряження (3.85) в змінних  $\xi, \eta$  матимуть вигляд

$$\begin{cases} \left( \left( \frac{\partial V_1}{\partial \xi} \xi_y + \frac{\partial V_1}{\partial \eta} \eta_y \right) + v \left( \frac{\partial U_1}{\partial \xi} \xi_x + \frac{\partial U_1}{\partial \eta} \eta_x \right) \right) - \alpha_T \theta (1 + \nu) = \\ = \left( \left( \frac{\partial V_2}{\partial \xi} \xi_y + \frac{\partial V_2}{\partial \eta} \eta_y \right) + v \left( \frac{\partial U_2}{\partial \xi} \xi_x + \frac{\partial U_2}{\partial \eta} \eta_x \right) \right) - \alpha_T \theta (1 + \nu), \\ \left( \frac{\partial U_1}{\partial \xi} \xi_y + \frac{\partial U_1}{\partial \eta} \eta_y \right) + \left( \frac{\partial V_1}{\partial \xi} \xi_x + \frac{\partial V_1}{\partial \eta} \eta_x \right) = \left( \frac{\partial U_2}{\partial \xi} \xi_y + \frac{\partial U_2}{\partial \eta} \eta_y \right) + \left( \frac{\partial V_2}{\partial \xi} \xi_x + \frac{\partial V_2}{\partial \eta} \eta_x \right). \end{cases} \quad (3.98)$$



### 3.3.4. Чисельний розв'язок крайової задачі

Скінченнорізницеві аналоги (3.89), (3.90) мають вигляд

$$\begin{aligned}
 & \frac{\mu_{j_1, j_2}}{J_1} \left( \frac{U_{j_1+1, j_2} - 2U_{j_1, j_2} + U_{j_1-1, j_2}}{h_1^2} + \frac{U_{j_1, j_2+1} - 2U_{j_1, j_2} + U_{j_1, j_2-1}}{h_2^2} \right) + (\lambda_{j_1, j_2} + \mu_{j_1, j_2}) \left( \frac{U_{j_1+1, j_2} - 2U_{j_1, j_2} + U_{j_1-1, j_2}}{h_1^2} (\xi_x)^2 + \right. \\
 & + 2 \frac{U_{j_1+1, j_2+1} - U_{j_1, j_2+1} - U_{j_1+1, j_2} + U_{j_1, j_2}}{h_1 h_2} \xi_x \eta_x + \frac{U_{j_1+1, j_2} - U_{j_1-1, j_2}}{2h_1} \xi_{xx} + \frac{U_{j_1, j_2+1} - 2U_{j_1, j_2} + U_{j_1, j_2-1}}{h_2^2} (\eta_x)^2 + \\
 & \left. + \frac{U_{j_1, j_2+1} - U_{j_1, j_2-1}}{2h_2} \eta_{xx} \right) + \frac{\lambda_{j_1+1, j_2} - \lambda_{j_1-1, j_2}}{2h_1} \left( \frac{U_{j_1+1, j_2} - U_{j_1-1, j_2}}{2h_1} \xi_x + \frac{U_{j_1, j_2+1} - U_{j_1, j_2-1}}{2h_2} \eta_x \right) + 2 \frac{\mu_{j_1+1, j_2} - \mu_{j_1-1, j_2}}{2h_1} \times \\
 & \times \left( \frac{U_{j_1+1, j_2} - U_{j_1-1, j_2}}{2h_1} \xi_x + \frac{U_{j_1, j_2+1} - U_{j_1, j_2-1}}{2h_2} \eta_x \right) + \frac{\mu_{j_1, j_2+1} - \mu_{j_1, j_2-1}}{2h_2} \left( \frac{U_{j_1+1, j_2} - U_{j_1-1, j_2}}{2h_1} \xi_y + \frac{U_{j_1, j_2+1} - U_{j_1, j_2-1}}{2h_1} \eta_y \right) \Big] = \bar{X}_1, \quad (3.99)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\mu_{j_1, j_2}}{J_1} \left( \frac{V_{j_1+1, j_2} - 2V_{j_1, j_2} + V_{j_1-1, j_2}}{h_1^2} + \frac{V_{j_1, j_2+1} - 2V_{j_1, j_2} + V_{j_1, j_2-1}}{h_2^2} \right) + (\lambda_{j_1, j_2} + \mu_{j_1, j_2}) \left( \frac{V_{j_1+1, j_2} - 2V_{j_1, j_2} + V_{j_1-1, j_2}}{h_1^2} (\xi_y)^2 + \right. \\
 & + 2 \frac{V_{j_1+1, j_2+1} - V_{j_1, j_2+1} - V_{j_1+1, j_2} + V_{j_1, j_2}}{h_1 h_1} \xi_y \eta_y + \frac{V_{j_1+1, j_2} - V_{j_1-1, j_2}}{2h_1} \xi_{yy} + \frac{V_{j_1, j_2+1} - 2V_{j_1, j_2} + V_{j_1, j_2-1}}{h_2^2} (\eta_y)^2 + \\
 & \left. + \frac{V_{j_1, j_2+1} - V_{j_1, j_2-1}}{2h_2} \eta_{yy} \right) + \frac{\lambda_{j_1, j_2+1} - \lambda_{j_1, j_2-1}}{2h_2} \left( \frac{V_{j_1+1, j_2} - V_{j_1-1, j_2}}{2h_1} \xi_y + \frac{V_{j_1, j_2+1} - V_{j_1, j_2-1}}{2h_2} \eta_y \right) + 2 \frac{\mu_{j_1, j_2+1} - \mu_{j_1, j_2-1}}{2h_2} \times \\
 & \times \left( \frac{V_{j_1+1, j_2} - V_{j_1-1, j_2}}{2h_1} \xi_y + \frac{V_{j_1, j_2+1} - V_{j_1, j_2-1}}{2h_2} \eta_y \right) + \frac{\mu_{j_1+1, j_2} - \mu_{j_1-1, j_2}}{2h_1} \left( \frac{V_{j_1+1, j_2} - V_{j_1-1, j_2}}{2h_1} \xi_x + \frac{V_{j_1, j_2+1} - V_{j_1, j_2-1}}{2h_2} \eta_x \right) \Big] = \bar{Y}_1, \quad (3.100)
 \end{aligned}$$

$$j_1 = \overline{1, m_1 - 1}, \quad j_2 = \overline{1, m_2 - 1},$$

де

$$\begin{aligned}
 & \bar{X}_1 = X_i + (2\lambda_{j_1, j_2} + 2\mu_{j_1, j_2}) \alpha_T \left( \frac{T_{j_1+1, j_2} - T_{j_1-1, j_2}}{2h_1} \xi_x + \frac{T_{j_1, j_2+1} - T_{j_1, j_2-1}}{2h_2} \eta_x \right) - \\
 & - (\lambda_{j_1, j_2} + \mu_{j_1, j_2}) \left( \frac{V_{j_1+1, j_2} - 2V_{j_1, j_2} + V_{j_1-1, j_2}}{h_1^2} \xi_x \xi_y + \frac{V_{j_1+1, j_2+1} - V_{j_1, j_2+1} - V_{j_1+1, j_2} + V_{j_1, j_2}}{h_1 h_2} (\xi_y \eta_x + \xi_x \eta_y) + \right. \\
 & \left. + \frac{V_{j_1, j_2+1} - 2V_{j_1, j_2} + V_{j_1, j_2-1}}{h_1^2} \eta_x \eta_y + \frac{V_{j_1+1, j_2} - V_{j_1-1, j_2}}{2h_1} \xi_{xy} + \frac{V_{j_1, j_2+1} - V_{j_1, j_2-1}}{2h_1} \eta_{xy} \right) + \frac{\lambda_{j_1+1, j_2} - \lambda_{j_1-1, j_2}}{2h_1} \times \\
 & \times \left( \frac{V_{j_1+1, j_2} - V_{j_1-1, j_2}}{2h_1} \xi_y + \frac{V_{j_1, j_2+1} - V_{j_1, j_2-1}}{2h_2} \eta_y \right) + \frac{\mu_{i_1, i_2+1} - \mu_{i_1, i_2-1}}{2h_2} \left( \frac{V_{i_1+1, i_2} - V_{i_1-1, i_2}}{2h_1} \xi_x + \frac{V_{i_1, i_2+1} - V_{i_1, i_2-1}}{2h_2} \eta_x \right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{Y}_1 = & Y_i + (2\lambda_{j_1, j_2} + 2\mu_{j_1, j_2})\alpha_T \left( \frac{T_{j_1+1, j_2} - T_{j_1-1, j_2}}{2h_1} \xi_y + \frac{T_{j_1, j_2+1} - T_{j_1, j_2-1}}{2h_2} \eta_y \right) - \\
& - (\lambda_{j_1, j_2} + \mu_{j_1, j_2}) \left( \frac{U_{j_1+1, j_2} - 2U_{j_1, j_2} + U_{j_1-1, j_2}}{h_1^2} \xi_x \xi_y + \frac{U_{j_1+1, j_2+1} - U_{j_1, j_2+1} - U_{j_1+1, j_2} + U_{j_1, j_2}}{h_1 h_2} (\xi_y \eta_x + \xi_x \eta_y) \right) + \\
& + \frac{U_{j_1, j_2+1} - 2U_{j_1, j_2} + U_{j_1, j_2-1}}{h_2^2} \eta_x \eta_y + \frac{U_{j_1+1, j_2} - U_{j_1-1, j_2}}{2h_1} \xi_{xy} + \frac{U_{j_1, j_2+1} - U_{j_1, j_2-1}}{2h_2} \eta_{xy} \left. \right) + \frac{\lambda_{j_1, j_2+1} - \lambda_{j_1, j_2-1}}{2h_2} \times \\
& \times \left( \frac{U_{j_1+1, j_2} - U_{j_1-1, j_2}}{2h_1} \xi_x + \frac{U_{j_1, j_2+1} - U_{j_1, j_2-1}}{2h_2} \eta_x \right) + \frac{\mu_{j_1+1, j_2} - \mu_{j_1-1, j_2}}{2h_1} \left( \frac{U_{j_1+1, j_2} - U_{j_1-1, j_2}}{2h_1} \xi_y + \frac{U_{j_1, j_2+1} - U_{j_1, j_2-1}}{2h_2} \eta_y \right).
\end{aligned}$$

Чисельний розв'язок системи рівнянь (3.99) та (3.100) шукаємо методом Гауса-Зейделя. Для цього запишемо їх у наступному вигляді:

$$U_{j_1, j_2} = \bar{A}_1 U_{j_1+1, j_2} + \bar{B}_1 U_{j_1-1, j_2} + \bar{C}_1 U_{j_1, j_2+1} + \bar{D}_1 U_{j_1, j_2-1} + \bar{E}_1 U_{j_1+1, j_2+1} + \bar{F}_1, \quad (3.101)$$

$$V_{j_1, j_2} = \bar{A}_2 V_{j_1+1, j_2} + \bar{B}_2 V_{j_1-1, j_2} + \bar{C}_2 V_{j_1, j_2+1} + \bar{D}_2 V_{j_1, j_2-1} + \bar{E}_2 V_{j_1+1, j_2+1} + \bar{F}_2, \quad (3.102)$$

де

$$\bar{A}_1 = \left( \left( \frac{\mu}{J_1 h_1^2} \right) + (\lambda + \mu) \left( \frac{\xi_x^2}{h_1^2} - \frac{2\xi_x \eta_x}{h_1 h_2} + \frac{\xi_{xx}}{2h_1} \right) + (\lambda_x + 2\mu_x) \left( \frac{\xi_x}{2h_1} \right) + \mu_y \left( \frac{\xi_y}{2h_1} \right) \right) \cdot \left( \frac{1}{S_1} \right),$$

$$\bar{B}_1 = \left( \left( \frac{\mu}{J_1 h_1^2} \right) + (\lambda + \mu) \left( \frac{\xi_x^2}{h_1^2} - \frac{\xi_{xx}}{2h_1} \right) + (\lambda_x + 2\mu_x) \left( -\frac{\xi_x}{2h_1} \right) + \mu_y \left( -\frac{\xi_y}{2h_1} \right) \right) \cdot \left( \frac{1}{S_1} \right),$$

$$\bar{C}_1 = \left( \left( \frac{\mu}{J_1 h_2^2} \right) + (\lambda + \mu) \left( \frac{\eta_x^2}{h_2^2} - \frac{2\xi_x \eta_x}{h_1 h_2} + \frac{\eta_{xx}}{2h_2} \right) + (\lambda_x + 2\mu_x) \left( \frac{\eta_x}{2h_2} \right) + \mu_y \left( \frac{\eta_y}{2h_2} \right) \right) \cdot \left( \frac{1}{S_1} \right),$$

$$\bar{D}_1 = \left( \left( \frac{\mu}{J_1 h_2^2} \right) + (\lambda + \mu) \left( \frac{\eta_x^2}{h_2^2} - \frac{\eta_{xx}}{2h_2} \right) + (\lambda_x + 2\mu_x) \left( -\frac{\eta_x}{2h_2} \right) + \mu_y \left( -\frac{\eta_y}{2h_2} \right) \right) \cdot \left( \frac{1}{S_1} \right),$$

$$\bar{E}_1 = \left( (\lambda + \mu) \left( \frac{2\xi_x \eta_x}{h_1 h_2} \right) \right) \cdot \left( \frac{1}{S_1} \right), \bar{F}_1 = (X_T - f_1) \cdot \left( \frac{1}{S_1} \right),$$

$$\bar{S}_1 = \left( \frac{-2\mu}{J_1} \right) \cdot \left( \frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2} \right) + (\lambda + \mu) \left( \frac{2\xi_x \eta_x}{h_1 h_2} - \frac{2\xi_x^2}{h_1^2} - \frac{2\eta_x}{h_2^2} \right),$$

$$\bar{A}_2 = \left( \left( \frac{\mu}{J_1 h_1^2} \right) + (\lambda + \mu) \left( \frac{\xi_y^2}{h_1^2} - \frac{2\xi_y \eta_y}{h_1 h_2} + \frac{\xi_{yy}}{2h_1} \right) + (\lambda_y + 2\mu_y) \left( \frac{\xi_y}{2h_1} \right) + \mu_x \left( \frac{\xi_x}{2h_1} \right) \right) \cdot \left( \frac{1}{S_2} \right),$$

$$\bar{B}_2 = \left( \left( \frac{\mu}{J_1 h_1^2} \right) + (\lambda + \mu) \left( \frac{\xi_y^2}{h_1^2} - \frac{\xi_{yy}}{2h_1} \right) + (\lambda_y + 2\mu_y) \left( -\frac{\xi_y}{2h_1} \right) + \mu_x \left( -\frac{\xi_x}{2h_1} \right) \right) \cdot \left( \frac{1}{S_2} \right),$$

$$\bar{C}_2 = \left( \left( \frac{\mu}{J_1 h_2^2} \right) + (\lambda + \mu) \left( \frac{\eta_y^2}{h_2^2} - \frac{2\xi_y \eta_y}{h_1 h_2} + \frac{\eta_{yy}}{2h_2} \right) + (\lambda_y + 2\mu_y) \left( \frac{\eta_y}{2h_2} \right) + \mu_x \left( \frac{\eta_x}{2h_2} \right) \right) \cdot \left( \frac{1}{S_2} \right),$$

$$\bar{D}_2 = \left( \left( \frac{\mu}{J_1 h_2^2} \right) + (\lambda + \mu) \left( \frac{\eta_y^2}{h_2^2} - \frac{\eta_{yy}}{2h_2} \right) + (\lambda_y + 2\mu_y) \left( -\frac{\eta_y}{2h_2} \right) + \mu_x \left( -\frac{\eta_x}{2h_2} \right) \right) \cdot \left( \frac{1}{S_2} \right),$$

$$\bar{E}_2 = \left( (\lambda + \mu) \left( \frac{2\xi_y \eta_y}{h_1 h_1} \right) \right) \cdot \left( \frac{1}{S_2} \right), \quad \bar{F}_2 = (Y_T - f_2) \cdot \left( \frac{1}{S_2} \right),$$

$$\bar{S}_2 = \left( \frac{-2\mu}{J_1} \right) \cdot \left( \frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2} \right) + (\lambda + \mu) \left( \frac{2\xi_y \eta_y}{h_1 h_2} - \frac{2\xi_y^2}{h_1^2} - \frac{2\eta_y}{h_2^2} \right),$$

$$\mu_x = \frac{1}{J_1} \left( \frac{\mu_{j_1+1, j_2} - \mu_{j_1-1, j_2}}{2h_1} y_\eta - \frac{\mu_{j_1, j_2+1} - \mu_{j_1, j_2-1}}{2h_2} y_\xi \right), \quad \mu_y = \frac{1}{J_1} \left( -\frac{\mu_{j_1+1, j_2} - \mu_{j_1-1, j_2}}{2h_1} x_\eta + \frac{\mu_{j_1, j_2+1} - \mu_{j_1, j_2-1}}{2h_2} x_\xi \right),$$

$$\lambda_x = \frac{1}{J_1} \left( \frac{\lambda_{j_1+1, j_2} - \lambda_{j_1-1, j_2}}{2h_1} y_\eta - \frac{\lambda_{j_1, j_2+1} - \lambda_{j_1, j_2-1}}{2h_2} y_\xi \right), \quad \lambda_y = \frac{1}{J_1} \left( -\frac{\lambda_{j_1+1, j_2} - \lambda_{j_1-1, j_2}}{2h_1} x_\eta + \frac{\lambda_{j_1, j_2+1} - \lambda_{j_1, j_2-1}}{2h_2} x_\xi \right).$$

Обчислення за формулами (3.101), (3.102) проводять до тих пір, поки не буде виконуватись задана точність  $\varepsilon$  між двома сусідніми ітераціями

$$\left| U_{j_1, j_2}^{(z+1)} - U_{j_1, j_2}^{(z)} \right| \leq \varepsilon, \quad \left| V_{j_1, j_2}^{(z+1)} - V_{j_1, j_2}^{(z)} \right| \leq \varepsilon, \quad j_1 = \overline{1, m_1 - 1}, \quad j_2 = \overline{1, m_2 - 1}, \quad z - \text{номер ітерації.}$$

Значення зміщень на  $AD_1 \cup D_1 D$  з (3.95) обчислюватимуться наступним чином:

$$\begin{cases} U_{0, j_2} = U_{1, j_2} + \frac{h_1}{\xi_x} \left( \frac{U_{0, j_2+1} - U_{0, j_2-1}}{2h_2} \eta_x + \nu \left( \frac{V_{1, j_2} - V_{0, j_2}}{h_1} \xi_y + \frac{V_{0, j_2+1} - V_{0, j_2-1}}{2h_2} \eta_y \right) \right) - \alpha_T \theta (1 + \nu), \\ V_{0, j_2} = V_{1, j_2} + \frac{h_1}{\xi_x} \left( \frac{V_{0, j_2+1} - V_{0, j_2-1}}{2h_2} \eta_x + \left( \frac{U_{1, j_2} - U_{0, j_2}}{h_1} \xi_y + \frac{U_{0, j_2+1} - U_{0, j_2-1}}{2h_1} \eta_y \right) \right). \end{cases}$$

На сторонах  $CC_1 \cup C_1 B_1 \cup B_1 B$  з граничних умов (3.96) отримаємо

$$\begin{cases} U_{m_1, j_2} = U_{m_1-1, j_2} - \frac{h_1}{\xi_x} \left( \nu \left( \frac{V_{m_1, j_2} - V_{m_1-1, j_2}}{h_1} \xi_y + \frac{V_{m_1, j_2+1} - V_{m_1, j_2-1}}{2h_2} \eta_y \right) + \frac{U_{m_1, j_2+1} - U_{m_1, j_2-1}}{2h_2} \eta_x \right) - \alpha_T \theta (1 + \nu), \\ V_{m_1, j_2} = V_{m_1-1, j_2} - \frac{h_1}{\xi_x} \left( \frac{V_{m_1, j_2+1} - V_{m_1, j_2-1}}{2h_2} \eta_x + \left( \frac{U_{m_1, j_2} - U_{m_1-1, j_2}}{h_1} \xi_y + \frac{U_{m_1, j_2+1} - U_{m_1, j_2-1}}{2h_1} \eta_y \right) \right). \end{cases}$$

Для сторони  $DC$  з (3.97) маємо

$$\begin{cases} V_{j_1, m_2} = V_{j_1, m_2-1} - \frac{h_2}{\eta_y} \left( \frac{V_{j_1, m_2} - V_{j_1, m_2}}{h_1} \xi_y + v \left( \frac{U_{j_1+1, m_2} - U_{j_1, m_2}}{h_1} \xi_x + \frac{U_{j_1, m_2} - U_{j_1, m_2-1}}{h_2} \eta_x \right) \right) - \alpha_T \theta (1 + v), \\ U_{j_1, m_2} = U_{j_1, m_2-1} - \frac{h_2}{\eta_y} \left( \frac{U_{j_1+1, m_2} - U_{j_1, m_2}}{h_1} \xi_y + \left( \frac{V_{j_1+1, m_2} - V_{j_1, m_2}}{h_1} \xi_x + \frac{V_{j_1, m_2} - V_{j_1, m_2-1}}{h_2} \eta_x \right) \right). \end{cases}$$

Значення зміщень на вільній поверхні з (3.98) обчислюються наступним чином:

$$\begin{cases} V_{j_1, m_2^*} = \frac{V_{j_1, m_2^*-1} + V_{j_1, m_2^*+1}}{2} + \frac{h_2}{\eta_y} \left( \frac{U_{j_1+1, m_2^*} - U_{j_1, m_2^*}}{h_1} \xi_x (v^{(2)} - v^{(1)}) + \frac{U_{j_1, m_2^*+1} - U_{j_1, m_2^*}}{h_2} \eta_x v^{(2)} - \right. \\ \left. - \frac{U_{j_1, m_2^*} - U_{j_1, m_2^*-1}}{h_2} \eta_x v^{(1)} + (\alpha_T^{(1)} \theta (1 + v^{(1)}) - \alpha_T^{(2)} \theta (1 + v^{(2)})) \right), \\ U_{j_1, m_2^*} = \frac{U_{j_1, m_2^*-1} + U_{j_1, m_2^*+1}}{2} + \frac{\eta_x}{\eta_y} (V_{j_1, m_2^*+1} - (V_{j_1, m_2^*} + V_{j_1, m_2^*}) + V_{j_1, m_2^*-1}). \end{cases}$$

Деформації та напруження (3.77) у змінних  $\xi$ ,  $\eta$  обчислюються за формулами

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y},$$

$$\sigma_x = \frac{\theta}{1-v} (\varepsilon_x + v \varepsilon_y) - \alpha_T \bar{T} \theta, \quad \sigma_y = \frac{\theta}{1-v} (v \varepsilon_x + \varepsilon_y) - \alpha_T \bar{T} \theta, \quad \theta = \frac{E(c, T)}{1-v}, \quad \bar{T} = T - T_0.$$

Тоді їх скінченнорізницеві аналоги мають наступний вигляд:

$$(\varepsilon_x)_{j_1, j_2} = \frac{U_{j_1+1, j_2} - U_{j_1-1, j_2}}{2h_1} \xi_x + \frac{U_{j_1, j_2+1} - U_{j_1, j_2-1}}{2h_2} \eta_x, \quad (\varepsilon_y)_{j_1, j_2} = \frac{U_{j_1+1, j_2} - U_{j_1-1, j_2}}{2h_1} \xi_y + \frac{U_{j_1, j_2+1} - U_{j_1, j_2-1}}{2h_2} \eta_y,$$

$$(\sigma_x)_{j_1, j_2} = \frac{\theta}{1-v} ((\varepsilon_x)_{j_1, j_2} + v (\varepsilon_y)_{j_1, j_2}) - \alpha_T \bar{T}_{j_1, j_2}^{(s)} \theta, \quad (\sigma_y)_{j_1, j_2} = \frac{\theta}{1-v} (v (\varepsilon_x)_{j_1, j_2} + (\varepsilon_y)_{j_1, j_2}) - \alpha_T \bar{T}_{j_1, j_2}^{(s)} \theta,$$

$$j_1 = \overline{1, m_1 - 1}, \quad j_2 = \overline{1, m_2 - 1}, \quad s = \overline{0, n_1}.$$

Для розв'язання задачі масоперенесення у неізотермічних умовах (3.91) використаємо локально-одновимірний метод Самарського [131–133] з використанням неявної монотонної різницевої схеми, в результаті чого отримаємо

$$\begin{aligned} & \frac{c_{j_1-1, j_2}^{(s+0,5)} - 2c_{j_1, j_2}^{(s+0,5)} + c_{j_1+1, j_2}^{(s+0,5)}}{h_1^2} + r_1^+ \frac{c_{j_1+1, j_2}^{(s+0,5)} - c_{j_1, j_2}^{(s+0,5)}}{h_1} + r_1^- \frac{c_{j_1, j_2}^{(s+0,5)} - c_{j_1-1, j_2}^{(s+0,5)}}{h_1} + \\ & + \frac{\bar{Q}_3}{2} \cdot (c_{j_1, j_2}^{(s+0,5)} - c_m) + \bar{Q}_4 \cdot \frac{T_{j_1-1, j_2}^{(s+0,5)} - 2T_{j_1, j_2}^{(s+0,5)} + T_{j_1+1, j_2}^{(s+0,5)}}{h_1^2} = \bar{Q}_5 \frac{c_{j_1, j_2}^{(s+0,5)} - c_{j_1, j_2}^{(s)}}{\tau}, \end{aligned} \quad (3.103)$$

$$\begin{aligned} & \frac{c_{j_1, j_2-1}^{(s+1)} - 2 \cdot c_{j_1, j_2}^{(s+1)} + c_{j_1, j_2+1}^{(s+1)}}{h_2^2} + r_2^+ \frac{c_{j_1, j_2+1}^{(s+1)} - c_{j_1, j_2}^{(s+1)}}{h_2} + r_2^- \frac{c_{j_1, j_2}^{(s+1)} - c_{j_1, j_2-1}^{(s+1)}}{h_2} + \\ & + \frac{\bar{Q}_3}{2} \cdot (c_{j_1, j_2}^{(s+1)} - C_m) + \bar{Q}_4 \frac{T_{j_1, j_2-1}^{(s+1)} - 2 \cdot T_{j_1, j_2}^{(s+1)} + T_{j_1, j_2+1}^{(s+1)}}{h_2^2} = \bar{Q}_5 \frac{c_{j_1, j_2}^{(s+1)} - c_{j_1, j_2}^{(s+0,5)}}{\tau}. \end{aligned} \quad (3.104)$$

Для знаходження концентрації солей з (3.103) використаємо метод прогонки.

Зведемо дане рівняння до прогоночного вигляду

$$a_{j_1} c_{j_1-1, j_2}^{(s+0,5)} - \bar{c}_{j_1} c_{j_1, j_2}^{(s+0,5)} + b_{j_1} c_{j_1+1, j_2}^{(s+0,5)} = -f_1,$$

$$\text{де } a_{j_1} = \frac{1}{h_1^2} - \frac{r_1^-}{h_1}, \quad b_{j_1} = \frac{1}{h_1^2} + \frac{r_1^+}{h_1}, \quad \bar{c}_{j_1} = \frac{2}{h_1^2} + \frac{r_1^+}{h_1} - \frac{r_1^-}{h_1} + \frac{\bar{Q}_3}{2} + \frac{\bar{Q}_5}{\tau},$$

$$f_1 = \frac{\bar{Q}_5}{\tau} c_{j_1, j_2}^{(s)} + \frac{\bar{Q}_3}{2} C_m - \bar{Q}_4 \frac{T_{j_1, j_2-1}^{(s+0,5)} - 2 \cdot T_{j_1, j_2}^{(s+0,5)} + T_{j_1, j_2+1}^{(s+0,5)}}{h_2^2}.$$

Значення концентрації солей на часовому шарі  $(s+0,5)$  послідовно обчислюємо, використовуючи співвідношення

$$c_{j_1, j_2}^{(s+0,5)} = \alpha_{j_1+1}^1 \cdot c_{j_1+1, j_2}^{(s+0,5)} + \beta_{j_1+1}^1, \quad (3.105)$$

$$\text{де } \alpha_{j_1+1}^1 = \frac{b_{j_1}}{\bar{c}_{j_1} - a_{j_1} \alpha_{j_1}}, \quad \beta_{j_1+1}^1 = \frac{a_{j_1} \beta_{j_1} + f_1}{\bar{c}_{j_1} - a_{j_1} \alpha_{j_1}}, \quad j_1 = \overline{1, m_1 - 1}, \quad j_2 = \overline{1, m_2^* - 1}, \quad s = \overline{1, n_1}.$$

За методом прогонки з (3.104) маємо

$$a_{j_2} c_{i_1, i_2-1}^{(j+1)} - \bar{c}_{j_2} c_{i_1, i_2}^{(j+1)} + b_{j_2} c_{i_1, i_2+1}^{(j+1)} = -f_2,$$

$$\text{де } a_{j_2} = \frac{1}{h_2^2} - \frac{r_2^-}{h_2}, \quad b_{j_2} = \frac{1}{h_2^2} + \frac{r_2^+}{h_2}, \quad \bar{c}_{j_2} = \frac{2}{h_2^2} - \frac{r_2^+}{h_2} + \frac{r_2^-}{h_2} + \frac{\bar{Q}_3}{2} - \frac{\bar{Q}_5}{\tau},$$

$$f_2 = \frac{\bar{Q}_5}{\tau} c_{j_1, j_2}^{(s+0,5)} + \frac{\bar{Q}_3}{2} C_m - \bar{Q}_4 \frac{T_{j_1, j_2-1}^{(s+1)} - 2 \cdot T_{j_1, j_2}^{(s+1)} + T_{j_1, j_2+1}^{(s+1)}}{2h_2^2}.$$

Значення концентрації солей на часовому шарі  $(s+1)$  послідовно обчислюємо, використовуючи співвідношення

$$c_{j_1, j_2}^{(s+1)} = \alpha_{j_2+1}^2 \cdot c_{j_1, j_2+1}^{(s+1)} + \beta_{j_2+1}^2, \quad (3.106)$$

$$\text{де } \alpha_{j_2+1}^2 = \frac{b_{j_2}}{\bar{c}_{j_2} - a_{j_2} \alpha_{j_2}}, \quad \beta_{j_2+1}^2 = \frac{a_{j_2} \beta_{j_2} + f_2}{\bar{c}_{j_2} - a_{j_2} \alpha_{j_2}}, \quad j_1 = \overline{1, m_1 - 1}, \quad j_2 = \overline{1, m_2^* - 1}, \quad s = \overline{1, n_1}.$$

Згідно локально-одновимірного методу Самарського [131–133] для (3.92) маємо

$$\frac{T_{j_1-1,j_2}^{(s+0,5)} - 2 \cdot T_{j_1,j_2}^{(s+0,5)} + T_{j_1+1,j_2}^{(s+0,5)}}{h_1^2} + r_1^+ \frac{T_{j_1+1,j_2}^{(s+0,5)} - T_{j_1,j_2}^{(s+0,5)}}{h_1} + r_1^- \frac{T_{j_1,j_2}^{(s+0,5)} - T_{j_1-1,j_2}^{(s+0,5)}}{h_1} = Z_3 \frac{T_{j_1,j_2}^{(s+0,5)} - T_{j_1,j_2}^{(s)}}{\tau}, \quad (3.107)$$

$$\frac{T_{j_1,j_2-1}^{(s+1)} - 2 \cdot T_{j_1,j_2}^{(s+1)} + T_{j_1,j_2+1}^{(s+1)}}{h_2^2} + r_2^+ \frac{T_{j_1,j_2+1}^{(s+1)} - T_{j_1,j_2}^{(s+1)}}{h_2} + r_2^- \frac{T_{j_1,j_2}^{(s+1)} - T_{j_1,j_2-1}^{(s+1)}}{h_2} = Z_3 \frac{T_{j_1,j_2}^{(s+1)} - T_{j_1,j_2}^{(s+0,5)}}{\tau}. \quad (3.108)$$

Для знаходження температури методом прогонки зведемо рівняння (3.107) до прогоночного вигляду

$$\bar{a}_{j_1} T_{j_1-1,j_2}^{(s+0,5)} - \bar{c}_{j_1} T_{j_1,j_2}^{(s+0,5)} + \bar{b}_{j_1} T_{j_1+1,j_2}^{(s+0,5)} = -\bar{f}_1,$$

$$\text{де } \bar{a}_{j_1} = \frac{1}{h_1^2} - \frac{r_1^-}{h_1}, \quad \bar{b}_{j_1} = \frac{1}{h_1^2} + \frac{r_1^+}{h_1}, \quad \bar{c}_{j_1} = -\frac{2}{h_1^2} - \frac{r_1^+}{h_1} + \frac{r_1^-}{h_1} - \frac{Z_3}{\tau}, \quad \bar{f}_1 = \frac{Z_3}{\tau} T_{j_1,j_2}^{(s)}.$$

Значення температури послідовно обчислюємо за формулами

$$T_{j_1,j_2}^{(s+0,5)} = \alpha_{j_1+1}^3 \cdot T_{j_1+1,j_2}^{(s+0,5)} + \beta_{j_1+1}^3, \quad (3.109)$$

$$\text{де } \alpha_{j_1+1}^3 = \frac{b_{j_1}}{c_{j_1} - a_{j_1} \alpha_{j_1}}, \quad \beta_{j_1+1}^3 = \frac{a_{j_1} \beta_{j_1} + \bar{f}_1}{c_{j_1} - a_{j_1} \alpha_{j_1}}, \quad j_1 = \overline{1, m_1 - 1}, \quad j_2 = \overline{1, m_2 - 1}, \quad s = \overline{1, n_1}.$$

Рівняння (3.108) зведемо до прогоночного вигляду наступним чином:

$$\bar{a}_{j_2} T_{j_1,j_2-1}^{(s+1)} - \bar{c}_{j_2} T_{j_1,j_2}^{(s+1)} + \bar{b}_{j_2} T_{j_1,j_2+1}^{(s+1)} = -\bar{f}_2,$$

$$\text{де } \bar{a}_{j_2} = \frac{1}{h_2^2} - \frac{r_2^-}{h_2}, \quad \bar{b}_{j_2} = \frac{1}{h_2^2} + \frac{r_2^+}{h_2}, \quad \bar{c}_{j_2} = \frac{2}{h_2^2} + \frac{r_2^+}{h_2} - \frac{r_2^-}{h_2} + \frac{Z_3}{\tau}, \quad \bar{f}_2 = \frac{Z_3}{\tau} T_{j_1,j_2}^{(s+0,5)}.$$

Значення температури на часовому шарі  $(s+1)$  обчислюємо за формулами

$$T_{j_1,j_2}^{(s+1)} = \alpha_{j_2+1}^4 \cdot T_{j_1,j_2+1}^{(s+1)} + \beta_{j_2+1}^4, \quad (3.110)$$

$$\text{де } \alpha_{j_2+1}^4 = \frac{b_{j_2}}{c_{j_2} - a_{j_2} \alpha_{j_2}}, \quad \beta_{j_2+1}^4 = \frac{a_{j_2} \beta_{j_2} + \bar{f}_2}{c_{j_2} - a_{j_2} \alpha_{j_2}}, \quad j_1 = \overline{1, m_1 - 1}, \quad j_2 = \overline{1, m_2 - 1}, \quad s = \overline{1, n_1}.$$

Наближені значення п'єзометричного напору знаходяться з розв'язку відповідної задачі фільтрації з використанням ітераційного методу Гауса-Зейделя

$$h_{j_1,j_2}^{(z+1)} = \tilde{a}_{j_1,j_2} h_{j_1-1,j_2}^{(z+1)} + \tilde{b}_{j_1,j_2} h_{j_1+1,j_2}^{(z)} + \tilde{c}_{j_1,j_2} h_{j_1,j_2-1}^{(z+1)} + \tilde{d}_{j_1,j_2} h_{j_1,j_2+1}^{(z)}, \quad (3.111)$$

$$\text{де } \tilde{a}_{j_1,j_2} = \frac{(2\bar{A}_{j_1,j_2} - h_1 \bar{B}_{j_1,j_2}) h_2^2}{4(h_2^2 \bar{A}_{j_1,j_2} + h_1^2 \bar{C}_{j_1,j_2})}, \quad \tilde{b}_{j_1,j_2} = \frac{(2\bar{A}_{j_1,j_2} - h_1 \bar{B}_{j_1,j_2}) h_2^2}{4(h_2^2 \bar{A}_{j_1,j_2} + h_1^2 \bar{C}_{j_1,j_2})}, \quad \tilde{c}_{j_1,j_2} = \frac{(2\bar{C}_{j_1,j_2} - h_1 \bar{D}_{j_1,j_2}) h_1^2}{4(h_2^2 \bar{A}_{j_1,j_2} + h_1^2 \bar{C}_{j_1,j_2})},$$

$$\tilde{d}_{j_1, j_2} = \frac{(2\bar{C}_{j_1, j_2} - h_1 \bar{D}_{j_1, j_2}) h_1^2}{4(h_2^2 \bar{A}_{j_1, j_2} + h_1^2 \bar{C}_{j_1, j_2})}, \quad \bar{A}_{j_1, j_2} = \frac{K_{j_1, j_2}}{J_1}, \quad \bar{B}_{j_1, j_2} = \frac{K_{j_1, j_2}}{J_1}, \quad \bar{C}_{j_1, j_2} = \frac{1}{J_1} \left( \frac{K_{j_1+1, j_2} - K_{j_1, j_2}}{h_1} \right), \quad \bar{D}_{j_1, j_2} = \frac{1}{J_1} \left( \frac{K_{j_1, j_2+1} - K_{j_1, j_2}}{h_2} \right).$$

Обчислення за формулою (3.111) проводять до тих пір, поки не буде виконуватись задана точність  $\varepsilon$  між двома сусідніми ітераціями

$$\left| h_{j_1, j_2}^{(z+1)} - h_{j_1, j_2}^{(z)} \right| \leq \varepsilon, \quad j_1 = \overline{1, m_1 - 1}, \quad j_2 = \overline{1, m_2 - 1}, \quad z - \text{номер ітерації.}$$

Для компонент вектора швидкості фільтрації (3.93), (3.94) маємо

$$\begin{aligned} (v_1)_{j_1, j_2}^{(s)} = & \frac{1}{J_1} \left( -K_{j_1, j_2}^{(s)} (c_{j_1, j_2}^{(s)}, T_{1, j_1, j_2}^{(s)}) \left( \frac{h_{j_1+1, j_2} - h_{j_1-1, j_2}}{h_1} y_\eta - \frac{h_{j_1, j_2+1} - h_{j_1, j_2-1}}{h_2} y_\xi \right) + \right. \\ & \left. + v_c \left( \frac{c_{j_1+1, j_2}^{(s)} - c_{j_1-1, j_2}^{(s)}}{h_1} y_\eta - \frac{c_{j_1, j_2+1}^{(s)} - c_{j_1, j_2-1}^{(s)}}{h_2} y_\xi \right) + v_T \left( \frac{T_{1, j_1+1, j_2}^{(s)} - T_{1, j_1-1, j_2}^{(s)}}{h_1} y_\eta - \frac{T_{1, j_1, j_2+1}^{(s)} - T_{1, j_1, j_2-1}^{(s)}}{h_2} y_\xi \right) \right), \end{aligned} \quad (3.112)$$

$$\begin{aligned} (v_2)_{j_1, j_2}^{(s)} = & \frac{1}{J_1} \left( -K_{j_1, j_2}^{(s)} (c_{j_1, j_2}^{(s)}, T_{1, j_1, j_2}^{(s)}) \left( -\frac{h_{j_1+1, j_2} - h_{j_1-1, j_2}}{h_1} x_\eta + \frac{h_{j_1, j_2+1} - h_{j_1, j_2-1}}{h_2} x_\xi \right) + \right. \\ & \left. + v_c \left( -\frac{c_{j_1+1, j_2}^{(s)} - c_{j_1-1, j_2}^{(s)}}{h_1} x_\eta + \frac{c_{j_1, j_2+1}^{(s)} - c_{j_1, j_2-1}^{(s)}}{h_2} x_\xi \right) + v_T \left( -\frac{T_{1, j_1+1, j_2}^{(s)} - T_{1, j_1-1, j_2}^{(s)}}{h_1} x_\eta + \frac{T_{1, j_1, j_2+1}^{(s)} - T_{1, j_1, j_2-1}^{(s)}}{h_2} x_\xi \right) \right). \end{aligned} \quad (3.113)$$

### 3.3.5. Результати чисельних експериментів та їх аналіз

Для прикладу розглянуто задачу моделювання НДС основи фільтруючої ґрунтової греблі висотою 10 м та з нижньою основою 20 м. Ґрунтова гребля у водонасиченій області має тип ґрунту суглинок. Положення вільної поверхні знаходиться із розв'язку задачі фільтрації.

Вихідні дані до задачі брались наступними аналогічно до пункту 3.2.4, окрім  $\tilde{T}_1(t) = 25^\circ C$ ,  $\tilde{T}_2(t) = 25^\circ C$ ,  $\tilde{T}_3(t) = 5^\circ C$ ,  $\tilde{T}_4(t) = 5^\circ C$ ,  $\tilde{T}_0^1(x) = 5^\circ C$ ,  $\tilde{T}_0^2(x) = 5^\circ C$ . Час, протягом якого розглядався процес НДС, дорівнював 3 роки. Результати чисельних експериментів представлено у вигляді графіків при  $t = 1080$  діб. На рис. 3.16–3.18 наведені розподіли полів шуканих функцій з урахуванням тепло-масоперенесення та наявності вільної поверхні.

