

Міністерство освіти і науки України  
Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

**ЖУКОВСЬКА НАТАЛІЯ АНАТОЛІЇВНА**



УДК 532.72:532.546:539.3:519.63

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВПЛИВУ ТЕПЛО-  
МАСОПЕРЕНЕСЕННЯ ПРИ ФІЛЬТРАЦІЇ СОЛЬОВИХ РОЗЧИНІВ НА  
ДЕФОРМАЦІЙНІ ПРОЦЕСИ ҐРУНТОВИХ МАСИВІВ**

01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи

**АВТОРЕФЕРАТ**

дисертації на здобуття наукового ступеня  
кандидата технічних наук

Тернопіль-2016

Дисертацією є рукопис

Робота виконана у Національному університеті водного господарства та природокористування Міністерства освіти і науки України, м. Рівне

**Науковий керівник:** доктор технічних наук, професор  
**Власюк Анатолій Павлович,**  
Міжнародний економіко-гуманітарний університет  
імені академіка Степана Дем'янчука, м. Рівне,  
завідувач кафедри інформаційних систем та  
обчислювальних методів.

**Офіційні опоненти:**

доктор технічних наук, професор  
**Булавацький Володимир Михайлович,**  
Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова  
Національної академії наук України, м. Київ,  
провідний науковий співробітник;

доктор фізико-математичних наук,  
кандидат технічних наук, професор  
**Петрик Михайло Романович,**  
Тернопільський національний технічний університет  
імені Івана Пулюя, м. Тернопіль,  
завідувач кафедри програмної інженерії.

Захист відбудеться “30” червня 2016 р. о 11 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д **58.052.01** у Тернопільському національному технічному університеті імені Івана Пулюя за адресою: 46001, м. Тернопіль, вул. Руська, 56.

З дисертацією можна ознайомитись в науково-технічній бібліотеці Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя за адресою: 46001, м. Тернопіль, вул. Руська, 56.

Автореферат розісланий “27” травня 2016 р.

Вчений секретар  
спеціалізованої вченої ради Д 58.052.01



Б. Г. Шелестовський

## ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

**Актуальність теми.** На сучасному етапі розвитку математичного моделювання в поєднанні з комп'ютерним експериментом з'являються нові можливості в розгляді питань проектування, будівництва та подальшої експлуатації цивільних та промислових об'єктів. При експлуатації даних об'єктів може змінюватись напружено-деформований стан (НДС) ґрунтових основ, на яких вони побудовані. Суттєві зміни НДС викликають зміну ґрунтового профілю масиву, на який впливають різні фізико-хімічні фактори. Зокрема, фільтрація підземних вод, масоперенесення, теплоперенесення розчинених речовин фільтраційними потоками (розчинення та вимивання порід).

Важливий вплив на стійкість споруд має положення рівня ґрунтових вод (РГВ) або вільної поверхні. Як правило, з розвитком міста й у процесі експлуатації промислових підприємств у місцях високого знаходження ґрунтових вод спостерігається їх зниження, і, навпаки, в районах глибокого знаходження ґрунтових вод або їх відсутності спостерігається поява й підвищення рівня ґрунтових вод. Рух вільної поверхні ґрунтових вод призводить до виникнення різноманітних об'ємних сил і відповідно – до зміни НДС ґрунтового масиву.

На НДС ґрунтових основ може впливати і температурний режим, основними причинами зміни якого можуть бути сезонні та добові коливання температур, захоронення відходів виробництва, будівництво атомних електростанцій та водойм-охолоджувачів біля них та ін.

При оцінці НДС також потрібно враховувати, що в природних умовах ґрунтовий масив може складатись із багатьох шарів, кожний з яких має свої власні характеристики, відмінні від характеристик інших шарів (пористості, коефіцієнти Ламе, конвективної дифузії, термодифузії, теплопровідності, фільтрації, термопружності та ін.).

Вищеописані фактори стають причиною зміни фільтраційних та деформаційних властивостей ґрунту, а відповідно – зміни його НДС. Про важливість проблеми дослідження НДС ґрунтових масивів і основ у складних гідрогеологічних умовах також свідчить статистика аварій споруд, що побудовані на таких ґрунтах.

Тому побудова нових та вдосконалення існуючих класичних математичних моделей НДС фільтруючих ґрунтових масивів і основ під впливом тепло-масоперенесення, розвиток та використання чисельних методів для розв'язування відповідних крайових задач є актуальною науковою задачею в напрямку математичного моделювання та обчислювальних методів.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.** Робота виконувалась згідно планів наукових досліджень Національного університету водного господарства та природокористування (НУВГП). Результати дисертаційної роботи отримані в рамках держбюджетних науково-дослідних робіт Міністерства освіти і науки України, що виконувались на кафедрі прикладної математики НУВГП, а саме: «Математичне та комп'ютерне моделювання фізико-хімічних процесів підземної гідромеханіки під впливом природних, техногенних і соціальних факторів» (№ ДР 0110U000816); «Математичне та комп'ютерне моделювання нелінійних фізико-хімічних процесів гідромеханіки в багатокомпонентних середовищах пористої та нанопористої структури» (№ ДР 0113U004052).

У рамках виконання цих робіт здобувач була виконавцем.

**Мета і задачі дослідження.** Метою досліджень є вдосконалення класичних та побудова нових математичних моделей процесу НДС фільтруючих ґрунтових масивів і основ з урахуванням зміни їх гідрогеологічних умов та дії техногенних факторів; розвинення скінченно-різницевих методів для знаходження чисельних розв'язків відповідних нелінійних крайових задач, розв'язання поставлених крайових задач, проведення чисельних експериментів та здійснення аналізу отриманих результатів. Для досягнення мети були визначені наступні завдання:

1. На основі аналізу літературних джерел вдосконалити класичні та побудувати нові математичні моделі НДС ґрунтових масивів і основ у нелінійній постановці з урахуванням процесів тепло-масоперенесення при фільтрації сольових розчинів у неізотермічних умовах та залежностей коефіцієнтів фільтрації, Ламе та модуля Юнга від концентрації сольових розчинів та температури, при наявності вільної поверхні, багат шаровості ґрунтового масиву та сформулювати відповідні крайові задачі в одно- та двовимірних випадках.

2. Отримати рівняння рівноваги в формі Ламе для зміщень та граничні умови і умови спряження для зміщень і напружень на основі узагальнення закону Гука при врахуванні впливу тепло-масоперенесення та залежностей коефіцієнтів Ламе, модуля Юнга від концентрації сольових розчинів та температури.

3. Розвинути обчислювальні методи для знаходження чисельних розв'язків відповідних нелінійних крайових задач в одно- та двовимірному випадках, а саме: метод скінченних різниць для чисельного розв'язування крайових задач тепло-масоперенесення для нелінійних рівнянь параболічного типу, що містять першу похідну; чисельний метод конформних відображень складених областей з криволінійними фіксованими та вільними межами у застосуванні його до чисельного розв'язування задач НДС ґрунтових масивів і основ; метод скінченних різниць для чисельного розв'язування системи рівнянь рівноваги в формі Ламе для зміщень ґрунту в розглянутих областях.

4. Розробити обчислювальні алгоритми та створити необхідний програмний комплекс для реалізації відповідних різницевих схем чисельного розв'язання поставлених крайових задач, провести чисельні експерименти та виконати аналіз впливу тепло-масоперенесення при фільтрації сольових розчинів у неізотермічних умовах, наявності вільної поверхні ґрунтових вод та багат шаровості ґрунту на деформаційні процеси ґрунтових масивів.

*Об'єкт дослідження* – деформаційні процеси в ґрунтових середовищах з урахуванням впливу тепло-масоперенесення при фільтрації сольових розчинів.

*Предмет дослідження* – математичні моделі НДС ґрунтових масивів і основ з урахуванням зміни їх гідрогеологічних умов та впливу техногенних факторів (тепло-масоперенесення, фільтрації сольових розчинів, вільної поверхні, наявності водозабірних свердловин).

**Методи дослідження.** Для побудови математичних моделей використано підходи механіки суцільного середовища, зокрема механіки деформівного тіла та механіки пористого середовища, теорії термopужності, фільтрації та тепло-масоперенесення. Для знаходження чисельних розв'язків поставлених крайових задач використані такі методи: метод скінченних різниць, монотонні різниці

схеми для нелінійних рівнянь параболічного типу, що містять першу похідну, локально-одновимірний метод Самарського, метод чисельних конформних відображень складених областей з криволінійними фіксованими та вільними межами, метод скінченних різниць для чисельного розв'язування системи рівнянь рівноваги в формі Ламе для зміщень ґрунту.

**Наукова новизна отриманих результатів** полягає в наступному:

➤ Вперше побудовано нелінійні математичні моделі НДС ґрунтових масивів і основ з урахуванням тепло-масоперенесення при фільтрації сольових розчинів у неізотермічних умовах та залежностей коефіцієнтів Ламе і модуля Юнга від концентрації сольових розчинів та температури в одно- та двовимірному випадках за наявності водонасиченого ґрунтового масиву, ґрунтового масиву при наявності РГВ, ґрунтового масиву та основи ґрунтової греблі з вільною поверхнею, ґрунтового масиву внаслідок утворення депресійної лунки та багат шарового ґрунтового масиву з різними фізико-хімічними та механічними властивостями його шарів.

➤ Вперше виведено систему рівнянь рівноваги в формі Ламе для зміщень ґрунту на основі узагальнення закону Гука з урахуванням впливу тепло-масоперенесення та залежностей коефіцієнтів Ламе, модуля Юнга від концентрації сольових розчинів та температури.

➤ Вперше отримано граничні умови та умови спряження для зміщень і напружень з урахуванням впливу теплового та хімічного станів ґрунтового середовища та залежностей коефіцієнтів Ламе та модуля Юнга від концентрації сольових розчинів та температури.

➤ Розвинено метод скінченних різниць для чисельного розв'язування крайових задач тепло-масоперенесення для нелінійних рівнянь параболічного типу, що містять першу похідну; чисельний метод конформних відображень складених областей з криволінійними фіксованими та вільними межами для чисельного розв'язування задач НДС ґрунтових масивів і основ; метод скінченних різниць для чисельного розв'язування системи рівнянь рівноваги в формі Ламе для зміщень ґрунту в розглянутих областях.

**Практичне значення отриманих результатів** полягає в можливості математичного та комп'ютерного моделювання процесу зміни НДС фільтруючих ґрунтових масивів і основ при врахуванні гідрогеологічних умов та дії техногенних факторів, що є менш трудомістким і дорогим у порівнянні з практичними інженерними експериментами. Результати дисертаційної роботи використано в практиці роботи гідротехнічного цеху при експлуатації ґрунтової греблі ставка-охолоджувача Хмельницької АЕС, у навчальному процесі при виконанні кваліфікаційних, дипломних та магістерських робіт студентами за галуззю знань 0403 «Системні науки та кібернетика» освітньо-кваліфікаційних рівнів бакалавр, спеціаліст та магістр НУВГП МОН України, а також при підготовці та читанні ряду тем з дисциплін «Теорія систем та математичне моделювання», «Математичне і комп'ютерне моделювання природних і техногенних процесів».

**Особистий внесок здобувача.** Усі теоретичні та практичні результати, що становлять зміст дисертаційної роботи, отримані автором самостійно. У працях, опублікованих у співавторстві, здобувачеві належать: в роботах [1; 7] – побудова математичних моделей задач у фізичних  $(x, y)$  та в комплексних  $(\xi, \eta)$  площинах,

побудова чисельних конформних відображень областей дослідження на параметричні прямокутники, знаходження чисельного розв'язку поставлених задач, розробка програмного забезпечення для проведення чисельних експериментів та аналіз отриманих результатів; в роботі [3] – побудова математичної моделі задачі в неізотермічних умовах у фізичній  $(x, y)$  та в комплексній  $(\xi, \eta)$  площинах; в роботах [4-6] – побудова математичних моделей, знаходження чисельних розв'язків, розробка програмного забезпечення, проведення чисельних експериментів та їх аналіз; в роботі [8] – постановка та побудова математичної моделі задачі, проведення аналізу отриманих результатів; в роботі [9] – побудова математичної моделі задачі, розробка обчислювального алгоритму для знаходження чисельного розв'язку, проведення чисельних експериментів та здійснення їх аналізу.

Проведення теоретичних досліджень, оформлення результатів роботи у вигляді публікацій і доповідей, самостійне узагальнення окремих етапів досліджень та дисертаційної роботи в цілому належать здобувачу.

**Апробація результатів дисертації.** Основні результати дисертації доповідались й обговорювались на міжнародних та вітчизняних конференціях: XII-XIV Міжнародних наукових конференціях імені академіка М. Кравчука (Київ, 2008, 2010, 2012); XV-XVIII та XXI Всеукраїнських наукових конференціях «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики» (Львів, 2008, 2009, 2011, 2012, 2015); Всеукраїнській та Міжнародній наукових конференціях «Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів» (Рівне, 2013, 2015); Міжнародних наукових конференціях «Проблеми прийняття рішень в умовах невизначеності» (PDMU) (Київ-Рівне, 2008; Крим (Новий Світ), 2008; Кам'янець-Подільський, 2009; Ялта, 2010 (XVI), 2011 (XVIII); Східниця, 2011 (XVII), 2015 (XXV); Мукачеве, 2012 (XIX); Чеська Республіка, Брно, 2012 (XX)); Міжнародній науково-практичній конференції «Проблеми розвитку вищої школи та економіки в XXI столітті» (Рівне, 2013); науково-практичних конференціях Національного університету водного господарства та природокористування (Рівне, 2008-2015).

В повному обсязі робота доповідалась на розширеному засіданні кафедри прикладної математики НУВГП, на міжкафедральному науковому семінарі факультету прикладної математики та інформатики Львівського національного університету імені Івана Франка, на науковому семінарі кафедри системного аналізу та теорії прийняття рішень Київського національного університету імені Тараса Шевченка; на науковому семінарі «Математичне моделювання та обчислювальні методи» у Тернопільському національному технічному університеті імені Івана Пулюя.

**Публікації.** За темою дисертації опубліковано 29 наукових праць, у тому числі: 9 статей, з них 1 у зарубіжному науковому виданні, що входить до міжнародних наукометричних баз Scopus, INSPEC, Google Scholar та ін. [1], 8 статей у наукових фахових виданнях з технічних наук [2-9], 20 публікацій в матеріалах міжнародних та всеукраїнських конференціях [10-29], 1 стаття опублікована без співавторів [2].

**Структура та обсяг роботи.** Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел із 202 найменувань на 22 сторінках, додатків на 25 сторінках. Обсяг роботи становить 229 сторінок, в тому числі основного тексту 160 сторінок, 97 рисунків та 12 таблиць.

## ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми дисертаційної роботи, сформульовано мету і задачі дослідження, визначено об'єкт і предмет дослідження, окреслено методи дослідження, наукову новизну та практичне значення отриманих результатів, відображено зв'язок роботи з науковими програмами, планами та темами, наведено дані про апробацію результатів, інформацію про особистий внесок здобувача, публікації за темою дослідження, а також структуру й обсяг роботи.

У **першому розділі** дисертаційної роботи наведено огляд літератури з питань дослідження НДС ґрунтових середовищ.

В роботах багатьох вчених, а саме: В. А. Флорина, І. В. Сергієнка, В. В. Скопечького, В. С. Дейнеки, П. Л. Іванова, Ю. К. Зарецького, В. М. Ломбардо, Ю. І. Калюха, О. М. Трофимчука, З. Г. Тер-Мартirosяна, Т. Hueckel, Т. W. Lambe та ін. досліджено вплив гідрогеологічних умов на деформації ґрунтових середовищ. Зокрема, в роботах І. В. Сергієнка, В. В. Скопечького, В. С. Дейнеки досліджено НДС ґрунтових основ гідротехнічних споруд при наявності фільтрації ґрунтових вод та без неї, причому розглядалась фільтрація чистої води.

В роботах А. П. Власюка, М. Т. Кузла, Є. І. Катерини, І. А. Філатової проведено математичне моделювання та досліджено задачі НДС нескінченного шару ґрунту з урахуванням впливу масоперенесення при фільтрації сольових розчинів в одновимірному випадку та НДС ґрунтових масивів при наявності переносу солей фільтраційними потоками в ізотермічних умовах з урахуванням РГВ.

Якщо розглядати загальну теорію пружності, то її основи належать А. Cauchy, С. Navier, S. D. Poisson. Великий внесок у подальший розвиток даної теорії та теорії термопружності в твердих тілах зробили такі вчені, як G. Lamé, A. Saint-Venant, G. Green, J. Maxwell, E. Trefftz, W. Nowacki, R. W. Southwell, Б. Боли, Дж. Уейнер, В. М. Вигак, М. В. Остроградський, Ф. С. Ясинський, С. П. Тимошенко, Г. В. Колосов, Л. С. Лейбензон, П. Ф. Папкович, Я. С. Підстригач, Р. М. Швець, А. Р. Гачкевич, Л. В. Чернявська, Я. Й. Бурак, Ю. Д. Зозуляк, Б. В. Гера, В. Й. Самуль, В. В. Божидарник, Я. Г. Савула, О. Д. Коваленко, П. В. Ясній, А. О. Сяський, Р. М. Кушнір, Г. Т. Сулим, В. А. Кривень, Б. Г. Шелестовський та ін.

Питання ймовірнісної надійності експлуатації гідротехнічних об'єктів розглянуті в роботах Д. В. Стефанишина, Ц. Є. Мірцхулави, В. А. Гурина, а також міцності ґрунту і стійкості укосів – у J. M. Duncan.

Дослідженнями процесів масоперенесення розчинених у фільтраційному потоці речовин та тепло-масоперенесення в пористих середовищах займались М. М. Веригін, В. І. Лаврик, І. І. Ляшко, С. І. Ляшко, С. М. Нумеров, О. М. Патрашев, Б. С. Шержуков, В. М. Ніколаєвський, Ф. М. Бочевєр, В. В. Скопечький, І. В. Сергієнко, В. С. Дейнека, В. М. Булавацький, О. Я. Олійник, В. Л. Поляков, В. О. Богаєнко, Ю. Г. Кривонос, Я. Г. Савула, Г. А. Шинкаренко, А. В. Гладкий, О. Ю. Чернуха, Я. Й. Бурак, Є. Я. Чапля, J. Fraissard, М. Р. Петрик, Д. М. Михалик, М. М. Біляєв, І. В. Бейко, В. В. Акіменко, О. В. Ликов, Ю. А. Михайлов, М. І. Нікитенко, Л. І. Демченко, П. Я. Полубаринова-Кочина, Г. Є. Мистецький, П. І. Ковальчук, А. П. Власюк, А. Я. Бомба, П. М. Мартинюк, О. М. Степанченко, О. П. Остапчук, J. Bear, K. Eriksson, D. A. Nield, M. Shirato, D. Leclerc, J. Kärger, W. C. Conner та ін. Зокрема, в роботах В. В. Скопечького, В. М. Булавацького, Ю. Г. Кривоноса, М. Р. Петрика, А. П. Власюка,

П. М. Мартинюка та ін. досліджено вплив фільтрації сольових розчинів на процеси фільтраційної консолідації ґрунтів.