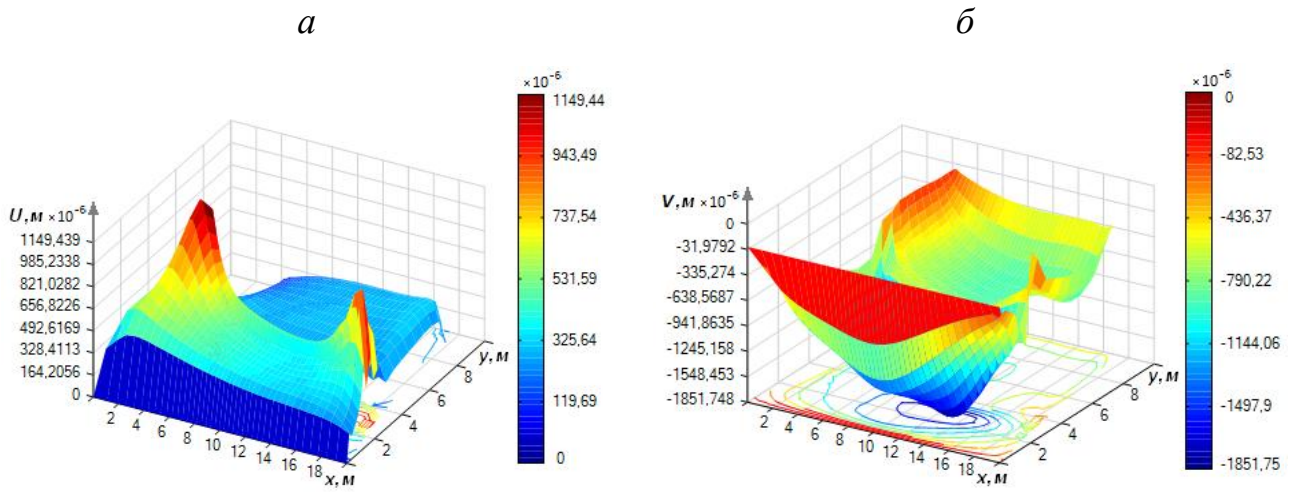


Рис. 3.16. Розподіли полів зміщень вздовж осей  $Ox$  (а) та  $Oy$  (б)

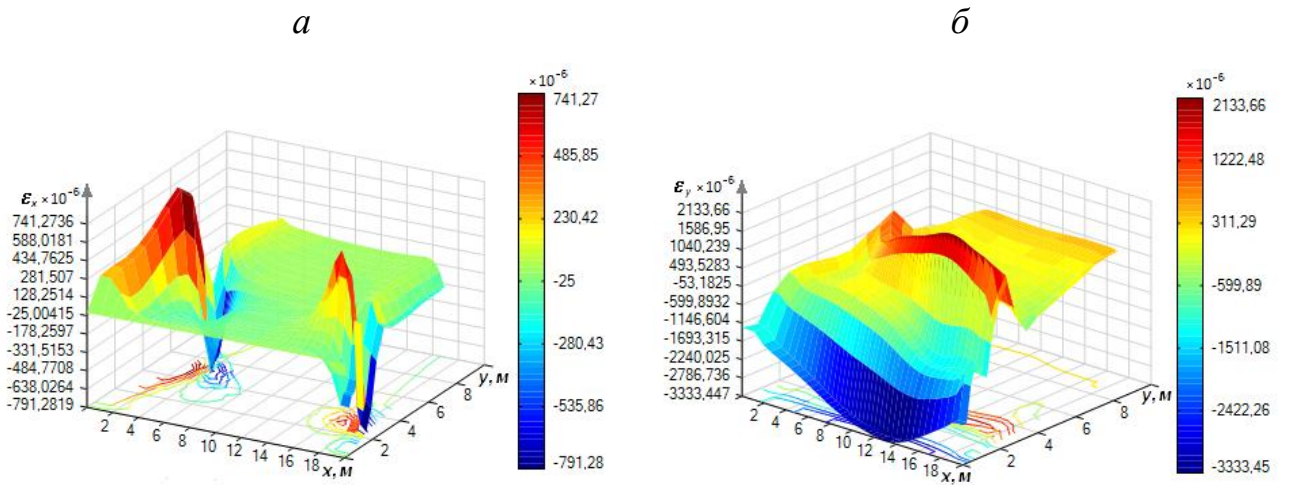


Рис. 3.17. Розподіли полів деформацій вздовж осей  $Ox$  (а) та  $Oy$  (б)

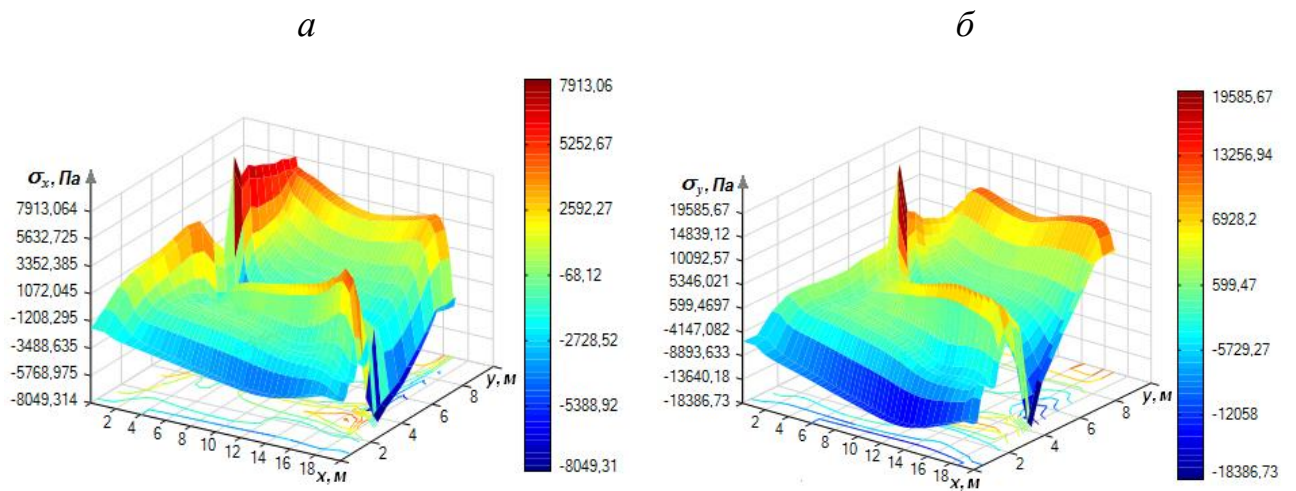


Рис. 3.18. Розподіли полів напружень вздовж осей  $Ox$  (а) та  $Oy$  (б)



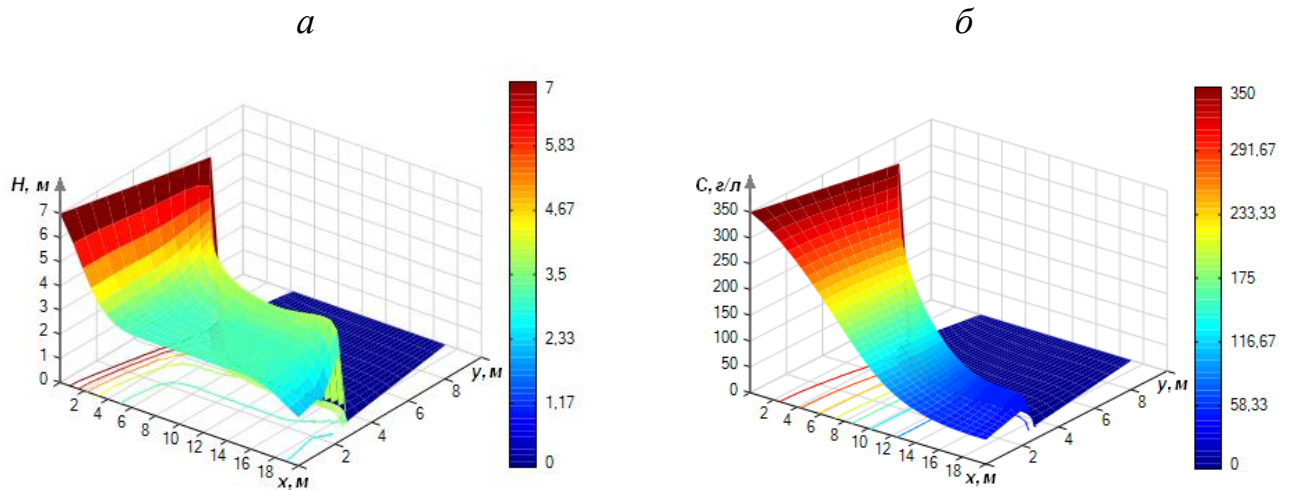


Рис. 3.19. Розподіли полів п'єзометричного напору ґрунтової греблі за наявності вільної поверхні з урахуванням фільтрації сольових розчинів (а) та концентрації сольових розчинів у неізотермічних умовах (б)

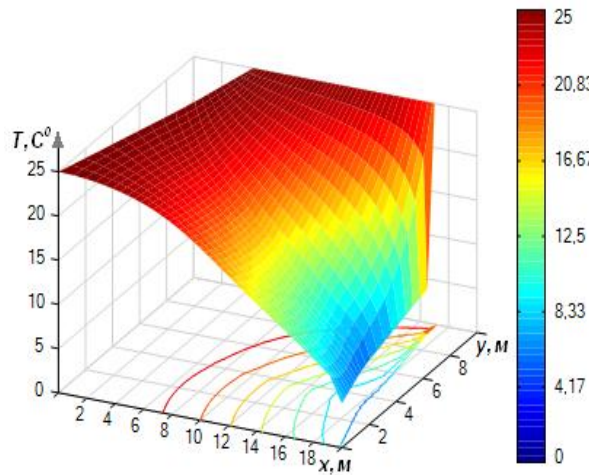


Рис. 3.20. Розподіл поля температури при фільтрації сольових розчинів

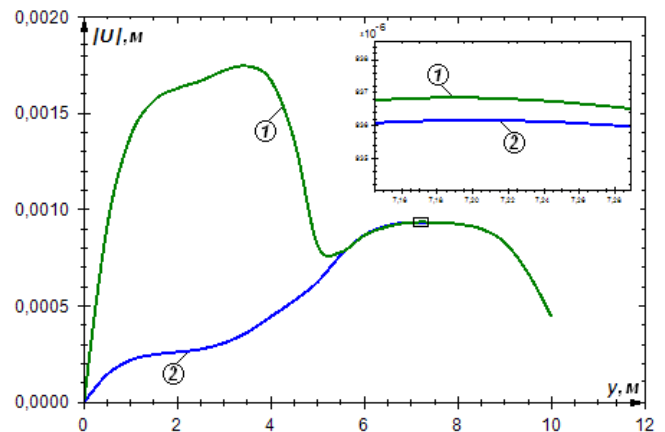


Рис. 3.21. Розподіл модуля вектора зміщень у площині перерізу  $yOz$  при  $x = 10$  м з урахуванням тепло-масоперенесення (1) та без урахування тепло-масоперенесення (2)

З графіків розподілу зміщень (рис.3.16, рис. 3.21) видно, що зміщення значно збільшуються при врахуванні тепло-масоперенесення і можуть в декілька разів переважати значення, отримані при нехтуванні даного процесу (при фільтрації чистої води). Зміщення досягають максимальних значень в області водонасиченого ґрунту (рис. 3.21). Це можна пояснити наявністю в даній області процесів тепло-масоперенесення за фільтрації сольових розчинів у неізотермічних умовах.

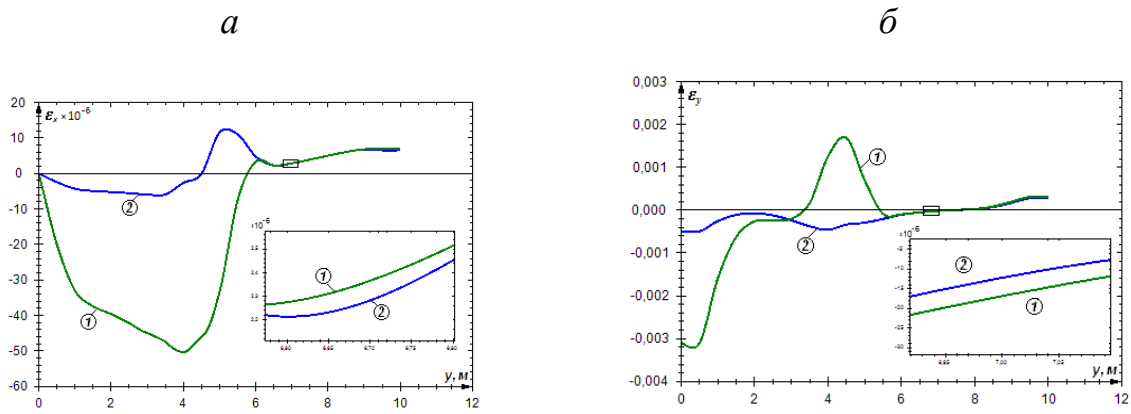


Рис. 3.22. Розподіли деформацій вздовж осей  $Ox$  (а) та  $Oy$  (б) ґрунтової греблі в площині перерізу  $yOz$  при  $x = 10$  м з урахуванням тепло-масоперенесення (1) та без урахування тепло-масоперенесення (2)

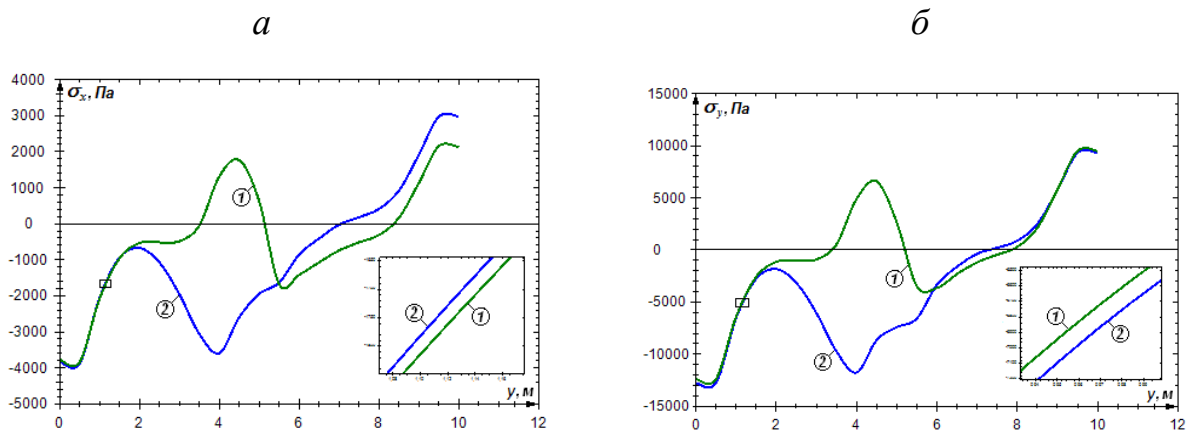


Рис. 3.23. Розподіли напружень вздовж осей  $Ox$  (а) та  $Oy$  (б) ґрунтової греблі в площині перерізу  $yOz$  при  $x = 10$  м з урахуванням тепло-масоперенесення (1) та без урахування тепло-масоперенесення (2)

Як видно з рис.3.17, ґрунтовий масив зазнає найбільших деформацій на границях досліджуваної області і в області рівня ґрунтових вод. Також при врахуванні тепло-масоперенесення деформації можуть збільшуватися в кілька разів порівняно з деформаціями, які відчуває ґрунтовий масив без урахування процесів тепло-масоперенесення, що свідчить про їх суттєвий вплив (рис.3.22). Аналіз графіків на рис. 3.18 показує, що напруження досягають найбільших значень в області вільної поверхні і на верхній основі ґрунтового масиву. Напруження з урахуванням тепло-масоперенесення значно збільшуються в області вільної поверхні у порівнянні з напруженнями без урахування тепло-масоперенесення (рис. 3.23).

### 3.4. Математичне моделювання впливу тепло-масоперенесення на напружено-деформований стан фільтруючого ґрунтового масиву внаслідок утворення депресійної лунки у двовимірному випадку

#### 3.4.1. Постановка задачі

Розглядається задача моделювання процесу інтенсивної відкачки ґрунтових вод на укосі при плоско-вертикальній безнапірній фільтрації сольових розчинів у неізотермічних умовах за наявності рухомої вільної поверхні (рис.3.24).

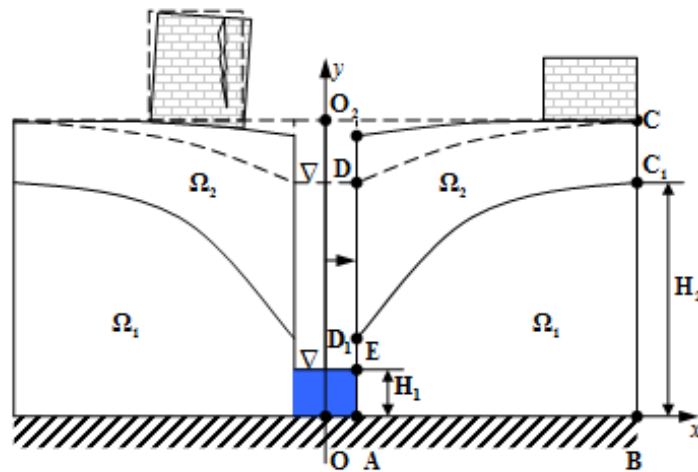


Рис. 3.24. Розрахункова схема до прогнозування осідання земної поверхні при пониженні вільної поверхні в результаті відкачки рідини із дренажної щілини

На рис. 3.24 введені наступні позначення:  $\Omega_1$  – область водонасиченого ґрунту;  $\Omega_2$  – область ґрунту в природному стані. Задані значення п'єзометричних напорів  $\tilde{H}_1$  і  $\tilde{H}_2$  у лівому ( $AE$ ) та правому ( $BC_1$ ) водних басейнах відповідно, причому  $\tilde{H}_2 > \tilde{H}_1$ . У правому басейні задано значення концентрації сольових розчинів  $\tilde{C}_1$ , а у лівому – умову швидкого виносу солей. Значення температури задані в лівому та правому водних басейнах  $\tilde{T}_1$  і  $\tilde{T}_2$  відповідно ( $\tilde{T}_2 > \tilde{T}_1$ ), а також на границях області ґрунту, що знаходиться в природному стані ( $DC \cup CC_1, D_1D$ ) та проміжку височування ( $ED_1$ ) –  $\tilde{T}_3, \tilde{T}_4$  і  $\tilde{T}_5$  відповідно.

Під впливом градієнтів напору, концентрації солей та температури відбувається

перенесення розчинених у воді речовин та тепла фільтраційним потоком. При цьому процеси фільтрації розчинених у воді речовин та тепла підлягають відповідно законам Дарсі, Фіка та Фур'є. Нижня основа ґрунтового масиву ( $AB$ ) вважається теплоізолюваною та непроникною. НДС досліджується в рамках лінійної теорії пружності, що описується рівняннями Ламе для зміщень ґрунту.

Необхідно розрахувати значення зміщень, напружень, деформацій та розподіл поля температури у всій області ґрунтового масиву, а також розподіл полів напору та концентрації солей у водонасиченій області при умові, що відсутні зміщення нижньої основи ґрунтового масиву.

### 3.4.2. Математична модель задачі в змінних $x, y$ фізичної області

Математична модель НДС фільтруючого ґрунтового масиву внаслідок утворення депресійної лунки з урахуванням тепло-масоперенесення у двовимірному випадку, зважаючи на результати розділу 1, 2 та 3 (пункти 3.1, 3.2, 3.3), а також результати робіт [48–50, 54–56, 60, 61, 63, 66, 68, 71, 72, 155, 201, 202], в загальноприйнятих позначеннях може бути описана наступною крайовою задачею:

$$\begin{aligned}
 & \mu_i(c, T_i) \Delta U_i + (\lambda_i(c, T_i) + \mu_i(c, T_i)) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x} + \frac{\partial V_i}{\partial y} \right) + \frac{\partial \lambda_i(c, T_i)}{\partial x} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x} + \frac{\partial V_i}{\partial y} \right) + \\
 & \quad + 2 \frac{\partial \mu_i(c, T_i)}{\partial x} \frac{\partial U_i}{\partial x} + \frac{\partial \mu_i(c, T_i)}{\partial y} \left( \frac{\partial U_i}{\partial y} + \frac{\partial V_i}{\partial x} \right) - \\
 & \quad - \left( \left( 2 \frac{\partial \lambda_i(c, T_i)}{\partial x} + 2 \frac{\partial \mu_i(c, T_i)}{\partial x} \right) T_i + (2 \lambda_i(c, T_i) + 2 \mu_i(c, T_i)) \frac{\partial T_i}{\partial x} \right) \alpha_T = X_i, \\
 & \mu_i(c, T_i) \Delta V_i + (\lambda_i(c, T_i) + \mu_i(c, T_i)) \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x} + \frac{\partial V_i}{\partial y} \right) + \frac{\partial \lambda_i(c, T_i)}{\partial y} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x} + \frac{\partial V_i}{\partial y} \right) + \\
 & \quad + 2 \frac{\partial \mu_i(c, T_i)}{\partial y} \frac{\partial V_i}{\partial y} + \frac{\partial \mu_i(c, T_i)}{\partial x} \left( \frac{\partial U_i}{\partial y} + \frac{\partial V_i}{\partial x} \right) - \\
 & \quad - \left( \left( 2 \frac{\partial \lambda_i(c, T_i)}{\partial y} + 2 \frac{\partial \mu_i(c, T_i)}{\partial y} \right) T_i + (2 \lambda_i(c, T_i) + 2 \mu_i(c, T_i)) \frac{\partial T_i}{\partial y} \right) \alpha_T = Y_i, \quad \mathbf{X} \in \Omega_i, \quad i = \overline{1, 2},
 \end{aligned} \tag{3.114}$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{D}(c, T_1) \nabla c) - \mathbf{v} \nabla c - \gamma(c - C_m) + \nabla \cdot (\mathbf{D}_T \nabla T_1) = n_p \frac{\partial c}{\partial t}, \quad \mathbf{X} \in \Omega_1(t), \quad t > 0, \tag{3.115}$$

$$\nabla \cdot (\lambda_{\mathbf{T}}^{(i)} \nabla T_i) - \rho c_{\rho} \bar{\mathbf{v}} \nabla T_i = c_T^{(i)} \frac{\partial T_i}{\partial t}, \quad \mathbf{X} \in \Omega_i, \quad i = \overline{1, 2}, \quad t > 0, \quad (3.116)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{K}(c, T) \nabla h - \mathbf{v}_c(c) \nabla c - \mathbf{v}_T \nabla T) = a \frac{\partial h}{\partial t}, \quad \mathbf{X} \in \Omega_1(t), \quad t > 0, \quad (3.117)$$

$$\mathbf{v} = -\mathbf{K}(c, T_1) \nabla h + \mathbf{v}_c \nabla c + \mathbf{v}_T \nabla T_1, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} + \frac{\partial n_p}{\partial t} = 0, \quad \mathbf{X} \in \Omega_1(t), \quad t > 0, \quad (3.118)$$

$$\mathbf{q}_c = \mathbf{v}c - \mathbf{D}(c, T_1) \nabla c - \mathbf{D}_T \nabla T_1, \quad \mathbf{X} \in \Omega_1, \quad \mathbf{q}_T^{(i)} = \rho c_{\rho} \bar{\mathbf{v}} T_i - \lambda_{\mathbf{T}}^{(i)} \nabla T_i, \quad \mathbf{X} \in \Omega_i, \quad i = \overline{1, 2}, \quad t > 0, \quad (3.119)$$

$$\varepsilon_x^{(i)} = \frac{\partial U_i}{\partial x}, \quad \varepsilon_y^{(i)} = \frac{\partial V_i}{\partial y}, \quad \varepsilon_{xy}^{(i)} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial y} + \frac{\partial V_i}{\partial x} \right), \quad \mathbf{X} \in \Omega_i, \quad i = \overline{1, 2}, \quad (3.120)$$

$$\sigma_x^{(i)} = \frac{\theta}{1+\nu} (\varepsilon_x^{(i)} + \nu \varepsilon_y^{(i)}) - \alpha_T^{(i)} \bar{T}_i \theta, \quad \sigma_y^{(i)} = \frac{\theta}{1+\nu} (\varepsilon_y^{(i)} + \nu \varepsilon_x^{(i)}) - \alpha_T^{(i)} \bar{T}_i \theta, \quad (3.121)$$

$$\tau_{xy}^{(i)} = \frac{E_i(c, T_i)}{2(1+\nu)} \varepsilon_{xy}^{(i)}, \quad \mathbf{X} \in \Omega_i, \quad i = \overline{1, 2},$$

$$(\mathbf{v}, \mathbf{n})|_{AB} = 0, \quad h(\mathbf{X}, t)|_{AE} = \tilde{H}_1(\mathbf{X}, t), \quad h(\mathbf{X}, t)|_{BC_1} = \tilde{H}_2(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in \Omega_1(t), \quad t > 0, \quad (3.122)$$

$$h(\mathbf{X}, t)|_{C_1 D_1 \cup D_1 E} = y, \quad (\mathbf{v}, \mathbf{n})|_{C_1 D_1 \cup D_1 E} = n_p \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad \varphi(\mathbf{X}, t) = (y - h(\mathbf{X}, t))|_{C_1 D_1 \cup D_1 E} = 0, \quad t > 0, \quad (3.123)$$

$$(\mathbf{q}_c, \mathbf{n})|_{AB} = 0, \quad c(\mathbf{X}, t)|_{BC_1} = \tilde{C}_1(\mathbf{X}, t), \quad \left. \frac{\partial c(\mathbf{X}, t)}{\partial n} \right|_{\Gamma_1} = 0, \quad \Gamma_1 = C_1 D_1 \cup D_1 E \cup AE, \quad \mathbf{X} \in \Omega_1(t), \quad t > 0, \quad (3.124)$$

$$(\mathbf{q}_T^{(i)}, \mathbf{n})|_{AB} = 0, \quad T_1(\mathbf{X}, t)|_{AE} = \tilde{T}_1(\mathbf{X}, t), \quad T_1(\mathbf{X}, t)|_{BC_1} = \tilde{T}_2(\mathbf{X}, t), \quad T_1(\mathbf{X}, t)|_{ED_1} = \tilde{T}_5(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in \Omega_1(t), \quad t > 0, \quad (3.125)$$

$$T_2(\mathbf{X}, t)|_{DC \cup CC_1} = \tilde{T}_3(\mathbf{X}, t), \quad T_2(\mathbf{X}, t)|_{DD_1} = \tilde{T}_4(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in \Omega_2(t), \quad t > 0, \quad (3.126)$$

$$[T_i(\mathbf{X}, t)]|_{C_1 D_1} = 0, \quad [\mathbf{q}_T^{(i)}]|_{C_1 D_1} = 0, \quad \mathbf{X} \in C_1 D_1, \quad i = \overline{1, 2}, \quad t > 0, \quad (3.127)$$

$$\mathbf{u}_1(\mathbf{X}) = 0, \quad \mathbf{X} \in AB, \quad \sigma_n = 0, \quad \tau_s = 0, \quad \mathbf{X} \in AE \cup ED_1 \cup BC_1 \cup D_1 D \cup C_1 C \cup CD, \quad (3.128)$$

$$[u_n^{(i)}]|_{C_1 D_1} = [u_s^{(i)}]|_{C_1 D_1} = 0, \quad [\sigma_n^{(i)}]|_{C_1 D_1} = [\tau_s^{(i)}]|_{C_1 D_1} = 0, \quad \mathbf{X} \in C_1 D_1, \quad i = \overline{1, 2}, \quad (3.129)$$

$$h(\mathbf{X}, 0) = \tilde{H}_0(\mathbf{X}), \quad c(\mathbf{X}, 0) = \tilde{C}_0(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X} \in \Omega_1(t), \quad T(\mathbf{X}, 0) = \begin{cases} \tilde{T}_0^1(\mathbf{X}), & \mathbf{X} \in \Omega_1(t), \\ \tilde{T}_0^2(\mathbf{X}), & \mathbf{X} \in \Omega_2(t), \end{cases} \quad (3.130)$$

де  $\mathbf{X} = (x, y) \in \Omega$ ,  $\Omega = \Omega_1(t) \cup \Omega_2(t)$ ;  $t$  – час,  $t > 0$ ;  $\tilde{H}_0(\mathbf{X})$ ,  $\tilde{C}_0(\mathbf{X})$ ,  $\tilde{T}_0^1(\mathbf{X})$ ,  $\tilde{T}_0^2(\mathbf{X})$ ,  $\tilde{H}_1(\mathbf{X}, t)$ ,  $\tilde{H}_2(\mathbf{X}, t)$ ,  $\tilde{C}_1(\mathbf{X}, t)$ ,  $\tilde{T}_1(\mathbf{X}, t)$ ,  $\tilde{T}_2(\mathbf{X}, t)$  – задані функції;  $\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{v}$  при  $\mathbf{X} \in \Omega_1(t)$  та

$\bar{\mathbf{v}} = 0$  при  $\mathbf{X} \in \Omega_2(t)$ ;  $\mathbf{n}$  – вектор напрямних косинусів зовнішньої нормалі до межі  $\Gamma$ ;  $[\ ]$  – стрибок функції;  $\theta = \frac{E(c, T)}{1 - \nu}$ ,  $\bar{T} = T - T_0$ .

Тут: (3.114) – система рівнянь рівноваги в формі Ламе для зміщень ґрунту, що знаходиться у водонасиченому та природному станах з урахуванням тепло-масоперенесення для водонасиченого ґрунту та теплоперенесення у всій області; (3.115), (3.116) описують сольовий та тепловий режими ґрунтового масиву; (3.117), (3.118) – задача фільтрації сольових розчинів у неізотермічних умовах; (3.119) – питомий потік розчинених солей на випадок неізотермічних умов та узагальнений закон Фур'є на випадок конвективного тепло-масоперенесення; (3.120), (3.121) – компоненти нормальних та дотичних деформацій і напружень. Співвідношення (3.123) задають вільну поверхню  $C_1D_1$ . Додаткові умови для зміщень, температури, напору та концентрації солей мають вигляд (3.122), (3.124)–(3.130) відповідно.

### 3.4.3. Математична модель задачі в змінних $\xi, \eta$

Для чисельного розв'язання задачі (3.114)–(3.130) використано метод скінченних різниць із застосуванням чисельних конформних відображень в оберненій постановці [23, 24, 47]. У зв'язку з цим здійснено чисельне конформне відображення області  $\Omega$  площини  $(x, y)$  (рис. 3.25, а) на параметричний прямокутник  $\Omega_\zeta$  площини  $(\xi, \eta)$  (рис. 3.25, б).

Координати точок областей  $\Omega$  і  $\Omega_\zeta$  при оберненому конформному відображенні зв'язані умовами Коші-Рімана [23, 24, 47] за формулами (3.87), а також зв'язок між похідними при конформному відображенні областей має вигляд (3.88) (пункт 3.3.3.1).

На сторонах параметричного прямокутника  $\Omega_\zeta$  і кривій депресії  $C_1D_1$  задані наступні крайові умови:

$$\begin{aligned} x(0, \eta) = 0, (\xi, \eta) \in AE \cup ED_1 \cup D_1D, x(a_1, \eta) = a, (\xi, \eta) \in BC_1 \cup C_1C, \\ y(\xi, 0) = 0, (\xi, \eta) \in AB, y(\xi, b_1) = f(t), (\xi, \eta) \in CD, y(\xi, b_0) = h, (\xi, \eta) \in C_1D_1, \end{aligned}$$

де  $f(t)$  – деяка функція, що характеризує процес осідання верхньої межі ґрунту;  
 $h$  – значення п'єзометричного напору на вільній поверхні (кривій депресії)  $C_1D_1$ .

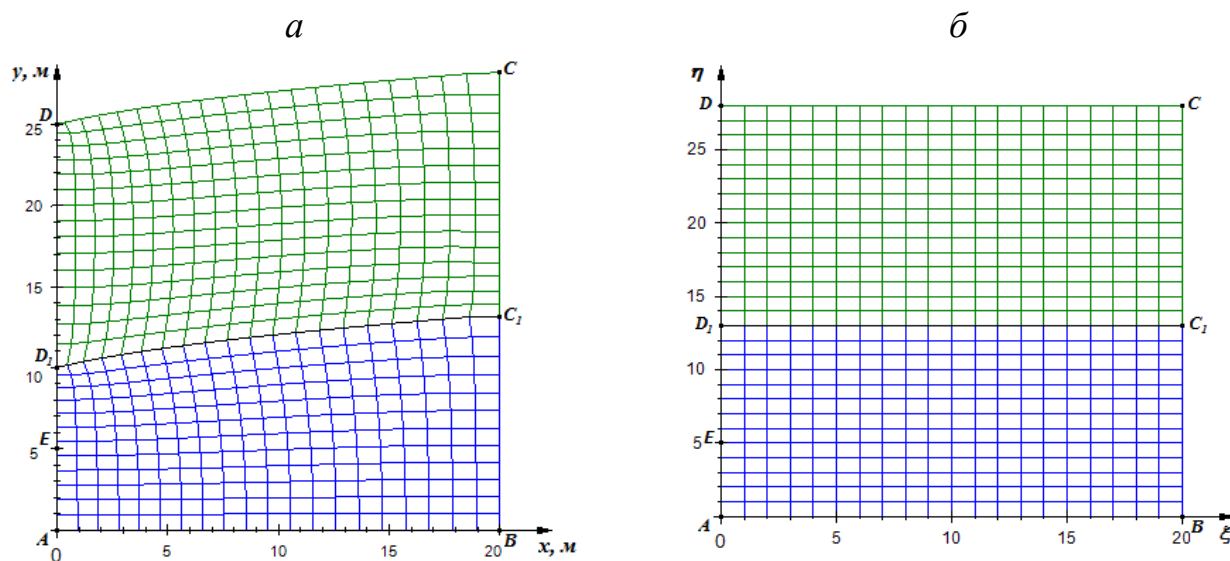


Рис. 3.25. Конформна різницєва сітка в фізичній області (а) та її образ у параметричному прямокутнику (б)

Перетворення задачі (3.114)–(3.130) до нових змінних  $\xi$ ,  $\eta$  здійснено аналогічно, до описано в пункті 3.3.3.2 за формулами (3.89)–(3.98) з перетвореними додатковими умовами на відповідних границях досліджуваної області ґрунтового масиву.

#### 3.4.4. Чисельний розв'язок крайової задачі

Чисельний розв'язок крайової задачі (3.114)–(3.130) знайдено аналогічно до розв'язку задачі, описаної в пункті 3.3.4 за формулами (3.99)–(3.113). Зокрема, для розв'язку системи рівнянь (3.114) та для знаходження наближених значень п'єзометричного напору з розв'язку відповідної крайової задачі фільтрації (3.117) узагальнено ітераційний метод Гауса-Зейделя. Для розв'язку задач масоперенесення в неізотермічних умовах (3.115) і теплоперенесення (3.116) використано локально-одновимірний метод О.А. Самарського [131–133] з використанням монотонної різницєвої схеми. Значення концентрації сольових розчинів та температури знайдено методом прогонки.

### 3.4.5. Результати чисельних експериментів та їх аналіз

Розглянуто приклад моделювання НДС ґрунтового масиву протяжністю 20 м та висотою 28 м з урахуванням перенесення солей фільтраційним потоком у неізотермічних умовах за наявності вільної поверхні. Тип ґрунтового масиву – суглинок. Вихідні дані до задачі брались аналогічними до пункту 3.3.5, окрім  $n_p = 0,35$ ,  $\tilde{T}_1(t) = 5^{\circ}C$ ,  $\tilde{T}_2(t) = 25^{\circ}C$ ,  $\tilde{T}_3(t) = 25^{\circ}C$ ,  $\tilde{T}_4(t) = 5^{\circ}C$ ,  $\tilde{T}_5(t) = 5^{\circ}C$ ,  $\tilde{H}_1 = 5$  м,  $\tilde{H}_2 = 13$  м. Результати чисельних експериментів представлено у вигляді графіків при  $t = 1080$  дб. На рис. 3.30, 3.31 наведені розподіли полів шуканих функцій з урахуванням тепло-масоперенесення.

Аналізуючи графіки розподілу полів зміщень (рис. 3.26, 3.27, а), можна зробити висновок, що найбільших значень зміщень підлягають область водонасиченого ґрунту та вільної поверхні ґрунтових вод. Це можна пояснити наявністю у водонасиченому ґрунті фільтраційного потоку та тепло-масоперенесення. З рис. 3.28, б видно, що зміщення у водонасиченій області ґрунтового масиву при врахуванні тепло-масоперенесення значно збільшуються у порівнянні з відповідними значеннями зміщень при фільтрації чистої води та відсутністю процесів тепло-масоперенесення. В області ґрунту в природному стані зміщення з урахуванням теплоперенесення теж перевищують відповідні значення зміщень без урахування теплоперенесення.

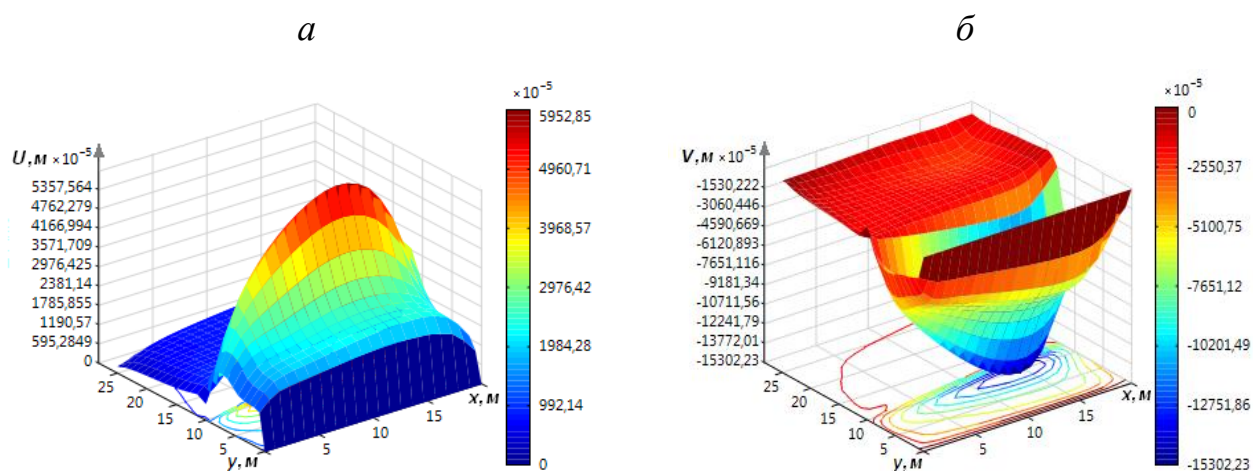


Рис. 3.26. Розподіли полів зміщень вздовж осей  $Ox$  (а) та  $Oy$  (б)



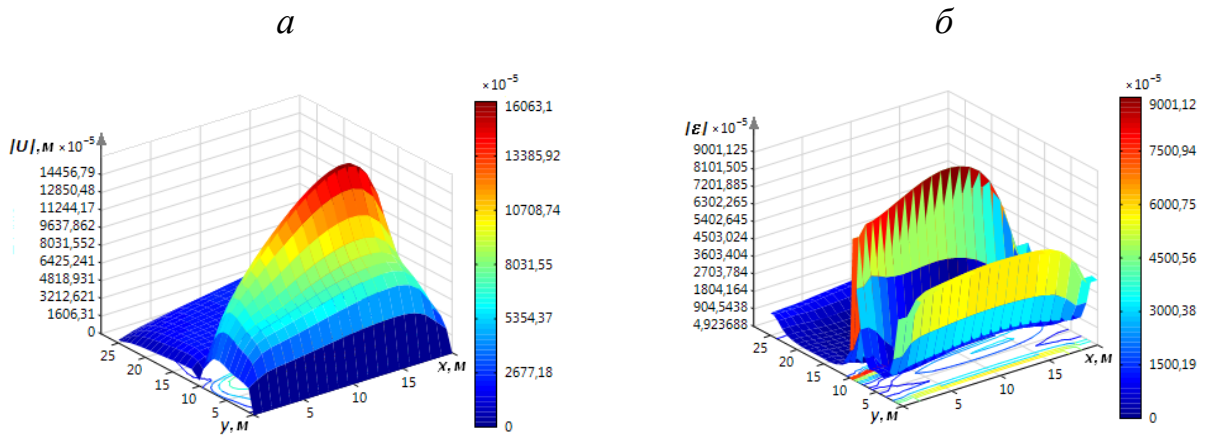


Рис. 3.27. Розподіли полів модулів вектора зміщень (а) та деформацій (б)

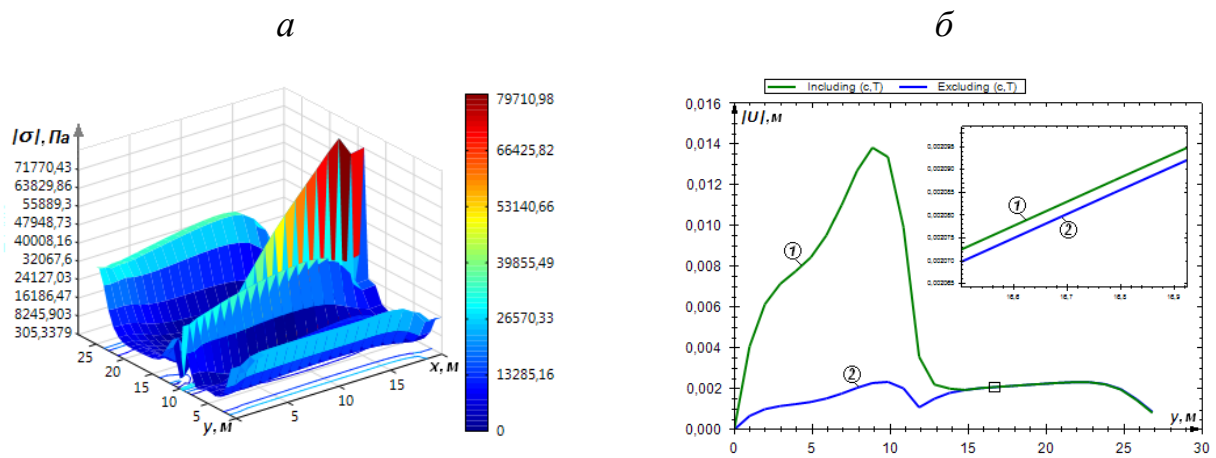


Рис. 3.28. Розподіли поля модуля напружень з врахуванням тепло-масоперенесення (а) та модуля вектора зміщень  $|U|$  вздовж осі  $Oy$  з урахуванням тепло-масоперенесення ① та без урахування тепло-масоперенесення ② у площині перерізу  $yOz$  при  $x = 10 m$  (б)

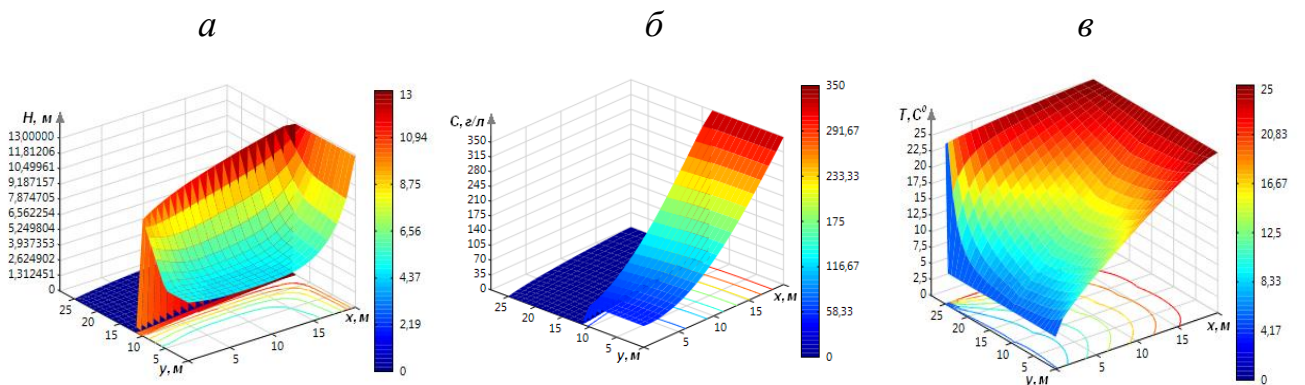


Рис. 3.29. Розподіли полів п'єзометричного напору з урахуванням фільтрації сольових розчинів (а), концентрації солей у неізотермічних умовах (б) та температури при фільтрації сольових розчинів (в)

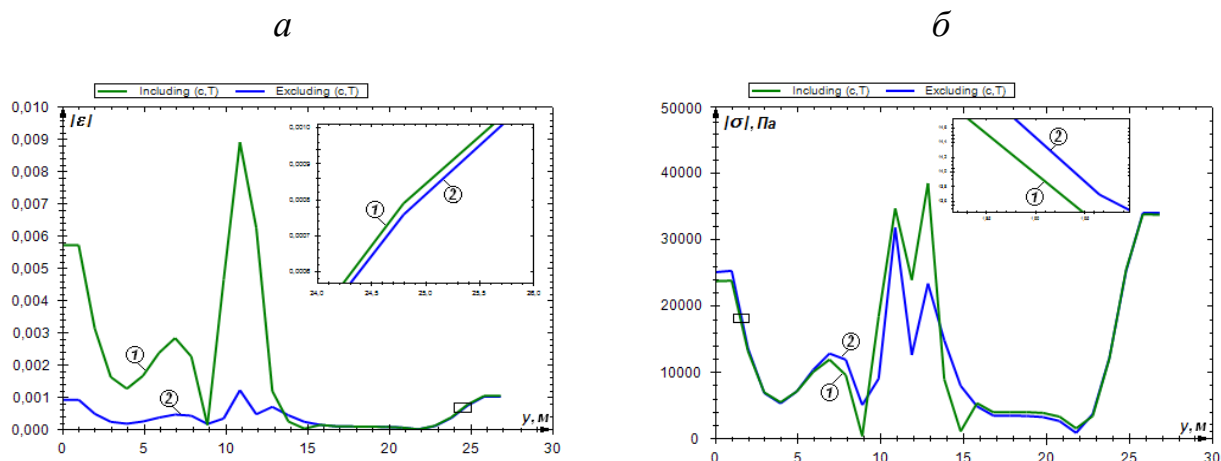


Рис. 3.30. Розподіли модулів деформацій  $|\varepsilon|$  вздовж осі  $Oy$  (а) та напружень  $|\sigma|$  вздовж осі  $Oy$  (б) з урахуванням тепло-масоперенесення ① та без урахування тепло-масоперенесення ② у площині перерізу  $yOz$  при  $x = 10$  м

Деформації (рис. 3.27, б, рис. 3.30, а) досягають максимальних значень в області вільної поверхні ґрунтових вод та нижньої межі досліджуваної області. Як видно з рис. 3.28, а, рис. 3.30, б, максимальні значення напружень спостерігаються в області вільної поверхні ґрунтових вод та на межах розглядуваної області. Врахування процесів тепло-масоперенесення у водонасиченій області ґрунтового масиву та процесу теплоперенесення в області ґрунту в природному стані змінює розподіл деформацій та напружень (рис. 3.30), а саме: розподіл деформацій значно зростає у водонасиченій області і дещо зростає в області природного ґрунту; розподіл напружень збільшується в області вільної поверхні ґрунтових вод.

Таким чином, тепло-масоперенесення суттєво впливає на деформаційні процеси ґрунтового масиву при наявності дренажної щілини.

### 3.5. Висновки до розділу 3

В даному розділі отримані наступні результати:

1. Сформульовано постановки задач НДС ґрунтового масиву з урахуванням тепло-масоперенесення та наявності вільної поверхні в одно- та двовимірному випадках, а також НДС ґрунтової греблі з вільною поверхнею під впливом тепло-

масоперенесення та ґрунтового масиву внаслідок утворення депресійної лунки з урахуванням тепло-масоперенесення в двовимірних випадках.

2. Використовуючи результати розділу 1 та розділу 2, побудовано математичні моделі поставлених крайових задач, які описуються системами рівнянь рівноваги в формі Ламе для зміщень та нелінійних рівнянь параболічного типів, що містять першу похідну, з відповідними додатковими умовами для невідомих функцій.

3. Знайдено чисельні розв'язки вищевказаних задач методом скінченних різниць з використанням чисельних конформних відображень складених областей з криволінійними фіксованими та вільними межами. Для задачі знаходження НДС фільтруючої ґрунтової греблі та задачі прогнозування осідання земної поверхні при пониженні вільної поверхні ґрунтових вод у результаті відкачки рідини із дренажної щілини побудовано відповідні чисельні конформні відображення розглядуваних фізичних областей на параметричні прямокутники.

4. Проведено серію чисельних експериментів з дослідження впливу тепло-масоперенесення розчинених у фільтраційному потоці речовин на деформаційні процеси ґрунтового масиву, що складається із областей повністю водонасиченого ґрунту, в якому відбуваються процеси фільтрації сольових розчинів та тепло-масоперенесення, та області ґрунту в природному стані. Як показали результати чисельних експериментів, тепло-масоперенесення значно впливає на розподіл значень зміщень, напружень та деформацій ґрунтового масиву при наявності РГВ, ґрунтового масиву та основи ґрунтової греблі з вільною поверхнею, ґрунтового масиву внаслідок утворення депресійної лунки

Результати даного розділу опубліковані в роботах [48–50, 54–56, 60, 61, 63, 66, 68, 71, 72, 155, 201, 202].