Однак, у всіх вищезгаданих роботах не враховано вплив тепло-масоперенесення при фільтрації сольових розчинів у неізотермічних умовах на деформаційні процеси ґрунтових середовищ.

У першому розділі також розглянуто деформаційні характеристики та основні співвідношення, що описують НДС, а також фізичні та фізико-хімічні процеси, які відбуваються в ґрунтах. Виведено диференціальні рівняння рівноваги в формі Ламе для зміщень з урахуванням тепло-масоперенесення та залежностей коефіцієнтів Ламе від концентрації сольового розчину та температури. Наведено основні диференціальні рівняння та додаткові умови, що описують НДС ґрунтових масивів і основ з урахуванням тепло-масоперенесення при фільтрації сольових розчинів, а також експериментальні дослідження впливу концентрації сольових розчинів та температури на фільтраційні й деформаційні властивості ґрунту.

На основі проведеного огляду літературних джерел та аналізу деформаційних, фізичних та фізико-хімічних процесів, що відбуваються в ґрунтах, в дисертаційній роботі побудовано нові математичні моделі НДС ґрунтових середовищ з урахуванням тепло-масоперенесення за фільтрації сольових розчинів (таких як, хлориди ( $\text{NaCl}$ ,  $\text{KCl}$ ,  $\text{CaCl}_2$ ,  $\text{MgCl}_2$ ), сульфати ( $\text{CaSO}_4$ ,  $\text{MgCO}_4$ ,  $\text{Na}_2\text{SO}_4$ ,  $\text{K}_2\text{SO}_4$ ), карбонати ( $\text{CaCO}_3$ ,  $\text{MgCO}_3$ ,  $\text{NaHCO}_3$ ,  $\text{Na}_2\text{SO}_3$ ) та ін.) у неізотермічних умовах, що включають в себе наступні основні складові елементи:

1. Виведена система рівнянь рівноваги в формі Ламе для зміщень ґрунту з урахуванням тепло-масоперенесення та  $\lambda = \lambda(c, T)$ ,  $\mu = \mu(c, T)$  має вигляд

$$\begin{aligned} & \mu(c, T)\Delta U + (\lambda(c, T) + \mu(c, T))\frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial x} + \frac{\partial \lambda(c, T)}{\partial x} \varepsilon_\theta + 2\frac{\partial \mu(c, T)}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial \mu(c, T)}{\partial y} \left( \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \\ & + \frac{\partial \mu(c, T)}{\partial z} \left( \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right) - \left( \left( 3\frac{\partial \lambda(c, T)}{\partial x} + 2\frac{\partial \mu(c, T)}{\partial x} \right) T + (3\lambda(c, T) + 2\mu(c, T)) \frac{\partial T}{\partial x} \right) \alpha_T + X = 0, \\ & \mu(c, T)\Delta V + (\lambda(c, T) + \mu(c, T))\frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial y} + \frac{\partial \lambda(c, T)}{\partial y} \varepsilon_\theta + 2\frac{\partial \mu(c, T)}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial \mu(c, T)}{\partial x} \left( \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \\ & + \frac{\partial \mu(c, T)}{\partial z} \left( \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right) - \left( \left( 3\frac{\partial \lambda(c, T)}{\partial y} + 2\frac{\partial \mu(c, T)}{\partial y} \right) T + (3\lambda(c, T) + 2\mu(c, T)) \frac{\partial T}{\partial y} \right) \alpha_T + Y = 0, \\ & \mu(c, T)\Delta W + (\lambda(c, T) + \mu(c, T))\frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial z} + \frac{\partial \lambda(c, T)}{\partial z} \varepsilon_\theta + 2\frac{\partial \mu(c, T)}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{\partial \mu(c, T)}{\partial x} \left( \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right) + \\ & + \frac{\partial \mu(c, T)}{\partial y} \left( \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right) - \left( \left( 3\frac{\partial \lambda(c, T)}{\partial z} + 2\frac{\partial \mu(c, T)}{\partial z} \right) T + (3\lambda(c, T) + 2\mu(c, T)) \frac{\partial T}{\partial z} \right) \alpha_T + Z = 0, \end{aligned}$$

де  $\varepsilon_\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ ,  $\mathbf{X} \in \Omega$ .

2. Співвідношення Коші, що виражають залежності складових нормальних та дотичних деформацій від складових зміщень

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y}, \varepsilon_z = \frac{\partial W}{\partial z}, \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right), \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right), \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right), \mathbf{X} \in \Omega.$$



3. Узагальнений закон Гука та закон парності дотичних напружень при врахуванні залежностей коефіцієнтів Ламе від концентрації солей та температури

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \lambda(c, T)\varepsilon_\theta + 2\mu(c, T)\varepsilon_x - (3\lambda(c, T) + 2\mu(c, T))\alpha_T \bar{T}, \\ \sigma_y &= \lambda(c, T)\varepsilon_\theta + 2\mu(c, T)\varepsilon_y - (3\lambda(c, T) + 2\mu(c, T))\alpha_T \bar{T}, \\ \sigma_z &= \lambda(c, T)\varepsilon_\theta + 2\mu(c, T)\varepsilon_z - (3\lambda(c, T) + 2\mu(c, T))\alpha_T \bar{T}, \\ \tau_{xy} &= 2\mu(c, T) \cdot \varepsilon_{xy}, \quad \tau_{yz} = 2\mu(c, T) \cdot \varepsilon_{yz}, \quad \tau_{xz} = 2\mu(c, T) \cdot \varepsilon_{xz}, \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz},\end{aligned}$$

де  $\mathbf{X} \in \Omega$ ;  $T = T(\mathbf{X}, t) - T(\mathbf{X}, 0)$  – різниця температури в даний момент часу та температури ненапруженого стану в заданій точці;  $\alpha_T$  – середній коефіцієнт лінійного теплового розширення в інтервалі температур  $(T_0, T)$ , що визначається

виразом  $\alpha_T = \frac{1}{\bar{T}} \int_0^{\bar{T}} \alpha d\bar{T}$ ,  $\bar{T} = T - T_0$ ,  $\alpha = \frac{\Delta l}{lT}$  – коефіцієнт лінійного розширення,  $\Delta l$  –

зміна лінійних розмірів досліджуваного зразка.

4. Рівняння конвективної дифузії при наявності тепло-масоперенесення

$$\nabla \cdot (\mathbf{D} \nabla c) + \nabla \cdot (\mathbf{D}_T \nabla T) - (\mathbf{v}, \nabla c) = n_p \frac{\partial c}{\partial t}, \quad \mathbf{X} \in \Omega, \quad t > 0.$$

5. Рівняння конвективного теплоперенесення

$$\nabla \cdot (\lambda_T \nabla T) - \rho c_\rho (\mathbf{v}, \nabla T) = c_T \frac{\partial T}{\partial t}, \quad \mathbf{X} \in \Omega, \quad t > 0.$$

6. Узагальнений закон Дарсі-Герсеванова на випадок руху сольових розчинів при наявності градієнта температури та рівняння нерозривності рідкої та твердої фаз

грунту  $\mathbf{v} - e\mathbf{v} = -\mathbf{K}(c, T)\nabla h + \mathbf{v}_c \nabla c + \mathbf{v}_T \nabla T$ ,  $\text{div} \mathbf{v} + \frac{\partial n_p}{\partial t} = 0$ ,  $\text{div} \mathbf{v} + \frac{\partial m}{\partial t} = 0$ ,  $\mathbf{X} \in \Omega$ .

Рівняння нерозривності деформацій задовольняються автоматично, оскільки вони виведені з рівнянь рівноваги для зміщень та співвідношень Коші.

Тут:  $\mathbf{u}(\mathbf{X}) = (U(\mathbf{X}), V(\mathbf{X}), W(\mathbf{X}))$  – вектор зміщень, де  $U(\mathbf{X})$ ,  $V(\mathbf{X})$ ,  $W(\mathbf{X})$  – зміщення вздовж осей  $Ox$ ,  $Oy$  та  $Oz$  відповідно;  $\mathbf{X} = (x, y, z)$  – точка;  $t$  – час;  $\lambda(c, T)$ ,  $\mu(c, T)$  – коефіцієнти Ламе;  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  – масові сили;  $c(\mathbf{X}, t)$  – концентрація сольових розчинів;  $T(\mathbf{X}, t)$  – температура;  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ ,  $\varepsilon_z$ ,  $\varepsilon_{xy}$ ,  $\varepsilon_{xz}$ ,  $\varepsilon_{yz}$  – складові тензора деформацій (нормальні та дотичні деформації);  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$  – складові тензора напружень (нормальні та дотичні напруження);  $\mathbf{D}$  – коефіцієнт (тензор) конвективної дифузії;  $\mathbf{D}_T$  – коефіцієнт (тензор) термодифузії;  $\mathbf{v}$  – швидкість фільтрації;  $n_p$  – об'єм порового розчину в одиниці об'єму ґрунту;  $\lambda_T$  – коефіцієнт (тензор) ефективною теплопровідності вологого ґрунту;  $\rho$  – густина сольового розчину;  $c_\rho$  – питома теплоємність сольового розчину;  $c_T$  – об'ємна теплоємність ґрунту при сталому об'ємі;  $e$  – коефіцієнт пористості ґрунту;  $\mathbf{K}$  – коефіцієнт (тензор) фільтрації;  $h$  – напір,  $\mathbf{v}_c$  – коефіцієнт (тензор) хімічного осмосу,  $\mathbf{v}_T$  – коефіцієнт (тензор) термічного осмосу;  $\mathbf{v}$  – вектор швидкості руху твердих частинок ґрунту;  $m$  – об'єм твердих частинок в одиниці об'єму ґрунту.

Вищенаведені рівняння доповнювались крайовими умовами для невідомих функцій, а також умовами спряження на межах контакту областей з різними механічними та фізико-хімічними властивостями.

Для розв'язання задач НДС ґрунтових середовищ вибрано зворотний спосіб, згідно якого спочатку знаходять зміщення точок, далі на підставі співвідношень Коші знаходять деформації, а за ними за допомогою узагальненого закону Гука знаходять напруження.

У **другому розділі** сформульовано постановки та вдосконалено математичні моделі НДС водонасиченого ґрунтового масиву з урахуванням тепло-масоперенесення при фільтрації сольових розчинів в одно- та двовимірному випадках. Зокрема, при дослідженнях в якості сольових розчинів брались одні з найбільш поширених в природі солей, такі як NaCl та KCl, які видобувають для харчової промисловості (NaCl) та використовують в аграрному секторі (KCl).

Ґрунтовий масив вважається пружно-деформівним в межах лінійної теорії пружності з пружними параметрами (коефіцієнтами Ламе)  $\lambda(c, T)$ ,  $\mu(c, T)$ , які залежать від концентрації сольового розчину та температури. На ґрунт діє сила тяжіння, архімедова та фільтраційна сили. Задано значення п'єзометричних напорів  $\tilde{H}_1$ ,  $\tilde{H}_2$  та температур  $\tilde{T}_1$  і  $\tilde{T}_2$ , причому  $\tilde{H}_2 > \tilde{H}_1$ ,  $\tilde{T}_2 > \tilde{T}_1$ . Для одновимірної задачі задано значення концентрацій  $\tilde{C}_1$  та  $\tilde{C}_2$  ( $\tilde{C}_2 > \tilde{C}_1$ ). Для двовимірної задачі у лівому водному басейні задано значення концентрації сольових розчинів  $\tilde{C}_1$ , а у правому – умову швидкого виносу солей. Під впливом градієнтів напору, концентрації солей та температури відбувається перенесення розчинених у воді речовин та тепла фільтраційним потоком. При цьому процеси фільтрації розчинених у воді речовин та тепла підлягають відповідно законам Дарсі, Фіка та Фур'є.

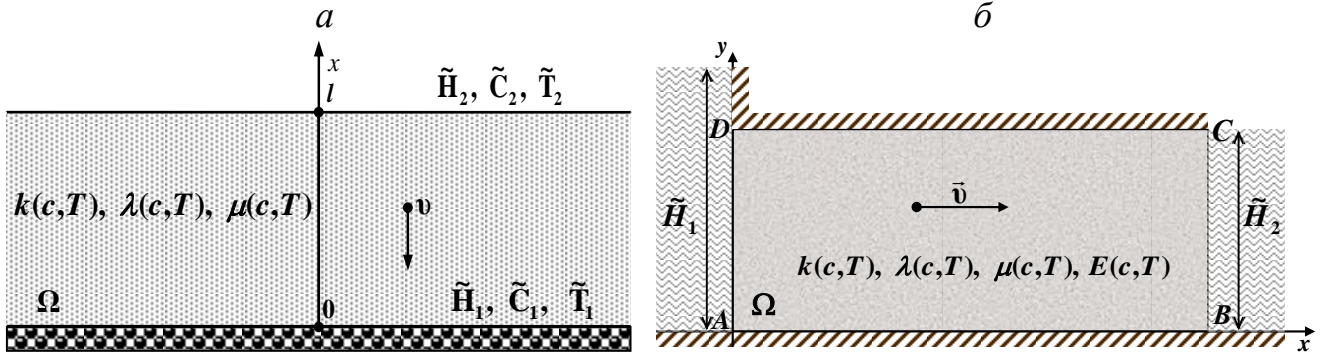


Рис. 1. Схеми водонасиченого ґрунтового масиву з урахуванням тепло-масоперенесення в одно- (а) та двовимірному (б) випадках

Математичну модель сформульованої задачі у двовимірному випадку в загальноприйнятих позначеннях, враховуючи результати розділу 1, можна описати наступною крайовою задачею:

$$\begin{aligned} & \mu(c, T) \Delta U + (\lambda(c, T) + \mu(c, T)) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) + \frac{\partial \lambda(c, T)}{\partial x} \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) + 2 \frac{\partial \mu(c, T)}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial x} + \\ & + \frac{\partial \mu(c, T)}{\partial y} \left( \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) - \left( \left( 2 \frac{\partial \lambda(c, T)}{\partial x} + 2 \frac{\partial \mu(c, T)}{\partial x} \right) T + (2\lambda(c, T) + 2\mu(c, T)) \frac{\partial T}{\partial x} \right) \alpha_T = X, \end{aligned}$$

$$\mu(c,T)\Delta V + (\lambda(c,T) + \mu(c,T))\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right) + \frac{\partial \lambda(c,T)}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right) + 2\frac{\partial \mu(c,T)}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} +$$

$$+ \frac{\partial \mu(c,T)}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}\right) - \left(\left(2\frac{\partial \lambda(c,T)}{\partial y} + 2\frac{\partial \mu(c,T)}{\partial y}\right)T + (2\lambda(c,T) + 2\mu(c,T))\frac{\partial T}{\partial y}\right)\alpha_T = Y, \quad \mathbf{X} \in \Omega, \quad (1)$$

$$X = \frac{dp_1}{dx}, \quad Y = \gamma_{38} + \frac{dp_2}{dy}, \quad (2)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{D}(c,T)\nabla c) - \mathbf{v}\nabla c - \gamma(c - C_m) + \nabla \cdot (\mathbf{D}_T\nabla T) = n_p \frac{\partial c}{\partial t}, \quad \mathbf{X} \in \Omega, \quad t > 0, \quad (3)$$

$$\nabla \cdot (\lambda_T\nabla T) - \rho c_p \mathbf{v}\nabla T = c_T \frac{\partial T}{\partial t}, \quad \mathbf{X} \in \Omega, \quad t > 0, \quad (4)$$

$$\mathbf{v} = -\mathbf{K}(c,T)\nabla h + \mathbf{v}_c\nabla c + \mathbf{v}_T\nabla T, \quad \text{div } \mathbf{v} + \frac{\partial n_p}{\partial t} = 0, \quad \mathbf{X} \in \Omega, \quad t > 0, \quad (5)$$

$$\mathbf{q}_c = \mathbf{v}c - \mathbf{D}(c,T)\nabla c - \mathbf{D}_T\nabla T, \quad \mathbf{X} \in \Omega, \quad t > 0, \quad (6)$$

$$\mathbf{q}_T = \rho c_p \mathbf{v}T - \lambda_T\nabla T, \quad \mathbf{X} \in \Omega, \quad t > 0, \quad (7)$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}\right), \quad \mathbf{X} \in \Omega, \quad (8)$$

$$\sigma_x = \lambda(c,T)(\varepsilon_x + \varepsilon_y) + 2\mu(c,T)\varepsilon_x - (2\lambda(c,T) + 2\mu(c,T))\alpha_T\bar{T}, \quad (9)$$

$$\sigma_y = \lambda(c,T)(\varepsilon_x + \varepsilon_y) + 2\mu(c,T)\varepsilon_y - (2\lambda(c,T) + 2\mu(c,T))\alpha_T\bar{T}, \quad \tau_{xy} = 2\mu(c,T)\varepsilon_{xy}, \quad \mathbf{X} \in \Omega,$$

$$(\mathbf{v}, \mathbf{n})|_{AB \cup CD} = 0, \quad h(\mathbf{X})|_{AD} = \tilde{H}_1(\mathbf{X}), \quad h(\mathbf{X})|_{BC} = \tilde{H}_2(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X} \in \Omega, \quad (10)$$

$$(\mathbf{q}_c, \mathbf{n})|_{AB \cup CD} = 0, \quad c(\mathbf{X}, t)|_{AD} = \tilde{C}_1(\mathbf{X}, t), \quad \frac{\partial c(\mathbf{X}, t)}{\partial n}|_{BC} = 0, \quad \mathbf{X} \in \Omega, \quad t > 0, \quad (11)$$

$$(\mathbf{q}_T, \mathbf{n})|_{AB \cup CD} = 0, \quad T(\mathbf{X}, t)|_{AD} = \tilde{T}_1(\mathbf{X}, t), \quad T(\mathbf{X}, t)|_{BC} = \tilde{T}_2(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in \Omega, \quad t > 0, \quad (12)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}) = 0, \quad \mathbf{X} \in AB \cup CD, \quad \sigma_n = 0, \quad \tau_s = 0, \quad \mathbf{X} \in AD \cup BC, \quad (13)$$

$$c(\mathbf{X}, 0) = \tilde{C}_0(\mathbf{X}), \quad T(\mathbf{X}, 0) = \tilde{T}_0(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X} \in \Omega, \quad (14)$$