## РОЗДІЛ 4

### МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВПЛИВУ ТЕПЛО-МАСОПЕРЕНОСЕННЯ ПРИ ФІЛЬТРАЦІЇ СОЛЬОВИХ РОЗЧИНІВ НА НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН БАГАТОШАРОВОГО ГРУНТОВОГО МАСИВУ ЗА НАЯВНОСТІ ВІЛЬНОЇ ПОВЕРХНІ

У даному розділі побудовано математичну модель НДС багат шарового фільтруючого ґрунтового масиву з вільною поверхнею ґрунтових вод з урахуванням тепло-масоперенесення при фільтрації сольових розчинів та залежностей коефіцієнтів фільтрації, Ламе і модуля Юнга від концентрації сольового розчину та температури в одно- та двовимірному випадках. Ґрунтовий масив складається із багатьох шарів, кожен з яких володіє різними механічними та фізико-хімічними властивостями. Області ґрунтового масиву, що знаходяться під вільною поверхнею, є повністю водонасиченими, а області ґрунту над вільною поверхнею знаходяться в природному стані. Знайдено чисельні розв'язки поставлених крайових задач, проведено серію чисельних експериментів та здійснено їх аналіз.

#### **4.1. Математичне моделювання впливу тепло-масоперенесення при фільтрації сольових розчинів на напружено-деформований стан багат шарового ґрунтового масиву з вільною межею в одновимірному випадку**

##### **4.1.1. Постановка задачі**

Нехай дано багат шаровий ґрунтовий масив товщиною  $l$  при наявності в ньому РГВ та впливу процесів тепло-масоперенесення (рис.4.1).

Кількість шарів в ґрунтовому масиві дорівнює  $n$ . Шари нумеруються знизу вверху, причому в одному з шарів на глибині  $l_k$  від водоупору ( $x = 0$ ) присутній РГВ. Відповідно шари ґрунту, розміщені вище  $l_k$ , знаходяться в природному стані, а нижче  $l_k$  – при повній вологості. РГВ вважається нерухомим.

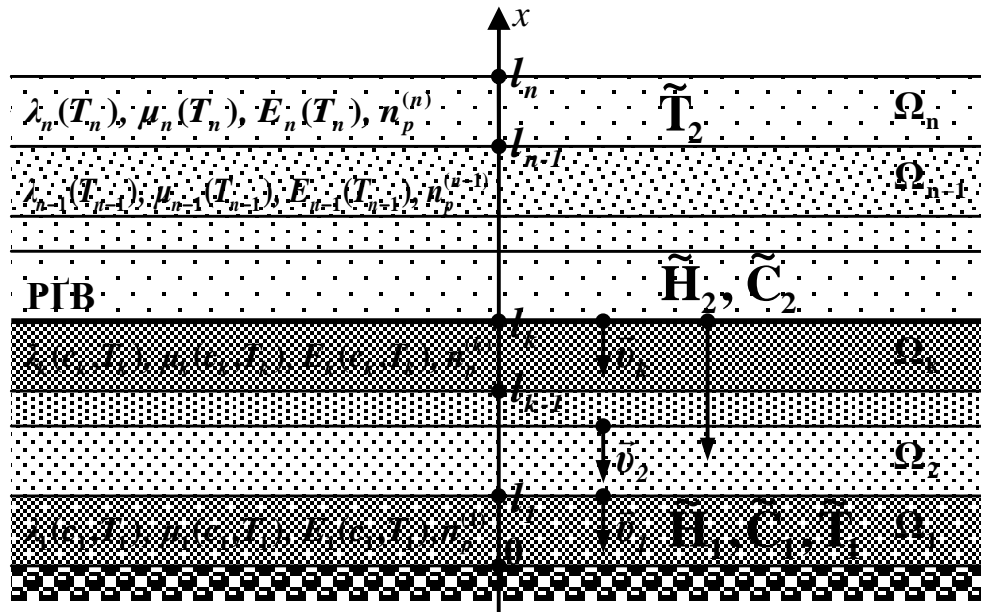


Рис.4.1. Схема багатошарового ґрунтового масиву при наявності в ньому РГВ та впливу тепло-масоперенесення

Шари ґрунту вважаються пружно-деформівними в межах лінійної теорії пружності з різними коефіцієнтами Ламе  $\lambda_i(c_i, T_i)$ ,  $\mu_i(c_i, T_i)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , які залежать від концентрації сольових розчинів та температури. На шари ґрунту на які діє сила тяжіння, а у випадку водонасиченого ґрунту враховується ще й архімедова та фільтраційні сили.

На нижній поверхні ґрунту ( $x=0$ ) задано п'єзометричний напір  $\tilde{H}_1$ , концентрація розчинених у воді солей  $\tilde{C}_1$  та температура  $\tilde{T}_1$ , а на глибині  $l_k$  задано напір  $\tilde{H}_2$  та концентрація солей  $\tilde{C}_2$ . Значення температури  $\tilde{T}_2$  задано на верхній поверхні ґрунту ( $x=l_n$ ), причому  $\tilde{H}_2 > \tilde{H}_1$ ,  $\tilde{C}_2 > \tilde{C}_1$ ,  $\tilde{T}_2 > \tilde{T}_1$ . В результаті різниці напорів відбувається перенесення розчинених у воді речовин та тепла фільтраційним потоком. При цьому процеси фільтрації розчинених у воді речовин та тепла підлягають відповідно законам Дарсі, Фіка та Фур'є.

Потрібно розрахувати НДС ґрунтового масиву з урахуванням процесів тепло-масоперенесення в шарах ґрунту, які знаходяться в природному стані та в шарах ґрунту нижче РГВ, які знаходяться у зваженому стані, при умові, що відсутнє зміщення нижньої та верхньої меж ґрунту або лише нижньої межі ґрунту (скельної основи).

#### 4.1.2. Математична модель задачі

Математичну модель одновимірної задачі НДС багат шарового ґрунтового масиву за наявності РГВ та впливу тепло-масоперенесення, враховуючи міркування розділів 1–3 та результати робіт [52, 53, 58, 69, 70, 73, 153], можна описати наступною, поданою нижче крайовою задачею.

Рівняння рівноваги в формі Ламе для зміщень в кожному шарі ґрунтового масиву мають вигляд

$$\begin{aligned} & (\lambda_i(c_i, T_i) + 2\mu_i(c_i, T_i)) \frac{d^2 U_i}{dx^2} + \frac{d(\lambda_i(c_i, T_i) + 2\mu_i(c_i, T_i))}{dx} \frac{dU_i}{dx} - \\ & - \left( \frac{d(\lambda_i(c_i, T_i) + 2\mu_i(c_i, T_i))}{dx} T_i + (\lambda_i(c_i, T_i) + 2\mu_i(c_i, T_i)) \frac{\partial T_i}{\partial x} \right) \alpha_T^{(i)} = X_i, \quad i = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$X_i = \begin{cases} \gamma_{зв.}^{(i)} + \frac{dp_i}{dx}, & i = \overline{1, k}, \\ \gamma_{нр.}^{(i)}, & i = \overline{k+1, n}, \end{cases} \quad (4.2)$$

де  $x \in \bigcup_{i=1}^n (l_{i-1}, l_i)$ ,  $l_0 = 0$ ,  $l_n = l$ ;  $U_i(x)$ ,  $i = \overline{1, n}$  – зміщення вздовж осі  $Ox$  в шарах ґрунту, що знаходяться відповідно в зваженому ( $x \in \cup (l_i, l_{i+1})$ ,  $i = \overline{1, k-1}$ ) та у природному ( $x \in \cup (l_i, l_{i+1})$ ,  $i = \overline{k, n-1}$ ) станах;  $X_i$ ,  $i = \overline{1, n}$  – масові сили;  $\lambda_i$ ,  $\mu_i$ ,  $i = \overline{1, n}$  – коефіцієнти Ламе в кожному шарі ґрунтового масиву, які залежать від концентрації сольових розчинів та температури  $\lambda_i = \lambda_i(c_i, T_i)$ ,  $\mu_i = \mu_i(c_i, T_i)$  у водонасичених шарах ґрунту та залежать від температури  $\lambda_i = \lambda_i(T_i)$ ,  $\mu_i = \mu_i(T_i)$  у шарах ґрунту в природному стані;  $c_i(x, t)$ ,  $i = \overline{1, k}$  – концентрація сольового розчину у водонасичених шарах ґрунтового масиву;  $T_i(x, t)$ ,  $i = \overline{1, n}$  – температура у всій області дослідження;  $\gamma_{зв.}^{(i)}$ ,  $i = \overline{1, k}$  – питомі ваги ґрунту в  $i$ -ому шарі у зваженому стані;  $\gamma_{нр.}^{(i)}$ ,  $i = \overline{k+1, n}$  – питомі ваги в шарах ґрунту, що знаходяться у природному стані;  $p_i$  – фільтраційні тиски у водонасичених шарах, які визначаються за (4.3)

$$p_i = \gamma_p (h_i - x), \quad i = \overline{1, k}, \quad (4.3)$$

$h_i$ , – п'єзометричний напір у водонасичених шарах ґрунтового масиву  $\Omega_i$ ,  $i = \overline{1, k}$ ;  $x$  – вертикальна координата;  $\gamma_p$  – питома вага рідини;  $\alpha_T^{(i)}$  – середні коефіцієнти лінійного теплового розширення в кожному шарі ґрунтового масиву в інтервалі температур  $(T_0, T_i)$ ,  $i = \overline{1, n}$  [87].

Крайові умови та умови спряження для зміщень мають вигляд

$$L_1 U_1(0) = 0, \quad L_2 U_n(l) = 0, \quad (4.4)$$

$$U_i(l_i) = U_{i+1}(l_i), \quad i = \overline{1, n-1}, \quad (4.5)$$

$$E_i \left( \frac{dU_i(l_i)}{dx} - \alpha_T^{(i)} (T_i - T_0) \right) = E_{i+1} \left( \frac{dU_{i+1}(l_i)}{dx} - \alpha_T^{(i+1)} (T_{i+1} - T_0) \right), \quad i = \overline{1, n-1}, \quad (4.6)$$

де  $L_i$ ,  $i = \overline{1, 2}$  – диференціальні оператори, що задають граничні умови для зміщень відповідно при  $x=0$  та  $x=l$ ;  $E_i$ ,  $i = \overline{1, n}$  – модуль Юнга в кожному шарі ґрунтового масиву, який залежить від концентрації сольових розчинів та температури для ґрунту, що знаходиться у водонасиченому стані, тобто  $E_i = E_i(c_i, T_i)$  при  $i = \overline{1, k}$ , та  $E_i = E_i(T_i)$  при  $i = \overline{k+1, n}$  – модуль деформації ґрунту в природному стані. Умови (4.4) означають відсутність зміщень на нижній та верхній межах ґрунту.

Рівняння масоперенесення у неізотермічному режимі в шарах ґрунту, що знаходяться у водонасиченому стані мають наступний вигляд:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( D_i(c_i, T_i) \frac{\partial c_i}{\partial x} \right) - v_i \frac{\partial c_i}{\partial x} - \gamma_i (c_i - C_m) + \frac{\partial}{\partial x} \left( D_T^{(i)} \frac{\partial T_i}{\partial x} \right) = n_p^{(i)} \frac{\partial c_i}{\partial t}, \quad i = \overline{1, k}, \quad (4.7)$$

де  $x \in (0; l_k)$ ,  $t > 0$ ;  $v_i$  – швидкість фільтрації у водонасичених шарах ґрунту;  $D_i(c_i, T_i)$ ,  $D_T^{(i)}(c_i, T_i)$ , – коефіцієнти конвективної дифузії та термодифузії відповідно;  $n_p^{(i)}$  – пористість в  $i$ -ому шарі;  $\gamma_i$  – константи швидкості масообміну;  $C_m$  – концентрація граничного насичення.

Крайові умови та умови спряження для концентрації мають вигляд

$$c_i(x, 0) = \tilde{C}_0^{(i)}(x), \quad x \in \cup(l_i, l_{i+1}), \quad i = \overline{1, k-1}, \quad (4.8)$$

$$L_3 c_1(0, t) = \tilde{C}_1(t), \quad L_4 c_k(l_k, t) = \tilde{C}_2(t), \quad (4.9)$$

$$c_i(l_i) = c_{i+1}(l_i), \quad i = \overline{1, k-1}, \quad (4.10)$$

$$D_i(c_i, T_i) \frac{\partial c_i(l_i, t)}{\partial x} - v_i c_i(l_i, t) = D_{i+1}(c_{i+1}, T_{i+1}) \frac{\partial c_{i+1}(l_i, t)}{\partial x} - v_{i+1} c_{i+1}(l_i, t), \quad i = \overline{1, k-1}, \quad (4.11)$$

де  $\tilde{C}_0^{(i)}(x)$ ,  $i = \overline{1, k-1}$ ,  $\tilde{C}_1(t)$ ,  $\tilde{C}_2(t)$  – задані функції;  $L_i$ ,  $i = \overline{3, 4}$  – диференціальні оператори, що задають граничні умови для концентрації при  $x = 0$  та  $x = l_k$ .

Рівняння теплоперенесення в кожному з шарів ґрунтового масиву

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_T^{(i)} \frac{\partial T_i}{\partial x} \right) - \rho_i c_\rho^{(i)} \bar{v}_i \frac{\partial T_i}{\partial x} = c_T^{(i)} \frac{\partial T_i}{\partial t}, \quad i = \overline{1, n}, \quad x \in (0; l), \quad t > 0. \quad (4.12)$$

Тут:  $\lambda_T^{(i)}$ ,  $c_T^{(i)}$  – коефіцієнти ефективної теплопровідності вологого ґрунту та об'ємної теплоємності ґрунту відповідно;  $\rho$  – густина порового розчину;  $c_\rho$  – питома теплоємність порового розчину,  $\bar{v}_i = v_i$  при  $i = \overline{1, k}$  та  $\bar{v}_i = 0$  при  $i = \overline{k+1, n}$ .

Крайові умови та умови спряження для температури мають вигляд

$$T_i(x, 0) = \tilde{T}_0^{(i)}(x), \quad x \in \cup(l_i, l_{i+1}), \quad i = \overline{1, n-1}, \quad (4.13)$$

$$L_5 T_1(0, t) = \tilde{T}_1(t), \quad L_6 T_n(l, t) = \tilde{T}_2(t), \quad (4.14)$$

$$T_i(l_i) = T_{i+1}(l_i), \quad i = \overline{1, n-1}, \quad (4.15)$$

$$\lambda_T^{(i)} \frac{\partial T_i(l_i, t)}{\partial x} - \rho_i c_\rho^{(i)} \bar{v}_i T_i(l_i, t) = \lambda_T^{(i+1)} \frac{\partial T_{i+1}(l_i, t)}{\partial x} - \rho_i c_\rho^{(i)} \bar{v}_{i+1} T_{i+1}(l_i, t), \quad i = \overline{1, n-1}, \quad (4.16)$$

де  $\tilde{T}_0^{(i)}(x)$ ,  $i = \overline{1, n-1}$ ,  $\tilde{T}_1(t)$ ,  $\tilde{T}_2(t)$  – задані функції;  $L_i$ ,  $i = \overline{5, 6}$  – диференціальні оператори, що задають граничні умови для температури при  $x = 0$  та  $x = l$ .

Фільтрація підземних вод з РГВ в шарах, що знаходяться у водонасиченому стані, описується наступною крайовою задачею:

$$v_i = -K_i(c_i, T_i) \frac{dh_i}{dx} + v_c^{(i)}(c_i) \frac{\partial c_i}{\partial x} + v_T^{(i)} \frac{\partial T_i}{\partial x}, \quad \text{div} \bar{v}_i + \frac{\partial n_p^{(i)}}{\partial t} = 0, \quad x \in (0; l_k), \quad i = \overline{1, k}, \quad (4.17)$$

$$h_1(0) = \tilde{H}_1, \quad h_k(l_k) = \tilde{H}_2, \quad (4.18)$$

$$h_i(l_i) = h_{i+1}(l_i), \quad v_i(l_i) = v_{i+1}(l_i), \quad i = \overline{1, k-1}. \quad (4.19)$$

Тут:  $t > 0$ ;  $K_i(c_i, T_i)$  – коефіцієнти фільтрації в  $i$ -ому шарі, що залежать від концентрації сольових розчинів та температури;  $v_c^{(i)}(c_i)$  – коефіцієнти хімічного



осмосу в  $i$ -ому шарі, що залежать від концентрації солей;  $\nu_T^{(i)}$  – коефіцієнти термічного осмосу в  $i$ -ому шарі;  $\tilde{H}_1, \tilde{H}_2$  – напори при  $x=0$  та на глибині  $x=l_k$  відповідно.

Деформації та напруження з урахуванням неізотермічного режиму в одновимірному випадку в кожному шарі ґрунту обчислюються за формулами [87]

$$\varepsilon_i = \frac{dU_i}{dx}, \quad \sigma_i = E_i \left( \frac{dU_i}{dx} - \alpha_T^{(i)} \bar{T}_i \right), \quad i = \overline{1, n}, \quad x \in (0, l), \quad (4.20)$$

де  $E_i = E_i(c_i, T_i)$  при  $i = \overline{1, k}$  та  $E_i = E_i(T_i)$  при  $i = \overline{k+1, n}$ .

### 4.1.3. Чисельний розв'язок крайової задачі

Для чисельного розв'язування поставленої задачі покриємо область  $\bar{Q} = [0; l] \times [0; t_1]$  рівномірною сіткою  $\bar{Q}^{(m_1, n_1)} = [0; m_1 h_1] \times [0; n_1 \tau]$  з кроками  $h_1$  та  $\tau$  відповідно по змінній  $x$  та часу  $t$ . Нехай  $m_1$  – кількість кроків по просторовій змінній,  $n_1$  – кількість кроків по часу.

Для дискретизації рівнянь (4.1), (4.7) та (4.12) використано монотонну різницеву схему О. А. Самарського [131–133] аналогічно, до описаного в розділі 3, пункті 3.1.3. В результаті отримано скінченнорізницеві аналоги даних диференціальних рівнянь. Зокрема, скінченнорізницевий аналог (4.1) має вигляд, аналогічний (3.18) при  $i = \overline{1, n}$ , скінченнорізницевий аналог (4.12) має вигляд, аналогічний (3.21) при  $\rho = \rho_i, c_\rho = c_\rho^{(i)}, \lambda_T = \lambda_T^{(i)}, \bar{v} = \bar{v}_i$  та  $i = \overline{1, n}$ .

Скінченнорізницевий аналог диференціального рівняння (4.7) має вигляд

$$\begin{aligned} n_p^{(i)} \frac{c_{i,j}^{(s+1)} - c_{i,j}^{(s)}}{\tau} &= \frac{\eta_j^{(s)}}{h_1} \left( d_{j+1}^{(s)} \frac{c_{i,j+1}^{(s+1)} - c_{i,j}^{(s+1)}}{h_1} - d_j^{(s)} \frac{c_{i,j}^{(s+1)} - c_{i,j-1}^{(s+1)}}{h_1} \right) + \\ &+ \frac{(v^+)_j^{(s)}}{D_{i,j}^{(s)}(c_{i,j}^{(s)}, T_{i,j}^{(s)})} d_{j+1}^{(s)} \frac{c_{i,j+1}^{(s+1)} - c_{i,j}^{(s+1)}}{h_1} + \frac{(v^-)_j^{(s)}}{D_{i,j}^{(s)}(c_{i,j}^{(s)}, T_{i,j}^{(s)})} d_j^{(s)} \frac{c_{i,j}^{(s+1)} - c_{i,j-1}^{(s+1)}}{h_1} - \\ &- \gamma_i (c_{i,j}^{(s+1)} - C_m) + \frac{1}{h_1} \left( (d_T)_{j+1}^{(s)} \frac{T_{i,j+1}^{(s+1)} - T_{i,j}^{(s+1)}}{h_1} - (d_T)_j^{(s)} \frac{T_{i,j}^{(s+1)} - T_{i,j-1}^{(s+1)}}{h_1} \right), \end{aligned} \quad (4.21)$$

$j = \overline{1, m_1^* - 1}$ ,  $s = \overline{0, n_1 - 1}$ ,  $i = \overline{1, k}$ ,  $m_1^*$  – кількість кроків по просторовій змінній до РГВ; та закону (4.17)

$$\nu_{i,j}^{(s)} = -K_{i,j}^{(s)}(c_{i,j}^{(s)}, T_{i,j}^{(s)}) \frac{h_{i,j+1} - h_{i,j-1}}{2h_1} + (v_c^{(i)})_j^{(s)}(c_{i,j}^{(s)}) \frac{c_{i,j+1}^{(s)} - c_{i,j-1}^{(s)}}{2h_1} + (v_T)_j^{(s)} \frac{T_{i,j+1}^{(s)} - T_{i,j-1}^{(s)}}{2h_1}, \quad (4.22)$$

$j = \overline{1, m_1^* - 1}$ ,  $s = \overline{1, n_1}$ ,  $i = \overline{1, k}$ .

Діючи аналогічним чином як в розділі 2, з рівняння нерозривності (4.17) маємо

$$\begin{aligned} & \frac{\bar{\chi}_j^{(s)} h_{i,j-1} - 2h_{i,j} + h_{i,j+1}}{h_1} + (\bar{r}^+)_j^{(s)} \frac{h_{i,j+1} - h_{i,j}}{h_1} + (\bar{r}^-)_j^{(s)} \frac{h_{i,j} - h_{i,j-1}}{h_1} + (v_c^{(i)})_j^{(s)}(c_{i,j}^{(s)}) \frac{c_{i,j-1}^{(s)} - 2c_{i,j}^{(s)} + c_{i,j+1}^{(s)}}{h_1^2} + \\ & + \frac{(v_c^{(i)})_{j+1}^{(s)}(c_{i,j+1}^{(s)}) - (v_c^{(i)})_{j-1}^{(s)}(c_{i,j-1}^{(s)})}{2h_1} \frac{c_{i,j-1}^{(s)} - c_{i,j+1}^{(s)}}{2h_1} + (v_T)_j^{(s)} \frac{T_{i,j-1}^{(s)} - 2T_{i,j}^{(s)} + T_{i,j+1}^{(s)}}{h_1^2} = 0, \end{aligned} \quad (4.23)$$

$j = \overline{1, m_1^* - 1}$ ,  $s = \overline{1, n_1 - 1}$ ,  $i = \overline{1, k}$ .

В рівняннях (4.21), (4.22) використано наступні позначення:

$$d_j^{(s)} = \frac{1}{2} \left( D_{i,j}^{(s)}(c_{i,j}^{(s)}, T_{i,j}^{(s)}) + D_{i,j-1}^{(s)}(c_{i,j-1}^{(s)}, T_{i,j-1}^{(s)}) \right), \quad (d_T)_j^{(s)} = \frac{1}{2} \left( (D_T)_j^{(s)} + (D_T)_{j-1}^{(s)} \right),$$

$$\eta_j^{(s)} = \frac{1}{1 + \frac{h_1 |v_{i,j}^{(s)}|}{2D_{i,j}^{(s)}(c_{i,j}^{(s)}, T_{i,j}^{(s)})}} = 1 - \frac{h_1 |v_{i,j}^{(s)}|}{2D_{i,j}^{(s)}(c_{i,j}^{(s)}, T_{i,j}^{(s)})} + O(h_1^2), \quad (v^+)_j^{(s)} = \frac{-v_{i,j}^{(s)} + |v_{i,j}^{(s)}|}{2} \geq 0,$$

$$(v^-)_j^{(s)} = \frac{-v_{i,j}^{(s)} - |v_{i,j}^{(s)}|}{2} \leq 0, \quad \bar{\chi}_j^{(s)} = \frac{1}{1 + 0,5h_1 |\bar{r}_j^{(s)}|}, \quad (\bar{r}^+)_j^{(s)} = \frac{-\bar{r}_j^{(s)} + |\bar{r}_j^{(s)}|}{2} \geq 0,$$

$$(\bar{r}^-)_j^{(s)} = \frac{-\bar{r}_j^{(s)} - |\bar{r}_j^{(s)}|}{2} \leq 0, \quad \bar{r}_j^{(s)} = \frac{1}{K_{i,j}^{(s)}(c_{i,j}^{(s)}, T_{i,j}^{(s)})} \cdot \frac{K_{i,j+1}^{(s)}(c_{i,j+1}^{(s)}, T_{i,j+1}^{(s)}) - K_{i,j-1}^{(s)}(c_{i,j-1}^{(s)}, T_{i,j-1}^{(s)})}{2h_1}.$$

Умови спряження (4.5), (4.6), (4.10), (4.11), (4.15), (4.16) та (4.19) апроксимуються наступним чином [83]:

$$U_{i,j_r} = U_{i+1,j_r}, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} & E_{i,j_r}^{(s)} \left( (U_{i,j_r} - U_{i,j_r-1}) - h_1 \alpha_T^{(i)} (T_{i,j_r}^{(s)} - (T_{i,j_r}^{(0)})) \right) = \\ & = E_{i+1,j_r}^{(s)} \left( (U_{i+1,j_r+1} - U_{i+1,j_r}) - h_1 \alpha_T^{(i+1)} (T_{i+1,j_r}^{(s)} - T_{i+1,j_r}^{(0)}) \right), \quad i = \overline{1, n-1}, \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$c_{i,j_r}^{(s+1)} = c_{i+1,j_r}^{(s+1)}, \quad i = \overline{1, k-1}, \quad (4.26)$$

$$D_{i,j_r}^{(s+1)}(c_{i,j_r}^{(s+1)} - c_{i,j_r-1}^{(s+1)}) - h_1 v_{i,j_r}^{(s+1)} c_{i,j_r}^{(s+1)} = D_{i+1,j_r}^{(s+1)}(c_{i+1,j_r+1}^{(s+1)} - c_{i+1,j_r}^{(s+1)}) - h_1 v_{i+1,j_r}^{(s+1)} c_{i+1,j_r}^{(s+1)}, \quad i = \overline{1, k-1}, \quad (4.27)$$

$$T_{i,j_r}^{(s+1)} = T_{i+1,j_r}^{(s+1)}, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned} & (\lambda_T^{(i)})_{j_r}^{(s+1)} (T_{i,j_r}^{(s+1)} - T_{i,j_r-1}^{(s+1)}) - h_1 \rho_i c_\rho^{(i)} \bar{v}_{i,j_r}^{(s+1)} T_{i,j_r}^{(s+1)} = \\ & = (\lambda_T^{(i+1)})_{j_r}^{(s+1)} (T_{i+1,j_r+1}^{(s+1)} - T_{i+1,j_r}^{(s+1)}) - h_1 \rho_{i+1} c_\rho^{(i+1)} \bar{v}_{i+1,j_r}^{(s+1)} T_{i+1,j_r}^{(s+1)}, \quad i = \overline{1, n-1}, \end{aligned} \quad (4.29)$$

$$h_{i,j_r} = h_{i+1,j_r}, \quad v_{i,j_r}^{(s+1)} = v_{i+1,j_r}^{(s+1)}, \quad i = \overline{1, k-1}, \quad (4.30)$$

де  $s = \overline{0, n_1 - 1}$ ,  $i$  – номер шару,  $j_r$  – індекс дискретизації, що співпадає з межею шару.

Для початкових умов (4.8) та (4.13) отримаємо

$$c_{i,j}^{(0)} = C_0^{(i)}(jh_1), \quad j = \overline{0, m_1^*}, \quad i = \overline{1, k}, \quad T_{i,j}^{(0)} = T_0^{(i)}(jh_1), \quad j = \overline{0, m_1}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Для граничних умов першого роду (4.4), (4.9), (4.14) та (4.18) маємо скінченнорізницеві аналоги, аналогічні до (3.28) – (3.30), описаних в розділі 3.

Скінченнорізницеві аналоги (4.20) матимуть вигляд

$$\varepsilon_{i,j} = \frac{U_{i,j+1} - U_{i,j-1}}{2h_1}, \quad \sigma_{i,j} = E_{i,j}^{(s)} \left( \frac{U_{i,j+1} - U_{i,j-1}}{2h_1} - \alpha_T^{(i)} (T_{i,j}^{(s)} - T_{i,j}^{(0)}) \right), \quad j = \overline{1, m_1}, \quad s = \overline{0, n_1 - 1}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (4.31)$$

де  $E_{i,j}^{(s)} = E_{i,j}^{(s)}(c_{i,j}^{(s)}, T_{i,j}^{(s)})$  при  $j = \overline{1, m_1^*}$ ,  $i = \overline{1, k}$  та  $E_{i,j}^{(s)} = E_{i,j}^{(s)}(T_{i,j}^{(s)})$  при  $j = \overline{m_1^* + 1, m_1}$ ,  $i = \overline{k+1, n}$ .

Для знаходжень значень невідомих функцій  $U_i(x)$ ,  $\varepsilon_i(x)$ ,  $\sigma_i(x)$ ,  $c_i(x, t)$ ,  $T_i(x, t)$ ,  $h_i(x)$  у кожному шарі ґрунтового масиву застосуємо метод прогонки [131].

Вважаємо що на часовому шарі ( $s$ ) задача вже розв'язана. Тоді алгоритм наступний:

1. Використовуючи монотонну різницеву схему, аналогічну (3.21) та апроксимацію відповідних граничних умов та умов спряження, знаходимо температуру  $T_i(x, t)$  в кожному шарі ґрунту на часовому шарі ( $s + 1$ ).
2. Використовуючи монотонну різницеву схему (4.21), апроксимацію відповідних граничних умов та умов спряження, знаходимо концентрацію  $c_i(x, t)$  сольового розчину у водонасичених шарах ґрунтового масиву на часовому шарі ( $s + 1$ ).
3. За монотонною різницевою схемою, аналогічною до (3.18), використовуючи апроксимацію відповідних граничних умов та умов спряження, обчислюємо

значення зміщень  $U_i(x)$  в кожному шарі ґрунту, а відповідно і значення деформацій  $\varepsilon_i(x)$  та напружень  $\sigma_i(x)$  за формулами (4.31) для часового шару  $(s+1)$ .

4. Використовуючи монотонну різницеву схему (4.23), апроксимацію відповідних граничних умов та умов спряження, знаходимо напір  $h_i(x)$  у водонасичених шарах ґрунту та за формулою (4.22) знаходимо швидкість фільтрації.

5. Переходимо на наступний часовий шар і повторюємо алгоритм, починаючи з першого кроку.

Для знаходження значень  $U_i(x)$  та  $T_i(x,t)$  у всіх шарах ґрунту використано метод прогонки [131–133], аналогічно до описаного в розділі 3.

Значення зміщень послідовно знаходимо, використовуючи співвідношення

$$U_{i,j} = \alpha_{j+1} U_{i,j+1} + \beta_{j+1}, \quad (4.32)$$

де

$$\alpha_{j+1} = \begin{cases} \frac{b_j}{\bar{c}_j - a_j \alpha_j}, & j = \overline{1, j_r - 1}, \\ \frac{E_{i+1,j}^{(s)}}{E_{i+1,j}^{(s)} + E_{i,j}^{(s)}(1 - \alpha_j)}, & j = j_r, \\ \frac{b_j}{\bar{c}_j - a_j \alpha_j}, & j = \overline{j_r + 1, m_1 - 1}, \end{cases} \quad \beta_{j+1} = \begin{cases} \frac{a_j \beta_j + F_{i,j}^{(s)}}{\bar{c}_j - a_j \alpha_j}, & j = \overline{1, j_r - 1}, \\ \frac{E_{i,j}^{(s)} \beta_j - \tilde{F}_{i,j}^{(s)}}{E_{i+1,j}^{(s)} + E_{i,j}^{(s)}(1 - \alpha_j)}, & j = j_r, \\ \frac{a_j \beta_j + F_{i,j}^{(s)}}{\bar{c}_j - a_j \alpha_j}, & j = \overline{j_r + 1, m_1 - 1}. \end{cases}$$

Тут: з урахуванням (4.25)  $\tilde{F}_{i,j}^{(s)} = h_1(E_{i+1,j}^{(s)} \alpha_T^{(i+1)} - E_{i,j}^{(s)} \alpha_T^{(i)})(T_{i+1,j}^{(s)} - T_{i+1,j}^{(0)})$ ;  $\alpha_1 = 0$ ,  $\beta_1 = 0$ .

Значення температури  $T_i(x,t)$  за методом прогонки на часовому шарі  $(s+1)$  послідовно знаходимо, використовуючи співвідношення

$$T_{i,j}^{(s+1)} = \alpha_{j+1} \cdot T_{i,j+1}^{(s+1)} + \beta_{j+1}, \quad \alpha_1 = 0, \quad \beta_1 = \tilde{T}_1(s\tau), \quad (4.33)$$

де

$$\alpha_{j+1} = \begin{cases} \frac{b_j}{\bar{c}_j - a_j \alpha_j}, & j = \overline{1, j_r - 1}, \\ \frac{(\lambda_T^{(i+1)})_j^{(s+1)}}{(\lambda_T^{(i)})_j^{(s+1)}(1 - \alpha_j) + (\lambda_T^{(i+1)})_j^{(s+1)} - h_1 \bar{v}_{i+1,j}^{(s+1)}(\rho_i c_\rho^{(i)} - \rho_{i+1} c_\rho^{(i+1)})}, & j = j_r, \\ \frac{b_j}{\bar{c}_j - a_j \alpha_j}, & j = \overline{j_r + 1, m_1 - 1}, \end{cases}$$

$$\beta_{j+1} = \begin{cases} \frac{a_j \beta_j + T_j^{(s)}}{\bar{c}_j - a_j \alpha_j}, & j = \overline{1, j_r - 1}, \\ \frac{(\lambda_T^{(i)})_j^{(s+1)} \beta_j}{(\lambda_T^{(i)})_j^{(s+1)} (1 - \alpha_j) + (\lambda_T^{(i+1)})_j^{(s+1)} - h_1 \bar{v}_{i+1, j}^{(s+1)} (\rho_i c_\rho^{(i)} - \rho_{i+1} c_\rho^{(i+1)})}, & j = j_r, \\ \frac{a_j \beta_j + T_j^{(s)}}{\bar{c}_j - a_j \alpha_j}, & j = \overline{j_r + 1, m_1 - 1}. \end{cases}$$

Для знаходження концентрації сольового розчину  $c_i(x, t)$  та напору  $h_i(x)$  у водонасичених шарах ґрунту використаємо метод прогонки [131–133]. Тоді з (4.21) маємо

$$a_j c_{i, j-1}^{(s+1)} - \bar{c}_j c_{i, j}^{(s+1)} + b_j c_{i, j+1}^{(s+1)} = -c_{i, j}^{(s)} - \bar{s}_j^{(s+1)},$$

де

$$a_j = \frac{\tau}{n_p^{(i)}} \frac{d_j^{(s)}}{h_1} \left( \frac{\eta_j^{(s)}}{h_1} - \frac{(v^-)_j^{(s)}}{D_{i, j}^{(s)}(c_{i, j}^{(s)}, T_{i, j}^{(s)})} \right), \quad b_j = \frac{\tau}{n_p^{(i)}} \frac{d_{j+1}^{(s)}}{h_1} \left( \frac{\eta_j^{(s)}}{h_1} + \frac{(v^+)_j^{(s)}}{D_{i, j}^{(s)}(c_{i, j}^{(s)}, T_{i, j}^{(s)})} \right),$$

$$\bar{c}_j = 1 + \frac{\tau}{n_p^{(i)}} \left( \frac{\eta_j^{(s)} (d_{j+1}^{(s)} + d_j^{(s)})}{h_1^2} + \frac{1}{D_{i, j}^{(s)}(c_{i, j}^{(s)}, T_{i, j}^{(s)})} ((v^+)_j^{(s)} d_{j+1}^{(s)} - (v^-)_j^{(s)} d_j^{(s)}) + \gamma_i \right),$$

$$\bar{s}_j^{(s+1)} = \frac{\tau}{n_p^{(i)}} \left( \gamma_i C_m + \frac{1}{h_1} \left( (d_T)_{j+1}^{(s)} \frac{T_{i, j+1}^{(s+1)} - T_{i, j}^{(s+1)}}{h_1} - (d_T)_j^{(s)} \frac{T_{i, j}^{(s+1)} - T_{i, j-1}^{(s+1)}}{h_1} \right) \right).$$

Легко бачити, що умови стійкості прогонки  $|\bar{c}_j| > |a_j| + |b_j|$  виконуються. Значення концентрації на часовому шарі  $(s+1)$  послідовно знаходимо, використовуючи співвідношення

$$c_{i, j}^{(s+1)} = \alpha_{j+1} \cdot c_{i, j+1}^{(s+1)} + \beta_{j+1}, \quad \alpha_1 = 0, \quad \beta_1 = \tilde{C}_1(s\tau), \quad (4.34)$$

де

$$\alpha_{j+1} = \begin{cases} \frac{b_j}{\bar{c}_j - a_j \alpha_j}, & j = \overline{1, j_r - 1}, \\ \frac{D_{i+1, j}^{(s+1)}}{D_{i+1, j}^{(s+1)} + D_{i, j}^{(s+1)} (1 - \alpha_j)}, & j = j_r, \\ \frac{b_j}{\bar{c}_j - a_j \alpha_j}, & j = \overline{j_r + 1, m_1^* - 1}, \end{cases} \quad \beta_{j+1} = \begin{cases} \frac{a_j \beta_j + c_j^{(s)} + \bar{s}_j^{(s+1)}}{\bar{c}_j - a_j \alpha_j}, & j = \overline{1, j_r - 1}, \\ \frac{D_{i, j}^{(s+1)} \beta_j}{D_{i+1, j}^{(s+1)} + D_{i, j}^{(s+1)} (1 - \alpha_j)}, & j = j_r, \\ \frac{a_j \beta_j + c_j^{(s)} + \bar{s}_j^{(s+1)}}{\bar{c}_j - a_j \alpha_j}, & j = \overline{j_r + 1, m_1^* - 1}. \end{cases}$$

З (4.23) отримаємо

$$a_j h_{i,j-1} - c_j h_{i,j} + b_j h_{i,j+1} = -\bar{F}_j^{(s)},$$

де

$$a_j = \frac{\bar{\chi}_j^{(s)}}{h_1^2} - \frac{(\bar{r}^-)_j^{(s)}}{h_1}, \quad b_j = \frac{\bar{\chi}_j^{(s)}}{h_1^2} + \frac{(\bar{r}^+)_j^{(s)}}{h_1}, \quad \bar{c}_j = \frac{2\bar{\chi}_j^{(s)}}{h_1^2} + \frac{(\bar{r}^+)_j^{(s)}}{h_1} - \frac{(\bar{r}^-)_j^{(s)}}{h_1},$$

$$\bar{F}_j^{(s)} = (v_c^{(i)})_j^{(s)} (c_{i,j}^{(s)}) \frac{c_{i,j-1}^{(s)} - 2c_{i,j}^{(s)} + c_{i,j+1}^{(s)}}{h_1^2} + \frac{(v_c^{(i)})_{j+1}^{(s)} (c_{i,j+1}^{(s)}) - (v_c^{(i)})_{j-1}^{(s)} (c_{i,j-1}^{(s)})}{2h_1} \frac{c_{i,j-1}^{(s)} - c_{i,j+1}^{(s)}}{2h_1} +$$

$$+ v_T \frac{T_{i,j-1}^{(s)} - 2T_{i,j}^{(s)} + T_{i,j+1}^{(s)}}{h_1^2}.$$

Неважко показати, що умови стійкості прогонки  $|c_j| > |a_j| + |b_j|$  виконуються. Значення напору на часовому шарі  $(j+1)$  послідовно знаходимо, використовуючи співвідношення

$$h_{i,j} = \alpha_{j+1} \cdot h_{i,j+1} + \beta_{j+1}, \quad \alpha_1 = 0, \quad \beta_1 = \tilde{H}_1, \quad (4.35)$$

де

$$\alpha_{j+1} = \begin{cases} \frac{b_j}{c_j - a_j \alpha_j}, & j = \overline{1, j_r - 1}, \\ 0, & j = j_r, \\ \frac{b_j}{c_j - a_j \alpha_j}, & j = \overline{j_r + 1, m_1^* - 1}, \end{cases} \quad \beta_{j+1} = \begin{cases} \frac{a_j \beta_j + \bar{F}_j^{(s)}}{c_j - a_j \alpha_j}, & i = \overline{1, j_r - 1}, \\ \frac{(K_{i+1,j_r}^{(s)}(c_{i+1,j_r}^{(s)}, T_{i+1,j_r}^{(s)}) - K_{i,j_r}^{(s)}(c_{i,j_r}^{(s)}, T_{i,j_r}^{(s)})) \beta_j + \tilde{F}_j^{(s)}}{(K_{i+1,j_r}^{(s)}(c_{i+1,j_r}^{(s)}, T_{i+1,j_r}^{(s)}) - K_{i,j_r}^{(s)}(c_{i,j_r}^{(s)}, T_{i,j_r}^{(s)}))(1 - \alpha_j)}, & j = j_r, \\ \frac{a_j \beta_j + \bar{F}_j^{(s)}}{c_j - a_j \alpha_j}, & j = \overline{j_r + 1, m_1^* - 1}. \end{cases}$$

$$\tilde{F}_j^{(s)} = (v_c^{(i+1)})_j^{(s)} (c_{i+1,j}^{(s)}) (c_{i+1,j}^{(s)} - c_{i+1,j-1}^{(s)}) + (v_T)_j^{(s)} (T_{i+1,j}^{(s)} - T_{i+1,j-1}^{(s)}) - (v_c^{(i)})_j^{(s)} (c_{i,j}^{(s)}) (c_{i,j}^{(s)} - c_{i,j-1}^{(s)}) - (v_T)_j^{(s)} (T_{i,j}^{(s)} - T_{i,j-1}^{(s)}).$$

#### 4.1.4. Результати чисельних експериментів та їх аналіз

Як приклад, розглянуто одновимірну задачу впливу тепло-масоперенесення на НДС у трьохшаровому ґрунтовому масиві товщиною  $l = 10$  м за наявності в ньому РГВ. Рівень  $l_1$  знаходиться на глибині 3 м, а РГВ ( $l_2$ ) – на глибині 7 м (рис.4.2). На

рис. 4.2 область  $\Omega_1$  – це зона глинистого ґрунту, що знаходиться у водонасиченому стані,  $\Omega_2$  – зона піщаного ґрунту у водонасиченому стані, а область  $\Omega_3$  – це зона ґрунту в природному стані.

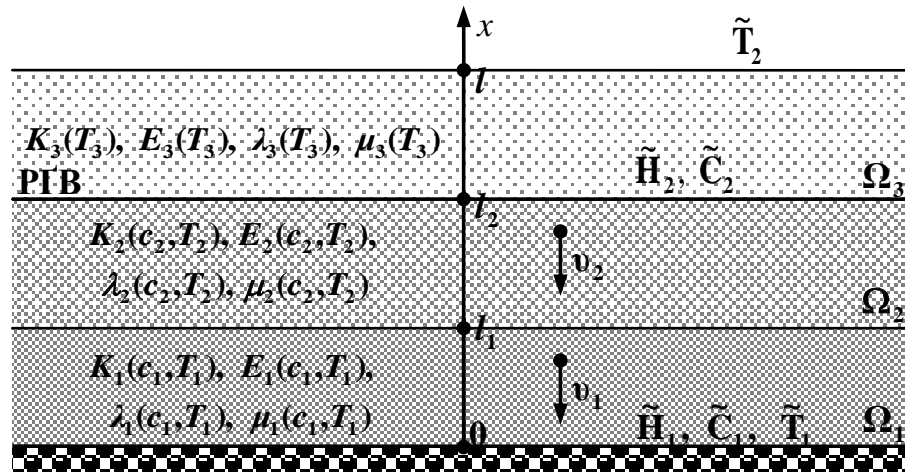


Рис.4.2. Трьохшаровий ґрунтовий масив за наявності в ньому РГВ та впливу тепло-масоперенесення

Значення вхідних даних брались наступними [36, 38, 91, 109, 158]:

$$n_p^{(1)} = 0,2, \quad n_p^{(2)} = 0,3, \quad n_p^{(3)} = 0,4, \quad \alpha_T^{(1)} = \alpha_T^{(2)} = \alpha_T^{(3)} = 1 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{град}}, \quad D_1 = D_2 = D_3 = 2 \cdot 10^{-3} \frac{\text{м}^2}{\text{доба}},$$

$$D_T^{(1)} = D_T^{(2)} = D_T^{(3)} = 2 \cdot 10^{-3} \frac{\text{м}^2}{\text{доба}}, \quad \gamma_p = 1 \cdot 10^4 \frac{\text{Па}}{\text{м}}, \quad \gamma_{\text{зв.}}^{(1)} = 2,3 \cdot 10^4 \frac{\text{Па}}{\text{м}},$$

$$\gamma_{\text{зв.}}^{(2)} = 1,3 \cdot 10^4 \frac{\text{Па}}{\text{м}}, \quad \gamma_{\text{пр.}}^{(3)} = 1,7 \cdot 10^4 \frac{\text{Па}}{\text{м}}, \quad \lambda_1 = 1,2 \cdot 10^{10} \text{Па}, \quad \mu_1 = 1,2 \cdot 10^{10} \text{Па},$$

$$E_1 = 2,34 \cdot 10^{10} \text{Па}, \quad \lambda_2 = 1,35 \cdot 10^7 \text{Па}, \quad \mu_2 = 0,9 \cdot 10^7 \text{Па}, \quad E_2 = 2,34 \cdot 10^7 \text{Па},$$

$$\lambda_3 = 1,7 \cdot 10^7 \text{Па}, \quad \mu_3 = 1,15 \cdot 10^7 \text{Па}, \quad E_3 = 3 \cdot 10^7 \text{Па}, \quad \rho = 1100 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3},$$

$$c_\rho^{(1)} = c_\rho^{(2)} = c_\rho^{(3)} = 4,2 \cdot 10^3 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{град}}, \quad c_T^{(1)} = c_T^{(2)} = c_T^{(3)} = 2,137 \cdot 10^6 \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3 \cdot \text{град}},$$

$$\lambda_T^{(1)} = \lambda_T^{(2)} = \lambda_T^{(3)} = 108 \cdot 10^3 \frac{\text{Дж}}{\text{м} \cdot \text{град} \cdot \text{доба}}, \quad \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 6,5 \cdot 10^{-5} \text{доба}^{-1}, \quad \tilde{H}_1 = 0 \text{ м},$$

$$\tilde{H}_2 = 1 \text{ м}, \quad \tilde{C}_1(t) = \tilde{C}_0(x) = 8 \frac{\text{г}}{\text{літр}}, \quad \tilde{C}_2(t) = 350 \frac{\text{г}}{\text{літр}},$$

$$\tilde{T}_1(t) = \tilde{T}_0(x) = 5^\circ \text{C}, \quad \tilde{T}_2(t) = 25^\circ \text{C},$$

НДС ґрунтового масиву досліджувався протягом 4-х років. Нижче наведено результати чисельних експериментів у вигляді графіків.