де  $t \in (0; t_0]$ ;  $p_1 = \gamma_p(h - x)$ ,  $p_2 = \gamma_p(h - y)$  – фільтраційні тиски;  $\gamma_p$  – питома вага рідини;  $\gamma_{38}$  – питома вага ґрунту, що знаходиться в зваженому стані;  $\tilde{C}_0(\mathbf{X})$ ,  $\tilde{T}_0(\mathbf{X})$ ,  $\tilde{H}_1(\mathbf{X}, t)$ ,  $\tilde{H}_2(\mathbf{X}, t)$ ,  $\tilde{C}_1(\mathbf{X}, t)$ ,  $\tilde{T}_1(\mathbf{X}, t)$ ,  $\tilde{T}_2(\mathbf{X}, t)$  – задані функції.

Наближені розв'язки крайової задачі (1)-(14) знайдено методом скінченних різниць. Для поставленої крайової задачі в одновимірному випадку використано монотонну різницеву схему. Для розв'язування задач тепло-масоперенесення у двовимірному випадку застосовано локально-одновимірну схему Самарського, а для системи рівнянь рівноваги в формі Ламе для зміщень, задачі фільтрації сольових розчинів у неізотермічних умовах узагальнено ітераційний метод Гауса-Зейделя.

Згідно методу Гауса-Зейделя отримано наступну систему рівнянь рівноваги:

$$U_{j_1, j_2}^{(z+1)} = \bar{A}_1 U_{j_1+1, j_2}^{(z)} + \bar{B}_1 U_{j_1-1, j_2}^{(z+1)} + \bar{C}_1 U_{j_1, j_2+1}^{(z)} + \bar{D}_1 U_{j_1, j_2-1}^{(z+1)} + \bar{F}_1(V_{j_1, j_2}^{(z)}, T_{j_1, j_2}^{(s)}),$$

$$V_{j_1, j_2}^{(z+1)} = \bar{A}_2 V_{j_1+1, j_2}^{(z)} + \bar{B}_2 V_{j_1-1, j_2}^{(z+1)} + \bar{C}_2 V_{j_1, j_2+1}^{(z)} + \bar{D}_2 V_{j_1, j_2-1}^{(z+1)} + \bar{F}_2(U_{j_1, j_2}^{(z+1)}, T_{j_1, j_2}^{(s)}), \quad (15)$$

де  $\bar{A}_1, \bar{B}_1, \bar{C}_1, \bar{D}_1, \bar{F}_1(V_{j_1, j_2}^{(z)}, T_{j_1, j_2}^{(s)}), \bar{A}_2, \bar{B}_2, \bar{C}_2, \bar{D}_2, \bar{F}_2(U_{j_1, j_2}^{(z+1)}, T_{j_1, j_2}^{(s)})$  – відомі функції.

Ітерації за формулами (15) проводяться до тих пір, поки не виконаються умови  $|U_{j_1, j_2}^{(z+1)} - U_{j_1, j_2}^{(z)}| \leq \varepsilon, |V_{j_1, j_2}^{(z+1)} - V_{j_1, j_2}^{(z)}| \leq \varepsilon$ , де  $j_1 = \overline{1, m_1 - 1}, j_2 = \overline{1, m_2 - 1}, s = \overline{0, n_1}, z$  – номер ітерації,  $m_1, m_2, n_1$  – кількість кроків по змінних  $x, y$  та  $t$  відповідно.

Для розв'язування задач тепло-масоперенесення при фільтрації сольових розчинів у неізотермічних умовах в одно- та двовимірному випадках, а також для знаходження значень напорів та зміщень з отриманих скінченно-різницевого аналогів в одновимірному випадку використано метод прогонки.

Як приклад, розглянуто задачу НДС ґрунтового масиву в одно- ( $0 < x < l, l = 10 \text{ м}$ ) та двовимірному ( $\Omega = \{(x, y): 0 < x < l_1, 0 < y < l_2\}, l_1 = 20 \text{ м}, l_2 = 10 \text{ м}$ ) випадках. Результати чисельних експериментів наведено у вигляді графіків (рис. 2, рис. 3). Для цього було створено програмний комплекс у середовищі Microsoft Visual Studio Express 2013 для Windows Desktop на мові програмування C#. Як видно з рис. 2, зміщення, деформації і напруження збільшуються при врахуванні тепло-масоперенесення у порівнянні з відповідними величинами без врахування тепло-масоперенесення. Крім того, зміщення, деформації і напруження також збільшуються з врахуванням тепло-масоперенесення по відношенню до відповідних величин при врахуванні лише масоперенесення. Масоперенесення в неізотермічних умовах дещо впливає на картину НДС в порівнянні з масоперенесенням в ізотермічних умовах.

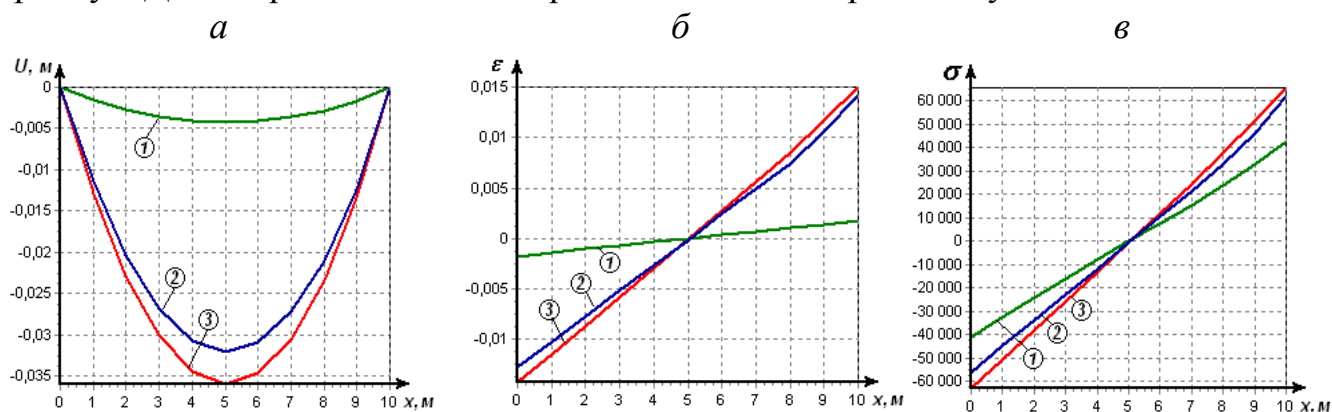


Рис. 2. Розподіли зміщень (а), деформацій (б) та напружень (в) в одновимірному випадку при  $t = 1440$  діб: 1) без тепло-масоперенесення; 2) при наявності масоперенесення; 3) при наявності тепло-масоперенесення

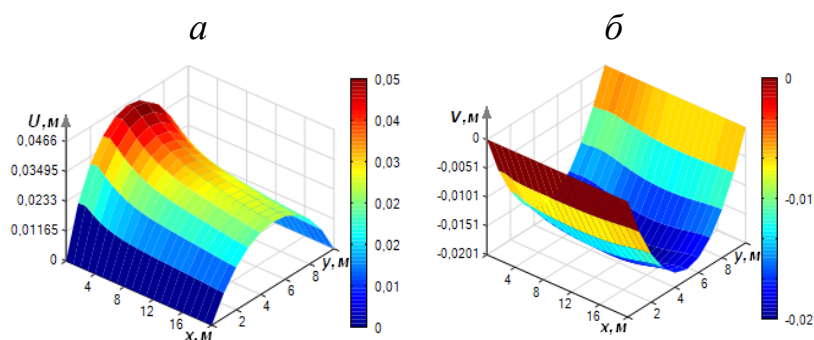


Рис. 3. Розподіли полів зміщень вздовж осей  $Ox$  (а) та  $Oy$  (б) з урахуванням тепло-масоперенесення при  $t = 1080$  діб

Як видно із рис. 3, а, значення зміщень по осі  $Ox$  ґрунтового масиву досягають найбільших значень в області лівого водного басейну (області високих напорів, температури та висококонцентрованих розчинів солей). Значення зміщень по осі  $Oy$  (рис. 3, б) значно зменшуються по всій області дослідження при  $y = 5 \text{ м}$ .

Аналогічно проведено чисельні експерименти та їх аналіз для нормальних і дотичних деформацій та напружень у двовимірному випадку.

У **третьому розділі** сформульовано постановки та побудовано математичні моделі НДС ґрунтового масиву з вільною поверхнею ґрунтових вод при наявності процесів тепло-масоперенесення розчинених у фільтраційному потоці речовин в одно- та двовимірному випадках (рис. 4).

Область  $\Omega_1$  ґрунтового масиву, що знаходиться під вільною поверхнею є водонасиченою, а область ґрунту  $\Omega_2$  над вільною поверхнею знаходиться в природному стані. Відповідно процеси фільтрації сольових розчинів та масоперенесення відбуваються тільки у водонасиченій області ґрунтового масиву.

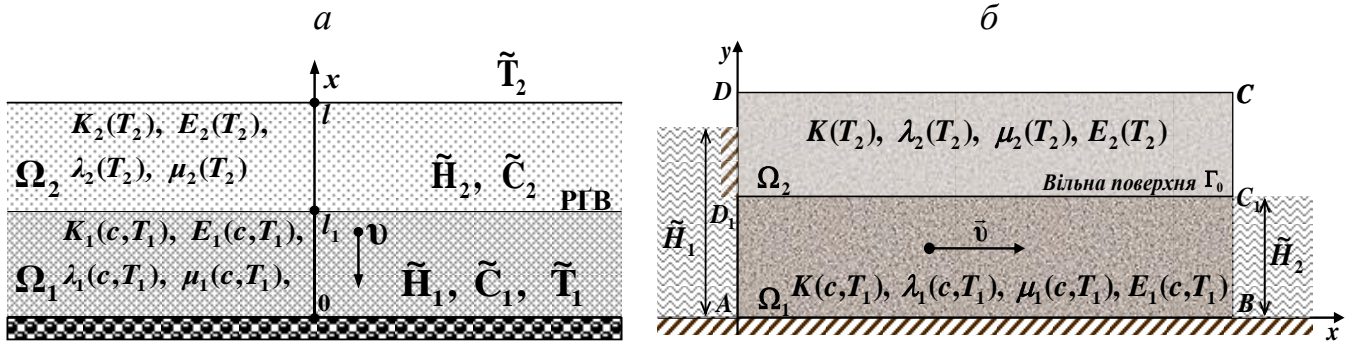


Рис. 4. Схеми ґрунтового масиву при наявності вільної поверхні з урахуванням тепло-масоперенесення в одно- (а) та двовимірному (б) випадках

Особливістю математичної моделі двовимірної задачі НДС ґрунтового масиву з вільною поверхнею в умовах тепло-масоперенесення при фільтрації сольових розчинів у порівнянні з математичною моделлю (1)-(14), буде наявність умов спряження ідеального контакту для шуканих функцій  $\mathbf{u}(\mathbf{X}) = (U(\mathbf{X}), V(\mathbf{X}))$  та  $T(\mathbf{X}, t)$

$$[T_i(\mathbf{X}, t)]_{\Gamma_0} = 0, [\mathbf{q}_T^{(i)}]_{\Gamma_0} = 0, \mathbf{X} \in \Omega_i, i = \overline{1, 2}, \quad (15)$$

$$[u_n^{(i)}]_{\Gamma_0} = [u_s^{(i)}]_{\Gamma_0} = 0, [\sigma_n^{(i)}]_{\Gamma_0} = [\tau_s^{(i)}]_{\Gamma_0} = 0, \mathbf{X} \in \Omega_i, i = \overline{1, 2}, \quad (16)$$

де  $\mathbf{q}_T^{(i)}$  – питомий тепловий потік в ґрунті; а також значення компонент масової сили обчислюються за наступними формулами:

$$X_i = \begin{cases} \frac{dp_1}{dx}, & \mathbf{X} \in \Omega_1, \\ 0, & \mathbf{X} \in \Omega_2, \end{cases} \quad Y_i = \begin{cases} \gamma_{зв} + \frac{dp_2}{dy}, & \mathbf{X} \in \Omega_1, \\ \gamma_{np}, & \mathbf{X} \in \Omega_2, \end{cases} \quad (17)$$

де  $\gamma_{np}$  – питома вага ґрунту, що знаходиться в природному стані.

Чисельний розв'язок поставлених крайових задач в одно- та двовимірному випадках, аналогічно до знаходження чисельного розв'язку, описаного в розділі 2, знайдено методом скінченних різниць при апроксимації відповідних умов спряження для зміщень, напружень та температури.

У третьому розділі також розглянуто двовимірні задачі математичного моделювання НДС фільтруючої основи ґрунтової греблі з вільною поверхнею (рис. 5) та НДС ґрунтового масиву внаслідок утворення депресійної лунки під впливом тепло-масоперенесення при фільтрації сольових розчинів (рис. 6).

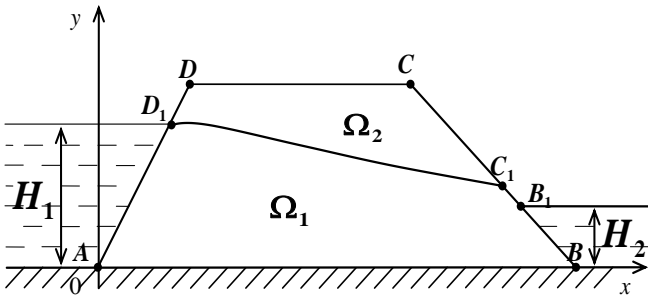


Рис. 5. Схема основи фільтруючої ґрунтової греблі з урахуванням тепло-масоперенесення

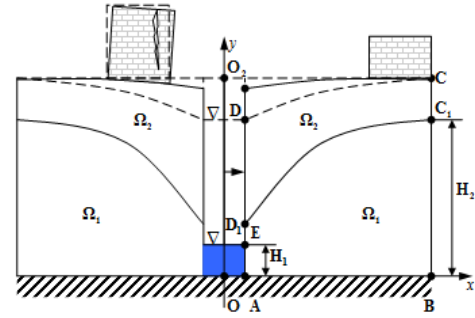


Рис. 6. Розрахункова схема до прогнозування осідання земної поверхні при пониженні вільної поверхні в результаті відкачки рідини із дренажної щілини

Особливістю даних задач є наявність рухомої вільної поверхні та проміжку височування  $\Gamma_v$ , на яких задано наступні умови:

$$(\mathbf{v}, \mathbf{n})|_{C_1 D_1} = n \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad \varphi(x, y, t) = (y - h(x, y, t))|_{C_1 D_1} = 0, \quad h|_{C_1 D_1 \cup \Gamma_v} = y. \quad (18)$$

Чисельний розв'язок даних крайових задач знайдено методом скінченних різниць з використанням чисельних конформних відображень в оберненій постановці. У зв'язку з цим, математичні моделі поставлених крайових задач записано в комплексній площині  $\xi, \eta$ . Здійснено чисельні конформні відображення областей  $\Omega$  фізичних площин на параметричні прямокутники  $\Omega_\xi$  комплексних площин. Відповідно перетворені рівняння рівноваги в формі Ламе для зміщень у змінних  $\xi, \eta$  комплексної площини мають вигляд

$$P_1 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + P_2 \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + P_3 \frac{\partial U}{\partial \xi} + P_4 \frac{\partial U}{\partial \eta} + P_5 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} = F_1(V, T),$$

$$L_1 \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} + L_2 \frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2} + L_3 \frac{\partial V}{\partial \xi} + L_4 \frac{\partial V}{\partial \eta} + L_5 \frac{\partial^2 V}{\partial \xi \partial \eta} = F_2(U, T),$$

де  $P_i, L_i, i = \overline{1, 5}, F_1(V, T), F_2(U, T)$  – відомі функції коефіцієнтів  $\lambda(c, T), \mu(c, T)$  та похідних функцій  $\lambda(c, T), \mu(c, T), x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)$  по змінних  $\xi, \eta$  відповідно.

Аналогічно перетворено решту диференціальних рівнянь, а також крайові умови та умови спряження для зміщень, напружень і температури, крайові умови для напору та концентрації сольових розчинів при переході до змінних  $\xi, \eta$  відповідно.

Результати чисельних експериментів показали суттєвий вплив тепло-масоперенесення при фільтрації сольових розчинів на розподіл зміщень, напружень та деформацій ґрунтового масиву з вільною поверхнею, у тілі ґрунтової греблі з вільною поверхнею та ґрунтовому масиві при утворенні в ньому депресійної лунки. Зокрема, у двовимірному випадку в межах проведених експериментів наявність вільної поверхні в середньому зменшує зміщення по осі  $Ox$  в 4 рази та збільшує зміщення по осі  $Oy$  у 2 рази в порівнянні з водонасиченим ґрунтовим масивом. Аналогічні чисельні експерименти проведено для нормальних та дотичних деформацій і напружень.



**Четвертий розділ** присвячено математичному моделюванню впливу тепло-масоперенесення при фільтрації сольових розчинів на НДС багат шарового ґрунтового масиву з вільною поверхнею ґрунтових вод та з урахуванням залежностей коефіцієнтів фільтрації, Ламе та модуля Юнга від концентрації сольового розчину та температури в одно- та двовимірному випадках (рис. 7).

Ґрунтовий масив складається із багатьох шарів, кожен з яких володіє різними механічними та фізико-хімічними властивостями. Області ґрунтового масиву, що знаходяться під РГВ (вільною поверхнею), є водонасиченими, а над РГВ (вільною поверхнею) – у природному стані. Вільна поверхня вважається нерухомою.