Як видно з рис. 4.3, при врахуванні впливу тепло-масоперенесення на НДС ґрунтового масиву зміщення з часом зростають. На рис. 4.6–4.8 показано, що напір в умовах тепло-масоперенесення, концентрація сольових розчинів у неізотермічному режимі та температура за фільтрації сольових розчинів також зростають з часом. Як видно з рис. 4.4, при врахуванні впливу тепло-масоперенесення зміщення зростають значно швидше, ніж у випадку відсутності тепло-масоперенесення.

Врахування наявності РГВ значно змінює картину НДС. А саме: як видно з рис. 4.5, зміщення значно зменшуються за наявності РГВ у порівнянні з відповідними значеннями зміщень при відсутності РГВ. Також на результати чисельних експериментів значно впливає тип ґрунту, в якому досліджуються вищеписані процеси. Зокрема, у глинистому водонасиченому шарі ґрунту зміщення менші в порівнянні зі зміщеннями у шарі піщаного водонасиченого ґрунту. В шарі ґрунту в природному стані, де відсутні процеси фільтрації сольових розчинів та тепло-масоперенесення, зміщення найменші та змінюються незначно.

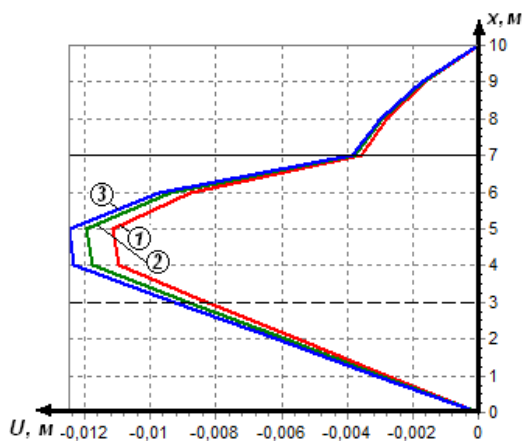


Рис.4.3. Розподіли зміщень під впливом тепло-масоперенесення та наявності РГВ: 1) при  $t = 60$  діб; 2) при  $t = 180$  діб; 3) при  $t = 1440$  діб

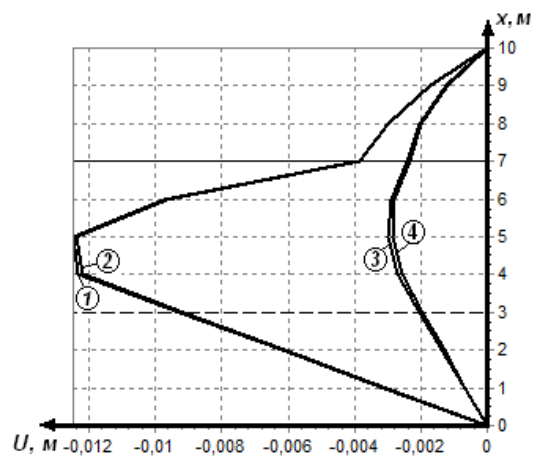


Рис.4.4. Розподіли зміщень за наявності РГВ для  $t = 1440$  діб:

- 1) під впливом тепло-масоперенесення;
- 2) під впливом масоперенесення;
- 3) під впливом теплоперенесення;
- 4) без тепло-масоперенесення



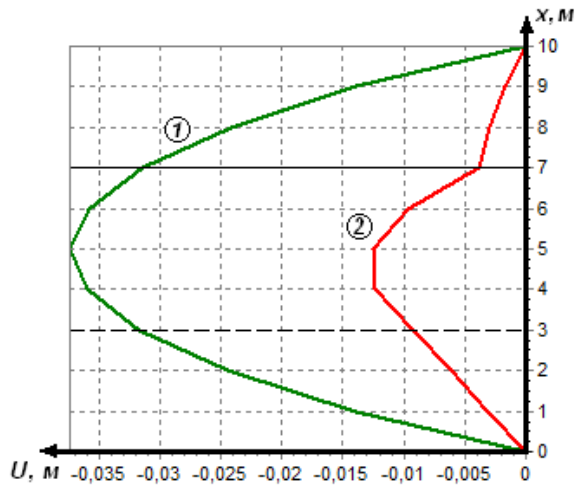


Рис.4.5. Розподіли зміщень під впливом тепло-масоперенесення ( $t = 1440$  діб): 1) при відсутності РГВ; 2) за наявності РГВ

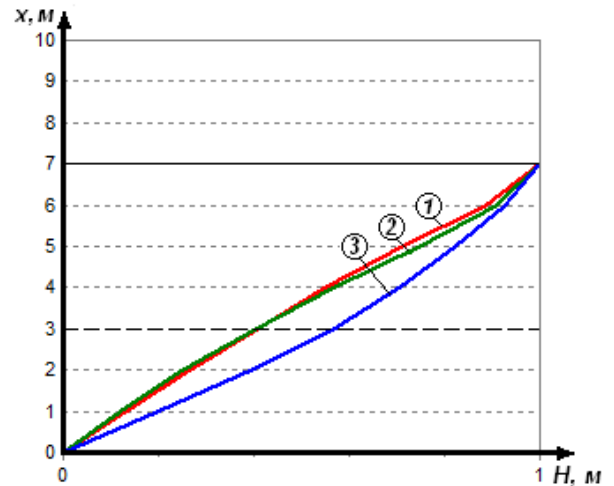


Рис.4.6. Розподіли напорів під впливом тепло-масоперенесення: 1) при  $t = 60$  діб; 2) при  $t = 180$  діб; 3) при  $t = 1440$  діб

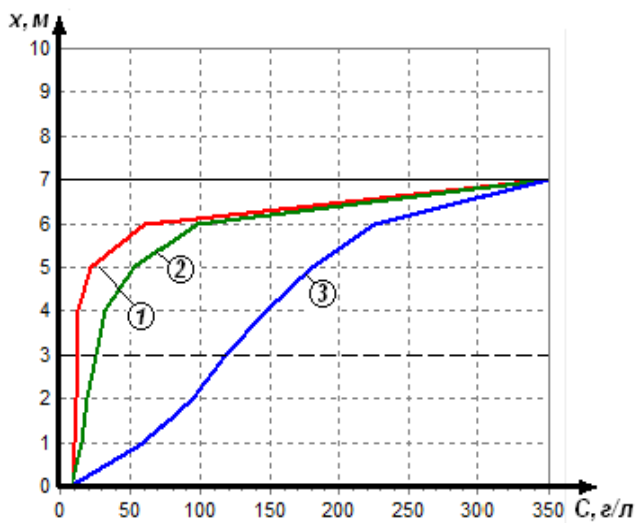


Рис.4.7. Розподіли концентрації сольових розчинів у неізотермічному режимі: 1) при  $t = 60$  діб; 2) при  $t = 180$  діб; 3) при  $t = 1440$  діб

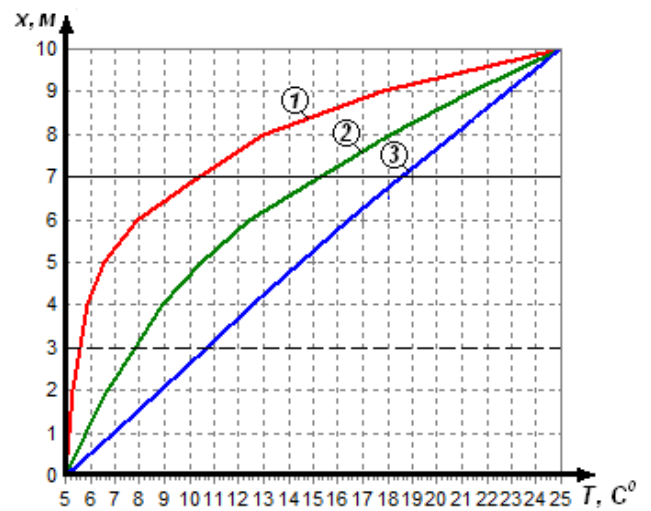


Рис.4.8. Розподіли температури при фільтрації сольових розчинів: 1) при  $t = 60$  діб; 2) при  $t = 180$  діб; 3) при  $t = 1440$  діб

## 4.2. Математичне моделювання впливу тепло-масоперенесення при фільтрації солевих розчинів на напружено-деформований стан багатошарового ґрунтового масиву за наявності вільної поверхні у двовимірному випадку

### 4.2.1. Постановка задачі

Розглянемо задачу моделювання НДС багатошарового фільтруючого ґрунтового масиву прямокутної форми з вільною поверхнею у двовимірному випадку, що займає область  $\Omega = \{(x, y) : 0 < x < l_1, 0 < y < l_2\}$  (рис. 4.9).

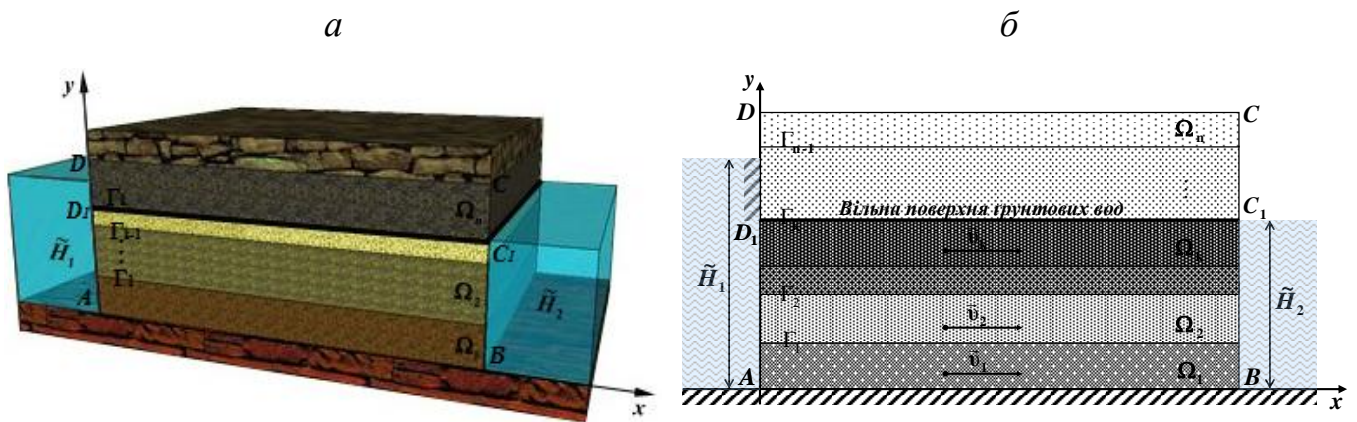


Рис. 4.9. Схема фільтруючого багатошарового ґрунтового масиву з урахуванням тепло-масоперенесення за наявності вільної поверхні (об'ємне зображення (а) та зображення в перерізі (б))

Кількість шарів у ґрунтовому масиві дорівнює  $n$ , кожен з яких володіє різними механічними та фізико-хімічними властивостями. Шари нумеруються знизу ввверх. Вільна поверхня ґрунтових вод ( $C_1D_1$ ) знаходиться на рівні  $\Gamma_k$  і вважається нерухомою.

На рис.4.9 введено такі позначення:  $\Omega_i, i = \overline{1, k}$  – області водонасичених шарів ґрунтового масиву;  $\Omega_i, i = \overline{k+1, n}$  – області шарів ґрунтового масиву, що знаходяться в природному стані,  $\Omega = \bigcup_{i=1}^n \Omega_i$ .

Багатошаровий ґрунтовий масив вважається пружно-деформівним у межах лінійної теорії пружності з різними коефіцієнтами Ламе  $\lambda_i(c_i, T_i), \mu_i(c_i, T_i), i = \overline{1, n}$ ,

які залежать від концентрації сольового розчину та температури у водонасичених шарах та тільки від температури у всій області дослідження. На ґрунт діють сила тяжіння, архімедова та фільтраційна сили.

Межа  $AB$  вважається теплоізолюваною та непроникною,  $CD$  – теплоізолюваною, а  $AD_1$ ,  $D_1D$ ,  $BC_1$ ,  $C_1C$  – дренажами.

Задані значення п'єзометричних напорів  $\tilde{H}_1$ ,  $\tilde{H}_2$  та температур  $\tilde{T}_1$  та  $\tilde{T}_2$  у лівому та правому водних басейнах на границях ґрунтового масиву  $AD_1$  та  $BC_1$  відповідно, причому  $\tilde{H}_1 > \tilde{H}_2$ ,  $\tilde{T}_1 > \tilde{T}_2$ . У лівому водному басейні задано значення концентрації солевих розчинів  $\tilde{C}_1$ , а у правому – умову швидкого виносу солей. Під впливом градієнтів напорів, концентрації солевих розчинів та температури відбувається перенесення розчинених у воді речовин та тепла фільтраційним потоком. При цьому процеси фільтрації розчинених у воді речовин та тепла підлягають відповідно законам Дарсі, Фіка та Фур'є.

Припускається, що відсутні зміщення нижньої ( $AB$ ) та верхньої ( $CD$ ) меж багатшарового ґрунтового масиву.

Таким чином, у досліджуваній області багатшарового ґрунтового масиву,  $\mathbf{X} \in \Omega_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , необхідно розрахувати розподіли вектора зміщень  $\mathbf{u}_i(\mathbf{X}) = (U_i(\mathbf{X}), V_i(\mathbf{X}))$ ; нормальних  $\varepsilon_x^{(i)}$ ,  $\varepsilon_y^{(i)}$  та дотичних  $\varepsilon_{xy}^{(i)}$  деформацій; нормальних  $\sigma_x^{(i)}$ ,  $\sigma_y^{(i)}$  та дотичних  $\tau_{xy}^{(i)}$  напружень; температури  $T_i(\mathbf{X}, t)$ ,  $t > 0$ ; а також розподіли п'єзометричних напорів  $h_i(\mathbf{X})$  та концентрацій солевих розчинів  $c_i(\mathbf{X}, t)$  у водонасичених шарах ґрунтового масиву ( $\mathbf{X} \in \Omega_i$ ,  $i = \overline{1, k}$ ,  $t > 0$ ).

#### 4.2.2. Математична модель задачі

Математичну модель задачі НДС багатшарового ґрунтового масиву з вільною поверхнею в умовах тепло-масоперенесення при фільтрації солевих розчинів у двовимірному випадку, враховуючи результати розділів 1 – 3 та робіт [52, 53, 58, 69, 70, 73, 153], можна описати наступною крайовою задачею.

Система рівнянь рівноваги в формі Ламе для зміщень ґрунту з урахуванням тепло-масоперенесення за фільтрації сольових розчинів для шарів ґрунту, що знаходяться у водонасиченому та природному станах має наступний вигляд:

$$\begin{aligned}
& \mu_i(c_i, T_i) \Delta U_i + (\lambda_i(c_i, T_i) + \mu_i(c_i, T_i)) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x} + \frac{\partial V_i}{\partial y} \right) + \frac{\partial \lambda_i(c_i, T_i)}{\partial x} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x} + \frac{\partial V_i}{\partial y} \right) + \\
& \quad + 2 \frac{\partial \mu_i(c_i, T_i)}{\partial x} \frac{\partial U_i}{\partial x} + \frac{\partial \mu_i(c_i, T_i)}{\partial y} \left( \frac{\partial U_i}{\partial y} + \frac{\partial V_i}{\partial x} \right) - \\
& \quad - \left( \left( 2 \frac{\partial \lambda_i(c_i, T_i)}{\partial x} + 2 \frac{\partial \mu_i(c_i, T_i)}{\partial x} \right) T_i + (2\lambda_i(c_i, T_i) + 2\mu_i(c_i, T_i)) \frac{\partial T_i}{\partial x} \right) \alpha_T^{(i)} = X_i, \\
& \mu_i(c_i, T_i) \Delta V_i + (\lambda_i(c_i, T_i) + \mu_i(c_i, T_i)) \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x} + \frac{\partial V_i}{\partial y} \right) + \frac{\partial \lambda_i(c_i, T_i)}{\partial y} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x} + \frac{\partial V_i}{\partial y} \right) + \\
& \quad + 2 \frac{\partial \mu_i(c_i, T_i)}{\partial y} \frac{\partial V_i}{\partial y} + \frac{\partial \mu_i(c_i, T_i)}{\partial x} \left( \frac{\partial U_i}{\partial y} + \frac{\partial V_i}{\partial x} \right) - \\
& \quad - \left( \left( 2 \frac{\partial \lambda_i(c_i, T_i)}{\partial y} + 2 \frac{\partial \mu_i(c_i, T_i)}{\partial y} \right) T_i + (2\lambda_i(c_i, T_i) + 2\mu_i(c_i, T_i)) \frac{\partial T_i}{\partial y} \right) \alpha_T^{(i)} = Y_i, \\
& \quad \mathbf{X} \in \Omega_i, i = \overline{1, n},
\end{aligned} \tag{4.36}$$

де компоненти масової сили обчислюються за формулами

$$X_i = \begin{cases} \frac{dp_1^{(i)}}{dx}, & i = \overline{1, k}, \\ 0, & i = \overline{k+1, n}, \end{cases} \quad Y_i = \begin{cases} \gamma_{3g}^{(i)} + \frac{dp_2^{(i)}}{dy}, & i = \overline{1, k}, \\ \gamma_{np}^{(i)}, & i = \overline{k+1, n}. \end{cases} \tag{4.37}$$

Тут:  $\mathbf{u}_i(\mathbf{X}) = (U_i(\mathbf{X}), V_i(\mathbf{X}))$ ,  $i = \overline{1, n}$  – вектор зміщень, де  $U_i(\mathbf{X})$  – зміщення вздовж осі  $Ox$ ,  $V_i(\mathbf{X})$  – зміщення вздовж осі  $Oy$ ;  $\mathbf{X} = (x, y)$  – точка;  $\lambda_i(c_i, T_i)$ ,  $\mu_i(c_i, T_i)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , – коефіцієнти Ламе, причому  $\lambda_i(c_i, T_i) = \lambda_i(c_i, T_i)$ ,  $\mu_i(c_i, T_i) = \mu_i(c_i, T_i)$  при  $\mathbf{X} \in \Omega_i$ ,  $i = \overline{1, k}$  та  $\lambda_i(c_i, T_i) = \lambda_i(T_i)$ ,  $\mu_i(c_i, T_i) = \mu_i(T_i)$  при  $\mathbf{X} \in \Omega_i$ ,  $i = \overline{k+1, n}$ ;  $c_i(\mathbf{X}, t)$ ,  $i = \overline{1, k}$  – концентрація сольових розчинів у водонасичених шарах ґрунтового масиву;  $T_i(\mathbf{X}, t)$ ,  $i = \overline{1, n}$  – температура у всій області дослідження;  $\alpha_T^{(i)}$  – середні коефіцієнти лінійного теплового розширення в інтервалі температур  $(T_0, T)$ ;  $p_1^{(i)} = \gamma_p^{(i)}(h_i - x)$ ,  $p_2^{(i)} = \gamma_p^{(i)}(h_i - y)$  – фільтраційні тиски сольового розчину у водонасичених областях ґрунтового масиву;  $\gamma_{3g}^{(i)}$  – питомі ваги для шарів ґрунту, що

знаходяться в зваженому стані;  $\gamma_{np}^{(i)}$  – питомі ваги для шарів ґрунту, що знаходяться у природному стані.

Рівняння конвективної дифузії за наявності тепло-масоперенесення для водонасичених шарів ґрунтового масиву мають наступний вигляд:

$$\nabla \cdot (\mathbf{D}_i(c_i, T_i) \nabla c_i) - \mathbf{v}_i \nabla c_i - \gamma_i (c_i - C_m) + \nabla \cdot (\mathbf{D}_T^{(i)} \nabla T_i) = n_p^{(i)} \frac{\partial c_i}{\partial t}, \quad (4.38)$$

де  $\mathbf{X} \in \Omega_i$ ,  $i = \overline{1, k}$ ,  $t > 0$ ;  $\mathbf{v}_i$  – вектор швидкості фільтрації;  $n_p^{(i)}$  – об'єм сольового розчину води в одиниці об'єму ґрунту;  $\mathbf{D}_i(c_i, T_i)$  – коефіцієнти (тензор) конвективної дифузії;  $\mathbf{D}_T^{(i)}$  – коефіцієнти (тензор) термодифузії;  $t$  – час.

Рівняння конвективного теплоперенесення у всій області дослідження

$$\nabla \cdot (\lambda_T^{(i)} \nabla T_i) - \rho_i c_\rho^{(i)} \bar{\mathbf{v}}_i \nabla T_i = c_T^{(i)} \frac{\partial T_i}{\partial t}, \quad (4.39)$$

де  $\mathbf{X} \in \Omega_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $t > 0$ ;  $\lambda_T^{(i)}$  – коефіцієнти (тензор) ефективною теплопровідності вологого ґрунту;  $\rho_i$  – густини сольового розчину;  $c_\rho^{(i)}$  – питомі теплоємності сольового розчину;  $c_T^{(i)}$  – об'ємні теплоємності ґрунту при сталому об'ємі;  $\bar{\mathbf{v}}_i = \mathbf{v}_i$  при  $\mathbf{X} \in \Omega_i$ ,  $i = \overline{1, k}$  та  $\bar{\mathbf{v}}_i = 0$  при  $\mathbf{X} \in \Omega_i$ ,  $i = \overline{k+1, n}$ .

Узагальнені рівняння фільтрації сольових розчинів у неізотермічних умовах та рівняння нерозривності процесу у водонасичених областях ґрунтового масиву мають вигляд

$$\mathbf{v}_i = -\mathbf{K}_i(c_i, T_i) \nabla h_i + \mathbf{v}_c^{(i)} \nabla c_i + \mathbf{v}_T^{(i)} \nabla T_i, \quad \text{div } \mathbf{v}_i + \frac{\partial n_p^{(i)}}{\partial t} = 0, \quad (4.40)$$

де  $\mathbf{X} \in \Omega_i$ ,  $i = \overline{1, k}$ ,  $t > 0$ ;  $\mathbf{K}_i(c_i, T_i)$  – коефіцієнти (тензор) фільтрації, що залежать від концентрації сольового розчину та температури у водонасичених областях ґрунтового масиву;  $h_i(\mathbf{X}, t)$  – п'єзометричний напір,  $\mathbf{v}_c^{(i)}$  – коефіцієнти (тензор) хімічного осмосу,  $\mathbf{v}_T^{(i)}$  – коефіцієнти (тензор) термічного осмосу.

Питомі потоки розчинених солей на випадок неізотермічних умов у водонасичених шарах ґрунтового масиву

$$\mathbf{q}_c^{(i)} = \mathbf{v}_i c_i - \mathbf{D}_i(c_i, T_i) \nabla c_i - \mathbf{D}_T^{(i)} \nabla T_i, \quad \mathbf{X} \in \Omega_i, \quad i = \overline{1, k}, \quad t > 0. \quad (4.41)$$

Узагальнений закон Фур'є на випадок конвективного тепло-масоперенесення [38] в кожному шарі ґрунтового масиву

$$\mathbf{q}_T^{(i)} = \rho_i c_\rho^{(i)} \bar{\mathbf{v}}_i T_i - \lambda_T^{(i)} \nabla T_i, \quad \mathbf{X} \in \Omega_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad t > 0. \quad (4.42)$$

Нормальні та дотичні деформації обчислюються за формулами

$$\varepsilon_x^{(i)} = \frac{\partial U_i}{\partial x}, \quad \varepsilon_y^{(i)} = \frac{\partial V_i}{\partial y}, \quad \varepsilon_{xy}^{(i)} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial y} + \frac{\partial V_i}{\partial x} \right), \quad \mathbf{X} \in \Omega_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (4.43)$$

Нормальні та дотичні напруження мають наступний вигляд: [11, 100, 125]

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(i)} &= \frac{\theta}{1+\nu} (\varepsilon_x^{(i)} + \nu \varepsilon_y^{(i)}) - \alpha_T^{(i)} \bar{T}_i \theta, \quad \sigma_y^{(i)} = \frac{\theta}{1+\nu} (\varepsilon_y^{(i)} + \nu \varepsilon_x^{(i)}) - \alpha_T^{(i)} \bar{T}_i \theta, \\ \tau_{xy}^{(i)} &= \frac{E_i(c_i, T_i)}{2(1+\nu)} \varepsilon_{xy}^{(i)}, \quad \mathbf{X} \in \Omega_i, \quad i = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (4.44)$$

де  $\theta = \frac{E_i(c_i, T_i)}{1-\nu}$ ;  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона;  $\bar{T}_i = T_i(\mathbf{X}, t) - T_i(\mathbf{X}, 0)$  – різниця температур у даний момент часу та в початковий момент часу в заданій точці.

Крайові умови на границях ґрунтового масиву та умови спряження ідеального контакту для зміщень, концентрації сольового розчину, п'єзометричного напору та температури мають вигляд

$$(\mathbf{v}_1, \mathbf{n}_1)|_{AB} = 0, \quad h_i(\mathbf{X})|_{AD_1} = \tilde{H}_1(\mathbf{X}), \quad h_i(\mathbf{X})|_{BC_1} = \tilde{H}_2(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X} \in \Omega_i, \quad i = \overline{1, k}, \quad (4.45)$$

$$(\mathbf{q}_c^{(1)}, \mathbf{n}_1)|_{AB} = 0, \quad c_i(\mathbf{X}, t)|_{AD_1} = \tilde{C}_1(\mathbf{X}, t), \quad \left. \frac{\partial c_i(\mathbf{X}, t)}{\partial n} \right|_{BC_1} = 0, \quad \mathbf{X} \in \Omega_i, \quad i = \overline{1, k}, \quad t > 0, \quad (4.46)$$

$$(\mathbf{q}_T^{(1)}, \mathbf{n}_1)|_{AB \cup CD} = 0, \quad T_i(\mathbf{X}, t)|_{AD} = \tilde{T}_1(\mathbf{X}, t), \quad T_i(\mathbf{X}, t)|_{BC} = \tilde{T}_2(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in \Omega_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad t > 0, \quad (4.47)$$

$$\mathbf{u}_1(\mathbf{X})|_{AB} = 0, \quad \mathbf{u}_n(\mathbf{X})|_{CD} = 0, \quad \sigma_n^{(i)}(\mathbf{X})|_{AD \cup BC} = 0, \quad \tau_s^{(i)}(\mathbf{X})|_{AD \cup BC} = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (4.48)$$

$$[T_i(\mathbf{X}, t)]|_{\Gamma_i} = 0, \quad [\mathbf{q}_T^{(i)}]|_{\Gamma_i} = 0, \quad \mathbf{X} \in \Gamma_i, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad t > 0, \quad (4.49)$$

$$[u_n^{(i)}]|_{\Gamma_i} = [u_s^{(i)}]|_{\Gamma_i} = 0, \quad [\sigma_n^{(i)}]|_{\Gamma_i} = [\tau_s^{(i)}]|_{\Gamma_i} = 0, \quad \mathbf{X} \in \Gamma_i, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad (4.50)$$

$$[h_i(\mathbf{X})]|_{\Gamma_i} = 0, \quad [\mathbf{v}_i]|_{\Gamma_i} = 0, \quad [c_i(\mathbf{X}, t)]|_{\Gamma_i} = 0, \quad [\mathbf{q}_c^{(i)}]|_{\Gamma_i} = 0, \quad \mathbf{X} \in \Gamma_i, \quad i = \overline{1, k-1}, \quad (4.51)$$

$$c_i(\mathbf{X}, 0) = \tilde{C}_0^{(i)}(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X} \in \Omega_i, \quad i = \overline{1, k}, \quad T_i(\mathbf{X}, 0) = \tilde{T}_0^{(i)}(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X} \in \Omega_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (4.52)$$

де  $\tilde{C}_0^{(i)}(\mathbf{X})$ ,  $\tilde{T}_0^{(i)}(\mathbf{X})$ ,  $\tilde{H}_1(\mathbf{X})$ ,  $\tilde{H}_2(\mathbf{X})$ ,  $\tilde{C}_1(\mathbf{X}, t)$ ,  $\tilde{T}_1(\mathbf{X}, t)$ ,  $\tilde{T}_2(\mathbf{X}, t)$  – задані функції;

$\mathbf{n}$  – вектор напрямних косинусів зовнішньої нормалі до межі  $\Gamma$ ;  $[\ ]$  – стрибок функції.

На вільній поверхні  $\Gamma_k$  (депресійній кривій) функція  $h_k(\mathbf{X})$  задовольняє наступним умовам [83, 136]:

$$h_k(\mathbf{X})|_{\Gamma_k} = y, (\mathbf{v}_k, \mathbf{n}_k)|_{\Gamma_k} = n_p^{(k)} \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \varphi(\mathbf{X}, t) = (y - h_k(\mathbf{X}))|_{\Gamma_k} = 0, t > 0, \quad (4.53)$$

де співвідношення  $\varphi(\mathbf{X}, t)$  описує вільну поверхню  $\Gamma_k$ .

Для концентрації сольових розчинів у неізотермічних умовах на кривій депресії виконується наступна гранична умова [38]:

$$\left( \mathbf{D}_k(c_k, T_k) \nabla c_k + \mathbf{D}_T^{(k)} \nabla T_k, \mathbf{n}_k \right)|_{\Gamma_k} = 0. \quad (4.54)$$

Крайова задача (4.36)–(4.54) визначена в області  $\overline{Q}_T = \Omega \times (0, T]$ , і з математичної точки зору являє собою систему диференціальних рівнянь рівноваги в формі Ламе для зміщень ґрунту та нелінійних рівнянь параболічного типу з відповідними крайовими умовами та умовами спряження.

#### 4.2.3. Чисельний розв'язок крайової задачі

Покриємо область  $\overline{Q}_T = \overline{\Omega} \times [0, t_0]$  рівномірною сіткою  $\overline{Q}^{(m_1, m_2, n_1)} = ([0; m_1 h_1] \times [0; m_2 h_2]) \times [0; n_1 \tau]$  з кроками  $h_1$ ,  $h_2$  та  $\tau$  відповідно по змінних  $x$ ,  $y$  та часу  $t$ , де  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $n_1$  – кількість кроків по просторових змінних та часу відповідно.

Для апроксимації системи рівнянь (4.36), аналогічно як описано в розділі 3, пункті 2.2.3, використано дев'ятиточковий шаблон типу “ящик”. Скінченнорізницевий аналог системи диференціальних рівнянь (4.36) має вигляд, аналогічний (3.52), (3.53) при  $j_1 = \overline{1, m_1 - 1}$ ,  $j_2 = \overline{1, m_2 - 1}$ ,  $s = \overline{0, n_1}$ ,  $i = \overline{1, n}$ ;

$$\lambda_{i, j_1, j_2} = \lambda_{i, j_1, j_2}(c_{i, j_1, j_2}^{(s)}, T_{i, j_1, j_2}^{(s)}), \quad \mu_{i, j_1, j_2} = \mu_{i, j_1, j_2}(c_{i, j_1, j_2}^{(s)}, T_{i, j_1, j_2}^{(s)}) \quad \text{при } i = \overline{1, k}, \quad j_2 = \overline{1, m_2^*} \text{ та}$$

$$\lambda_{i, j_1, j_2} = \lambda_{i, j_1, j_2}(T_{i, j_1, j_2}^{(s)}), \quad \mu_{i, j_1, j_2} = \mu_{i, j_1, j_2}(T_{i, j_1, j_2}^{(s)}) \quad \text{при } i = \overline{k + 1, n}, \quad j_2 = \overline{m_2^* + 1, m_2 - 1}.$$

Скінченнорізницеві аналоги для (4.37) мають наступний вигляд:

$$X_{i,j_1,j_2} = \begin{cases} \frac{(p_1)_{i,j_1+1,j_2} - (p_1)_{i,j_1-1,j_2}}{2h_1}, & i = \overline{1,k}, \\ 0, & i = \overline{k+1,n}, \end{cases} \quad Y_{i,j_1,j_2} = \begin{cases} \gamma_{38}^{(i)} + \frac{(p_2)_{i,j_1,j_2+1} - (p_2)_{i,j_1,j_2-1}}{2h_2}, & i = \overline{1,k}, \\ \gamma_{np}^{(i)}, & i = \overline{k+1,n}, \end{cases} \quad (4.55)$$

де  $(p_1)_{i,j_1,j_2} = \gamma_p(h_{i,j_1,j_2} - j_1 h_1)$ ,  $(p_2)_{i,j_1,j_2} = \gamma_p(h_{i,j_1,j_2} - j_2 h_2)$ ,  $j_1 = \overline{1, m_1 - 1}$ ,  $j_2 = \overline{1, m_2 - 1}$ ,  $s = \overline{1, n_1 - 1}$ .

Диференціальне рівняння (4.38) подамо у вигляді системи

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( D_1^{(i)}(c_i, T_i) \frac{\partial c_i}{\partial x} \right) - \nu_1^{(i)} \frac{\partial c_i}{\partial x} - \frac{1}{2} \gamma_i (c_i - C_m) + \frac{\partial}{\partial x} \left( D_{T_1}^{(i)} \frac{\partial T_i}{\partial x} \right) = \frac{n_p^{(i)}}{2} \frac{\partial c_i}{\partial t}, \quad (4.56)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( D_2^{(i)}(c_i, T_i) \frac{\partial c_i}{\partial y} \right) - \nu_2^{(i)} \frac{\partial c_i}{\partial y} - \frac{1}{2} \gamma_i (c_i - C_m) + \frac{\partial}{\partial y} \left( D_{T_2}^{(i)} \frac{\partial T_i}{\partial y} \right) = \frac{n_p^{(i)}}{2} \frac{\partial c_i}{\partial t}, \quad (4.57)$$

де  $\mathbf{X} \in \Omega_i$ ,  $i = \overline{1, k}$ ,  $t > 0$ .

Скінченнорізницеві аналоги (4.56), (4.57) запишуться у вигляді

$$\begin{aligned} n_p^{(i)} \frac{c_{i,j_1,j_2}^{(s+0,5)} - c_{i,j_1,j_2}^{(s)}}{\tau} &= \frac{(\eta_1^{(i)})_{j_1,j_2}^{(s)}}{h_1} \left( (d_1^{(i)})_{j_1+1,j_2}^{(s)} \frac{c_{i,j_1+1,j_2}^{(s+0,5)} - c_{i,j_1,j_2}^{(s+0,5)}}{h_1} - (d_1^{(i)})_{j_1,j_2}^{(s)} \frac{c_{i,j_1,j_2}^{(s+0,5)} - c_{i,j_1-1,j_2}^{(s+0,5)}}{h_1} \right) + \\ &+ \frac{(\nu_1^+)_{i,j_1,j_2}^{(s)}}{(D_1^{(i)})_{j_1,j_2}^{(s)}} \cdot (d_1^{(i)})_{j_1+1,j_2}^{(s)} \frac{c_{i,j_1+1,j_2}^{(s+0,5)} - c_{i,j_1,j_2}^{(s+0,5)}}{h_1} + \frac{(\nu_1^-)_{i,j_1,j_2}^{(s)}}{(D_1^{(i)})_{j_1,j_2}^{(s)}} \cdot (d_1^{(i)})_{j_1,j_2}^{(s)} \frac{c_{i,j_1,j_2}^{(s+0,5)} - c_{i,j_1-1,j_2}^{(s+0,5)}}{h_1} - \\ &- \frac{\gamma_i}{2} (c_{i,j_1,j_2}^{(s+0,5)} - C_m) + \frac{1}{h_1} \left( (d_{T_1}^{(i)})_{j_1+1,j_2}^{(s)} \frac{T_{i,j_1+1,j_2}^{(s+0,5)} - T_{i,j_1,j_2}^{(s+0,5)}}{h_1} - (d_{T_1}^{(i)})_{i,j_2}^{(s)} \frac{T_{i,j_1,j_2}^{(s+0,5)} - T_{i,j_1-1,j_2}^{(s+0,5)}}{h_1} \right), \end{aligned} \quad (4.58)$$

$$\begin{aligned} n_p^{(i)} \frac{c_{i,j_1,j_2}^{(s+1)} - c_{i,j_1,j_2}^{(s+0,5)}}{\tau} &= \frac{(\eta_2^{(i)})_{j_1,j_2}^{(s)}}{h_2} \left( (d_2^{(i)})_{j_1,j_2+1}^{(s)} \frac{c_{i,j_1,j_2+1}^{(s+1)} - c_{i,j_1,j_2}^{(s+1)}}{h_2} - (d_2^{(i)})_{j_1,j_2}^{(s)} \frac{c_{i,j_1,j_2}^{(s+1)} - c_{i,j_1,j_2-1}^{(s+1)}}{h_2} \right) + \\ &+ \frac{(\nu_2^+)_{i,j_1,j_2}^{(s)}}{(D_2^{(i)})_{j_1,j_2}^{(s)}} \cdot (d_2^{(i)})_{j_1,j_2+1}^{(s)} \frac{c_{i,j_1,j_2+1}^{(s+1)} - c_{i,j_1,j_2}^{(s+1)}}{h_2} + \frac{(\nu_2^-)_{i,j_1,j_2}^{(s)}}{(D_2^{(i)})_{j_1,j_2}^{(s)}} \cdot (d_2^{(i)})_{j_1,j_2}^{(s)} \frac{c_{i,j_1,j_2}^{(s+1)} - c_{i,j_1,j_2-1}^{(s+1)}}{h_2} - \\ &- \frac{\gamma_i}{2} (c_{i,j_1,j_2}^{(s+1)} - C_m) + \frac{1}{h_2} \left( (d_{T_2}^{(i)})_{j_1,j_2+1}^{(s)} \frac{T_{i,j_1,j_2+1}^{(s+1)} - T_{i,j_1,j_2}^{(s+1)}}{h_2} - (d_{T_2}^{(i)})_{j_1,j_2}^{(s)} \frac{T_{i,j_1,j_2}^{(s+1)} - T_{i,j_1,j_2-1}^{(s+1)}}{h_2} \right), \end{aligned} \quad (4.59)$$

$j_1 = \overline{1, m_1 - 1}$ ,  $j_2 = \overline{1, m_2^* - 1}$ ,  $s = \overline{1, n_1 - 1}$ ,  $i = \overline{1, k}$ ,

де

$$(d_1^{(i)})_{j_1,j_2}^{(s)} = \frac{1}{2} \left( (D_1^{(i)})_{j_1,j_2}^{(s)} + (D_1^{(i)})_{j_1-1,j_2}^{(s)} \right), \quad (d_2^{(i)})_{j_1,j_2}^{(s)} = \frac{1}{2} \left( (D_2^{(i)})_{j_1,j_2}^{(s)} + (D_2^{(i)})_{j_1,j_2-1}^{(s)} \right),$$

$$(D_1^{(i)})_{j_1,j_2}^{(s)} = (D_1^{(i)})_{j_1,j_2}^{(s)} (c_{i,j_1,j_2}^{(s)}, T_{i,j_1,j_2}^{(s)}), \quad (D_2^{(i)})_{j_1,j_2}^{(s)} = (D_2^{(i)})_{j_1,j_2}^{(s)} (c_{i,j_1,j_2}^{(s)}, T_{i,j_1,j_2}^{(s)}),$$



$$(d_{T_1}^{(i)})_{j_1, j_2}^{(s)} = \frac{1}{2} \left( (D_{T_1}^{(i)})_{j_1, j_2}^{(s)} + (D_{T_1}^{(i)})_{j_1-1, j_2}^{(s)} \right), \quad (d_{T_2}^{(i)})_{j_1, j_2}^{(s)} = \frac{1}{2} \left( (D_{T_2}^{(i)})_{j_1, j_2}^{(s)} + (D_{T_2}^{(i)})_{j_1, j_2-1}^{(s)} \right),$$

$$(\eta_{j_3}^{(i)})_{j_1, j_2}^{(s)} = \frac{1}{1 + \frac{h_{j_3} |(v_{j_3}^{(s)})_{i, j_1, j_2}|}{2(D_{j_3}^{(i)})_{j_1, j_2}^{(s)}}} = 1 - \frac{h_{j_3} |(v_{j_3}^{(s)})_{i, j_1, j_2}|}{2(D_{j_3}^{(i)})_{j_1, j_2}^{(s)}} + O(h_{j_3}^2),$$

$$(v_{j_3}^+)^{i, j_1, j_2} = \frac{-(v_{j_3}^{(s)})_{i, j_1, j_2} + |(v_{j_3}^{(s)})_{i, j_1, j_2}|}{2} \geq 0, \quad (v_{j_3}^-)^{i, j_1, j_2} = \frac{-(v_{j_3}^{(s)})_{i, j_1, j_2} - |(v_{j_3}^{(s)})_{i, j_1, j_2}|}{2} \leq 0, \quad j_3 = 1, 2.$$

Для значень компонент швидкості фільтрації (4.40) отримаємо

$$(v_1)^{i, j_1, j_2} = -(K_1)^{i, j_1, j_2} \frac{h_{i, j_1+1, j_2} - h_{i, j_1-1, j_2}}{2h_1} + (v_{c_1}^{(i)})_{j_1, j_2}^{(s)} \frac{c_{i, j_1+1, j_2}^{(s)} - c_{i, j_1-1, j_2}^{(s)}}{2h_1} + (v_{T_1}^{(i)})_{j_1, j_2}^{(s)} \frac{T_{i, j_1+1, j_2}^{(s)} - T_{i, j_1-1, j_2}^{(s)}}{2h_1}, \quad (4.60)$$

$$(v_2)^{i, j_1, j_2} = -(K_2)^{i, j_1, j_2} \frac{h_{i, j_1, j_2+1} - h_{i, j_1, j_2-1}}{2h_2} + (v_{c_2}^{(i)})_{j_1, j_2}^{(s)} \frac{c_{i, j_1, j_2+1}^{(s)} - c_{i, j_1, j_2-1}^{(s)}}{2h_2} + (v_{T_2}^{(i)})_{j_1, j_2}^{(s)} \frac{T_{i, j_1, j_2+1}^{(s)} - T_{i, j_1, j_2-1}^{(s)}}{2h_2}, \quad (4.61)$$

$$j_1 = \overline{1, m_1 - 1}, \quad j_2 = \overline{1, m_2^* - 1}, \quad s = \overline{0, n_1}, \quad i = \overline{1, k}.$$

Значення п'єзометричних напорів  $h_i(\mathbf{X})$  у водонасичених шарах знаходимо з

розв'язку задачі фільтрації (4.40) при  $\frac{\partial n_p^{(i)}}{\partial t} = 0$ . Тоді отримаємо

$$\begin{aligned} & K_{i, j_1, j_2}^{(s)} \left( \frac{h_{i, j_1+1, j_2} - 2h_{i, j_1, j_2} + h_{i, j_1-1, j_2}}{h_1^2} + \frac{h_{i, j_1, j_2+1} - 2h_{i, j_1, j_2} + h_{i, j_1, j_2-1}}{h_2^2} \right) + \frac{K_{i, j_1+1, j_2}^{(s)} - K_{i, j_1, j_2}^{(s)}}{h_1} \frac{h_{i, j_1+1, j_2} - h_{i, j_1, j_2}}{h_1} + \\ & + \frac{K_{i, j_1, j_2+1}^{(s)} - K_{i, j_1, j_2}^{(s)}}{h_2} \frac{h_{i, j_1, j_2+1} - h_{i, j_1, j_2}}{h_2} - (v_c^{(i)})_{j_1, j_2}^{(s)} \left( \frac{c_{i, j_1+1, j_2}^{(s)} - 2c_{i, j_1, j_2}^{(s)} + c_{i, j_1-1, j_2}^{(s)}}{h_1^2} + \frac{c_{i, j_1, j_2+1}^{(s)} - 2c_{i, j_1, j_2}^{(s)} + c_{i, j_1, j_2-1}^{(s)}}{h_2^2} \right) - \\ & - \frac{(v_c^{(i)})_{j_1+1, j_2}^{(s)} - (v_c^{(i)})_{j_1, j_2}^{(s)}}{h_1} \frac{c_{i, j_1+1, j_2}^{(s)} - c_{i, j_1, j_2}^{(s)}}{h_1} - \frac{(v_c^{(i)})_{j_1, j_2+1}^{(s)} - (v_c^{(i)})_{j_1, j_2}^{(s)}}{h_2} \frac{c_{i, j_1, j_2+1}^{(s)} - c_{i, j_1, j_2}^{(s)}}{h_2} - \\ & - v_T^{(i)} \left( \frac{T_{i, j_1+1, j_2}^{(s)} - 2T_{i, j_1, j_2}^{(s)} + T_{i, j_1-1, j_2}^{(s)}}{h_1^2} + \frac{T_{i, j_1, j_2+1}^{(s)} - 2T_{i, j_1, j_2}^{(s)} + T_{i, j_1, j_2-1}^{(s)}}{h_2^2} \right) = 0, \end{aligned} \quad (4.62)$$

$$j_1 = \overline{1, m_1 - 1}, \quad j_2 = \overline{1, m_2^* - 1}, \quad s = \overline{1, n_1 - 1}, \quad i = \overline{1, k}.$$

Скінченнорізницьві аналоги для компонент тензора деформацій (4.43) та компонент тензора напружень (4.44) матимуть вигляд, аналогічний (3.61), (3.62)

відповідно при  $i = \overline{1, n}$ ;  $E_{i, j_1, j_2}(c_{j_1, j_2}^{(s)}, T_{1, j_1, j_2}^{(s)}) = E_{1, j_1, j_2}(c_{j_1, j_2}^{(s)}, T_{1, j_1, j_2}^{(s)})$  при  $i = \overline{1, k}$ ,  $j_2 = \overline{1, m_2^*}$

та  $E_{i,j_1,j_2}(c_{j_1,j_2}^{(s)}, T_{1,j_1,j_2}^{(s)}) = E_{2,j_1,j_2}(T_{2,j_1,j_2}^{(s)})$  при  $i = \overline{k+1, n}$ ,  $j_2 = \overline{m_2^* + 1, m_2}$ ,  $j_1 = \overline{1, m_1 - 1}$ .