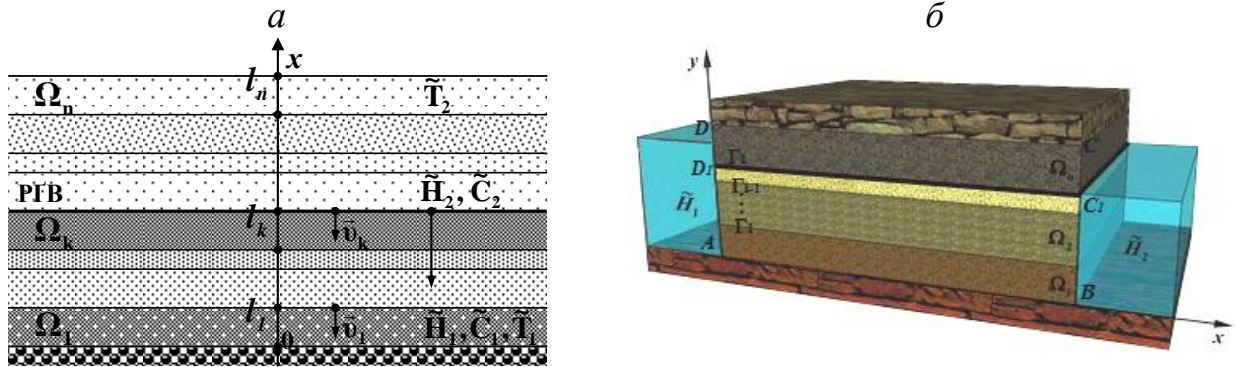


Рис. 7. Схеми багат шарового фільтруючого ґрунтового масиву з урахуванням тепло-масоперенесення при наявності РГВ (вільної поверхні) в одно- (а) та двовимірному (б) випадках

Математичну модель двовимірної задачі НДС багат шарового фільтруючого ґрунтового масиву з вільною поверхнею в умовах тепло-масоперенесення можна отримати з математичної моделі (1)-(14) з урахуванням (15)-(17), доповнивши її умовами спряження ідеального контакту у водонасичених шарах ґрунту для концентрації сольових розчинів та п'єзометричного напору вигляду

$$[h_i(\mathbf{X}, t)]|_{\Gamma_i} = 0, [c_i(\mathbf{X}, t)]|_{\Gamma_i} = 0, [\mathbf{v}_i]|_{\Gamma_i} = 0, [\mathbf{q}_c^{(i)}]|_{\Gamma_i} = 0, \mathbf{X} \in \Omega_i, i = \overline{1, k-1},$$

а також для концентрації сольових розчинів у неізотермічних умовах на кривій депресії виконується наступна гранична умова:  $(\mathbf{D}_k(c_k, T_k) \nabla c_k + \mathbf{D}_T^{(k)} \nabla T_k, \mathbf{n}_k)|_{\Gamma_k} = 0$ .

Чисельний розв'язок поставлених крайових задач, аналогічно до знаходження чисельного розв'язку, описаного в розділах 2 та 3, знайдено методом скінченних різниць при апроксимації відповідних умов спряження для невідомих функцій.

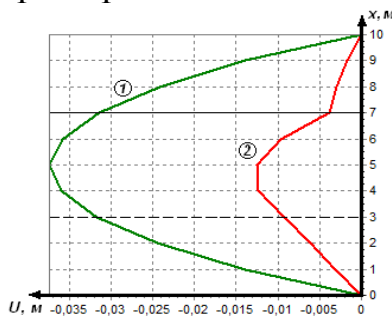


Рис. 8. Графіки розподілу зміщень з урахуванням тепло-масоперенесення ( $t = 1440$  діб): 1) без РГВ; 2) за наявності РГВ

Як приклад, розглянуто ґрунтовий масив, що складається із трьох шарів (водонасичених глинистого та піщаного ґрунтів та шару ґрунту в природному стані, що знаходиться над РГВ (вільною поверхнею)). Врахування наявності РГВ значно змінює картину НДС. А саме: як видно з рис. 8, зміщення в одно-вимірному випадку значно зменшуються за наявності РГВ у порівнянні з відповідними значеннями зміщень при відсутності РГВ.

У результаті проведених чисельних експериментів для двовимірної задачі встановлено, що наявність вільної поверхні на глибині 7 м в середньому зменшує зміщення по осі  $Ox$  в 1,6 разів та збільшує зміщення по осі  $Oy$  в 1,3 рази у порівнянні з водонасиченим ґрунтовим масивом, а також у середньому збільшує зміщення по осі  $Ox$  в 2,5 рази та зменшує зміщення по осі  $Oy$  в 1,5 рази в порівнянні зі зміщеннями при наявності вільної поверхні на глибині 5 м. Аналогічні чисельні експерименти проведено для нормальних та дотичних деформацій і напружень. Також на результати чисельних експериментів значно впливає тип ґрунту, в якому досліджуються вищеописані процеси. Зокрема, значення зміщень у глинистому водонасиченому шарі ґрунту менші, ніж у шарі піщаного водонасиченого ґрунту. У шарі ґрунту в природному стані зміщення найменші і змінюються незначно.

Математичні моделі вищеописаних задач НДС ґрунтових масивів і основ в одновимірному випадку зводяться до знаходження в довільній точці ґрунтового середовища компоненти зміщення  $U$ , деформації  $\varepsilon_x$  та напруження  $\sigma_x$ .

## **ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ РОБОТИ ТА ВИСНОВКИ**

Дисертаційна робота є завершеним науковим дослідженням, в якому поставлено та розв'язано актуальне та важливе наукове завдання математичного моделювання впливу тепло-масоперенесення при фільтрації сольових розчинів у неізотермічних умовах на деформаційні процеси ґрунтових масивів і основ, зокрема враховано залежності коефіцієнтів фільтрації, Ламе та модуля Юнга від концентрації сольових розчинів та температури, наявність вільної поверхні ґрунтових вод (наявності областей водонасиченого ґрунтового масиву та ґрунту, що знаходиться у природному стані), а також наявність областей ґрунту з різними механічними та фізико-хімічними властивостями. При цьому отримано такі основні результати та висновки:

1. Побудовано нові математичні моделі НДС ґрунтових масивів і основ у нелінійній постановці з урахуванням впливу тепло-масоперенесення при фільтрації сольових розчинів у неізотермічних умовах та залежностей коефіцієнтів Ламе і модуля Юнга від концентрації сольових розчинів та температури в одно- та двовимірному випадках. Розглянуто випадки водонасиченого ґрунтового масиву; ґрунтового масиву при наявності РГВ; ґрунтового масиву та основи ґрунтової греблі з вільною поверхнею; ґрунтового масиву внаслідок утворення депресійної лунки та багат шарового ґрунтового масиву з різними фізико-хімічними та механічними властивостями його шарів.

2. Виведено систему рівнянь рівноваги для зміщень ґрунту в формі Ламе на основі узагальнення закону Гука з урахуванням впливу тепло-масоперенесення при фільтрації сольових розчинів у неізотермічних умовах та залежностей коефіцієнтів Ламе, модуля Юнга від концентрації сольових розчинів та температури.

3. Отримано граничні умови та умови спряження для зміщень і напружень з урахуванням впливу тепло-масоперенесення та залежностей коефіцієнтів Ламе, модуля Юнга від концентрації сольових розчинів та температури.

4. Розвинено метод скінченних різниць чисельного розв'язування крайових задач тепло-масоперенесення для нелінійних рівнянь параболічного типу, що



містять першу похідну; чисельний метод конформних відображень складених областей з криволінійними фіксованими та вільними межами для чисельного розв'язування задач НДС ґрунтових масивів і основ; метод скінченних різниць для чисельного розв'язування системи рівнянь рівноваги в формі Ламе для зміщень ґрунту в розглядуваних областях. Розроблено обчислювальні алгоритми для реалізації відповідних різницевих схем чисельного розв'язування поставлених крайових задач та створено необхідний програмний комплекс.

5. Проведено серію чисельних експериментів, які показали значний вплив тепло-масоперенесення при фільтрації сольових розчинів у неізотермічних умовах, наявності вільної поверхні та багатошаровості ґрунтового масиву з різними фізико-хімічними та механічними властивостями в кожному з шарів на розподіл зміщень, нормальних та дотичних деформацій та напружень. Зокрема, врахування тепло-масоперенесення може змінювати значення компонент вектора зміщень, нормальних та дотичних деформацій і напружень у середньому в декілька разів у порівнянні з відповідними значеннями даних величин без урахування тепло-масоперенесення. На розподіл зміщень, нормальних та дотичних напружень і деформацій суттєво впливає тип ґрунту. При підвищенні рівня ґрунтових вод значення зміщень збільшуються, а при пониженні – зменшуються у водонасиченій області ґрунту. Аналогічні чисельні експерименти проведено для нормальних та дотичних деформацій і напружень. Отримані значення зміщень, нормальних та дотичних деформацій і напружень також показали суттєві зміни НДС в області водонасиченого ґрунту та ґрунту в природному стані як в ґрунтовій греблі, так і в ґрунтовому масиві при наявності водозабірних свердловин.