Для початкових умов (4.52) скінченнорізницеві аналоги мають вигляд

$$c_{i,j_1,j_2}^{(0)} = \tilde{C}_0^{(i)}(j_1 h_1, j_2 h_2), \quad j_1 = \overline{0, m_1}, \quad j_2 = \overline{0, m_2^*}, \quad i = \overline{1, k}, \quad (4.63)$$

$$T_{i,j_1,j_2}^{(0)} = \tilde{T}_0^{(i)}(j_1 h_1, j_2 h_2), \quad j_1 = \overline{0, m_1}, \quad j_2 = \overline{0, m_2}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (4.64)$$

Для граничних умов першого роду (4.45)–(4.48) маємо

$$U_{1,j_1,0} = U_{n,j_1,m_1} = 0, \quad V_{1,j_1,0} = V_{n,j_1,m_2} = 0, \quad j_1 = \overline{0, m_1}, \quad (4.65)$$

$$h_{i,0,j_2} = \tilde{H}_1(j_2 h_2), \quad h_{i,m_1,j_2} = \tilde{H}_2(j_2 h_2), \quad c_{i,0,j_2}^{(s)} = \tilde{C}_1(j_2 h_2, s\tau), \quad i = \overline{1, k}, \quad j_2 = \overline{0, m_2^*}, \quad s = \overline{1, n_1}, \quad (4.66)$$

$$T_{i,0,j_2}^{(s)} = \tilde{T}_1(j_2 h_2, s\tau), \quad T_{i,m_1,j_2}^{(s)} = \tilde{T}_2(j_2 h_2, s\tau), \quad i = \overline{1, n}, \quad j_2 = \overline{0, m_2}, \quad s = \overline{1, n_1}. \quad (4.67)$$

Для знаходження невідомих функцій  $U_i(\mathbf{X})$ ,  $V_i(\mathbf{X})$ ,  $\varepsilon_x^{(i)}(\mathbf{X})$ ,  $\varepsilon_y^{(i)}(\mathbf{X})$ ,  $\varepsilon_{xy}^{(i)}(\mathbf{X})$ ,  $\sigma_x^{(i)}(\mathbf{X})$ ,  $\sigma_y^{(i)}(\mathbf{X})$ ,  $\tau_{xy}^{(i)}(\mathbf{X})$ ,  $h_i(\mathbf{X})$ ,  $c_i(\mathbf{X}, t)$ ,  $T_i(\mathbf{X}, t)$  використано алгоритм, наведений в Додатку К.

Для знаходження значень зміщень  $U_i(\mathbf{X})$  та  $V_i(\mathbf{X})$  узагальнено ітераційний метод Гауса-Зейделя. Значення зміщень знайдено аналогічно, до описаного в розділі 3, пункті 3.2.3 за формулами (3.63) при  $i = \overline{1, n}$ . Значення зміщень на вільній поверхні знайдено з (4.50) аналогічно (3.67) (розділ 3, пункт 3.2.3) при  $U_{1,j_1,j_2} = U_{i,j_1,j_2}$ ,  $\bar{T}_{1,j_1,j_2} = \bar{T}_{i,j_1,j_2}$ ,  $\alpha_T^{(1)} = \alpha_T^{(i)}$ ,  $i = \overline{1, k}$ ;  $U_{2,j_1,j_2} = U_{i,j_1,j_2}$ ,  $\bar{T}_{2,j_1,j_2} = \bar{T}_{i,j_1,j_2}$ ,  $\alpha_T^{(2)} = \alpha_T^{(i)}$ ,  $i = \overline{k+1, n}$ ;  $j_1 = \overline{1, m_1 - 1}$ ,  $j_2 = \overline{1, m_2 - 1}$ ,  $m_2^* = j_r$ , де  $j_r$  – індекс дискретизації, що співпадає з межею шару,  $j_r = \overline{1, n - 1}$ .

Для знаходження концентрацій  $c_i(\mathbf{X}, t)$  у водонасичених шарах ґрунтового масиву необхідно розв'язати систему скінченнорізницевих рівнянь (4.58), (4.59) з відповідними крайовими умовами та умовами спряження. Використовуючи метод прогонки по змінній  $x$ , зведемо рівняння (4.58) до прогоночного вигляду

$$a_{j_1} c_{i,j_1-1,j_2}^{(s+0,5)} - \bar{c}_{j_1} c_{i,j_1,j_2}^{(s+0,5)} + b_{j_1} c_{i,j_1+1,j_2}^{(s+0,5)} = -c_{i,j_1,j_2}^{(s)} - \bar{s}_{j_1,j_2}^{(s+0,5)}, \quad (4.68)$$

де

$$a_{j_1} = \frac{\tau}{n_p^{(i)}} \frac{(d_1^{(i)})_{j_1, j_2}^{(s)}}{h_1} \left( \frac{(\eta_1^{(i)})_{j_1, j_2}^{(s)}}{h_1} - \frac{(v_1^-)_{i, j_1, j_2}^{(s)}}{(D_1^{(i)})_{j_1, j_2}^{(s)}} \right), \quad b_{j_1} = \frac{\tau}{n_p^{(i)}} \frac{(d_1^{(i)})_{j_1+1, j_2}^{(s)}}{h_1} \left( \frac{(\eta_1^{(i)})_{j_1, j_2}^{(s)}}{h_1} + \frac{(v_1^+)_{i, j_1, j_2}^{(s)}}{(D_1^{(i)})_{j_1, j_2}^{(s)}} \right),$$

$$\bar{c}_{j_1} = 1 + \frac{\tau}{n_p^{(i)}} \left( \frac{(\eta_1^{(i)})_{j_1, j_2}^{(s)} \left( (d_1^{(i)})_{j_1+1, j_2}^{(s)} + (d_1^{(i)})_{j_1, j_2}^{(s)} \right)}{h_1^2} + \frac{1}{h_1 (D_1^{(i)})_{j_1, j_2}^{(s)}} \left( (v_1^+)_{i, j_1, j_2}^{(s)} (d_1^{(i)})_{j_1+1, j_2}^{(s)} - (v_1^-)_{i, j_1, j_2}^{(s)} (d_1^{(i)})_{j_1, j_2}^{(s)} \right) + \gamma_i \right),$$

$$\bar{s}_{j_1, j_2}^{(s+0,5)} = \frac{\tau}{n_p^{(i)}} \left( \gamma_i C_m + \frac{1}{h_1} \left( (d_{T_1}^{(i)})_{j_1+1, j_2}^{(s)} \frac{T_{i, j_1+1, j_2}^{(s+0,5)} - T_{i, j_1, j_2}^{(s+0,5)}}{h_1} - (d_{T_1}^{(i)})_{j_1, j_2}^{(s)} \frac{T_{i, j_1, j_2}^{(s+0,5)} - T_{i, j_1-1, j_2}^{(s+0,5)}}{h_1} \right) \right).$$

Неважко показати, що умови стійкості прогонки  $|\bar{c}_{j_1}| > |a_{j_1}| + |b_{j_1}|$  виконуються. Значення концентрації на часовому шарі  $(s+0,5)$  послідовно обчислюємо, використовуючи співвідношення

$$c_{i, j_1, j_2}^{(s+0,5)} = \alpha_{j_1+1} \cdot c_{i, j_1+1, j_2}^{(s+0,5)} + \beta_{j_1+1}, \quad (4.69)$$

$$\text{де } \alpha_{j_1+1} = \frac{b_{j_1}}{\bar{c}_{j_1} - a_{j_1} \alpha_{j_1}}, \quad \beta_{j_1+1} = \frac{a_{j_1} \beta_{j_1} + c_{i, j_1, j_2}^{(s)} + \bar{s}_{j_1, j_2}^{(s+0,5)}}{\bar{c}_{j_1} - a_{j_1} \alpha_{j_1}}.$$

Рівняння (4.59), аналогічно до (4.58), розв'язуємо, використовуючи метод прогонки по змінній  $y$ . Для цього зведемо дане рівняння до прогоночного вигляду

$$a_{j_2} c_{i, j_1, j_2-1}^{(s+1)} - \bar{c}_{j_2} c_{i, j_1, j_2}^{(s+1)} + b_{j_2} c_{i, j_1, j_2+1}^{(s+1)} = -c_{i, j_1, j_2}^{(s+0,5)} - \bar{s}_{j_1, j_2}^{(s+1)},$$

де

$$a_{j_2} = \frac{\tau}{n_p^{(i)}} \frac{(d_2^{(i)})_{j_1, j_2}^{(s)}}{h_2} \left( \frac{(\eta_2^{(i)})_{j_1, j_2}^{(s)}}{h_2} - \frac{(v_2^-)_{i, j_1, j_2}^{(s)}}{(D_2^{(i)})_{j_1, j_2}^{(s)}} \right), \quad b_{j_2} = \frac{\tau}{n_p^{(i)}} \frac{(d_2^{(i)})_{j_1, j_2+1}^{(s)}}{h_2} \left( \frac{(\eta_2^{(i)})_{j_1, j_2}^{(s)}}{h_2} + \frac{(v_2^+)_{i, j_1, j_2}^{(s)}}{(D_2^{(i)})_{j_1, j_2}^{(s)}} \right),$$

$$\bar{c}_{j_2} = 1 + \frac{\tau}{n_p^{(i)}} \left( \frac{(\eta_2^{(i)})_{j_1, j_2}^{(s)} \left( (d_2^{(i)})_{j_1, j_2+1}^{(s)} + (d_2^{(i)})_{j_1, j_2}^{(s)} \right)}{h_2^2} + \frac{1}{h_2 (D_2^{(i)})_{j_1, j_2}^{(s)}} \left( (v_2^+)_{i, j_1, j_2}^{(s)} (d_2^{(i)})_{j_1, j_2+1}^{(s)} - (v_2^-)_{i, j_1, j_2}^{(s)} (d_2^{(i)})_{j_1, j_2}^{(s)} \right) + \gamma_i \right),$$

$$\bar{s}_{j_1, j_2}^{(s+1)} = \frac{\tau}{n_p^{(i)}} \left( \gamma_i C_m + \frac{1}{h_2} \left( (d_{T_2}^{(i)})_{j_1, j_2+1}^{(s)} \frac{T_{i, j_1, j_2+1}^{(s+1)} - T_{i, j_1, j_2}^{(s+1)}}{h_2} - (d_{T_2}^{(i)})_{j_1, j_2}^{(s)} \frac{T_{i, j_1, j_2}^{(s+1)} - T_{i, j_1, j_2-1}^{(s+1)}}{h_2} \right) \right).$$

Можна показати, що умови стійкості прогонки  $|\bar{c}_{j_2}| > |a_{j_2}| + |b_{j_2}|$  виконуються. Значення концентрації на часовому шарі  $(s+1)$  будемо послідовно обчислювати, використовуючи співвідношення

$$c_{i, j_1, j_2}^{(s+1)} = \alpha_{j_2+1} \cdot c_{i, j_1, j_2+1}^{(s+1)} + \beta_{j_2+1}, \quad \alpha_1 = 0, \quad \beta_1 = c_{i, 0, j_2}^{(s+0,5)}, \quad (4.70)$$

де

$$\alpha_{j_2+1} = \begin{cases} \frac{b_{j_2}}{\bar{c}_{j_2} - a_{j_2} \alpha_{j_2}}, & j_2 = \overline{1, j_r - 1}, \\ \frac{(D_2^{(i+1)})_{j_1, j_2+1}^{(s+1)}}{(D_2^{(i+1)})_{j_1, j_2+1}^{(s+1)} + (D_2^{(i)})_{j_1, j_2}^{(s+1)} (1 - \alpha_{j_2})}, & j_2 = j_r, \\ \frac{b_{j_2}}{\bar{c}_{j_2} - a_{j_2} \alpha_{j_2}}, & j_2 = \overline{j_r + 1, m_2^* - 1}, \end{cases} \quad \beta_{j_2+1} = \begin{cases} \frac{a_{j_2} \beta_{j_2} + c_{i, j_1, j_2}^{(s+0,5)} + \bar{s}_{j_1, j_2}^{(s+1)}}{\bar{c}_{j_2} - a_{j_2} \alpha_{j_2}}, & j_2 = \overline{1, j_r - 1}, \\ \frac{(D_2^{(i)})_{j_1, j_2}^{(s+1)} \beta_{j_2}}{(D_2^{(i+1)})_{j_1, j_2+1}^{(s+1)} + (D_2^{(i)})_{j_1, j_2}^{(s+1)} (1 - \alpha_{j_2})}, & j_2 = j_r, \\ \frac{a_{j_2} \beta_{j_2} + c_{i, j_1, j_2}^{(s+0,5)} + \bar{s}_{j_1, j_2}^{(s+1)}}{\bar{c}_{j_2} - a_{j_2} \alpha_{j_2}}, & j_2 = \overline{j_r + 1, m_2^* - 1}. \end{cases}$$

Для розв'язання диференціального рівняння (4.39) використано локально-одновимірний метод О.А. Самарського [131–133] з використанням монотонної різницевої схеми. Значення температури  $T_i(\mathbf{X}, t)$  у всіх шарах ґрунтового масиву знайдено методом прогонки, аналогічно до знаходження температури, описаного в розділі 3, пункті 3.2.3 при  $\mathbf{X} \in \Omega_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $t > 0$ ,  $\bar{v}_1^{(i)} = v_1^{(i)}$ ,  $\bar{v}_2^{(i)} = v_2^{(i)}$ ,  $\lambda_T^{(1)} = \lambda_T^{(i)}$  при  $\mathbf{X} \in \Omega_i$ ,  $i = \overline{1, k}$  та  $\bar{v}_1^{(i)} = \bar{v}_2^{(i)} = 0$ ,  $\lambda_T^{(2)} = \lambda_T^{(i)}$  при  $\mathbf{X} \in \Omega_i$ ,  $i = \overline{k+1, n}$ ;  $\rho = \rho_i$ ,  $c_\rho = c_\rho^{(i)}$ ,  $i = \overline{1, n}$ . На межі  $AD$  для температури для граничної умови (4.47) маємо  $\alpha_1 = 0$ ,  $\beta_1 = T_{i,0,j_2}^{(s+0,5)}$ .

Для знаходження значень  $h_i(\mathbf{X})$  з різницевого рівняння (4.62) узагальнено ітераційний метод Гауса-Зейделя. Зведемо дане рівняння до вигляду

$$h_{i,j_1,j_2}^{(z+1)} = \tilde{A}_i h_{i,j_1+1,j_2}^{(z)} + \tilde{B}_i h_{i,j_1-1,j_2}^{(z+1)} + \tilde{C}_i h_{i,j_1,j_2+1}^{(z)} + \tilde{D}_i h_{i,j_1,j_2-1}^{(z+1)} + \tilde{f}_{i,j_1,j_2}^{(s)}, \quad (4.71)$$

де

$$\begin{aligned} \tilde{A}_i &= \frac{K_{i,j_1+1,j_2}^{(s)}}{\tilde{\Lambda} h_1^2}, \quad \tilde{B}_i = \frac{K_{i,j_1,j_2}^{(s)}}{\tilde{\Lambda} h_1^2}, \quad \tilde{C}_i = \frac{K_{i,j_1,j_2+1}^{(s)}}{\tilde{\Lambda} h_2^2}, \quad \tilde{D}_i = \frac{K_{i,j_1,j_2}^{(s)}}{\tilde{\Lambda} h_2^2}, \quad \tilde{\Lambda} = \frac{K_{i,j_1+1,j_2}^{(s)} + K_{i,j_1,j_2}^{(s)}}{h_1^2} + \frac{K_{i,j_1,j_2+1}^{(s)} + K_{i,j_1,j_2}^{(s)}}{h_2^2}, \\ \tilde{f}_{i,j_1,j_2}^{(s)} &= -\frac{1}{\tilde{\Lambda}} \left( (v_c^{(i)})_{j_1,j_2}^{(s)} \left( \frac{c_{i,j_1+1,j_2}^{(s)} - 2c_{i,j_1,j_2}^{(s)} + c_{i,j_1-1,j_2}^{(s)}}{h_1^2} + \frac{c_{i,j_1,j_2+1}^{(s)} - 2c_{i,j_1,j_2}^{(s)} + c_{i,j_1,j_2-1}^{(s)}}{h_2^2} \right) + \right. \\ &+ \frac{(v_c^{(i)})_{j_1+1,j_2}^{(s)} - (v_c^{(i)})_{j_1,j_2}^{(s)}}{h_1} \frac{c_{i,j_1+1,j_2}^{(s)} - c_{i,j_1,j_2}^{(s)}}{h_1} + \frac{(v_c^{(i)})_{j_1,j_2+1}^{(s)} - (v_c^{(i)})_{j_1,j_2}^{(s)}}{h_2} \frac{c_{i,j_1,j_2+1}^{(s)} - c_{i,j_1,j_2}^{(s)}}{h_2} + \\ &\left. + v_T^{(i)} \left( \frac{T_{i,j_1+1,j_2}^{(s)} - 2T_{i,j_1,j_2}^{(s)} + T_{i,j_1-1,j_2}^{(s)}}{h_1^2} + \frac{T_{i,j_1,j_2+1}^{(s)} - 2T_{i,j_1,j_2}^{(s)} + T_{i,j_1,j_2-1}^{(s)}}{h_2^2} \right) \right). \end{aligned}$$

Ітерації за формулами (4.71) проводяться до тих пір, поки різниця значень не стане меншою за деяку задану точність  $\varepsilon$

$$|h_{i,j_1,j_2}^{(z+1)} - h_{i,j_1,j_2}^{(z)}| \leq \varepsilon, \quad j_1 = \overline{1, m_1 - 1}, \quad j_2 = \overline{1, m_2^* - 1}, \quad i = \overline{1, k}, \quad z - \text{номер ітерації.}$$

З умов спряження (4.51) отримаємо

$$h_{i,j_1,j_r} = \frac{(K_2)_{i,j_1,j_r}^{(s)} h_{i,j_1,j_r-1} + (K_2)_{i+1,j_1,j_r}^{(s)} h_{i+1,j_1,j_r+1} - \hat{F}}{(K_2)_{i,j_1,j_r}^{(s)} + (K_2)_{i+1,j_1,j_r}^{(s)}}, \quad j_1 = \overline{1, m_1 - 1}, \quad j_r = \overline{1, m_2^* - 1}, \quad i = \overline{1, k}, \quad (4.72)$$

де

$$\begin{aligned} \hat{F} = & (v_{c_2}^{(i+1)})_{j_1,j_r}^{(s)} (c_{i+1,j_1,j_r+1}^{(s)} - c_{i+1,j_1,j_r}^{(s)}) + (v_{T_2}^{(i+1)})_{j_1,j_r}^{(s)} (T_{i+1,j_1,j_r+1}^{(s)} - T_{i+1,j_1,j_r}^{(s)}) - \\ & - (v_{c_2}^{(i)})_{j_1,j_r}^{(s)} (c_{i,j_1,j_r}^{(s)} - c_{i,j_1,j_r-1}^{(s)}) - (v_{T_2}^{(i)})_{j_1,j_r}^{(s)} (T_{i,j_1,j_r}^{(s)} - T_{i,j_1,j_r-1}^{(s)}). \end{aligned}$$

Граничні умови другого роду для напору, концентрації солей, температури (4.45)–(4.47) та умови на границях водних басейнів для зміщень вигляду (4.48) апроксимовано аналогічним чином, як описано в розділі 2 (пункт. 2.2.3), а також умови спряження для температури (4.49) – в розділі 3 (пункт. 3.2.3).

#### 4.2.4. Результати чисельних експериментів та їх аналіз

Як приклад, розглянуто двовимірну задачу впливу тепло-масоперенесення при фільтрації сольових розчинів на НДС трьохшарового ґрунтового масиву прямокутної форми довжиною  $l_1 = 20$  м та товщиною  $l_2 = 10$  м за наявності вільної поверхні на рівні  $l_2^1 = 7$  м. Область  $\Omega_1 = \{(x, y) : 0 < x < l_1, 0 < y \leq l_2^1\}$ ,  $l_2^1 = 3$  м – це зона глинистого ґрунту, що знаходиться у водонасиченому стані,  $\Omega_2 = \{(x, y) : 0 < x < l_1, l_2^1 < y \leq l_2^2\}$  – зона піщаного ґрунту у водонасиченому стані, а область  $\Omega_3 = \{(x, y) : 0 < x < l_1, l_2^2 < y \leq l_2\}$  – це зона ґрунту в природному стані.

Значення решти вхідних даних брались наступними [36, 38, 91, 109, 158]:

$$n_p^{(1)} = 0,2, \quad n_p^{(2)} = 0,3, \quad n_p^{(3)} = 0,4, \quad \alpha_T^{(1)} = \alpha_T^{(2)} = \alpha_T^{(3)} = 1 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{град}}, \quad D_1 = D_2 = D_3 = 2 \cdot 10^{-3} \frac{\text{м}^2}{\text{доба}},$$

$$D_T^{(1)} = D_T^{(2)} = D_T^{(3)} = 2 \cdot 10^{-3} \frac{\text{м}^2}{\text{доба}}, \quad \gamma_p = 1 \cdot 10^4 \frac{\text{Па}}{\text{м}}, \quad \gamma_{38.}^{(1)} = 2,3 \cdot 10^4 \frac{\text{Па}}{\text{м}},$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{зв.}^{(2)} &= 1,3 \cdot 10^4 \frac{\text{Па}}{\text{м}}, & \gamma_{нр.}^{(3)} &= 1,7 \cdot 10^4 \frac{\text{Па}}{\text{м}}, & \lambda_1 &= 1,2 \cdot 10^{10} \text{ Па}, & \mu_1 &= 1,2 \cdot 10^{10} \text{ Па}, \\
E_1 &= 2,34 \cdot 10^{10} \text{ Па}, & \lambda_2 &= 1,35 \cdot 10^7 \text{ Па}, & \mu_2 &= 0,9 \cdot 10^7 \text{ Па}, & E_2 &= 2,34 \cdot 10^7 \text{ Па}, \\
\lambda_3 &= 1,7 \cdot 10^7 \text{ Па}, & \mu_3 &= 1,15 \cdot 10^7 \text{ Па}, & E_3 &= 3 \cdot 10^7 \text{ Па}, & \rho &= 1100 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \\
c_{\rho}^{(1)} = c_{\rho}^{(2)} = c_{\rho}^{(3)} &= 4,2 \cdot 10^3 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{град}}, & c_T^{(1)} = c_T^{(2)} = c_T^{(3)} &= 2,137 \cdot 10^6 \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3 \cdot \text{град}}, \\
\lambda_T^{(1)} = \lambda_T^{(2)} = \lambda_T^{(3)} &= 108 \cdot 10^3 \frac{\text{Дж}}{\text{м} \cdot \text{град} \cdot \text{доба}}, & \nu &= 0,35, & \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 &= 6,5 \cdot 10^{-5} \text{ доба}^{-1}, \\
\tilde{T}_1(\mathbf{X}, t) &= 30^{\circ} \text{C}, & \tilde{T}_2(\mathbf{X}, t) &= 15^{\circ} \text{C}, & \tilde{H}_1(\mathbf{X}) &= 10 \text{ м}, & \tilde{H}_2(\mathbf{X}) &= 1 \text{ м}, \\
\tilde{C}_1(\mathbf{X}, t) = C_m &= 350 \frac{\text{л}}{\text{літр}}, & \tilde{C}_2(\mathbf{X}, t) &= 8 \frac{\text{л}}{\text{літр}}, & \tilde{C}_0(\mathbf{X}) &= 8 \frac{\text{л}}{\text{літр}}, & \tilde{T}_0(\mathbf{X}) &= 5^{\circ} \text{C}.
\end{aligned}$$

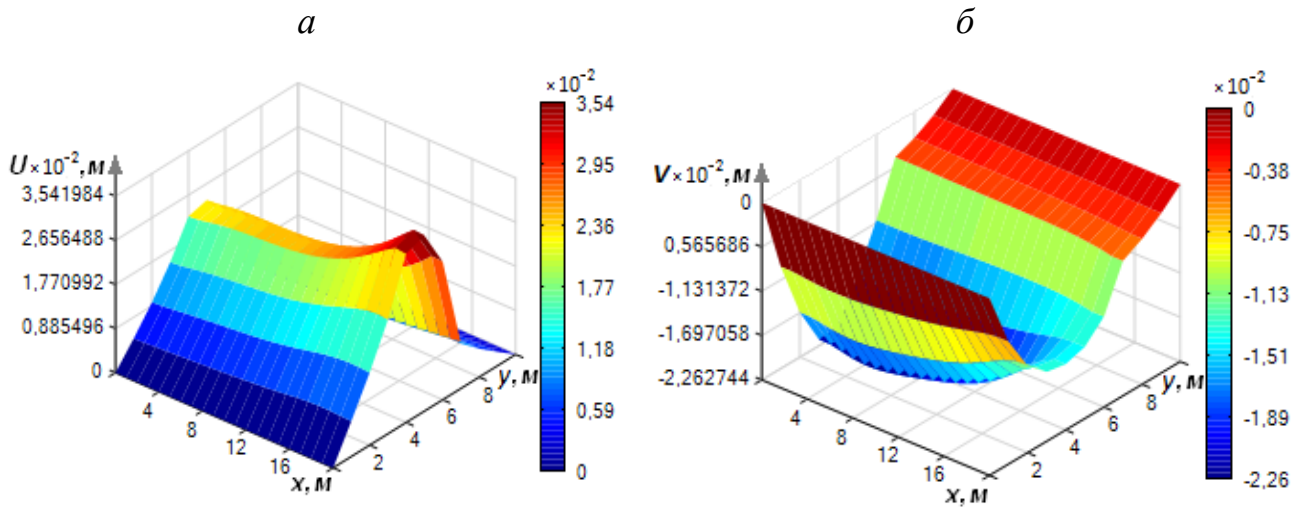
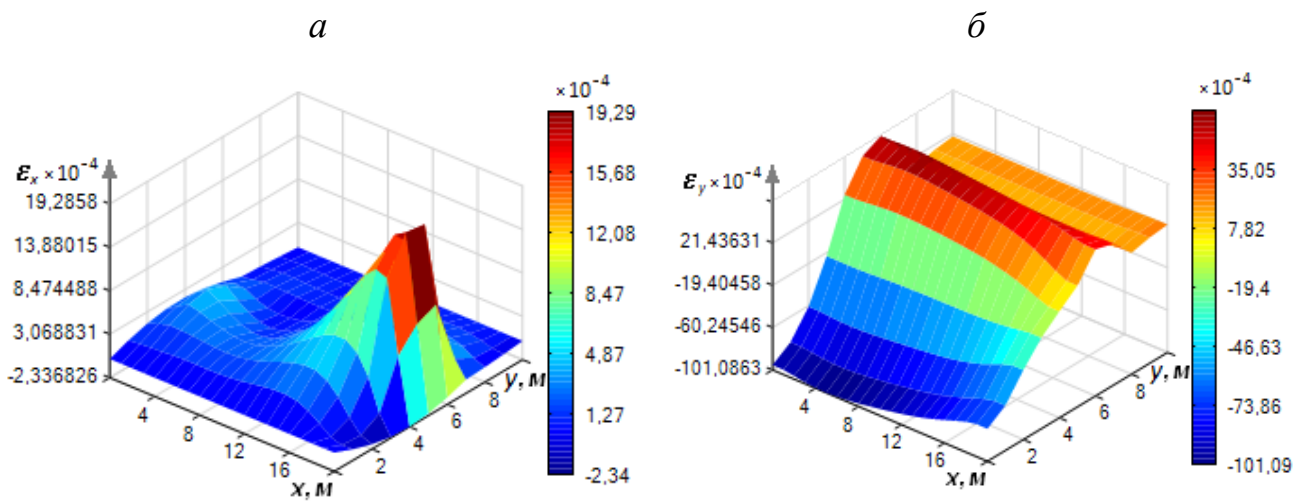
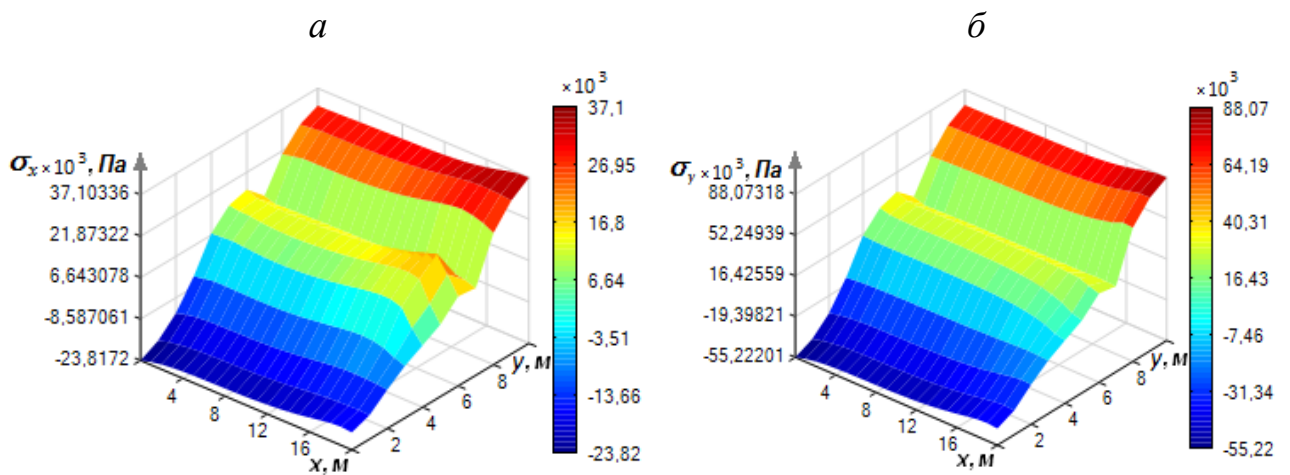
Час, протягом якого розглядався процес НДС, дорівнював 3 рокам.

Проведено серію чисельних експериментів, результати яких наведено у вигляді графіків при  $t = 1080$  діб.

На рис. 4.10–4.13 наведено розподіли полів невідомих функцій з урахуванням тепло-масоперенесення та наявності вільної поверхні на глибині 7 м.

Як видно із рис. 4.10, а, 4.11, а значення зміщень та деформацій ґрунтового масиву по осі  $Ox$  досягають найбільших значень в області правого водного басейну. Значення зміщень по осі  $Oy$  (рис. 4.10, б) значно зменшуються в області водонасичених шарів ґрунту. Деформації по осі  $Oy$  (рис. 4.11, б) досягають найбільших значень в області вільної поверхні. Напруження по осі  $Ox$  та  $Oy$  (рис. 4.12) досягають найбільших значень на нижній та верхній межах ґрунтового масиву. Дотичні деформації та напруження (рис. 4.13) значно збільшуються у водонасичених областях ґрунтового масиву.

На рис. 4.15-4.18 наведено графіки функцій  $U_i(\mathbf{X})$ ,  $V_i(\mathbf{X})$ ,  $\varepsilon_x^{(i)}(\mathbf{X})$ ,  $\varepsilon_y^{(i)}(\mathbf{X})$ ,  $\varepsilon_{xy}^{(i)}(\mathbf{X})$ ,  $\sigma_x^{(i)}(\mathbf{X})$ ,  $\sigma_y^{(i)}(\mathbf{X})$ ,  $\tau_{xy}^{(i)}(\mathbf{X})$ ,  $\mathbf{X} \in \Omega$  у перерізі площиною  $yOz$  при  $x = 10$  м за наявності тепло-масоперенесення ( 1) без вільної поверхні; 2) при наявності вільної поверхні на глибині 7 м; 3) при наявності вільної поверхні на глибині 5 м).

Рис. 4.10. Розподіли полів зміщень вздовж осей  $Ox$  (а) та  $Oy$  (б)Рис. 4.11. Розподіли полів деформацій вздовж осей  $Ox$  (а) та  $Oy$  (б)Рис. 4.12. Розподіли полів напружень вздовж осей  $Ox$  (а) та  $Oy$  (б)

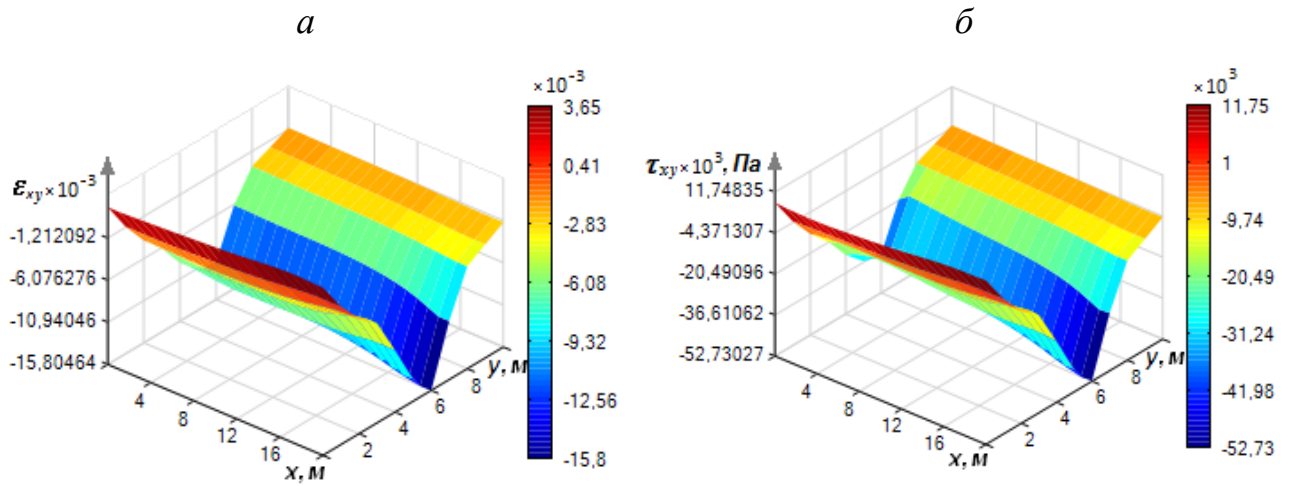


Рис. 4.13. Розподіли полів дотичних деформацій  $\varepsilon_{xy}$  (а) та напружень  $\tau_{xy}$  (б)

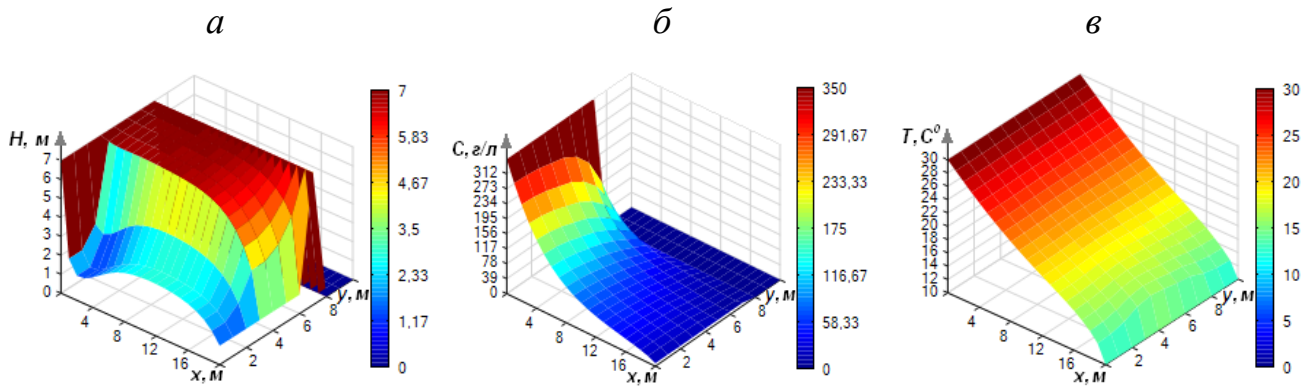


Рис. 4.14. Розподіли полів п'єзометричного напору з врахуванням фільтрації солових розчинів (а), концентрації солових розчинів у неізотермічних умовах (б) та температури при фільтрації солових розчинів та наявності вільної поверхні (в)

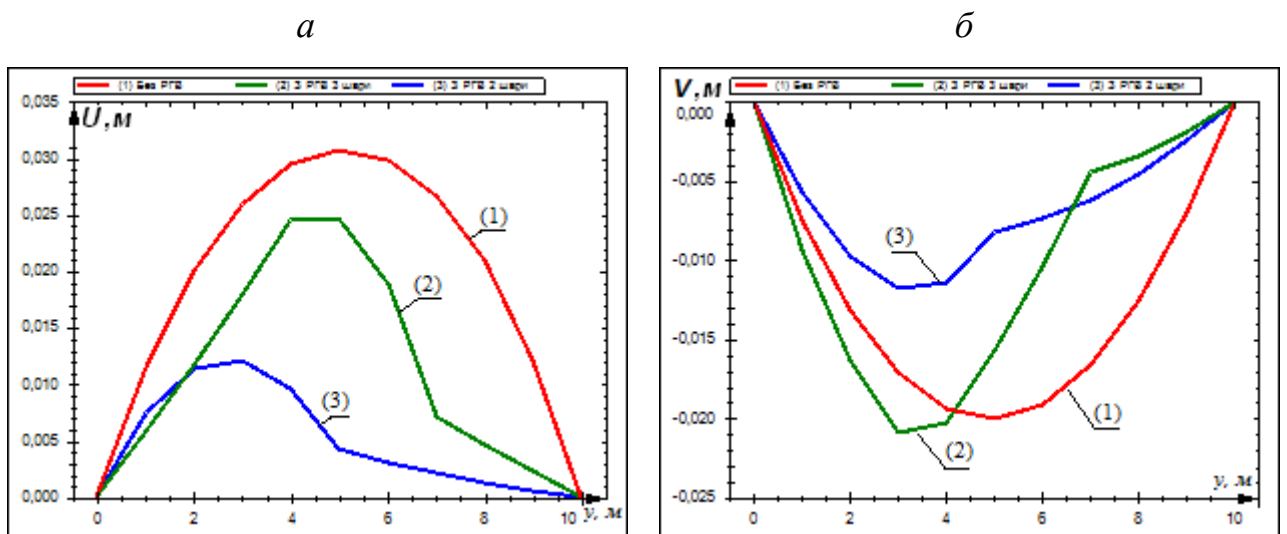
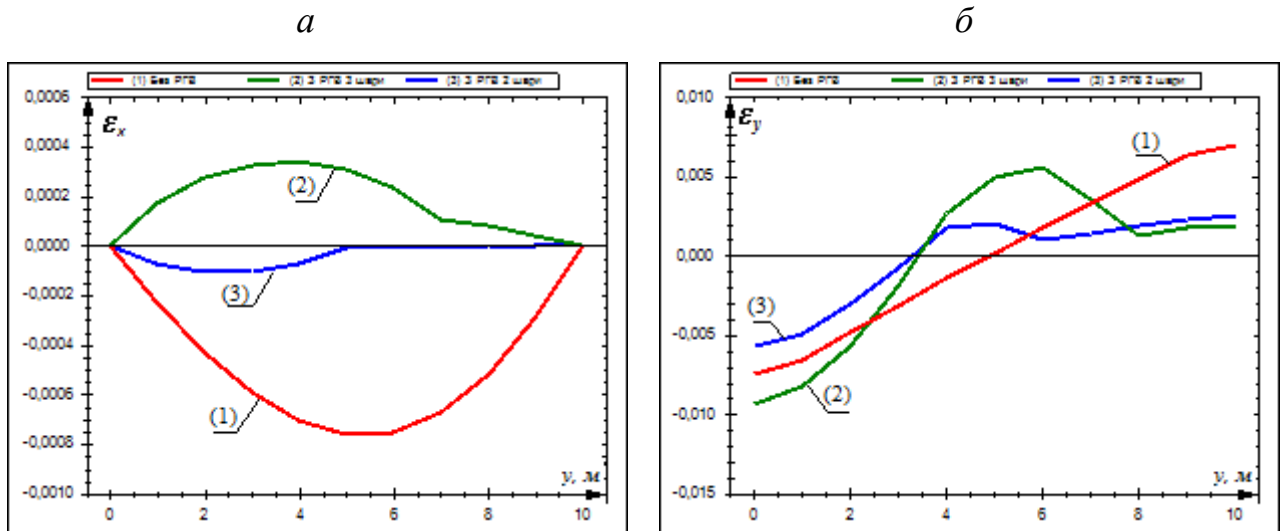
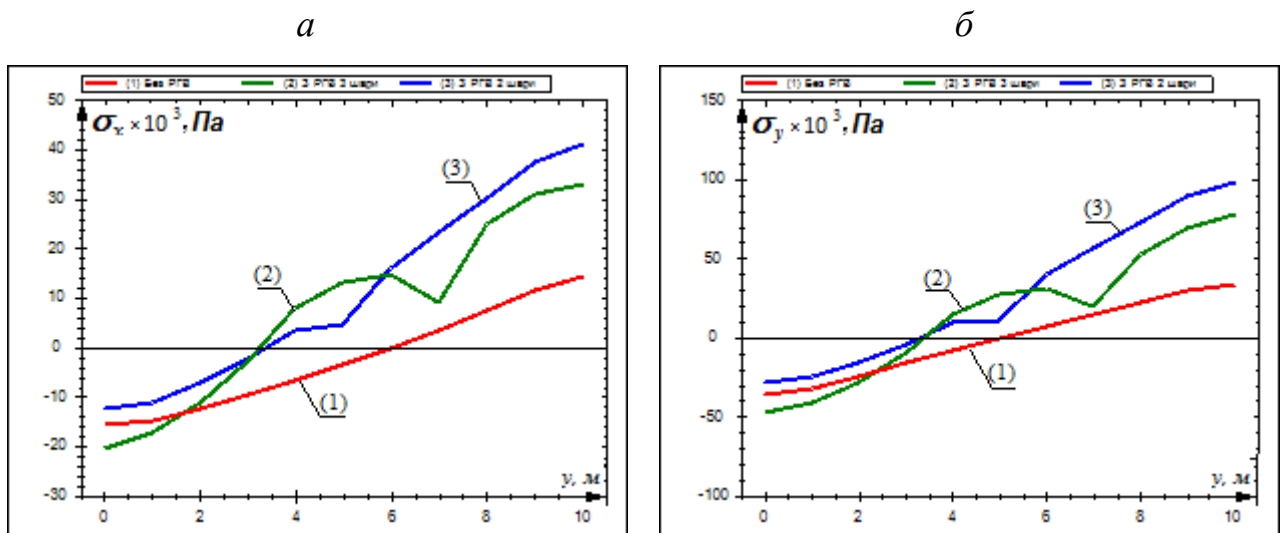
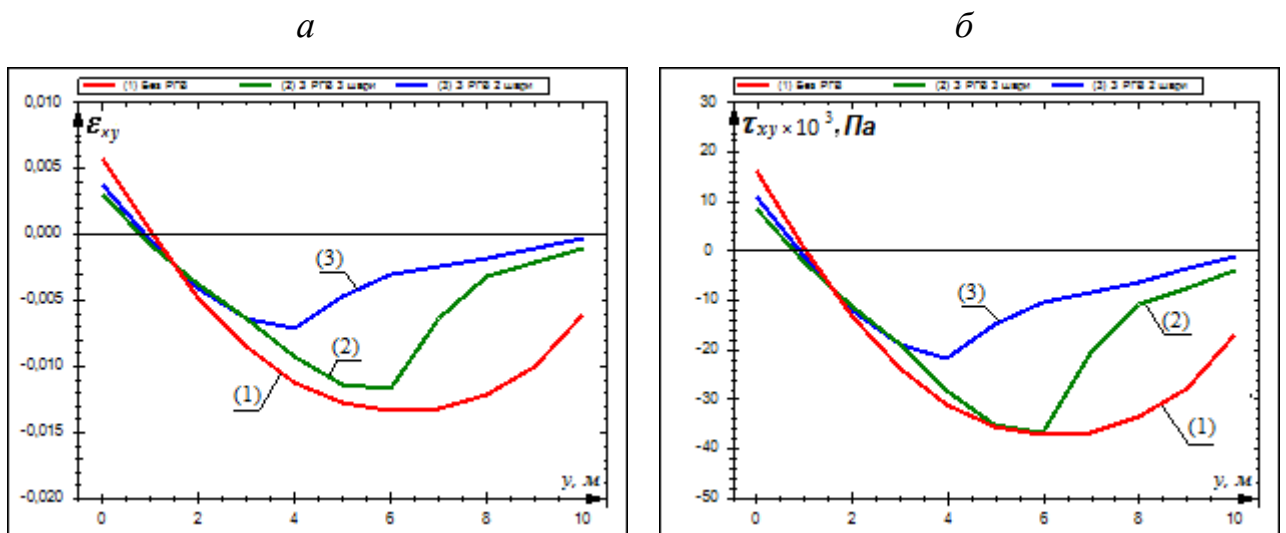


Рис. 4.15. Розподіли зміщень вздовж осей  $Ox$  (а) та  $Oy$  (б)



Рис. 4.16. Розподіли деформацій вздовж осей  $Ox$  (а) та  $Oy$  (б)Рис. 4.17. Розподіли напружень вздовж осей  $Ox$  (а) та  $Oy$  (б)Рис. 4.18. Розподіли дотичних деформацій  $\epsilon_{xy}$  (а) та дотичних напружень  $\tau_{xy}$  (б)

За результатами чисельних експериментів для багатошарового ґрунтового масиву з вільною поверхнею отримано наступні висновки (результати наведені для середніх значень отриманих величин):

Наявність вільної поверхні на глибині  $7\text{ м}$  у порівнянні з водонасиченим ґрунтовим масивом без вільної поверхні зменшує зміщення по осі  $Ox$  в 2,23 рази (рис. 4.15, *a*), збільшує зміщення по осі  $Oy$  в 1,87 рази (рис. 4.15, *b*), збільшує деформації по осі  $Ox$  в 4,77 рази (рис. 4.16, *a*), збільшує деформації по осі  $Oy$  в 2,13 разів (рис. 4.16, *b*), збільшує напруження по осі  $Ox$  в 1,87 разів (рис. 4.17, *a*), збільшує напруження по осі  $Oy$  в 1,61 рази (рис. 4.17, *b*), збільшує дотичні деформації у 2,35 рази (рис. 4.18, *a*), збільшує дотичні напруження у 2,04 рази (рис. 4.18, *b*).

Наявність вільної поверхні на глибині  $7\text{ м}$  у порівнянні при наявності вільної поверхні на глибині  $5\text{ м}$  збільшує зміщення по осі  $Ox$  у 2,73 рази (рис. 4.15, *a*), зменшує зміщення по осі  $Oy$  в 1,44 рази (рис. 4.15, *b*), збільшує деформації по осі  $Ox$  в 11,48 рази (рис. 4.16, *a*), збільшує деформації по осі  $Oy$  у 2,12 рази (рис. 4.16, *b*), збільшує напруження по осі  $Ox$  в 1,55 разів (рис. 4.17, *a*), збільшує напруження по осі  $Oy$  в 1,63 рази (рис. 4.17, *b*), збільшує дотичні деформації у 2 рази (рис. 4.18, *a*), збільшує дотичні напруження в 1,96 разів (рис. 4.18, *b*).

Графіки функцій  $U_i(\mathbf{X})$ ,  $V_i(\mathbf{X})$ ,  $\varepsilon_x^{(i)}(\mathbf{X})$ ,  $\varepsilon_y^{(i)}(\mathbf{X})$ ,  $\varepsilon_{xy}^{(i)}(\mathbf{X})$ ,  $\sigma_x^{(i)}(\mathbf{X})$ ,  $\sigma_y^{(i)}(\mathbf{X})$ ,  $\tau_{xy}^{(i)}(\mathbf{X})$ ,  $\mathbf{X} \in \Omega_i$ ,  $i = \overline{1, n}$  у перерізі площиною  $yOz$  при  $x = 10\text{ м}$  за наявності вільної поверхні на глибині  $7\text{ м}$  (з урахуванням тепло-масоперенесення; без тепло-масоперенесення; при наявності теплоперенесення; з урахуванням масоперенесення), а також аналіз отриманих результатів наведено в Додатку Л.

Таким чином, врахування тепло-масоперенесення при фільтрації сольових розчинів у неізотермічних умовах, наявність вільної поверхні та врахування різних механічних та фізико-хімічних властивостей шарів ґрунтового масиву значно змінюють розподіли вектора зміщень, компонент нормальних та дотичних деформацій і напружень.

### 4.3. Висновки до розділу 4

У даному розділі отримані наступні результати:

1. Сформульовано постановки задач НДС багат шарового фільтруючого ґрунтового масиву з урахуванням тепло-масоперенесення та наявності вільної поверхні в одно- та двовимірному випадках.

2. Використовуючи результати розділів 1–3, побудовано нові математичні моделі поставлених крайових задач у нелінійній постановці, які описуються системами диференціальних рівнянь рівноваги в формі Ламе для зміщень та нелінійних рівнянь параболічного типу, що містять першу похідну, з відповідними крайовими умовами та умовам і спряження ідеального контакту на межах областей для невідомих функцій.

3. Знайдено чисельні розв'язки вищевказаних крайових задач на основі узагальнення методу скінченних різниць для розв'язування системи рівнянь рівноваги в формі Ламе для зміщень ґрунту в розглядуваних областях, а також для чисельного розв'язування крайових задач тепло-масоперенесення для нелінійних рівнянь параболічного типу, що містять першу похідну.

4. Проведено ряд чисельних експериментів з дослідження впливу тепло-масоперенесення на деформаційні процеси багат шарового фільтруючого ґрунтового масиву. Зокрема, розглянуто приклади ґрунтового масиву, що складається з трьох шарів (глинистий водонасичений шар ґрунту, піщаний водонасичений шар та шар ґрунту в природному стані). Як показали результати чисельних експериментів, врахування тепло-масоперенесення, наявність вільної поверхні та врахування різних механічних та фізико-хімічних властивостей шарів ґрунтового масиву значно змінює розподіл вектора зміщень, компонент нормальних та дотичних деформацій та напружень. Зокрема, найбільших значень зміщення, напруження та деформації досягають у водонасичених шарах ґрунтового масиву, де наявний фільтраційний потік та тепло-масоперенесення.

Результати даного розділу опубліковані в роботах [52, 53, 58, 69, 70, 73, 153].

## ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота є завершеним науковим дослідженням, в якому поставлено та розв'язано актуальне та важливе наукове завдання математичного моделювання впливу тепло-масоперенесення при фільтрації сольових розчинів у неізотермічних умовах на деформаційні процеси ґрунтових масивів і основ, зокрема враховано залежності коефіцієнтів фільтрації, Ламе та модуля Юнга від концентрації сольових розчинів та температури, наявності вільної поверхні ґрунтових вод (наявності областей водонасиченого ґрунтового масиву та ґрунту, що знаходиться у природному стані), а також наявності областей ґрунту з різними механічними та фізико-хімічними властивостями. При цьому отримано такі основні результати та висновки:

1. Побудовано нові математичні моделі НДС ґрунтових масивів і основ у нелінійній постановці з урахуванням впливу тепло-масоперенесення при фільтрації сольових розчинів у неізотермічних умовах та залежностей коефіцієнтів Ламе і модуля Юнга від концентрації сольових розчинів та температури в одно- та двовимірному випадках. Розглянуто випадки водонасиченого ґрунтового масиву; ґрунтового масиву при наявності РГВ; ґрунтового масиву та основи ґрунтової греблі з вільною поверхнею; ґрунтового масиву внаслідок утворення депресійної лунки та багат шарового ґрунтового масиву з різними фізико-хімічними та механічними властивостями його шарів.

2. Виведено систему рівнянь рівноваги для зміщень ґрунту в формі Ламе на основі узагальнення закону Гука з урахуванням впливу тепло-масоперенесення при фільтрації сольових розчинів у неізотермічних умовах та залежностей коефіцієнтів Ламе, модуля Юнга від концентрації сольових розчинів та температури.

3. Отримано граничні умови та умови спряження для зміщень і напружень з урахуванням впливу тепло-масоперенесення та залежностей коефіцієнтів Ламе, модуля Юнга від концентрації сольових розчинів та температури.

4. Розвинено метод скінченних різниць чисельного розв'язування крайових задач тепло-масоперенесення для нелінійних рівнянь параболічного типу, що

містять першу похідну; чисельний метод конформних відображень складених областей з криволінійними фіксованими та вільними межами для чисельного розв'язування задач НДС ґрунтових масивів і основ; метод скінченних різниць для чисельного розв'язування системи рівнянь рівноваги в формі Ламе для зміщень ґрунту в розглядуваних областях. Розроблено обчислювальні алгоритми для реалізації відповідних різницевих схем чисельного розв'язування поставлених крайових задач та створено необхідний програмний комплекс.

5. Проведено серію чисельних експериментів, які показали значний вплив тепло-масоперенесення при фільтрації сольових розчинів у неізотермічних умовах, наявності вільної поверхні та багат шаровості ґрунтового масиву з різними фізико-хімічними та механічними властивостями в кожному з шарів на розподіл зміщень, нормальних та дотичних деформацій та напружень. Зокрема, врахування тепло-масоперенесення може змінювати значення компонент вектора зміщень, нормальних та дотичних деформацій і напружень у середньому в декілька разів у порівнянні з відповідними значеннями даних величин без урахування тепло-масоперенесення. На розподіл зміщень, нормальних та дотичних напружень і деформацій суттєво впливає тип ґрунту. При підвищенні рівня ґрунтових вод значення зміщень збільшуються, а при пониженні – зменшуються у водонасиченій області ґрунту. Аналогічні чисельні експерименти проведено для нормальних та дотичних деформацій і напружень. Отримані значення зміщень, нормальних та дотичних деформацій і напружень також показали суттєві зміни НДС в області водонасиченого ґрунту та ґрунту в природному стані як в ґрунтовій греблі, так і в ґрунтовому масиві при наявності водозабірних свердловин.

6. Практичне значення отриманих у дисертаційній роботі результатів полягає в проведенні математичного моделювання НДС ґрунтових масивів і основ при наявності в них різних процесів, знаходженні чисельних розв'язків важливих інженерно-практичних задач та проведенні чисельних експериментів з метою аналізу зміни НДС ґрунтових масивів і основ при наявності різних фізико-хімічних процесів у ґрунтах, дії техногенних факторів та зміни гідрогеологічних умов. Результати дисертаційних досліджень можуть бути використані гідротехніками,

інженерами-будівельниками при проектуванні, будівництві та подальшій експлуатації споруд цивільного будівництва, гідротехнічних та енергетичних об'єктів з метою попередження та уникнення аварійних ситуацій, прогнозуванні стійкості та надійності споруд, несучої здатності ґрунтових основ, на яких дані об'єкти планують будувати чи вже є побудовані, а також у навчальному процесі при читанні спецкурсів та виконанні кваліфікаційних, дипломних і магістерських робіт студентами інженерних та кібернетичних спеціальностей.

**СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ**

1. Акименко В. В. Моделирование процессов конвекции–диффузии на основе многомерного интегро-дифференциального уравнения с вырождающейся параболичностью / В. В. Акименко, А. Г. Наконечный, О. Ю. Трофимчук. // Кибернетика и системный анализ. – 2009. – С. 83–96.
2. Алтухов Е. В. Метод однородных решений в трехмерных задачах термоупругости для транспортных пластин / Е. В. Алтухов // Теор. и прикл. мех. – Киев, 2003. – № 37. – С. 8–13.
3. Антошкина Л. И. Математические модели в задачах водопользования: Учеб. пособие / Л. И. Антошкина, В. М. Багрий, Н. Н. Беляев, И. И. Дудникова, Е. Д. Коренюк; Днепропетр. нац. ун-т ж.д. трансп. им. В.Лазаряна. – Д. : ЧП Грек А. С., 2006. – 168 с.
4. Бездітний Б. П. Розв'язування одного класу задач для систем рівнянь конвективної дифузії / Б. П. Бездітний, А. А. Глущенко, Т. Л. Гординська // Тези Міжнар. конф. "Асимптотичні та якісні методи в теорії нелінійних коливань" (Третє Боголюбівські читання). – Київ : Ін-т математики НАН України, 1997. – С. 19–20.
5. Бейко И. В. Экстремальные модели для численного исследования оптимальных процессов в задачах теплопроводности при наличии погрешностей в исходной информации / И. В. Бейко // Аналитические, численные и аналоговые методы в задачах теплопроводности. – К. : Наук. думка, 1977. – С. 220–233.
6. Беляев Н. Н. Компьютерное моделирование динамики движения и загрязнения подземных вод / Н. Н. Беляев, Е. Д. Коренюк, В. К. Хрущ. – Д. : Наука и образование, 2001. – 156 с.
7. Блажевський С. Г. Термопружний стан багатошарових симетричних тіл [Текст] / С. Г. Блажевський, М. П. Ленюк. – К. : Ін-т математики НАН України, 2000. – 130 с.
8. Богаенко В. А. Аналіз численного моделирования динамики грунтового массива при неустановившейся напорной фильтрации / В. А. Богаенко, О. А. Марченко,

- Т. А. Самойленко // Управляющие системы и машины – 2014. – Вып. 4. – С. 33–40.
9. Богаенко В. О. Паралельні алгоритми моделювання процесу фільтраційної консолідації під дією двокомпонентного розчину / В. О. Богаенко // Математичне та комп'ютерне моделювання. Сер. Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. – 2011. – Вып. 5. – С. 20–35.
  10. Божидарник В. В. Двовимірні задачі теорії пружності й термопружності структурно-неоднорідних тіл / В. В. Божидарник. – Львів : Світ, 1998. – 352 с.
  11. Боли Б. Теория температурных напряжений / Б. Боли, Дж. Уэйнер. – М. : Мир, 1964. – 517 с.
  12. Бомба А. Я. Нелінійні задачі типу фільтрація-конвекція-дифузія-масообмін за умов неповних даних: монографія / А. Я. Бомба, В. І. Гаврилюк, А. П. Сафоник, О. А. Фурсачик. – Рівне : НУВГП, 2011. – 276 с.
  13. Бомба А. Я. Нелінійні математичні моделі процесів геогідродинаміки / А. Я. Бомба, В. М. Булавацький, В. В. Скопецький. – К. : Наук. думка, 2007. – 291 с.
  14. Бочеве́р Ф. М. Основы гидрогеологических расчетов / Ф. М. Бочеве́р, И. В. Гармонов, А. В. Лебедев, В. М. Шестаков. – М. : Недра, 1965. – 307 с.
  15. Брилинг И. А. Влияние давления и температуры на фильтрационные свойства глин // Связанная вода в дисперсных системах. – Вып. 4. – Москва : Изд-во МГУ, 1977. – С. 82–89.
  16. Бугай Д. А. О численном решении задачи конвективной диффузии солей в основании гидротехнических сооружений / Д. А. Бугай, Г. Е. Мистецкий, Б. С. Шержуков // Гидромеханика. – 1990. – № 62. – С. 5–9.
  17. Булавацький В. М. Дробно-дифференціальні математическіє моделі динаміки неравновесних геоміграційних процесів і задачі с нелокальними граничними умовами / В. М. Булавацький // Кибернетика і системний аналіз. – 2014. – № 1. – С. 93–101.
  18. Булавацький В. М. Математическе моделювання динаміки аномальних міграційних полів в рамках моделі розподіленого порядку /



- В. М. Булавацкий, Ю. Г. Кривонос // Кибернетика и системный анализ. – 2013. – № 3. – С. 74–81.
19. Булавацкий В. М. Математическое моделирование динамики геохимических процессов загрязнения водоносных горизонтов / В. М. Булавацкий, В. А. Богаенко, В. В. Скопецкий // УсиМ – 2009. – № 4. – С. 60–66.
  20. Булавацкий В. М. Математическое моделирование динамики одного неравновесного диффузионного процесса на основе интегро-дифференцирования дробного порядка / В. М. Булавацкий, А. В. Гладкий // Кибернетика и системный анализ. – 2015. – № 1. – С. 155–161.
  21. Булавацкий В. М. Математическое моделирование процесса фильтрационной консолидации с учетом релаксационных явлений / В. М. Булавацкий, В. В. Скопецкий // Пробл. управления и информатики. – 2006. – № 3. – С. 48–56.
  22. Булавацкий В. М. Неклассическая математическая модель геоинформатики для решения задач динамики неравновесных неизотермических геофильтрационных полей / В. М. Булавацкий // Кибернетика и системный анализ. – 2011. – № 6. – С. 79–88.
  23. Булавацкий В. М. Системный подход к проблеме математического моделирования процесса фильтрационной консолидации / В. М. Булавацкий, В. В. Скопецкий // Кибернетика и системный анализ. – 2006. – № 6. – С. 73–81.
  24. Булавацкий В. М. Некласичні математичні моделі процесів тепло- та масопереносу / В. М. Булавацький, Ю. Г. Кривонос, В. В. Скопецкий. – К. : Наук. думка, 2005. – 282 с.
  25. Бурак Я. Й. Вихідні положення математичної моделі гетеродифузного переносу радіонуклідів у приповерхневих шарах Землі / Я. Й. Бурак, Э. Я. Чапля // Доп. НАН України. – 1993. – № 10. – С. 59–63.
  26. Бурак Я. И. Оптимизация переходных процессов в термоупругих оболочках / Я. И. Бурак, Ю. Д. Зозуляк, Б. В. Гера. – Киев : Наук. думка, 1984. – 160 с.
  27. Величко І. Г. Плоска термопружна деформація багатосарової основи / І. Г. Величко, І. Г. Ткаченко // Вісник Дніпропетровського ун-ту. Механіка. – 2004. – Вип. 8. – Т. 1. – № 6. – С. 154–161.

28. Величко І. Г. Просторова та осесиметрична термопружна деформація багат шарової основи / І. Г. Величко, І. Г. Ткаченко // Вісник Дніпропетровського ун-ту. Механіка. – 2004. – Вип. 8. – Т. 2.
29. Веригин Н. Н. Гидродинамические и физико-химические свойства горных пород / Н. Н. Веригин, С. В. Васильев, В. С. Саркисян, Б. С. Шержуков. – М. : Недра, 1977. – 272 с.
30. Веригин Н. Н. Диффузия и массообмен при фильтрации жидкостей в пористых средах / Н. Н. Веригин, Б. С. Шержуков // Развитие исследований по теории фильтрации в СССР (1917-1967). – М. : Наука, 1969. – С. 237–313.
31. Веригин Н. Н. Консолидация грунтов в основании плотин/ Н. Н. Веригин // Труды к VII Международному конгрессу по механике грунтов и фундаментостроению. – М. : Стройиздат. – 1969. – С. 102–110.
32. Веригин Н.Н. Методы лабораторного определения параметров диффузии и сорбции при фильтрации в пористых средах / Н.Н. Веригин, Н.К. Голованова // Тр. ин-та ВОДГЕО, 1971. – 29. – С. 28–34.
33. Вигак В. М. Управление температурными напряжениями и перемещениями / В. М. Вигак. – К. : Наук. думка, 1988. – 312 с.
34. Власюк А. П. Автоматическое построение конформных и квазиконформных отображений четырехугольных областей с помощью разностных сеток с “плавающими” узлами / А. П. Власюк, В. Г. Михальчук. – Киев, 1989. – 55 с. – (Препр. АН УССР. Ин-т математики; 89.79).
35. Власюк А. П. Автоматическое построение конформных и квазиконформных отображений двухсвязных и трехсвязных областей / А. П. Власюк, В. Г. Михальчук. – Киев, 1991. – 56 с. – (Препр./АН Украины. Ин-т математики; 91.57).
36. Власюк А. П. Експериментальні дослідження деяких параметрів фільтрації сольових розчинів в піщаних ґрунтах / А. П. Власюк, М. Т. Кузло // Меліорація і водне господарство. Міжвідомчий темат. наук. зб. – К., 2000. – Вип. 87. – С. 43–46.

37. Власюк А. П. Математичне моделювання вертикальної міграції радіонуклідів в каталітичному пористому середовищі випадку / А. П. Власюк, В. В. Жуковський // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки. №1, 2015. – С. 89–95.
38. Власюк А. П. Математичне моделювання консолідації ґрунтів при фільтрації сольових розчинів в неізотермічних умовах: [монографія] / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк. – Рівне : Нац. ун-т водн. госп-ва та природокористування, 2008. – 416 с.
39. Власюк А. П. Математичне моделювання переносу сольових розчинів при фільтрації підземних вод у ґрунтових масивах: Монографія / А. П. Власюк, О. П. Остапчук // – Рівне : НУВГП, 2015. – 214 с.
40. Власюк А. П. Монотонна різницева схема для нелінійного одновимірного рівняння параболічного типу, що містить першу похідну / А. П. Власюк, О. П. Остапчук, О. М. Степанченко // Вісник Київського університету. Сер. фіз.-мат. наук. – К., 2005. – Вип. 2. – С. 188–197.
41. Власюк А. П. Про деякі нові математичні моделі задач розчинення гірських порід / А. П. Власюк, О. М. Степанченко // Вісник Нац. ун-ту водн. госп-ва та природокористування, 2005. – Вип. 4(32). – Ч. 2. – С. 49–55.
42. Власюк А. П. Розв'язування одновимірної стаціонарної задачі НДС ґрунтових масивів в умовах масоперенесення / А. П. Власюк, Є. І. Катерина // Вісник Львів. ун-ту. Сер. Прикл. матем. та інформ., 1999. – Вип. 1. – С. 50–55.
43. Власюк А. П. Теоретичне дослідження процесів розчинення та вимивання солей і карстових порід при фільтрації підземних вод в областях з криволінійними та вільними границями/ А. П. Власюк. – Дис...д-ра техн. наук: 05.13.02. – Рівне, 1996. – 368 с.
44. Власюк А. П. Фільтраційна консолідація глинистих ґрунтів при наявності масопереносу солей / А. П. Власюк, О. В. Жеребятєв // Вісник УДАВГ.– Рівне, 1998. – С. 40–43.
45. Власюк А. П. Чисельне розв'язування задач консолідації та фільтраційного руйнування ґрунтів в умовах тепло-масопереносу методом радіальних базисних

функцій: [монографія] / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк. – Рівне : Нац. ун-т водн. госп-ва та природокористування, 2010. – 277 с.

46. Власюк А. П. Чисельне розв'язання задачі розчинення і винесення пластових солей з основи гідротехнічних споруд / А. П. Власюк // Доп. НАН України. – 1995. – № 8. – С. 37–39.
47. Власюк А. П. Чисельне розв'язання одного класу задач з вільними межами в криволінійних чотирикутниках для еліптичних систем рівнянь / А. П. Власюк, В. Г. Михальчук. – Київ, 1994. – 23 с. – (Препр. / НАН України. Ін-т математики; 94.36).
48. Власюк А. П. Комп'ютерне моделювання напружено-деформованого стану ґрунтового масиву внаслідок утворення депресійної лунки в неізотермічних умовах / А. П. Власюк, Н. А. Федорчук // Тез. доп. Міжнар. науково-практичної конф. «Проблеми розвитку вищої школи та економіки в ХХІ столітті». – Рівне : РВЦ МЕНУ імені академіка Степана Дем'янчука, 2013. – С. 80–82.
49. Власюк А. П. Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния основания грунтовой плотины со свободной поверхностью под влиянием тепло- и массопереноса в двумерном случае / А. П. Власюк, Н. А. Жуковская // Инженерно-физический журнал. – 2015. – Т. 88, № 2. – С. 324–335.
50. Власюк А. П. Математичне моделювання впливу тепло-масоперенесення на напружено-деформований стан ґрунтової основи гідротехнічного об'єкта під флютбетом зі шпунтом / А. П. Власюк, Н. А. Федорчук // Тез. доп. XIV Міжнар. наук. конф. імені академіка М. Кравчука. – Київ, 2012. – С. 113–114.
51. Власюк А. П. Математичне моделювання впливу тепло-масоперенесення на напружено-деформований стан ґрунтового масиву з вільною поверхнею в тривимірному випадку / А. П. Власюк, Н. А. Жуковська // Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики. Збірник наукових праць. – Львів : Львівський національний університет імені Івана Франка. – 2015. – С. 87–88.
52. Власюк А. П. Математичне моделювання впливу тепло-масопереносу на напружено-деформований стан багат шарового ґрунтового масиву при

- наявності рівня ґрунтових вод / А. П. Власюк, Н. А. Федорчук // Тез. Міжнар. конф. «Прийняття рішень в умовах невизначеності». – Київ-Рівне, 2008. – С. 73–75.
53. Власюк А. П. Математичне моделювання впливу тепло-масопереносу на напружено-деформований стан багат шарового ґрунтового масиву при наявності рухомої поверхні рівня ґрунтових вод / А. П. Власюк, Н. А. Федорчук // Тез. доп. XIII Міжнар. наук. конф. імені академіка М. Кравчука. – Київ, 2010. – С. 92.
54. Власюк А. П. Математичне моделювання впливу тепло-масопереносу на напружено-деформований стан ґрунтового масиву в процесі руху вільної поверхні ґрунтових вод / А. П. Власюк, Н. А. Федорчук // Тез. доп. XVII Міжнар. наук. конф. «Прийняття рішень в умовах невизначеності». – Східниця, 2011. – С. 46–48.
55. Власюк А. П. Математичне моделювання зміни напружено-деформованого стану ґрунтового масиву з вільною поверхнею під впливом тепло-масоперенесення / А. П. Власюк, Н. А. Федорчук // Тез. Всеукр. наук. конф. «Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів». – Рівне, 2013. – С. 45.
56. Власюк А. П. Математичне моделювання напружено-деформованого стану ґрунтової основи гідротехнічного об'єкта в процесі тепло-масоперенесення / А. П. Власюк, Н. А. Федорчук // Вісник Київського ун-ту. Сер. фіз.-матем. науки. – 2013. – Вип. 3. – С. 256–262.
57. Власюк А. П. Математичне моделювання напружено-деформованого стану ґрунтового масиву з урахуванням тепло-масоперенесення в двовимірному випадку / А. П. Власюк, Н. А. Жуковська, Д. В. Каюн, С. О. Бабанов // Вісник Нац. ун-ту водн. госп-ва та природокористув. Сер. технічні науки. – 2014. – Вип. 4 (68). – С. 462–472.
58. Власюк А. П. Математичне моделювання напружено-деформованого стану багат шарового ґрунтового масиву в умовах теплопереносу при наявності рівня

грунтових вод / А. П. Власюк, Н. А. Федорчук // Тез. XII Міжнар. наук. конф. імені академіка М. Кравчука. – Київ, 2008. – С. 73.

59. Власюк А. П. Математичне моделювання напружено-деформованого стану ґрунтового масиву в умовах тепло-масопереносу / А. П. Власюк, Н. А. Федорчук // Тез. XV Всеукр. наук. конф. «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики». – Львів : Вид-во ЛНУ, 2008. – С. 53.
60. Власюк А. П. Математичне моделювання напружено-деформованого стану ґрунтового масиву внаслідок утворення депресійної лунки при наявності тепло-масопереносу / А. П. Власюк, Н. А. Федорчук // Тез. доп. XVI Всеукр. наук. конф. «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики». – Львів : Вид-во ЛНУ, 2009. – С. 50–51.
61. Власюк А. П. Математичне моделювання напружено-деформованого стану в основі гідротехнічного об'єкта при наявності тепло-масопереносу / А. П. Власюк, Н. А. Федорчук // Тез. доп. XVIII Міжнар. наук. конф. «Прийняття рішень в умовах невизначеності». – Ялта, 2011. – С. 51–53.
62. Власюк А. П. Математичне моделювання напружено-деформованого стану ґрунтового масиву з врахуванням тепло-масоперенесення у тривимірному випадку / А. П. Власюк, Н. А. Жуковська // Тез. XXV Міжнар. наук. конф. «Прийняття рішень в умовах невизначеності». – Східниця, 2015. – С. 155–157.
63. Власюк А. П. Математичне моделювання напружено-деформованого стану ґрунтового масиву з вільною поверхнею під впливом тепло-масоперенесення розчинених у фільтраційному потоці речовин у двовимірному випадку / А. П. Власюк, Н. А. Жуковська // Вісник Нац. ун-ту водн. госп-ва та природокористув. Сер. технічні науки. – 2015. – Вип. 3 (71). – Ч. 2. – С. 408–416.
64. Власюк А. П. Математичне моделювання одновимірної задачі напружено-деформованого стану ґрунтового масиву в умовах тепло-масоперенесення при фільтрації сольових розчинів / А. П. Власюк, Н. А. Федорчук // Вісник Київського ун-ту. Сер. фіз.-матем. науки. – 2012. – Вип. 1. – С. 131–136.

65. Власюк А. П. Про одну задачу моделювання впливу тепло-масоперенесення на напружено-деформований стан ґрунтового масиву у тривимірному випадку / А. П. Власюк, Н. А. Жуковська // Тез. Міжнар. наук. конф. «Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів». – Рівне, 2015. – С. 43.
66. Власюк А. П. Про одну задачу моделювання напружено-деформованого стану ґрунтового масиву в умовах тепло-масоперенесення / А. П. Власюк, Н. А. Федорчук // Тез. доп. XVII Всеукр. наук. конф. «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики» присвяченої 350-річчю Львівського національного університету імені Івана Франка. – Львів : Вид-во ЛНУ, 2011. – С. 26.
67. Власюк А. П. Чисельне дослідження впливу тепло-масопереносу на напружено-деформований стан ґрунтового масиву в двохвимірному випадку / А. П. Власюк, Н. А. Федорчук // Тез. Міжнар. конф. «Прийняття рішень в умовах невизначеності». – Крим (Новий Світ), 2008. – С. 66–68.
68. Власюк А. П. Чисельне дослідження впливу тепло-масопереносу на напружено-деформований стан ґрунтового масиву при наявності рухомої вільної поверхні ґрунтових вод / А. П. Власюк, Н. А. Федорчук // Тез. доп. XVI Міжнар. наук. конф. «Прийняття рішень в умовах невизначеності». – Ялта, 2010. – С. 38–40.
69. Власюк А. П. Чисельне моделювання впливу тепло-масоперенесення на напружено-деформований стан основи багат шарової ґрунтової греблі / А. П. Власюк, Н. А. Федорчук // Тез. доп. XIX Міжнар. наук. конф. «Прийняття рішень в умовах невизначеності». – Мукачево, 2012. – С. 70–72.
70. Власюк А. П. Чисельне моделювання напружено-деформованого стану багат шарового ґрунтового масиву за наявності рівня ґрунтових вод та впливу тепло-масоперенесення в одновимірному випадку / А. П. Власюк, Н. А. Федорчук // Математичне та комп'ютерне моделювання. Сер. технічні науки: зб. наук. праць. – 2013. – Вип. 8. – С. 31–44.
71. Власюк А. П. Чисельне моделювання напружено-деформованого стану основи ґрунтової греблі при наявності тепло-масопереносу / А. П. Власюк,

- Н. А. Федорчук // Тез. доп. Міжнар. наук. конф. «Прийняття рішень в умовах невизначеності». – Кам'янець-Подільський, 2009. – С. 48–49.
72. Власюк А. П. Числове моделювання впливу тепло-масоперенесення на напружено-деформований стан ґрунтового масиву внаслідок утворення депресійної лунки / А. П. Власюк, Н. А. Федорчук // Вісник Тернопільського національного технічного університету. – 2014. – № 1 (73). – С. 224–237.
73. Власюк А. П. Числове моделювання впливу тепло-масоперенесення на напружено-деформований стан багат шарового ґрунтового масиву / А. П. Власюк, Н. А. Федорчук // Тез. доп. XVIII Всеукр. наук. конф. «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики». – Львів : Вид-во ЛНУ, 2012. – С. 60.
74. Власюк І. А. Математичне моделювання напружено-деформівного стану ґрунтових масивів у процесі руху вільної поверхні / І. А. Власюк, М. Т. Кузло // Тези Всеукр. наук. конф. «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики». – Львів, 2004. – С. 36.
75. Власюк І. А. Про одну задачу оцінки напружено-деформівного стану шару ґрунту із врахуванням рівня ґрунтових вод / І. А. Власюк, М. Т. Кузло // Тез. доп. Міжнар. школи-семінару «Прогнозування та прийняття рішень в умовах невизначеності». – Тернопіль, 2004. – С. 222–224.
76. Герсеванов Н. М. Основы динамики грунтовой массы / Н. М. Герсеванов. – М.-Л. : ОНТИ, 1937. – 242 с.
77. Гладкий А. В. Алгоритмизация и численный расчёт фильтрационных схем / А. В. Гладкий, И. И. Ляшко, Г. Е. Мистецкий. – Киев : Вища школа, 1981. – 288 с.
78. Гольдштейн М. Н. Механические свойства грунтов / М. Н. Гольдштейн. – М., 1971. – 321 с.
79. Гончарук В. Є. Математичні моделі та експериментальні дані про поширення радіонуклідів у ґрунтах: монографія / В. Є. Гончарук, Г. Т. Ленце, Є. Я. Чапля, О. Ю. Чернуха. – Львів : Видавництво «Растр-7», 2014. – 244 с.



80. Гурин, В. А., Радчук, М. І. (2013) Оцінка надійності ребристих плит кріплень укусу водогосподарських об'єктів. Вісник Національного університету водного господарства та природокористування (1(61)). – Рр. 55–62.
81. Давидок А. Є. Комп'ютерне моделювання взаємозв'язаних теплових і дифузійних процесів з урахуванням розпаду речовини у випадково неоднорідній шаруватій смузі за бета-розподілу фаз / А. Є. Давидок, В. Є. Гончарук, О. Ю. Чернуха // Фізика і хімія твердого тіла. – 2014. – Т. 15, № 4. – С. 708–720.
82. Дейнека В. С. Идентификация кинетических параметров однокомпонентного адсорбционного массопереноса в микропористых каталитических средах / В. С. Дейнека, М. Р. Петрик, Д. М. Михалик // Проблемы управления и информатики. – 2011. – № 2. – С. 12–25.
83. Дейнека В. С. Модели и методы решения задач с условиями сопряжения / В. С. Дейнека, И. В. Сергиенко, В. В. Скопецкий. – К. : Наукова думка, 1998. – 615 с.
84. Зарецкий Ю. К. Теория консолидации грунтов / Ю. К. Зарецкий. – М. : Наука, 1967. – 270 с.
85. Зарецкий Ю. К. Статика и динамика грунтовых плотин / Ю. К. Зарецкий, В. М. Ломбардо. – М. : Энергоатомиздат, 1983. – 256 с.
86. Иванов П. Л. Грунты и основания гидротехнических сооружений / П. Л. Иванов. – Механика грунтов: Учеб. для гидротехн. спец. вузов. – М. : Высшая школа, 1991. – 447 с.
87. Коваленко А. Д. Термоупругость / А. Д. Коваленко. – К. : Вища школа, 1975. – 216 с.
88. Ковальчук П. І. Моделювання і прогнозування стану навколишнього середовища: Навч. посібник для студ. вузів / П. І. Ковальчук. – Київ : Либідь, 2003. – 207 с.
89. Колосов Г. В. Об одном приложении теории функций комплексного переменного к плоской задаче математической теории упругости / Г. В. Колосов. – Юрьев : Типография К. Маттисена, 1909. – 187 с.

90. Кривень В. А. Антиплоска деформація ідеально пружно-пластичного тіла з жорстким прямокутним включенням / В. А. Кривень, О. Б. Гнатюк, Р. С. Гром'як // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2000. – Т. 36, № 6. – С. 19–23.
91. Кузло М. Т. Дослідження впливу концентрації сольових розчинів на деформаційні характеристики ґрунтів / М. Т. Кузло, І. А. Філатова // Гідромеліорація та гідротехнічне будівництво. Зб. наук. праць. Вип. 31. – Рівне : НУВГП, 2007. – С. 175–182.
92. Кузло М. Т. Інженерне ґрунтознавство та механіка ґрунтів / М. Т. Кузло. – Навч. посібник. – Рівне : НУВГП, 2011. – 252 с.
93. Кузло М. Т. Моделювання деформацій ґрунтових масивів при зміні гідрогеологічних умов та дії техногенних факторів: автореф. дис. ... д-ра техн. наук : 05.23.02 / М. Т. Кузло ; Київ. нац. ун-т буд-ва і архітектури. – Київ, 2014. – 34 с.
94. Кузло М. Т. Про деякі математичні моделі напружено-деформованого стану ґрунтових масивів в процесі руху вільної поверхні ґрунтових вод / М. Т. Кузло, І. А. Філатова // Вісник Нац. ун-ту водн. госп-ва та природокористув. – Рівне, 2005. – Вип. 2(30). – С. 282–287.
95. Лаврик В. И. Конформные отображения физико-топологических моделей / В. И. Лаврик, В. П. Фильчакова, А. А. Яшин. – К. : Наукова думка, 1990. – 376 с.
96. Лаврик В. И. Некоторые задачи фильтрации и массопереноса в неоднородных анизотропных пористых средах / В. И. Лаврик, А. П. Власюк. – Киев, 1985. – 59 с. – (Препр./АН УССР. Ин-т математики; 85.15).
97. Лаврик В. И. Об асимптотическом приближении решений некоторых задач массопереноса при фильтрации в неоднородной анизотропной среде / В. И. Лаврик, А. Я. Бомба, А. П. Власюк – Киев, 1985. – 17 с. – (Препр. / АН УССР. Ин-т математики; 85.72).
98. Лаврик В. И. Об одном приближенном методе решения задач конвективного массопереноса при плановой фильтрации подземных вод / В. И. Лаврик, А. Я. Бомба // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1980. – № 5. – С. 47–51.

99. Лаврик В. І. Теоретичні дослідження процесів забруднення і засолення підземних вод / В. І. Лаврик // Вісник АН УРСР. – 1979. – № 2. – С. 63–70.
100. Лейбензон Л. С. Курс теории упругости / Л. С. Лейбензон. – Москва-Ленинград : ОГИЗ, 1947. – 464 с.
101. Лукнер Л. Моделирование миграции подземных вод / Л. Лукнер, В. М. Шестаков. – М. : Недра, 1986. – 208 с.
102. Лыков А. В. Теория тепло- и массопереноса / А. В. Лыков, Ю. А. Михайлов. – М. : Госэнергоиздат, 1963. – 536 с.
103. Лыков А. В. Теория теплопроводности / А. В. Лыков. – М. : Высш. школа, 1967. – 600 с.
104. Ляшко И. И. Некоторые вопросы численного решения задачи о напряженно-деформированном состоянии грунтовых фильтрующих плотин / И. И. Ляшко, В. В. Скопецкий, В. С. Дейнека и др. // Изв. ВНИИГ. – 1977. – 198. – С. 12–19.
105. Ляшко И. И. Численное решение задач тепло и массопереноса в пористых средах / И. И. Ляшко, Л. И. Демченко, Г. Е. Мистецкий. – К. : Наук. думка, 1991. – 264 с.
106. Ляшко С. И. Моделирование и оптимизация подземного массопереноса / С. И. Ляшко, Д. А. Ключин, А. С. Тригуб. – К. : Наук. думка, 1998. – 239 с.
107. Мандзак Т. І. Математичне моделювання і числовий аналіз адвекції-дифузії у неоднорідних середовищах: монографія / Т. І. Мандзак, Я. Г. Савула. – Л. : Сплайн, 2009. – 148 с.
108. Мартинюк П. М. Математичне моделювання консолідації ґрунтів з урахуванням техногенного впливу та комплексу фізико-хімічних процесів / П. М. Мартинюк // Дис. канд техн. наук: 01.05.02. – Тернопіль, 2015.
109. Мартинюк П. М. Теорія систем та математичне моделювання: навч. посібник / П. М. Мартинюк, Н. А. Федорчук. – Рівне : Нац. ун-т водн. госп-ва та природокористування, 2010. – 225с.
110. Методы прогноза солевого режима грунтов и грунтовых вод / Под ред. Н. Н. Веригина. – М. : Колос, 1979. – 336 с.

111. Мирцхулава Ц. С. Надежность гидромелиоративных сооружений. – М. : Колос, 1974. – 279 с.
112. Мистецкий Г. Е. Гидростроительство. Автоматизация расчета массопереноса в почвогрунтах / Г. Е. Мистецкий. – Киев : 1985. – 185 с.
113. Никитенко Н. И. Теория тепломассопереноса / Н. И. Никитенко. – Киев : Наук. думка, 1983. – 352 с.
114. Николаевский В. Н. Конвективная диффузия в пористых средах / Николаевский В. Н. // Прикл. математика и механика. – 1959. – Т. 23, вып. 6. – С. 1042–1050.
115. Нумеров С. Н. Диффузия растворимых веществ в основаниях гидротехнических сооружений / С. Н. Нумеров, А. Н. Патрашев // Тр. Ленинград. политехн. ин-та. – 1947. – № 4. – С. 165–169.
116. Окрепкий Б. С. Визначення температурного поля в системі тіл циліндр-шар / Б. С. Окрепкий, Б. Г. Шелестовський // Вісник ТНТУ – Тернопіль : ТНТУ, 2015. – Том 77. – № 1. – С. 288–299.
117. Олейник А. Я. О некоторых математических моделях подземной гидродинамики / А. Я. Олейник, В. И. Лаврик // Математизация знаний и научно-технический прогресс. – Киев : Наук. думка, 1975. – С. 107–119.
118. Олійник О. Я. Моделювання сумісного вилучення органічних забруднень і азоту при очистці стічних вод біофільтрацією / О. Я. Олійник, А. М. Кравчук, Д. А. Келарева // Доповіді Національної академії наук України. – 2012. – № 4. – С. 180–183.
119. Папкович П. Ф. Теория упругости / П. Ф. Папкович. – Оборонгиз, 1939. – 642 с.
120. Патрашев А. Н. Диффузия солей при одномерной фильтрации / Н. Х. Арутюнян, А. Н. Патрашев // Изв. ВНИИГ. – 1941. – Т. 30. – С. 64–77.
121. Петрик М. Р. Высокоскоростные методы идентификации параметров моделей фильтрации-консолидации сжимаемых сред влагонасыщенных микропористых частиц / М. Р. Петрик // Проблемы управления и информатики. – 2016. – № 1. – С. 18–31.

122. Петрик М. Р. Математическое моделирование массопереноса в симметрических неоднородных и нанопористых средах с системой n-интерфейсных взаимодействий / М. Р. Петрик // Кибернетика и системный анализ. – 2007. – № 1. – С. 114–134.
123. Петрик М. Р. Математическое моделирование нелинейной конкурентивной двухкомпонентной диффузии в среде нанопористых частиц / М. Р. Петрик, Ж. Фрессард // Проблемы управления и информатики. – 2009. – № 2. – С. 48–65.
124. Подстригач Я. С. Термоупругость тел неоднородной структуры / Я. С. Подстригач, В. А. Ломакин, Ю. М. Коляно. – М. : Наука, 1984. – 368 с.
125. Подстригач Я. С. Термоупругость тонких оболочек / Я. С. Подстригач, Р. Н. Швец. – Киев : Наук. думка, 1978. – 344 с.
126. Подстригач Я. С. Термоупругость электропроводных тел / Я. С. Подстригач, Я. И. Бурак, А. Р. Гачкевич, Л. В. Чернявская. – Киев : Наук. думка, 1977. – 248 с.
127. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод / П. Я. Полубаринова-Кочина. – М. : Наука, 1977. – 664 с.
128. Поляков В. Л. К расчету фильтрации со свободной поверхностью / В. Л. Поляков // Теория и расчеты фильтрации. – Киев : Наук. думка, 1980. – С. 46–56.
129. Поляков В. Л. Об обобщенном учете влияния фильтрационных деформаций на действие дренажа / В. Л. Поляков // Прикладна гідромеханіка. – 2010. – Т. 12, № 4. – С. 71–80.
130. Процюк Б. В. Тривимірні статистичні та квазістатистичні задачі термопружності для шаруватих тіл із плоско паралельними границями / Б. В. Процюк // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2003. – Т. 46, № 2. – С. 96–106.
131. Самарский А. А. Разностные методы для эллиптических уравнений / А. А. Самарский, В. Б. Андреев. – М. : Наука, 1976. – 352 с.
132. Самарский А. А. Устойчивость разностных схем / А. А. Самарский, А. В. Гулин. – М. : Наука, 1973. – 356 с.
133. Самарский А. А. Численные методы математической физики / А. А. Самарский, А. В. Гулин. – М. : Наука, 2003. – 316 с.

134. Самуль В. И. Основы теории упругости и пластичности / В. И. Самуль // Учеб. пособие для студентов вузов – 2-е изд., перераб. – М. : Высш. школа, 1982. – 264 с.
135. Сергеев Е. М. Грунтоведение / Под. ред. Е. М. Сергеева. – М. : Изд-во МГУ, 1983. – 392 с.
136. Сергиенко И. В. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах / И. В. Сергиенко, В. В. Скопецкий, В. С. Дейнека. – К. : Наукова думка, 1991. – 432 с.
137. Сергиенко И. В. Чисельне визначення впливу протифільтраційних елементів на деформацію основ гравітаційних гребель / И. В. Сергиенко, В. В. Скопецкий, В. С. Дейнека // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1989. – № 10. – С. 51–54.
138. Сергієнко І. В. Високопродуктивні методи ідентифікації параметрів компетитивної дифузії в неоднорідних середовищах нанопористих частинок / І. В. Сергієнко, М. Р. Петрик, Ж. Фрессар, С. Леклерк // Кибернетика и системный анализ. – 2015. – Т. 51, № 4. – С. 44–61.
139. Сергієнко І. В. Математичне моделювання масопереносу в середовищах частинок нанопористої структури / І. В. Сергієнко, М. Р. Петрик, О. М. Хіміч, Д. Кане, Д. М. Михалик, Д. Леклерк, Ж. Фресар. – Київ : Національна академія наук України, Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова, 2014. – 204 с.
140. Степанченко О. М. Математичне моделювання процесів розчинення та вилуговування водорозчинних порід з основ та фундаментів гідротехнічних споруд / О. М. Степанченко // Дис. канд. техн. наук: 01.05.02. – Тернопіль, 2013.
141. Стефанишин Д. В. Некоторые результаты оценки вероятности аварии на плотине Бурейской ГЭС / Д. В. Стефанишин // Известия ВНИИГ им. Б.Е. Веденеева. 2008. – Т. 251. – С. 10–17.
142. Стефанишин Д. В. Прогнозирование аварийности проектируемых и строящихся плотин на основе результатов статистического анализа произошедших аварий / Д. В. Стефанишин // Известия ВНИИГ им. Б.Е. Веденеева. 2008. – Т. 251. – С. 3–9.
143. Сулим Г. Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями : монографія / Г. Т. Сулим; НАН України.

- Ин-т приклад. пробл. механіки та математики ім. Я.С. Підстригача, Львів. нац. ун-т ім. І. Франка, Наук. т-во ім. Шевченка. – Л., 2007. – 716 с.
144. Сяський А. О. Механіка суцільного середовища : навч. посіб. / А. О. Сяський, С. М. Бабич. – Рівне : РДГУ, 2007. – 151 с.
145. Тер-Мартиросян З. Г. Напряженно-деформированное состояние массивов многофазных грунтов в прикладных задачах геомеханики в строительстве / З. Г. Тер-Мартиросян. – Докт. диссертация. МИСИ, 1977.
146. Тимошенко С. П. Теория упругости / С. П. Тимошенко, Дж. Гудьер. – М. : Наука, 1975. – 576 с.
147. Ткаченко І. Г. Двовимірна мішана задача термопружності для багатопшарової основи / І. Г. Ткаченко // Прикладні пробл. механіки і математики. – 2005. – Вип. 3. – С. 70–78.
148. Трофимчук А. Н. Динамика пористоупругих насыщенных жидкостью сред / А. Н. Трофимчук, А. М. Гомилко, О. А. Савицкий. – К. : Наукова думка, 2003. – 232 с.
149. Трофимчук А. Н. Надежность систем сооружение-грунтовое основание в сложных инженерно-геологических условиях / А. Н. Трофимчук, В. Г. Черный, Г. И Черный. – К. : Полиграфконсалтинг. – 2006. – 248 с.
150. Трофимчук А. Н. Сейсмостойкость сооружений с учетом их взаимодействия с грунтовым основанием / А. Н. Трофимчук. – К. : ООО «Полиграфконсалтинг». – 2004. – 72 с.
151. Трофимчук О. М. Дослідження динаміки фундаментів на складних основах / О. М. Трофимчук, О. А. Савицький // Будівельні конструкції. – 2013. – Вип. 79. – С. 25–30.
152. Трофимчук О. М. Практичне відпрацювання методики оцінки і прогнозу зміни складних гідрогеологічних та інженерно-геологічних процесів [Текст] / О. М. Трофимчук, Ю. І. Калюх, Г. С. Глебчук // Наука та інновації = Science and Innovation. – 2012. – № 4. – С. 17–24.
153. Федорчук Н. А. Математичне моделювання напружено-деформованого стану багатопшарового ґрунтового масиву з рухомою вільною поверхнею під впливом

- тепло-масоперенесення / Н. А. Федорчук, Д. М. Бормат // Вісник Навчально-наукового інституту автоматики, кібернетики та обчислювальної техніки НУВГП. Збірник наукових праць. – Вип. 1. – Рівне : НУВГП, 2014. – С. 17–22.
154. Федорчук Н. А. Математичне моделювання одновимірної задачі напружено-деформованого стану ґрунтового масиву при фільтрації сольових розчинів в неізотермічних умовах та наявності рівня ґрунтових вод / Н. А. Федорчук // Математичне та комп'ютерне моделювання. Сер. технічні науки: зб. наук. праць. – 2010. – Вип. 4. – С. 204–215.
155. Філатова І. А. Математичне моделювання напружено-деформованого стану ґрунтових масивів в складних гідрогеологічних умовах / І. А. Філатова, Н. А. Федорчук // Вісник Київського ун-ту. Сер. фіз.-матем. науки. – 2011. – Вип. 3. – С. 218–226.
156. Флорин В. А. Теория уплотнения земляных масс / В. А. Флорин. - М.: Госстройиздат, 1948. – 284 с.
157. Флорин. В. А. Основы механики грунтов: т. 2 / В. А. Флорин. – М. : Госстройиздат, 1961. – 543 с.
158. Франчук А. У. Таблицы теплофизических показателей строительных материалов / А. У. Франчук. – М.-Л. : Промстройиздат. – 1949. – 120 с.
159. Цытович Н. А. Механика грунтов (краткий курс): Учебник для строит. вузов. / Н. А. Цытович. – 4-е изд., перераб. и доп. – М. : Высш. шк., 1983. – 288 с.
160. Цытович Н. А. Прогноз скорости осадок оснований сооружений / Н. А. Цытович, Ю. К. Зарецкий, М. В. Малышев, М. Ю. Абелев, З. Г. Тер-Мартirosян. – М. : Стройиздат, 1967. – 308 с.
161. Чапля Є. Я. Фізико-математичне моделювання гетеро-дифузного масопереносу / Є. Я. Чапля, О. Ю. Чернуха. – Львів : Сполом, 2003. – 128 с.
162. Чернуха О. Ю. Математичне моделювання процесів термодифузії розпадної речовини у стохастично неоднорідній шаруватій смузі / О. Ю. Чернуха, В. Є. Гончарук, А. Є. Давидок // Математичні методи і фізико-механічні поля. – 2014. – Т. 57, № 3. – С. 143–154.



163. Чернуха О. Ю. Про один метод побудови розв'язку контактнo-крайових задач дифузії при мішаних граничних умовах / О. Ю. Чернуха // Доп. НАН України. – 2006. – № 1. – С. 82–87.
164. Чудновский А. Ф. Теплофизические характеристики дисперсионных материалов / А. Ф. Чудновский. – М. : Физматгиз, 1962. – 456 с.
165. Швец Р. Н. Некоторые одномерные нестационарные задачи термоупругости, / Р. Н. Швец // Научн. записки Ин-та машинов. и автом. АН УССР, 9, 8 (1962).
166. Шержуков Б. С. Диффузия и неравновесный массообмен при фильтрации в районах наземных и подземных хранилищ промстоков / Б. С. Шержуков // Тр. ин-та ВОДГЕО. – 1975. – Вып. 54. – С. 25–39.
167. Шержуков Б. С. Диффузия и неравновесный массообмен при фильтрации в районах наземных и подземных хранилищ промстоков / Б. С. Шержуков // Тр. ин-та ВОДГЕО. – 1975. – Вып. 54. – С. 25–39.
168. Шинкаренко Г. А. Проекційно-сіткові методи розв'язування початково-крайових задач / Г. А. Шинкаренко // – К. : НМКВО, 1991. – 88 с.
169. Ясинський Ф. С. Избранные работы по устойчивости сжатых стержней / Ф. С. Ясинський. – М. : Гостехтеориздат, 1952. – 427 с.
170. Ясній П. В. Вплив температури на мікромеханізми статичного деформування та руйнування теплостійких сталей / П. В. Ясній, В. Б. Гладьо, П. О. Марущак, Д. Я. Баран // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2007. – Том 14, № 3. – С. 7–16.
171. Bear J. Introduction to modeling of Transport Phenomena in Porous Media / J. Bear, Y. Bachmat. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991. – 580 p.
172. Bhowmick R. Steady-state thermal stresses in an infinite elastic medium containing an annular crack / R. Bhowmick, Das Bikash Ranjan // Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci. – 1997. – 107, 1. – P. 71–87.
173. Biot M. A. Mechanics of Deformation and Propagation in Porous Media / M. A. Biot // J. Appl. Phys. 1962, V. 33. – № 4. – P. 1482–1498.

174. Chao Ching-Kong. Mixed boundary-value problems of two-dimensional anisotropic thermoelasticity with elliptic boundaries / Chao Ching-Kong, B. Gao // *Int. J. Solids and Struct.* – 2001. – T. 38, № 34-35. – P. 5975–5994.
175. Chaplya Y. Mathematical Modeling Random Diffusion Flows in Two-Phase Multilayered Stochastically Nonhomogeneous Bodies / Y. Chaplya, O. Chernukha, A. Davydok // *TASK Quarterly* - 2015. – Vol. 19, N 3. – P. 297–320.
176. Chaplya Y. Simulation of Diffusion Flows in Two-Phase Multilayered Stochastically Nonhomogeneous Bodies with Non-Uniform Distribution of Inclusions / Y. Chaplya, O. Chernukha, A. Davydok // *TASK Quarterly* - 2015. – Vol. 19, N 3. – P. 321–351.
177. Conner W. C. Fluid Transport in Nanoporous Materials / W. C. Conner, J. P. Fraissard. – Dordrecht, the Netherlands: Springer in cooperation with NATO Public Diplomacy Division, 2006. – 685 p.
178. Duncan J. M. Soil strength and slope stability. 2nd Edition / J. M. Duncan, S. G. Wright, T. L. Brandon. – Wiley, 2014. – 333 p.
179. Encyclopedia of Thermal Stresses / Editor R. B. Hetnarski. – Springer Dordrecht Heidelberg New York London, 2014.
180. Eriksson K. Adaptive streamline diffusion finite element methods for convection-diffusion problems / K. Eriksson, C. Johnson // *Math. Comp.* – 1993. – Iss. 60. – P. 167–188.
181. Fernandez M. Mixture diffusion in zeolites studied by MAS PFG NMR and molecular simulation / M. Fernandez, J. Karger, D. Freude, D. Pampel, J.M. Van Baten, R. Krishna // *Microporous and Mesoporous Materials.* – 2007. – 105. – P. 124 – 131.
182. Gluschenko A. A. The solving of the one boundary-value problem class for advective-diffusion equations / A. A. Gluschenko, T. L. Hordynska // *Матеріали Шостої Міжнар. конф. ім. академіка М. Кравчука.* – К. : Віпол, 1997. – С. 105–107.
183. Hsueh C. H. Thermal stresses in elastic multilayer systems / C. H. Hsueh // *Thin Solid Films.* – 2002. – Vol. 418, Is. 2. – P. 182–188.

184. Hueckel T. Thermoplasticity of saturated clays: experimental constitutive study / T. Hueckel, G. Baldi // *Journal of Geotechnical Engineering* 116 (12), 1990. – P. 1778–1796.
185. Kärger J. Diffusion fundamentals / J. Kärger, F. Grinberg, P. Heitjans // Leipzig: Leipziger Universite, 2005. – 615 p.
186. Kushnir R. M. Thermal Stresses – Advanced Theory and Applications / R. M. Kushnir // *J. of Thermal Stresses*. – 2010. – 33, No. 1. – P. 76–78.
187. Lambe T. W. Soil Mechanics / T. W. Lambe, R. V. Whitman. – Wiley, New York, 1969.
188. Liu J. Numerical Simulation on Hydromechanical Coupling in Porous Media Adopting Three-Dimensional Pore-Scale Model / J. Liu, R. Song, M. Cui // *The Scientific World Journal*, Volume 2014, Article ID 140206, 8 pages, 2014.
189. Mattos H. S. da Costa. Temperature effect on low permeability porous media filled with water at high pressures / H. S. da Costa Mattos, J. L. dos Reis, J. A. Puente Angulo, M. L. Martins-Costa // *Advances in Water Resources* 83 (2015). – Pp. 10–16.
190. Nield D. A. Convection in porous media / D. A. Nield, A. Bejan. – Springer, 2006. – 653 p.
191. Nowacki W. Thermoelasticity. Oxford – London – New York – Paris, Pergamon Press, 1962.
192. Petryk M. Mathematical modeling and visualization of Multilevel Mass Transfer System in Heterogeneous Catalytic Media of Nanoporous Particles. *Journal of Automation and Information Sciences*/ M. Petryk, J. Fraissard // Begell House USA. (2008). – Vol. 40, Issue 10, 1–21.
193. Petryk M. Modeling and Analysis of Concentration Fields of Nonlinear Competitive Two-Component Diffusion in Medium of Nanoporous Particles / M. Petryk, J. Fraissard, D. Mykhalyk // *Journal of Automation and Information Sciences*, Begell House USA. (2009). – Vol. 41, Issue 8, 13–23.
194. Petryk M. Nonlinear Mathematical Model of Two-Level Transfer of the “Filtration-Consolidation” Type / M. Petryk, D. Mykhalyk. // *Journal of Automation and Information Sciences*, Begell House USA. (2010). – Vol. 42, Issue 3, 58–70.

195. Petryk M. Numerical and analytical modelling of solid-liquid expression from soft plant materials / M. Petryk, E. Vorobiev // *Ibid.* – 2013. – 59 (12). – P. 4762–4771.
196. Savula Ya. H. Numerical Analysis of Advection-Diffusion in the continuum with thin canal / Ya. H. Savula, V. M. Koukharskyi, Ye.Ya. Chaplia // *Numerical Heat Transfer. Part A.* – 1998. – 33 (3). – P. 341–351.
197. Shelestovskii B. G. Thermoelastic problem of a transversal isotropic layer under mixed conditions of heat emission / Shelestovskii B. G., Grilitskii D. V. // *Soviet Applied Mechanics*, 1974. – Vol. 8, no. 1. – 47–51.
198. Shirato M. The Terzaghi-Voigt combined model for constant pressure consolidation of filter cakes and homogeneous semi-solid materials / M. Shirato, T. Murase, M. Iwata, S. Nakatsuka // *Chemical Engineering Science.* – 1986. – № 41. – P. 3213–3218.
199. Southwell R. W. *Theory of Elasticity* / R. W. Southwell. – Oxford Univ. Press, London and New York, 1941.
200. Thompson J. F. *Numerical Grid Generation*/ J. F. Thompson, Z.U.A. Warsi, C. W. Mastin // *Foundation and Applications.* – New York : Elsevier, 1985. – 931 p.
201. Vlasyuk A. P. Mathematical modeling of stressed deformed state change of soil dam base with core / A. P. Vlasyuk, N. A. Fedorchuk // *Abstracts of XX International Conference «Problems of decision making under uncertainties».* – Brno, Czech Republic, 2012. – Pp. 131–133.
202. Vlasyuk A. P. Mathematical simulation of the stressed-strained state of the foundation of earth dams with an open surface under the influence of heat and mass transfer in two-dimensional case / A. P. Vlasyuk, N. A. Zhukovskaya // *Journal of Engineering Physics and Thermophysics.* – 2015. – Vol. 88, Issue 2. – Pp. 329–341.

## **ДОДАТКИ**

## Додаток А

Міністерство енергетики та вугільної промисловості України  
ДП НАЦІОНАЛЬНА АТОМНА ЕНЕРГОГЕНЕРУЮЧА КОМПАНІЯ

**ENERGOATOM**



вул. Енергетиків, 20, м. Нетішин, Хмельницька обл., 30100, Україна  
Р/р 26003019114136 Філія АТ Укресімбанк м.Хмельницький  
МФО 315609 Код ЄДРПОУ 21313677

Відокремлений підрозділ

**ХМЕЛЬНИЦЬКА  
АТОМНА ЕЛЕКТРОСТАНЦІЯ**

Тел. (03842) 3-33-50, факс 3-33-60  
Комутатор 4-04-00  
E-mail: office@khnp.atom.gov.ua

07.12.2015 № 10/4314

На № \_\_\_\_\_

## Довідка

про використання результатів дисертаційних досліджень

**Жуковської Наталії Анатоліївни**

«Математичне моделювання впливу тепло-масоперенесення при фільтрації  
сольових розчинів на деформаційні процеси ґрунтових масивів»

Результати наукових досліджень, одержаних при виконанні дисертаційної роботи старшого викладача кафедри прикладної математики Національного університету водного господарства та природокористування Жуковської Н. А. на тему: «Математичне моделювання впливу тепло-масоперенесення при фільтрації сольових розчинів на деформаційні процеси ґрунтових масивів» використано в практиці роботи гідротехнічного цеху при експлуатації ґрунтової греблі ставка-охолоджувача Хмельницької АЕС.

Розроблено математичну модель напружено-деформованого стану ґрунтової греблі ставка-охолоджувача ХАЕС з врахуванням процесів тепло-масоперенесення при фільтрації сольових розчинів. Знайдено чисельний розв'язок поставленої крайової задачі. В результаті цього отримано значення полів зміщень, напружень, деформацій, напорів, концентрації солей та температури ґрунтової греблі, поля надлишкових тисків розчинів солей та маси винесених солей і фільтраційної витрати рідини. Проведено чисельні експерименти з моделювання зміни деформаційних процесів ґрунтової греблі ставка-охолоджувача ХАЕС при зміні гідрогеологічних умов та дії техногенних факторів.

Отримані результати є добре узгодженими з натурними результатами і свідчать про високий рівень обґрунтованості та достовірності отриманих математичних рішень, а також ефективності впровадження наукових розробок дисертанта.

№ 104245

Заступник головного інженера  
по загальностанційних об'єктах  
ВП Хмельницької АЕС



*[Handwritten signature]*

Г. О. Панасенко

## Додаток Б



**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**  
**НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ВОДНОГО ГОСПОДАРСТВА**  
**ТА ПРИРОДОКОРИСТУВАННЯ**

вул. Соборна, 11, м. Рівне, 33028, тел. (0362)63-30-98, факс (0362) 63-32-09, mail@nuwm.edu.ua

Від 16.07.2015 № 001-1229

На № \_\_\_\_\_ від \_\_\_\_\_

## Довідка

про використання у навчальному процесі  
 Національного університету водного господарства та природокористування  
 результатів досліджень, одержаних при виконанні дисертаційної роботи  
 Жуковської Наталії Анатоліївни  
 на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук

Науково-методичні розробки та результати досліджень старшого викладача кафедри прикладної математики Жуковської Наталії Анатоліївни, що викладені в її дисертаційній роботі, використано у навчальному процесі при виконанні кваліфікаційних, дипломних та магістерських робіт студентами за галузю знань 0403 «Системні науки та кібернетика» освітньо-кваліфікаційних рівнів бакалавр, спеціаліст та магістр, а також при підготовці та читанні ряду тем з наступних дисциплін:

- «Теорія систем та математичне моделювання»  
 Тема 5. Пористі середовища та їх характеристики  
 Тема 9. Математичні моделі масопереносу в пористих середовищах  
 Тема 10. Математичні моделі процесів теплопереносу
- «Математичне і комп'ютерне моделювання природних та техногенних процесів»  
 Тема 3. Математичне і комп'ютерне моделювання тепло-масопереносу при фільтрації сольових розчинів у ґрунтових масивах  
 Тема 5. Математичне і комп'ютерне моделювання НДС в ґрунтових масивах

Проректор з наукової роботи  
 та міжнародних зв'язків  
 д.е.н., професор

Мартинюк Петро Миколайович 0678576248



Н.Б. Савіна

## Додаток В

### Програмний комплекс для розв'язання задач напружено-деформованого стану ґрунтових масивів і основ з урахуванням тепло-масоперенесення при фільтрації сольових розчинів

Для розв'язання задач НДС ґрунтових масивів і основ з урахуванням тепло-масоперенесення при фільтрації сольових розчинів було створено програмний комплекс у середовищі Microsoft Visual Studio Express 2013 для Windows Desktop на мові програмування C#. Використані програмні засоби є безкоштовними для академічного використання.

Програмний комплекс призначений для демонстрації результатів чисельних експериментів при розв'язанні поставлених крайових задач в одно- та двовимірному випадках у вигляді табличних даних та графічних зображень. Це надає можливість наочного сприйняття отриманих результатів з подальшим їх аналізом.

Віконні інтерфейси для управління програмним комплексом зображено на рис. В.1–В.5.

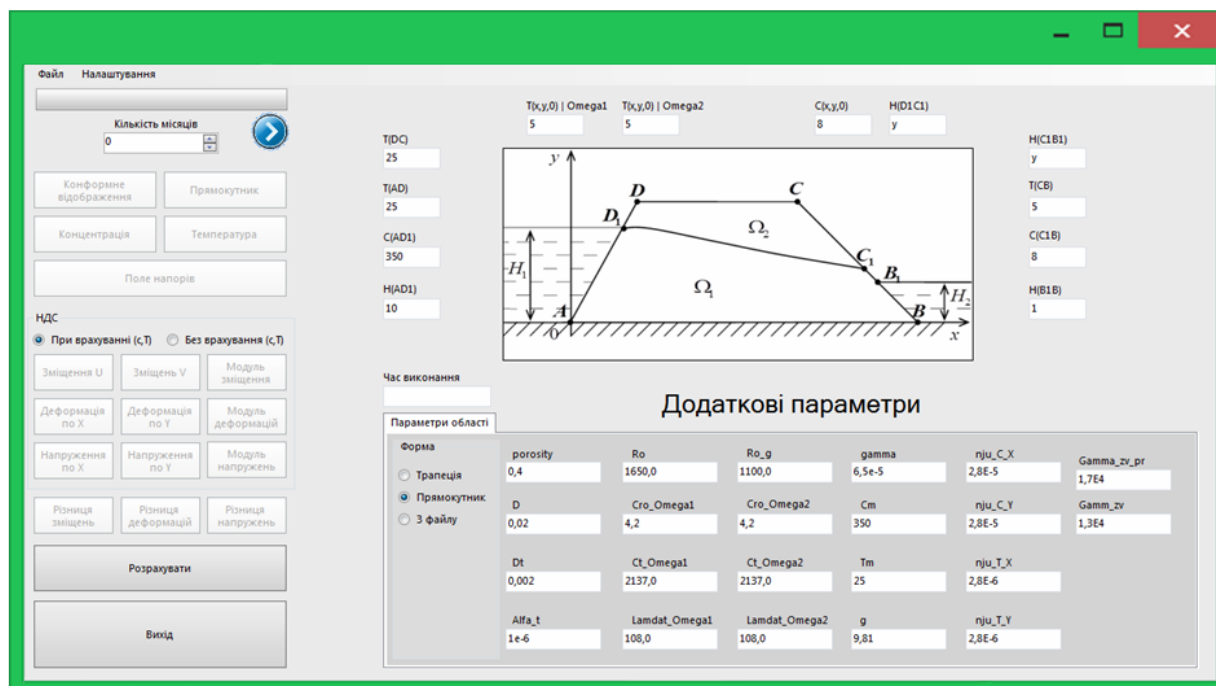


Рис. В.1. Інтерфейс головного вікна для розв'язування двовимірної задачі дослідження НДС ґрунтової греблі



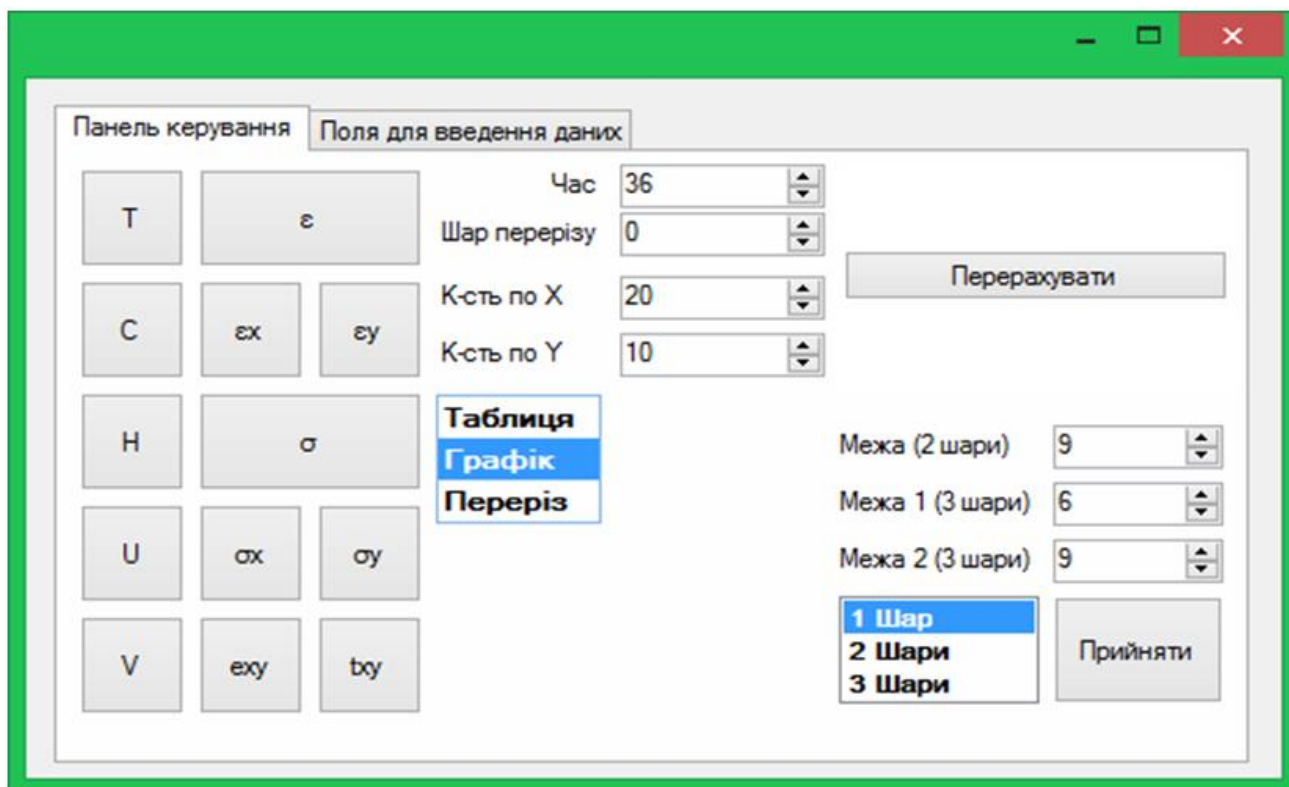


Рис. В.2. Інтерфейс головного вікна для розв'язування двовимірної задачі у випадку водонасиченого ґрунтового масиву, ґрунтового масиву з вільною поверхнею та багат шарового ґрунтового масиву

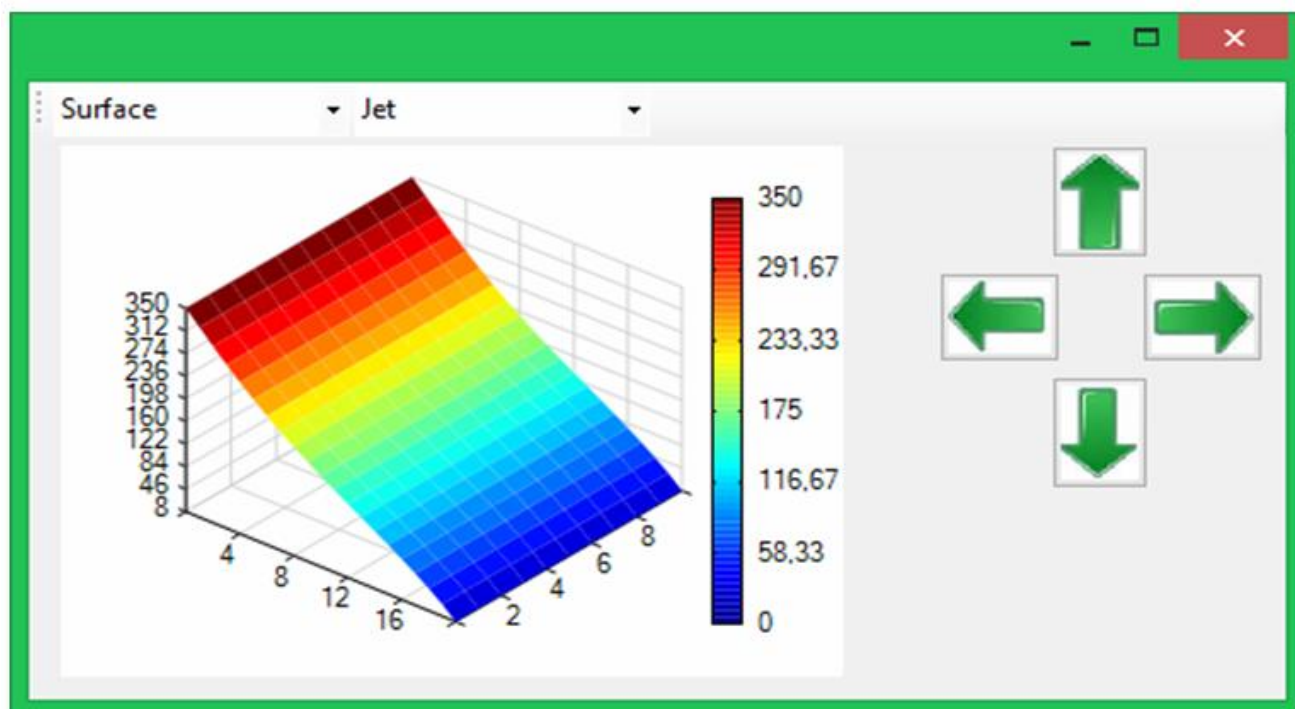
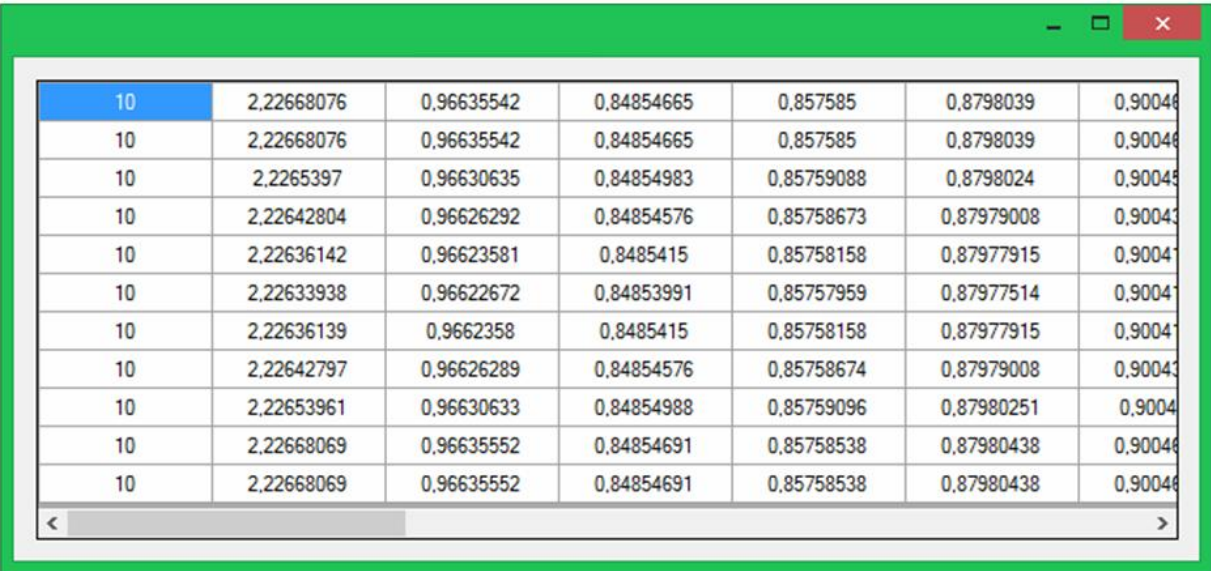


Рис. В.3. Інтерфейс вікна для виведення графічних результатів у вигляді полів розподілу функцій



10	2,22668076	0,96635542	0,84854665	0,857585	0,8798039	0,90046
10	2,22668076	0,96635542	0,84854665	0,857585	0,8798039	0,90046
10	2,2265397	0,96630635	0,84854983	0,85759088	0,8798024	0,90046
10	2,22642804	0,96626292	0,84854576	0,85758673	0,87979008	0,90043
10	2,22636142	0,96623581	0,8485415	0,85758158	0,87977915	0,90041
10	2,22633938	0,96622672	0,84853991	0,85757959	0,87977514	0,90041
10	2,22636139	0,9662358	0,8485415	0,85758158	0,87977915	0,90041
10	2,22642797	0,96626289	0,84854576	0,85758674	0,87979008	0,90043
10	2,22653961	0,96630633	0,84854988	0,85759096	0,87980251	0,90046
10	2,22668069	0,96635552	0,84854691	0,85758538	0,87980438	0,90046
10	2,22668069	0,96635552	0,84854691	0,85758538	0,87980438	0,90046

Рис. В.4. Інтерфейс вікна для виведення табличних результатів

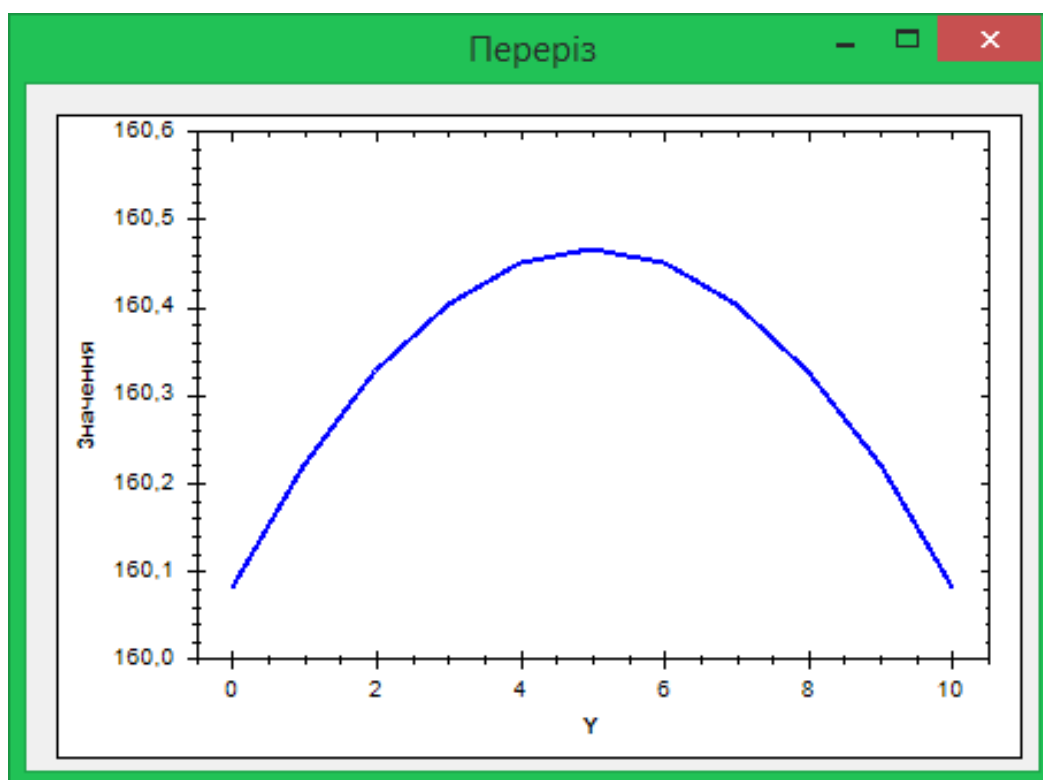


Рис.В.5. Інтерфейс вікна для виведення графічних результатів у вигляді 2D розрізу у вибраній точці

Основними критеріями розробки даного програмного комплексу були: простота у користуванні, наочність результатів обчислення та гнучкість при введенні вхідних даних.

## Додаток Г

### Результати аналітичного розв'язання задачі напружено-деформованого стану для різних типів ґрунтових середовищ та їх аналіз

Нехай ґрунтовий масив знаходиться в одному з трьох станів:

- 1) природному стані (сухий ґрунт) (рис.Г.1, а);
- 2) водонасиченому стані (зваженому стані) (рис. Г.1, б);
- 3) водонасиченому стані, в якому відбувається фільтрація рідини (рис. Г.1, в).

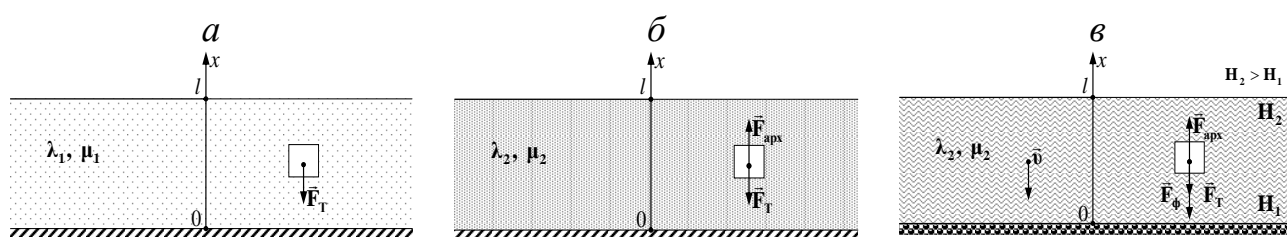


Рис. Г.1. Схема ґрунтового масиву, що знаходиться у природному стані (а), у водонасиченому стані (б) та у водонасиченому стані, в якому відбувається фільтрація рідини (в)

Як приклад, розглянуто одновимірну задачу НДС ґрунтового масиву нескінченної довжини та товщиною  $l = 1 \text{ м}$ . Значення вхідних даних брались наступними:

- 1) Нехай ґрунтове середовище – піщаний ґрунт, що знаходиться у природному стані з наступними характеристиками:

$$\gamma_2 = 1,7 \cdot 10^4 \frac{\text{Па}}{\text{м}}, \quad \lambda_1 = 1,7 \cdot 10^7 \text{ Па}, \quad \mu_1 = 1,15 \cdot 10^7 \text{ Па}.$$

- 2) Нехай ґрунтове середовище – піщаний ґрунт (водонасичений), що знаходиться у зваженому стані, з наступними характеристиками:

$$\gamma_{зв} = 1,05 \cdot 10^4 \frac{\text{Па}}{\text{м}}, \quad \lambda_2 = 1,35 \cdot 10^7 \text{ Па}, \quad \mu_2 = 0,9 \cdot 10^7 \text{ Па}.$$

- 3) Нехай ґрунтове середовище – глинистий ґрунт з наступними характеристиками:

$$\text{а) } \gamma_z = 2,3 \cdot 10^4 \frac{\text{Па}}{\text{м}}, \quad \lambda = 1,2 \cdot 10^{10} \text{ Па}, \quad \mu = 1,2 \cdot 10^{10} \text{ Па};$$

$$\text{б) } \gamma_z = 2,3 \cdot 10^4 \frac{\text{Па}}{\text{м}}, \quad \lambda = 0,58 \cdot 10^{10} \text{ Па}, \quad \mu = 0,875 \cdot 10^{10} \text{ Па}.$$

4) Нехай ґрунтове середовище – водонасичений ґрунт, в якому відбувається фільтрація, з наступними характеристиками:

$$\gamma_{зв} = 1,05 \cdot 10^4 \frac{\text{Па}}{\text{м}}, \quad \lambda_2 = 1,35 \cdot 10^7 \text{ Па}, \quad \mu_2 = 0,9 \cdot 10^7 \text{ Па}, \quad \gamma_p = 1 \cdot 10^4 \frac{\text{Па}}{\text{м}}, \quad H_1 = 0 \text{ м}, \quad H_2 = 1 \text{ м}.$$

Результати наведено у вигляді табличних даних при відповідних граничних умовах для зміщень  $U(0) = U(1) = 0$ .

Таблиця Г.1

Результати аналітичного розв'язку значень зміщень для різних типів ґрунтів

x	Аналітичний розв'язок $U(x) \times 10^{-5}$				
	Глинистий ґрунт а)	Глинистий ґрунт б)	Піщаний ґрунт		
			В природному стані	Водонасичений (в зваженому стані)	Водонасичений при наявності фільтрації
1	0	0	0	0	0
0,9	-0,0029	-0,0044	-1,9125	-1,5000	-2,9286
0,8	-0,0051	-0,0079	-3,4000	-2,6667	-5,2063
0,7	-0,0067	-0,0104	-4,4625	-3,5000	-6,8333
0,6	-0,0077	-0,0118	-5,1000	-4,0000	-7,8095
0,5	<b>-0,0080</b>	<b>-0,0123</b>	<b>-5,3125</b>	<b>-4,1667</b>	<b>-8,1349</b>
0,4	-0,0077	-0,0118	-5,1000	-4,0000	-7,8095
0,3	-0,0067	-0,0104	-4,4625	-3,5000	-6,8333
0,2	-0,0051	-0,0079	-3,4000	-2,6667	-5,2063
0,1	-0,0029	-0,0044	-1,9125	-1,5000	-2,9286
0	0	0	0	0	0

Таблиця Г.2

Результати аналітичного розв'язку значень деформацій для різних типів ґрунтів

x	Аналітичний розв'язок $\varepsilon(x) \times 10^{-4}$				
	Глинистий ґрунт а)	Глинистий ґрунт б)	Піщаний ґрунт		
			В природному стані	Водонасичений (в зваженому стані)	Водонасичений при наявності фільтрації
1	0,0032	0,0049	2,1250	1,6667	3,2540
0,9	0,0026	0,0039	1,7000	1,3333	2,6032
0,8	0,0019	0,0030	1,2750	1,0000	1,9524
0,7	0,0013	0,0020	0,8500	0,6667	1,3016
0,6	0,0006	0,0010	0,4250	0,3333	0,6508
0,5	0	0	0	0	0
0,4	-0,0006	-0,0010	-0,4250	-0,3333	-0,6508
0,3	-0,0013	-0,0020	-0,8500	-0,6667	-1,3016
0,2	-0,0019	-0,0030	-1,2750	-1,0000	-1,9524
0,1	-0,0026	-0,0039	-1,7000	-1,3333	-2,6032
0	-0,0032	-0,0049	-2,1250	-1,6667	-3,2540

Таблиця Г.3

Результати аналітичного розв'язку значень напружень для різних типів ґрунтів

x	Аналітичний розв'язок $\sigma(x) \times 10^4$				
	Глинистий ґрунт а)	Глинистий ґрунт б)	Піщаний ґрунт		
			В природному стані	Водонасичений (в зваженому стані)	Водонасичений при наявності фільтрації
1	1,1500	1,1500	0,8500	0,5250	1,0250
0,9	0,9200	0,9200	0,6800	0,4200	0,8200
0,8	0,6900	0,6900	0,5100	0,3150	0,6150
0,7	0,4600	0,4600	0,3400	0,2100	0,4100
0,6	0,2300	0,2300	0,1700	0,1050	0,2050
0,5	0	0	0	0	0
0,4	-0,2300	-0,2300	-0,1700	-0,1050	-0,2050
0,3	-0,4600	-0,4600	-0,3400	-0,2100	-0,4100
0,2	-0,6900	-0,6900	-0,5100	-0,3150	-0,6150
0,1	-0,9200	-0,9200	-0,6800	-0,4200	-0,8200
0	-1,1500	-1,1500	-0,8500	-0,5250	-1,0250

Як видно з табл.Г1–Г3, значення зміщень, напружень та деформацій значно залежать від типу ґрунту, в якому досліджуються деформаційні процеси.

## Додаток Д

### Результати чисельних експериментів та їх аналіз за наявності теплоперенесення

Нехай ґрунтове середовище – піщаний ґрунт, що знаходиться у природному стані з наступними характеристиками:

$$\gamma_z = 1,7 \cdot 10^4 \frac{\text{Па}}{\text{м}}, \quad \lambda_1 = 1,7 \cdot 10^7 \text{ Па}, \quad \mu_1 = 1,15 \cdot 10^7 \text{ Па}, \quad \alpha_T = 1 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{град}}.$$

Значення зміщень, напружень та деформацій наведені відповідно в таблиці Д.1.

Таблиця Д.1

Значення аналітичного та чисельного розв'язку для зміщень,  
напружень та деформацій піщаного ґрунту в природному стані

$x$	$U(x) \times 10^{-5}$		$\varepsilon(x) \times 10^{-4}$		$\sigma(x) \times 10^4$	
	Аналітичний розв'язок	Чисельний розв'язок	Аналітичний розв'язок	Чисельний розв'язок	Аналітичний розв'язок	Чисельний розв'язок
1	0	0	2,3100	2,3100	0,9240	0,9240
0,9	-2,0790	-2,0790	1,8480	1,8480	0,7392	0,7392
0,8	-3,6960	-3,6960	1,3860	1,3860	0,5544	0,5544
0,7	-4,8510	-4,8510	0,9240	0,9240	0,3696	0,3696
0,6	-5,5440	-5,5440	0,4620	0,4620	0,1848	0,1848
0,5	-5,7750	-5,7750	0	0	0	0
0,4	-5,5440	-5,5440	-0,4620	-0,4620	-0,1848	-0,1848
0,3	-4,8510	-4,8510	-0,9240	-0,9240	-0,3696	-0,3696
0,2	-3,6960	-3,6960	-1,3860	-1,3860	-0,5544	-0,5544
0,1	-2,0790	-2,0790	-1,8480	-1,8480	-0,7392	-0,7392
0	0	0	-2,3100	-2,3100	-0,9240	-0,9240

Нехай ґрунтове середовище – піщаний ґрунт (водонасичений), що знаходиться у зваженому стані, з наступними характеристиками:

$$\gamma_{зв} = 1,05 \cdot 10^4 \frac{Па}{м}, \lambda_2 = 1,35 \cdot 10^7 Па, \mu_2 = 0,9 \cdot 10^7 Па, \alpha_T = 1 \cdot 10^{-6} \frac{1}{град}.$$

Результати аналітичного та чисельного розв'язків наведені в таблиці Д.2.

Таблиця Д.2

Значення аналітичного та чисельного розв'язку для зміщень, напружень та деформацій піщаного водонасиченого ґрунту в зваженому стані

x	$U(x) \times 10^{-5}$		$\varepsilon(x) \times 10^{-4}$		$\sigma(x) \times 10^4$	
	Аналітичний розв'язок	Чисельний розв'язок	Аналітичний розв'язок	Чисельний розв'язок	Аналітичний розв'язок	Чисельний розв'язок
1	0	0	1,8524	1,8524	0,5835	0,5835
0,9	-1,6671	-1,6671	1,4819	1,4819	0,4668	0,4668
0,8	-2,9638	-2,9638	1,1114	1,1114	0,3501	0,3501
0,7	-3,8900	-3,8900	0,7410	0,7410	0,2334	0,2334
0,6	-4,4571	-4,4571	0,3705	0,3705	0,1167	0,1167
0,5	-4,6310	-4,6310	0	0	0	0
0,4	-4,4571	-4,4571	-0,3705	-0,3705	-0,1167	-0,1167
0,3	-3,8900	-3,8900	-0,7410	-0,7410	-0,2334	-0,2334
0,2	-2,9638	-2,9638	-1,1114	-1,1114	-0,3501	-0,3501
0,1	-1,6671	-1,6671	-1,4819	-1,4819	-0,4668	-0,4668
0	0	0	-1,8524	-1,8524	-0,5835	-0,5835

Нехай ґрунтове середовище – водонасичений ґрунт, в якому відбувається фільтрація, з наступними характеристиками:

$$\gamma_{зв} = 1,05 \cdot 10^4 \frac{Па}{м}, \quad \lambda_2 = 1,35 \cdot 10^7 Па, \quad \mu_2 = 0,9 \cdot 10^7 Па,$$

$$\gamma_p = 1 \cdot 10^4 \frac{Па}{м}, \quad H_1 = 0 м, \quad H_2 = 1 м, \quad \alpha_T = 1 \cdot 10^{-6} \frac{1}{град}.$$

Значення зміщень, напружень та деформацій для даного ґрунту наведені відповідно в таблиці Д.3.

Таблиця Д.3

Порівняльна таблиця аналітичного та чисельного розв'язку для значень зміщень, напружень та деформацій водонасиченого ґрунту, в якому відбувається фільтрація підземних вод

x	$U(x) \times 10^{-5}$		$\varepsilon(x) \times 10^{-4}$		$\sigma(x) \times 10^4$	
	Аналітичний розв'язок	Чисельний розв'язок	Аналітичний розв'язок	Чисельний розв'язок	Аналітичний розв'язок	Чисельний розв'язок
1	0	0	3,4397	3,4397	1,0835	1,0835
0,9	-3,0957	-3,0957	2,7517	2,7517	0,8668	0,8668
0,8	-5,5035	-5,5035	2,0638	2,0638	0,6501	0,6501
0,7	-7,2233	-7,2233	1,3759	1,3759	0,4334	0,4334
0,6	-8,2552	-8,2552	0,6879	0,6879	0,2167	0,2167
0,5	-8,5992	-8,5992	0	0	0	0
0,4	-8,2552	-8,2552	-0,6879	-0,6879	-0,2167	-0,2167
0,3	-7,2233	-7,2233	-1,3759	-1,3759	-0,4334	-0,4334
0,2	-5,5035	-5,5035	-2,0638	-2,0638	-0,6501	-0,6501
0,1	-3,0957	-3,0957	-2,7517	-2,7517	-0,8668	-0,8668
0	0	0	-3,4397	-3,4397	-1,0835	-1,0835



Нехай ґрунтове середовище – глинистий ґрунт з наступними характеристиками:

$$а) \gamma_z = 2,3 \cdot 10^4 \frac{Па}{м}, \lambda = 1,2 \cdot 10^{10} Па, \mu = 1,2 \cdot 10^{10} Па, \alpha_T = 1 \cdot 10^{-6} \frac{1}{град}.$$

Значення зміщень, напружень та деформацій для даного ґрунту наведені відповідно в таблиці Д.4, а.

Таблиця Д.4, а

Порівняльна таблиця аналітичного та чисельного розв'язку для значень зміщень, напружень та деформацій глинистого ґрунту типу (а)

x	$U(x) \times 10^{-5}$		$\varepsilon(x) \times 10^{-4}$		$\sigma(x) \times 10^4$	
	Аналітичний розв'язок	Чисельний розв'язок	Аналітичний розв'язок	Чисельний розв'язок	Аналітичний розв'язок	Чисельний розв'язок
1	0	0	0,1699	0,1699	61,1500	61,1500
0,9	-0,1529	-0,1529	0,1359	0,1359	48,9200	48,9200
0,8	-0,2718	-0,2718	0,1019	0,1019	36,6900	36,6900
0,7	-0,3567	-0,3567	0,0679	0,0679	24,4600	24,4600
0,6	-0,4077	-0,4077	0,0340	0,0340	12,2300	12,2300
0,5	-0,4247	-0,4247	0	0	0	0
0,4	-0,4077	-0,4077	-0,0340	-0,0340	-12,2300	-12,2300
0,3	-0,3567	-0,3567	-0,0679	-0,0679	-24,4600	-24,4600
0,2	-0,2718	-0,2718	-0,1019	-0,1019	-36,6900	-36,6900
0,1	-0,1529	-0,1529	-0,1359	-0,1359	-48,9200	-48,9200
0	0	0	-0,1699	-0,1699	-61,1500	-61,1500

$$\text{б) } \gamma_z = 2,3 \cdot 10^4 \frac{\text{Па}}{\text{м}}, \quad \lambda = 0,58 \cdot 10^{10} \text{ Па}, \quad \mu = 0,875 \cdot 10^{10} \text{ Па}, \quad \alpha_T = 1 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{град}}.$$

Таблиця Д.4, б

Порівняльна таблиця аналітичного та чисельного розв'язку для значень зміщень, напружень та деформацій глинистого ґрунту типу (б)

$x$	$U(x) \times 10^{-5}$		$\varepsilon(x) \times 10^{-4}$		$\sigma(x) \times 10^4$	
	Аналітичний розв'язок	Чисельний розв'язок	Аналітичний розв'язок	Чисельний розв'язок	Аналітичний розв'язок	Чисельний розв'язок
1	0	0	0,1547	0,1547	36,0500	36,0500
0,9	-0,1392	-0,1392	0,1238	0,1238	28,8400	28,8400
0,8	-0,2476	-0,2476	0,0928	0,0928	21,6300	21,6300
0,7	-0,3249	-0,3249	0,0619	0,0619	14,4200	14,4200
0,6	-0,3713	-0,3713	0,0309	0,0309	7,2100	7,2100
0,5	-0,3868	-0,3868	0	0	0	0
0,4	-0,3713	-0,3713	-0,0309	-0,0309	-7,2100	-7,2100
0,3	-0,3249	-0,3249	-0,0619	-0,0619	-14,4200	-14,4200
0,2	-0,2476	-0,2476	-0,0928	-0,0928	-21,6300	-21,6300
0,1	-0,1392	-0,1392	-0,1238	-0,1238	-28,8400	-28,8400
0	0	0	-0,1547	-0,1547	-36,0500	-36,0500

Як видно з таблиць Д.1–Д.4, результати аналітичного та чисельного розв'язку співпадають.

Таким чином, порівняльна таблиця значень зміщень без врахування теплоперенесення та з врахуванням теплоперенесення для різних типів ґрунтів має вигляд

Таблиця Д.5

Порівняльна таблиця аналітичного розв'язку для значень зміщень з врахуванням теплоперенесення та без врахування теплоперенесення

x	Аналітичний розв'язок $U(x) \times 10^{-5}$									
	Глинистий ґрунт а		Глинистий ґрунт б		Піщаний ґрунт					
					В природному стані		Водонасичений (в зваженому стані)		Водонасичений при наявності фільтрації	
	без Т	з Т	без Т	з Т	без Т	з Т	без Т	з Т	без Т	з Т
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,9	-0,0029	-0,1529	-0,0044	-0,1392	-1,9125	-2,0790	-1,5000	-1,6671	-2,9286	-3,0957
0,8	-0,0051	-0,2718	-0,0079	-0,2476	-3,4000	-3,6960	-2,6667	-2,9638	-5,2063	-5,5035
0,7	-0,0067	-0,3567	-0,0104	-0,3249	-4,4625	-4,8510	-3,5000	-3,8900	-6,8333	-7,2233
0,6	-0,0077	-0,4077	-0,0118	-0,3713	-5,1000	-5,5440	-4,0000	-4,4571	-7,8095	-8,2552
0,5	<b>-0,0080</b>	<b>-0,4247</b>	<b>-0,0123</b>	<b>-0,3868</b>	<b>-5,3125</b>	<b>-5,7750</b>	<b>-4,1667</b>	<b>-4,6310</b>	<b>-8,1349</b>	<b>-8,5992</b>
0,4	-0,0077	-0,4077	-0,0118	-0,3713	-5,1000	-5,5440	-4,0000	-4,4571	-7,8095	-8,2552
0,3	-0,0067	-0,3567	-0,0104	-0,3249	-4,4625	-4,8510	-3,5000	-3,8900	-6,8333	-7,2233
0,2	-0,0051	-0,2718	-0,0079	-0,2476	-3,4000	-3,6960	-2,6667	-2,9638	-5,2063	-5,5035
0,1	-0,0029	-0,1529	-0,0044	-0,1392	-1,9125	-2,0790	-1,5000	-1,6671	-2,9286	-3,0957
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Як видно з табл.Д.5, врахування теплоперенесення збільшує значення зміщень як для глинистих ґрунтів, так і для піщаних.

## Додаток Ж

### Алгоритм чисельного розв'язування двовимірної задачі напружено-деформованого стану ґрунтового масиву з урахуванням тепло-масоперенесення при фільтрації сольових розчинів та наявності вільної поверхні

Для знаходження невідомих функцій  $U_i(\mathbf{X})$ ,  $V_i(\mathbf{X})$ ,  $\varepsilon_x^{(i)}(\mathbf{X})$ ,  $\varepsilon_y^{(i)}(\mathbf{X})$ ,  $\varepsilon_{xy}^{(i)}(\mathbf{X})$ ,  $\sigma_x^{(i)}(\mathbf{X})$ ,  $\sigma_y^{(i)}(\mathbf{X})$ ,  $\tau_{xy}^{(i)}(\mathbf{X})$ ,  $h(\mathbf{X})$ ,  $c(\mathbf{X}, t)$ ,  $T_i(\mathbf{X}, t)$ ,  $i = \overline{1, 2}$  розділу 3 (пункт 3.2) використаємо наступний алгоритм:

1. Згідно ітераційного методу Гауса-Зейделя, використовуючи апроксимацію відповідних граничних умов, для часового шару  $s = 0$  обчислюємо значення зміщень  $U_i(\mathbf{X})$  та  $V_i(\mathbf{X})$ , нормальних та дотичних деформацій і напружень за формулами (3.61), (3.62) у всій області дослідження, а також п'єзOMETричного напору  $h(\mathbf{X})$  у водонасиченій області ґрунтового масиву.

2. Використовуючи монотонні різницеві схеми, апроксимації відповідних граничних умов, на часовому шарі  $(s + 0,5)$  знаходимо температуру  $T_i(\mathbf{X}, t)$  у всій області ґрунтового масиву та концентрацію сольового розчину  $c(\mathbf{X}, t)$  у водонасиченій області ґрунту.

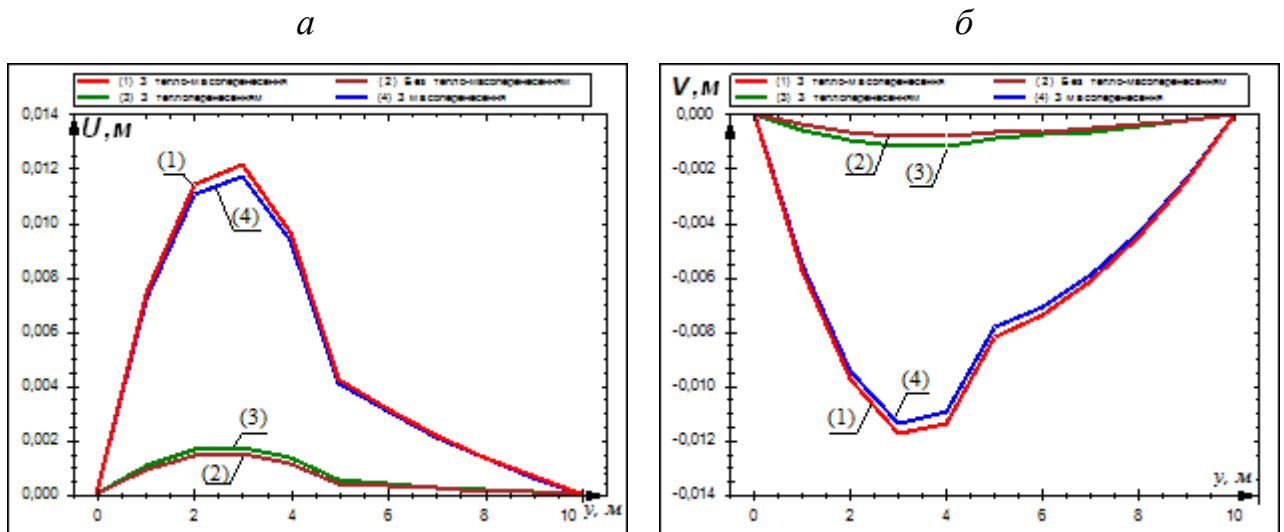
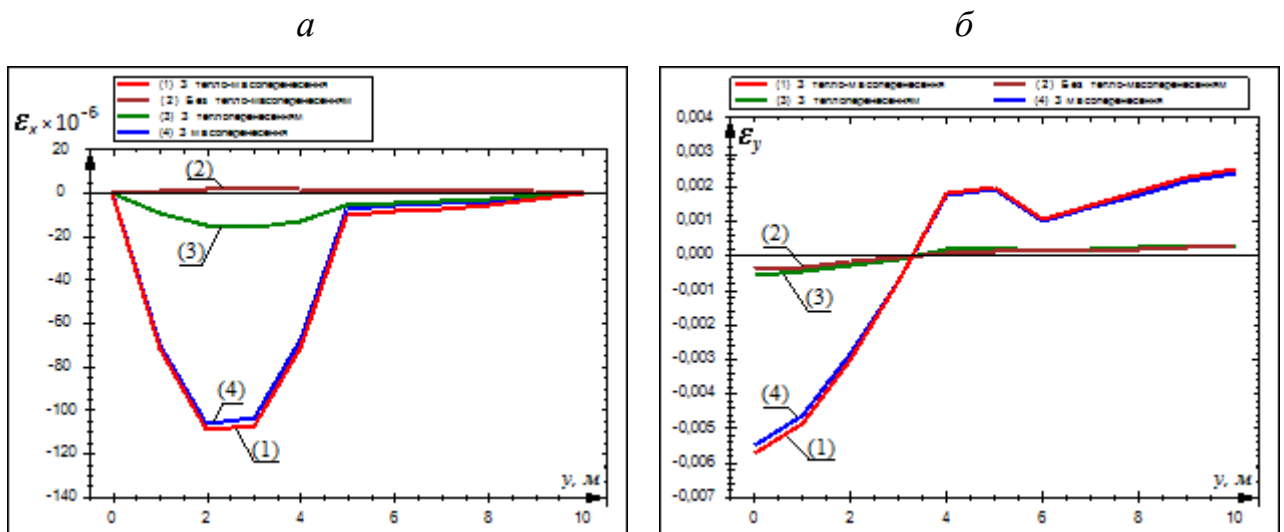
3. Використовуючи монотонні різницеві схеми, апроксимації відповідних граничних умов, на часовому шарі  $(s + 1)$  знаходимо температуру  $T_i(\mathbf{X}, t)$  у всій області ґрунтового масиву та концентрацію сольового розчину  $c(\mathbf{X}, t)$  у водонасиченій області ґрунту.

4. Згідно ітераційного методу Гауса-Зейделя, використовуючи апроксимацію відповідних граничних умов, для часового шару  $(s + 1)$  обчислюємо значення зміщень  $U_i(\mathbf{X})$  та  $V_i(\mathbf{X})$ , нормальних та дотичних деформацій і напружень за формулами (3.61), (3.62) у всій області дослідження, а також п'єзOMETричного напору  $h(\mathbf{X})$  у водонасиченій області ґрунтового масиву.

5. Переходимо на наступний часовий шар і повторюємо алгоритм, починаючи з другого кроку.

## Додаток 3

Графіки функцій  $U_i(\mathbf{X})$ ,  $V_i(\mathbf{X})$ ,  $\varepsilon_x^{(i)}(\mathbf{X})$ ,  $\varepsilon_y^{(i)}(\mathbf{X})$ ,  $\varepsilon_{xy}^{(i)}(\mathbf{X})$ ,  $\sigma_x^{(i)}(\mathbf{X})$ ,  $\sigma_y^{(i)}(\mathbf{X})$ ,  $\tau_{xy}^{(i)}(\mathbf{X})$ ,  $\mathbf{X} \in \Omega_i$ ,  $i = \overline{1,2}$  у перерізі площиною  $yOz$  при  $x = 10$  м за наявності вільної поверхні на глибині 5 м (з урахуванням тепло-масоперенесення; без тепло-масоперенесення; при наявності теплоперенесення; з урахуванням масоперенесення) та аналіз отриманих результатів

Рис. 3.1. Розподіли зміщень вздовж осей  $Ox$  (*a*) та  $Oy$  (*б*)Рис. 3.2. Розподіли деформацій вздовж осей  $Ox$  (*a*) та  $Oy$  (*б*)

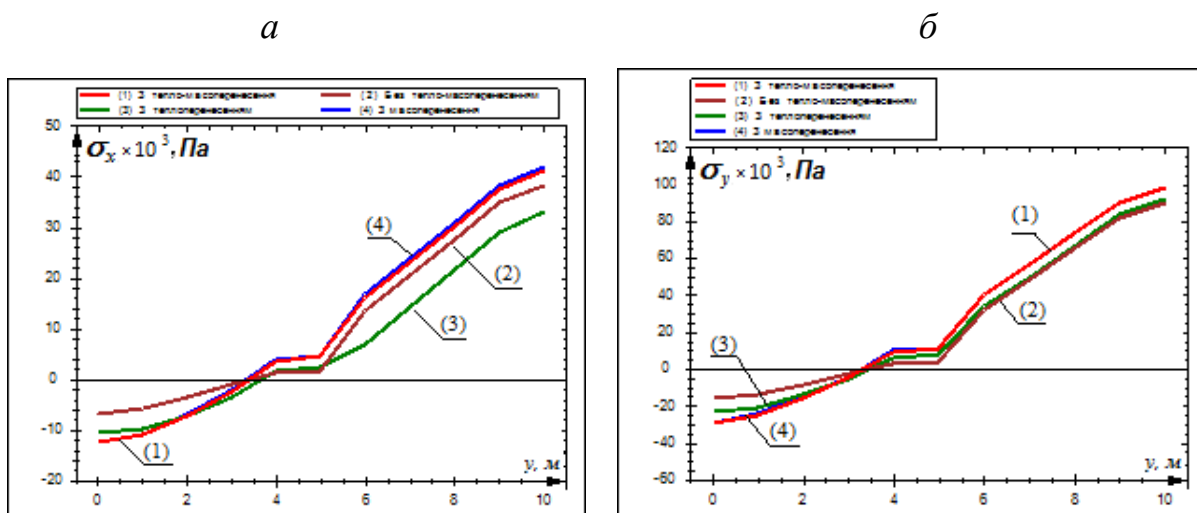


Рис. 3.3. Розподіли напружень вздовж осей  $Ox$  (а) та  $Oy$  (б)

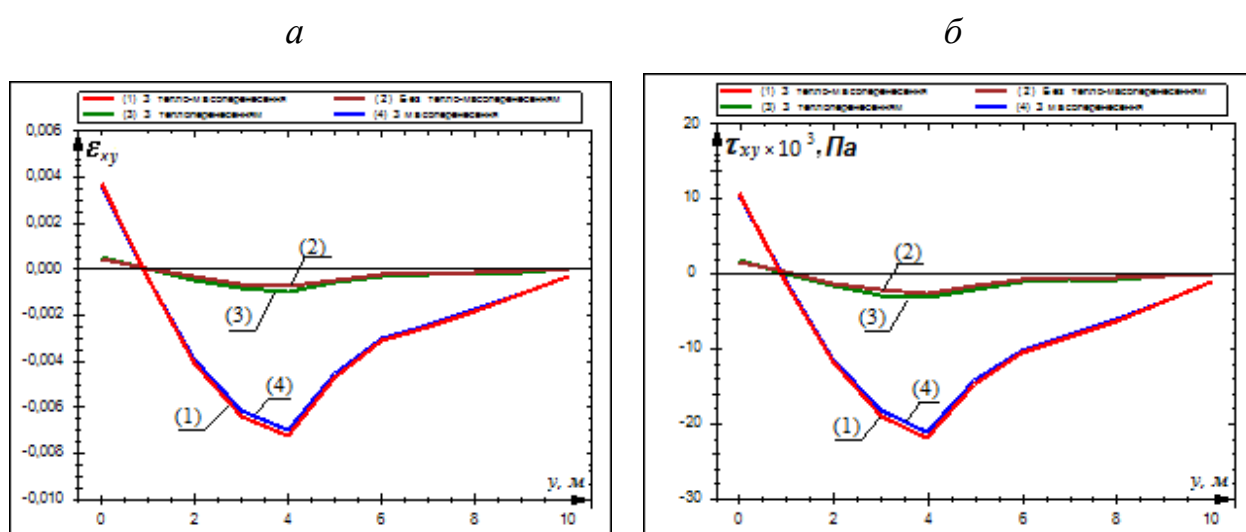


Рис. 3.4. Розподіли дотичних деформацій  $\epsilon_{xy}$  (а) та дотичних напружень  $\tau_{xy}$  (б)

За результатами чисельних експериментів для ґрунтового масиву з вільною поверхнею на глибині 5 м при розглянутих вхідних даних отримано наступні результати (результати наведені для середніх значень отриманих величин):

1. Зміщення по осі  $Ox$  (рис. 3.1, а) з урахуванням теплоперенесення збільшуються в 1,19 рази, з урахуванням масоперенесення – 7,51 рази, з урахуванням тепло-масоперенесення – 7,78 рази у порівнянні зі зміщеннями без урахування тепло-масоперенесення. Врахування тепло-масоперенесення збільшує зміщення в 1,03 рази у порівнянні з відповідними значеннями зміщень з урахуванням тільки масоперенесення. Врахування тепло-масоперенесення збільшує зміщення по осі  $Ox$  в 6,31 рази в порівнянні з урахуванням лише теплоперенесення, а врахування масоперенесення збільшує зміщення в 6,09 разів, ніж урахування

тільки теплоперенесення.

2. Зміщення по осі  $Oy$  (рис. 3.1, б) з урахуванням теплоперенесення зменшуються в 1,23 рази, з урахуванням масоперенесення – 10 разів, з урахуванням тепло-масоперенесення – 10,4 рази у порівнянні зі зміщеннями без урахування тепло-масоперенесення. Врахування тепло-масоперенесення зменшує зміщення в 1,03 рази у порівнянні з відповідними значеннями зміщень з урахуванням тільки масоперенесення. Врахування тепло-масоперенесення збільшує зміщення по осі  $Oy$  в 8,13 рази у порівнянні з урахуванням лише теплоперенесення, а врахування масоперенесення збільшує зміщення в 7,83 рази, ніж урахування тільки теплоперенесення.

3. Деформації по осі  $Ox$  (рис. 3.2, а) з урахуванням теплоперенесення зменшуються в 9,9 рази, з урахуванням масоперенесення – 33 рази з урахуванням тепло-масоперенесення – 36 разів у порівнянні зі зміщеннями без урахування тепло-масоперенесення. Врахування тепло-масоперенесення зменшує деформації на 21,59% у порівнянні з відповідними значеннями деформацій з урахуванням тільки масоперенесення. Врахування тепло-масоперенесення збільшує деформації по осі  $Ox$  в 3,49 разів у порівнянні з урахуванням лише теплоперенесення, а врахування масоперенесення збільшує зміщення в 3,16 разів, ніж урахування тільки теплоперенесення.

4. Деформації по осі  $Oy$  (рис. 3.2, б) з урахуванням теплоперенесення збільшуються в 1,56 разів, з урахуванням масоперенесення – 13 разів, з урахуванням тепло-масоперенесення – 14 разів у порівнянні зі зміщеннями без урахування тепло-масоперенесення. Врахування тепло-масоперенесення збільшує деформації в 1,05 разів у порівнянні з відповідними значеннями деформацій з урахуванням тільки масоперенесення. Врахування тепло-масоперенесення збільшує деформації по осі  $Oy$  в 9,39 разів у порівнянні з урахуванням лише теплоперенесення, а врахування масоперенесення збільшує зміщення в 9 разів, ніж урахування тільки теплоперенесення.

5. Напруження по осі  $Ox$  (рис. 3.3, а) з урахуванням теплоперенесення зменшуються у 1,6 разів, з урахуванням масоперенесення – 1,77 разів, з урахуванням тепло-масоперенесення – 1,75 рази у порівнянні зі зміщеннями без врахування

тепло-масоперенесення. Врахування тепло-масоперенесення зменшує напруження в 1,03 рази у порівнянні з відповідними значеннями напружень з урахуванням тільки масоперенесення. Врахування тепло-масоперенесення зменшує по осі  $Ox$  в 1,53 рази у порівнянні з урахуванням лише теплоперенесення, а врахування масоперенесення збільшує зміщення в 1,57 разів, ніж урахування тільки теплоперенесення.

6. Напруження по осі  $Oy$  (рис. 3.3, б) з урахуванням теплоперенесення збільшуються в 1,46 разів, з урахуванням масоперенесення – 1,74 рази, з урахуванням тепло-масоперенесення – 1,75 разів у порівнянні зі зміщеннями без урахування тепло-масоперенесення. Врахування тепло-масоперенесення збільшує зміщення в 1,01 рази у порівнянні з відповідними значеннями напружень з урахуванням тільки масоперенесення. Врахування тепло-масоперенесення збільшує напруження по осі  $Oy$  в 1,21 рази у порівнянні з урахуванням лише теплоперенесення, а врахування масоперенесення збільшує зміщення в 1,22 рази, ніж урахування тільки теплоперенесення.

7. Дотичні деформації (рис. 3.4, а) з урахуванням теплоперенесення зменшуються в 1,4 рази, з урахуванням масоперенесення – 10 разів, з урахуванням тепло-масоперенесення – 11 разів у порівнянні зі зміщеннями без урахування тепло-масоперенесення. Врахування тепло-масоперенесення зменшує дотичні деформації в 1,04 рази у порівнянні з відповідними значеннями з урахуванням тільки масоперенесення. Врахування тепло-масоперенесення зменшує дотичні деформації в 10 разів у порівнянні з урахуванням лише теплоперенесення, а врахування масоперенесення збільшує зміщення в 9 разів, ніж урахування тільки теплоперенесення.

8. Дотичні напруження (рис. 3.4, б) з урахуванням теплоперенесення зменшуються в 1,41 рази, з урахуванням масоперенесення – 10 разів, з урахуванням тепло-масоперенесення – 10,5 рази у порівнянні зі зміщеннями без тепло-масоперенесення. Врахування тепло-масоперенесення зменшує зміщення в 1,4 рази у порівнянні з відповідними значеннями з урахуванням тільки масоперенесення. Врахування тепло-масоперенесення зменшує дотичні деформації в 9,3 рази у порівнянні з урахуванням лише теплоперенесення, а врахування масоперенесення збільшує зміщення в 9 разів, ніж урахування тільки теплоперенесення.



## Додаток К

### Алгоритм чисельного розв'язування двовимірної задачі напружено-деформованого стану багат шарового ґрунтового масиву з урахуванням тепло-масоперенесення при фільтрації сольових розчинів та наявності вільної поверхні

Для знаходження невідомих функцій  $U_i(\mathbf{X})$ ,  $V_i(\mathbf{X})$ ,  $\varepsilon_x^{(i)}(\mathbf{X})$ ,  $\varepsilon_y^{(i)}(\mathbf{X})$ ,  $\varepsilon_{xy}^{(i)}(\mathbf{X})$ ,  $\sigma_x^{(i)}(\mathbf{X})$ ,  $\sigma_y^{(i)}(\mathbf{X})$ ,  $\tau_{xy}^{(i)}(\mathbf{X})$ ,  $h(\mathbf{X})$ ,  $c(\mathbf{X}, t)$ ,  $T_i(\mathbf{X}, t)$ ,  $i = \overline{1, n}$  розділу 4 (пункт 4.2) використаємо наступний алгоритм:

1. Згідно ітераційного методу Гауса-Зейделя, використовуючи апроксимацію відповідних граничних умов та умов спряження, для часового шару  $s = 0$  обчислюємо значення зміщень  $U_i(\mathbf{X})$  та  $V_i(\mathbf{X})$ , нормальних та дотичних деформацій і напружень у всій області дослідження, а також п'єзометричних напорів  $h_i(\mathbf{X})$  у водонасичених шарах ґрунтового масиву.

2. Використовуючи монотонні різницеві схеми, апроксимації відповідних граничних умов, на часовому шарі  $(s + 0,5)$  знаходимо температуру  $T_i(\mathbf{X}, t)$  у всій області ґрунтового масиву та концентрацію сольового розчину  $c_i(\mathbf{X}, t)$  у водонасичених шарах ґрунту.

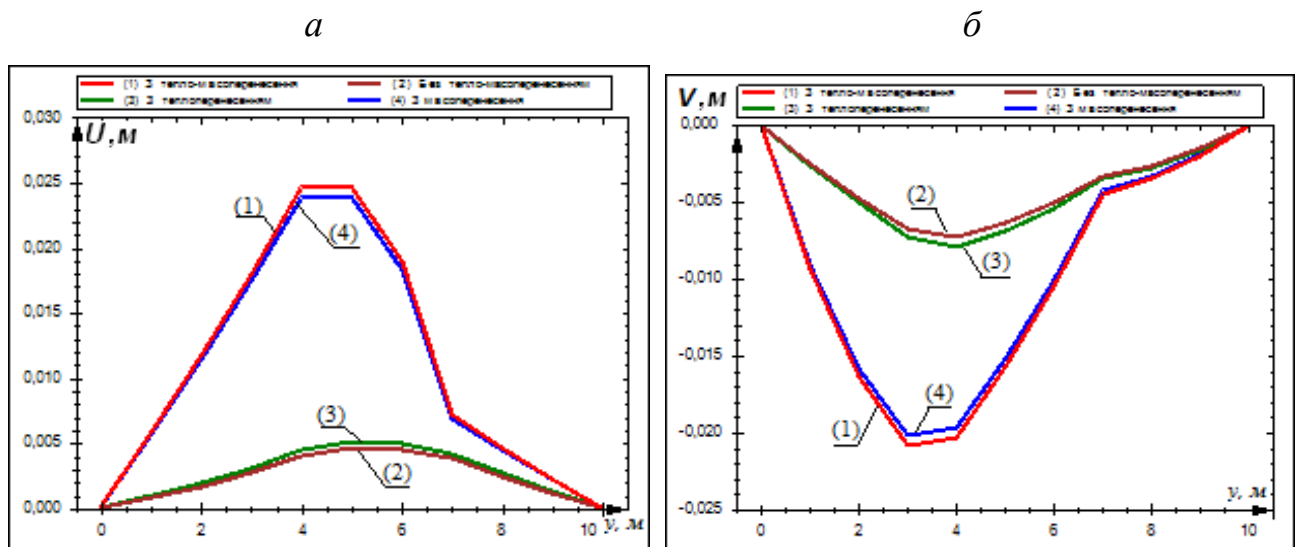
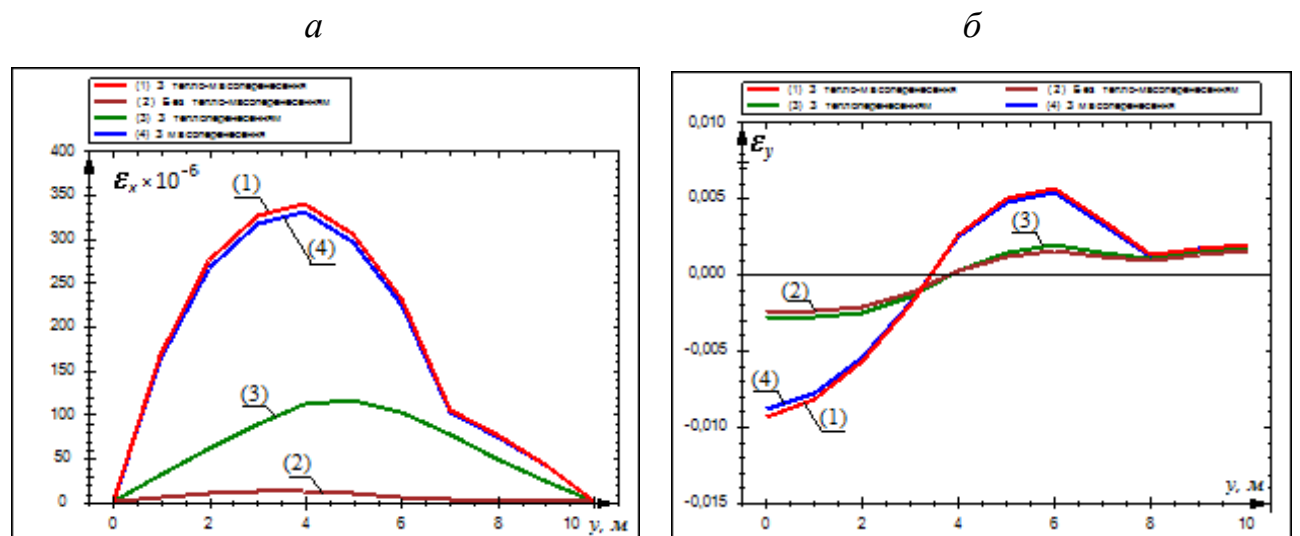
3. Використовуючи монотонні різницеві схеми, апроксимації відповідних граничних умов та умов спряження, на часовому шарі  $(s + 1)$  знаходимо температуру  $T_i(\mathbf{X}, t)$  у всій області ґрунтового масиву та концентрацію сольового розчину  $c_i(\mathbf{X}, t)$  у водонасичених шарах ґрунту.

4. Згідно ітераційного методу Гауса-Зейделя, використовуючи апроксимацію відповідних граничних умов та умов спряження, для часового шару  $(s + 1)$  обчислюємо значення зміщень  $U_i(\mathbf{X})$  та  $V_i(\mathbf{X})$ , нормальних та дотичних деформацій і напружень у всій області дослідження, а також п'єзометричних напорів  $h_i(\mathbf{X})$  у водонасичених шарах ґрунтового масиву.

5. Переходимо на наступний часовий шар і повторюємо алгоритм, починаючи з другого кроку.

## Додаток Л

Графіки функцій  $U_i(\mathbf{X})$ ,  $V_i(\mathbf{X})$ ,  $\varepsilon_x^{(i)}(\mathbf{X})$ ,  $\varepsilon_y^{(i)}(\mathbf{X})$ ,  $\varepsilon_{xy}^{(i)}(\mathbf{X})$ ,  $\sigma_x^{(i)}(\mathbf{X})$ ,  $\sigma_y^{(i)}(\mathbf{X})$ ,  $\tau_{xy}^{(i)}(\mathbf{X})$ ,  $\mathbf{X} \in \Omega_i$ ,  $i = \overline{1, n}$  у перерізі площиною  $yOz$  при  $x = 10$  м за наявності вільної поверхні на глибині 7 м (з урахуванням тепло-масоперенесення; без тепло-масоперенесення; при наявності теплоперенесення; з урахуванням масоперенесення) та аналіз отриманих результатів

Рис. Л.1. Розподіли зміщень вздовж осей  $Ox$  (а) та  $Oy$  (б)Рис. Л.2. Розподіли деформацій вздовж осей  $Ox$  (а) та  $Oy$  (б)

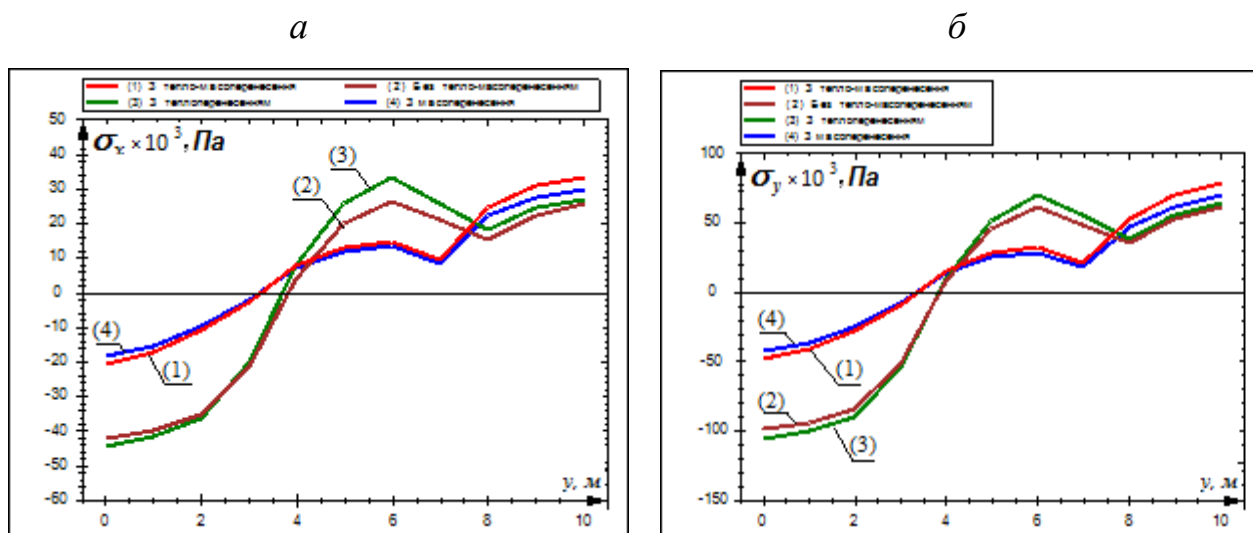


Рис. Л.3. Розподіли напружень вздовж осей  $Ox$  (а) та  $Oy$  (б)

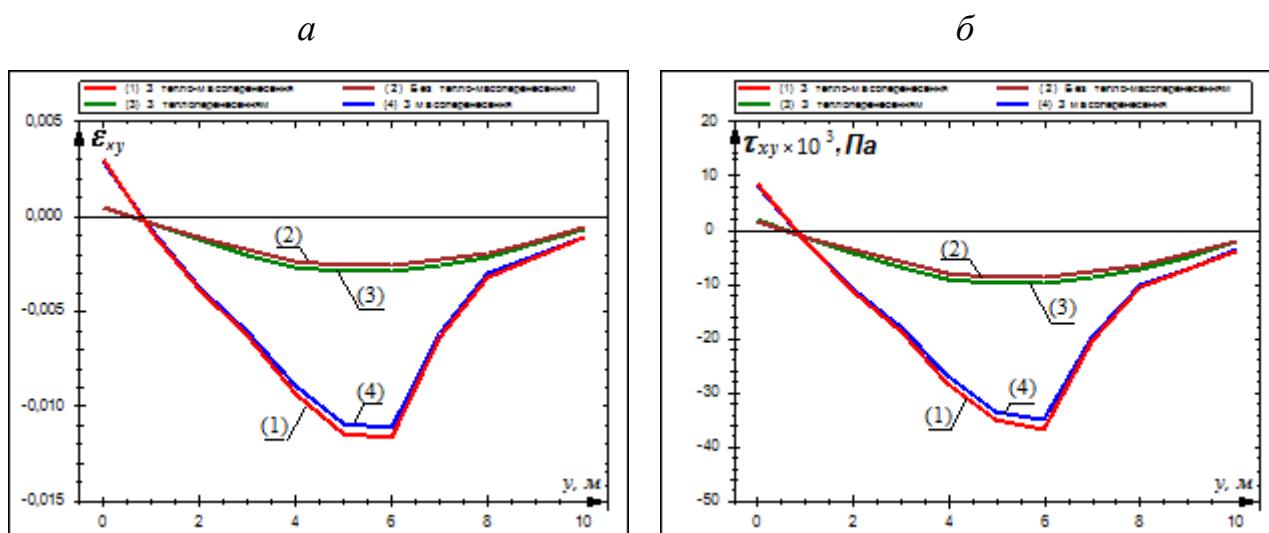


Рис. Л.4. Розподіли дотичних деформацій  $\epsilon_{xy}$  (а) та дотичних напружень  $\tau_{xy}$  (б)

За результатами проведених чисельних експериментів отримано наступні висновки (результати наведені для середніх значень отриманих величин):

1. Зміщення по осі  $Ox$  (рис. Л.1, а) з урахуванням теплоперенесення збільшуються у 1,1 рази, з урахуванням масоперенесення – 3,9 рази, з урахуванням тепло-масоперенесення – 4 рази у порівнянні зі зміщеннями без урахування тепло-масоперенесення. Врахування тепло-масоперенесення збільшує зміщення у 1,03 рази у порівнянні з відповідними значеннями зміщень з урахуванням тільки масоперенесення. Врахування тепло-масоперенесення збільшує зміщення по осі  $Ox$  в 3,6 рази у порівнянні з урахуванням лише теплоперенесення, а врахування масоперенесення збільшує зміщення в 3,5 рази, ніж урахування тільки

теплоперенесення.

2. Зміщення по осі  $Oy$  (рис. Л.1, б) з урахуванням теплоперенесення зменшуються в 1,05 рази, з урахуванням масоперенесення – 2 рази, з урахуванням тепло-масоперенесення – 2,15 рази у порівнянні зі зміщеннями без урахування тепло-масоперенесення. Врахування тепло-масоперенесення зменшує зміщення в 1,04 рази у порівнянні з відповідними значеннями зміщень з урахуванням тільки масоперенесення. Врахування тепло-масоперенесення зменшує зміщення по осі  $Oy$  в 2,03 рази у порівнянні з урахуванням лише теплоперенесення, а врахування масоперенесення збільшує зміщення в 2 рази, ніж урахування тільки теплоперенесення.

3. Деформації по осі  $Ox$  (рис. Л.2, а) з урахуванням теплоперенесення збільшуються в 13 разів, з урахуванням масоперенесення – 28 разів, з урахуванням тепло-масоперенесення – 29 разів у порівнянні зі зміщеннями без урахування тепло-масоперенесення. Врахування тепло-масоперенесення збільшує деформації в 1,02 рази у порівнянні з відповідними значеннями деформацій з урахуванням тільки масоперенесення. Врахування тепло-масоперенесення збільшує деформації по осі  $Ox$  в 2,56 рази у порівнянні з урахуванням лише теплоперенесення, а врахування масоперенесення збільшує деформації по осі  $Ox$  в 2,5 рази, ніж урахування тільки теплоперенесення.

4. Деформації по осі  $Oy$  (рис. Л.2, б) з урахуванням теплоперенесення збільшуються в 1,17 разів, з урахуванням масоперенесення – 3,5 разів, з урахуванням тепло-масоперенесення – 3,7 рази у порівнянні зі зміщеннями без урахування тепло-масоперенесення. Врахування тепло-масоперенесення збільшує деформації в 1,06 рази у порівнянні з відповідними значеннями деформацій з урахуванням тільки масоперенесення. Врахування тепло-масоперенесення збільшує деформації по осі  $Oy$  в 3,2 рази у порівнянні з урахуванням лише теплоперенесення, а врахування масоперенесення збільшує деформації по осі  $Oy$  в 3 рази, ніж урахування тільки теплоперенесення.

5. Напруження по осі  $Ox$  (рис. Л.3, а) з урахуванням теплоперенесення зменшуються в 1,22 рази, з урахуванням масоперенесення – 1,55 рази, з урахуванням тепло-масоперенесення – 1,58 разів у порівнянні зі зміщеннями без

урахування тепло-масоперенесення. Врахування тепло-масоперенесення зменшує напруження в 1,12 разів у порівнянні з відповідними значеннями напружень з урахуванням тільки масоперенесення. Врахування тепло-масоперенесення зменшує напруження по осі  $Ox$  в 1,48 рази у порівнянні з урахуванням лише теплоперенесення, а врахування масоперенесення зменшує напруження по осі  $Ox$  в 1,47 разів, ніж урахування тільки теплоперенесення.

6. Напруження по осі  $Oy$  (рис. Л.3, б) з урахуванням теплоперенесення зменшуються в 1,1 рази, з урахуванням масоперенесення – 1,52 рази, з урахуванням тепло-масоперенесення – 1,55 разів у порівнянні зі зміщеннями без урахування тепло-масоперенесення. Врахування тепло-масоперенесення зменшує зміщення в 1,12 рази у порівнянні з відповідними значеннями напружень з урахуванням тільки масоперенесення. Врахування тепло-масоперенесення зменшує напруження по осі  $Oy$  в 1,52 рази у порівнянні з урахуванням лише теплоперенесення, а врахування масоперенесення збільшує напруження по осі  $Oy$  в 1,49 разів, ніж урахування тільки теплоперенесення.

7. Дотичні деформації (рис. Л.4, а) з урахуванням теплоперенесення зменшуються в 1,14 разів, з урахуванням масоперенесення – 3,25 разів, з урахуванням тепло-масоперенесення – 3,4 рази у порівнянні зі зміщеннями без урахування тепло-масоперенесення. Врахування тепло-масоперенесення зменшує дотичні деформації в 1,05 рази у порівнянні з відповідними значеннями з урахуванням тільки масоперенесення. Врахування тепло-масоперенесення зменшує дотичні деформації в 3 рази у порівнянні з урахуванням лише теплоперенесення, а врахування масоперенесення зменшує дотичні деформації в 2,8 рази, ніж урахування тільки теплоперенесення.

8. Дотичні напруження (рис. Л.4, б) з урахуванням теплоперенесення зменшуються в 1,14 разів, з урахуванням масоперенесення – 3 рази, з урахуванням тепло-масоперенесення – 3,1 рази у порівнянні зі зміщеннями без урахування тепло-масоперенесення. Врахування тепло-масоперенесення зменшує зміщення в 1,4 рази у порівнянні з відповідними значеннями з урахуванням тільки масоперенесення. Врахування тепло-масоперенесення зменшує дотичні напруження в 2,7 рази у порівнянні з урахуванням лише теплоперенесення, а врахування масоперенесення зменшує дотичні напруження в 2,5 рази, ніж урахування тільки теплоперенесення.