6. Практичне значення отриманих у дисертаційній роботі результатів полягає в проведенні математичного моделювання НДС ґрунтових масивів і основ при наявності в них різних процесів, знаходженні чисельних розв'язків важливих інженерно-практичних задач та проведенні чисельних експериментів з метою аналізу зміни НДС ґрунтових масивів і основ при наявності різних фізико-хімічних процесів у ґрунтах, дії техногенних факторів та зміни гідрогеологічних умов. Результати дисертаційних досліджень можуть бути використані гідротехніками, інженерами-будівельниками при проектуванні, будівництві та подальшій експлуатації споруд цивільного будівництва, гідротехнічних та енергетичних об'єктів з метою попередження та уникнення аварійних ситуацій, прогнозуванні стійкості та надійності споруд, несучої здатності ґрунтових основ, на яких дані об'єкти планують будувати чи вже є побудовані, а також у навчальному процесі при читанні спецкурсів та виконанні кваліфікаційних, дипломних і магістерських робіт студентами інженерних та кібернетичних спеціальностей.

## СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. *Власюк А. П.* Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния основания грунтовой плотины со свободной поверхностью под влиянием тепло- и массопереноса в двумерном случае / *А. П. Власюк, Н. А. Жуковская* // Инженерно-физический журнал. – 2015. – Т. 88, № 2. – С. 324–335.

*Vlasyuk A. P.* Mathematical simulation of the stressed-strained state of the foundation of earth dams with an open surface under the influence of heat and mass transfer in two-dimensional

- case / *A. P. Vlasjuk, N. A. Zhukovskaya* // *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. – 2015. – Vol. 88, Issue 2. – Pp. 329–341.
2. *Федорчук Н. А.* Математичне моделювання одновимірної задачі напружено-деформованого стану ґрунтового масиву при фільтрації сольових розчинів в неізотермічних умовах та наявності рівня ґрунтових вод / *Н. А. Федорчук* // Математичне та комп'ютерне моделювання. Сер. технічні науки: зб. наук. праць. – 2010. – Вип. 4. – С. 204–215.
  3. *Філатова І. А.* Математичне моделювання напружено-деформованого стану ґрунтових масивів в складних гідрогеологічних умовах / *І. А. Філатова, Н. А. Федорчук* // Вісник Київського ун-ту. Сер. фіз.-матем. науки. – 2011. – Вип. 3. – С. 218–226.
  4. *Власюк А. П.* Математичне моделювання одновимірної задачі напружено-деформованого стану ґрунтового масиву в умовах тепло-масоперенесення при фільтрації сольових розчинів / *А. П. Власюк, Н. А. Федорчук* // Вісник Київського ун-ту. Сер. фіз.-матем. науки. – 2012. – Вип. 1. – С. 131–136.
  5. *Власюк А. П.* Математичне моделювання напружено-деформованого стану ґрунтової основи гідротехнічного об'єкта в процесі тепло-масоперенесення / *А. П. Власюк, Н. А. Федорчук* // Вісник Київського ун-ту. Сер. фіз.-матем. науки. – 2013. – Вип. 3. – С. 256–262.
  6. *Власюк А. П.* Чисельне моделювання напружено-деформованого стану багат шарового ґрунтового масиву за наявності рівня ґрунтових вод та впливу тепло-масоперенесення в одновимірному випадку / *А. П. Власюк, Н. А. Федорчук* // Математичне та комп'ютерне моделювання. Сер. технічні науки: зб. наук. праць. – 2013. – Вип. 8. – С. 31–44.
  7. *Власюк А. П.* Числове моделювання впливу тепло-масоперенесення на напружено-деформований стан ґрунтового масиву внаслідок утворення депресійної лунки / *А. П. Власюк, Н. А. Федорчук* // Вісник Тернопільського національного технічного університету. – 2014. – №1 (73). – С. 224–237.
  8. *Власюк А. П.* Математичне моделювання напружено-деформованого стану ґрунтового масиву з урахуванням тепло-масоперенесення в двовимірному випадку / *А. П. Власюк, Н. А. Жуковська, Д. В. Каюн, С. О. Бабанов* // Вісник Нац. ун-ту водн. госп-ва та природокористув. Сер. технічні науки. – 2014. – Вип. 4 (68). – С. 462–472.
  9. *Власюк А. П.* Математичне моделювання напружено-деформованого стану ґрунтового масиву з вільною поверхнею під впливом тепло-масоперенесення розчинених у фільтраційному потоці речовин у двовимірному випадку / *А. П. Власюк, Н. А. Жуковська* // Вісник Нац. ун-ту водн. госп-ва та природокористув. Сер. технічні науки. – 2015. – Вип. 3 (71). – Ч. 2. – С. 408–416.
  10. *Власюк А. П.* Математичне моделювання напружено-деформованого стану багат шарового ґрунтового масиву в умовах теплопереносу при наявності рівня ґрунтових вод / *А. П. Власюк, Н. А. Федорчук* // Тез. XII Міжнар. наук. конф. імені академіка М. Кравчука. – Київ, 2008. – С. 73.
  11. *Власюк А. П.* Математичне моделювання впливу тепло-масопереносу на напружено-деформований стан багат шарового ґрунтового масиву при наявності рівня ґрунтових вод / *А. П. Власюк, Н. А. Федорчук* // Тез. Міжнар. конф. «Прийняття рішень в умовах невизначеності». – Київ-Рівне, 2008. – С. 73–75.
  12. *Власюк А. П.* Математичне моделювання напружено-деформованого стану ґрунтового масиву в умовах тепло-масопереносу / *А. П. Власюк, Н. А. Федорчук* // Тез. XV Всеукр.

- наук. конф. «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики». – Львів : Вид-во ЛНУ, 2008. – С. 53.
13. *Власюк А. П.* Чисельне дослідження впливу тепло-масопереносу на напружено-деформований стан ґрунтового масиву в двохвимірному випадку / *А. П. Власюк, Н. А. Федорчук* // Тез. Міжнар. конф. «Прийняття рішень в умовах невизначеності». – Крим (Новий Світ), 2008. – С. 66–68.
  14. *Власюк А. П.* Чисельне моделювання напружено-деформованого стану основи ґрунтової греблі при наявності тепло-масопереносу / *А. П. Власюк, Н. А. Федорчук* // Тез. доп. Міжнар. наук. конф. «Прийняття рішень в умовах невизначеності». – Кам'янець-Подільський, 2009. – С. 48–49.
  15. *Власюк А. П.* Математичне моделювання напружено-деформованого стану ґрунтового масиву внаслідок утворення депресійної лунки при наявності тепло-масопереносу / *А. П. Власюк, Н. А. Федорчук* // Тез. доп. XVI Всеукр. наук. конф. «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики». – Львів : Вид-во ЛНУ, 2009. – С. 50–51.
  16. *Власюк А. П.* Математичне моделювання впливу тепло-масопереносу на напружено-деформований стан багатошарового ґрунтового масиву при наявності рухомої поверхні рівня ґрунтових вод / *А. П. Власюк, Н. А. Федорчук* // Тез. доп. XIII Міжнар. наук. конф. імені академіка М. Кравчука. – Київ, 2010. – С. 92.
  17. *Власюк А. П.* Чисельне дослідження впливу тепло-масопереносу на напружено-деформований стан ґрунтового масиву при наявності рухомої вільної поверхні ґрунтових вод / *А. П. Власюк, Н. А. Федорчук* // Тез. доп. XVI Міжнар. наук. конф. «Прийняття рішень в умовах невизначеності». – Ялта, 2010. – С. 38–40.
  18. *Власюк А. П.* Математичне моделювання впливу тепло-масопереносу на напружено-деформований стан ґрунтового масиву в процесі руху вільної поверхні ґрунтових вод / *А. П. Власюк, Н. А. Федорчук* // Тез. доп. XVII Міжнар. наук. конф. «Прийняття рішень в умовах невизначеності». – Східниця, 2011. – С. 46–48.
  19. *Власюк А. П.* Математичне моделювання напружено-деформованого стану в основі гідротехнічного об'єкта при наявності тепло-масопереносу / *А. П. Власюк, Н. А. Федорчук* // Тез. доп. XVIII Міжнар. наук. конф. «Прийняття рішень в умовах невизначеності». – Ялта, 2011. – С. 51–53.
  20. *Власюк А. П.* Про одну задачу моделювання напружено-деформованого стану ґрунтового масиву в умовах тепло-масоперенесення / *А. П. Власюк, Н. А. Федорчук* // Тез. доп. XVII Всеукр. наук. конф. «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики» присвяченої 350-річчю Львівського національного університету імені Івана Франка. – Львів : Вид-во ЛНУ, 2011. – С. 26.
  21. *Власюк А. П.* Математичне моделювання впливу тепло-масоперенесення на напружено-деформований стан ґрунтової основи гідротехнічного об'єкта під флутбетом зі шпунтом / *А. П. Власюк, Н. А. Федорчук* // Тез. доп. XIV Міжнар. наук. конф. імені академіка М. Кравчука. – Київ, 2012. – С. 113–114.
  22. *Власюк А. П.* Чисельне моделювання впливу тепло-масоперенесення на напружено-деформований стан основи багатошарової ґрунтової греблі / *А. П. Власюк, Н. А. Федорчук* // Тез. доп. XIX Міжнар. наук. конф. «Прийняття рішень в умовах невизначеності». – Мукачево, 2012. – С. 70–72.

23. *Vlasyuk A. P.* Mathematical modeling of stressed deformed state change of soil dam base with core / *A. P. Vlasyuk, N. A. Fedorchuk* // Abstracts of XX International Conference «Problems of decision making under uncertainties». – Brno, Czech Republic, 2012. – Pp. 131–133.
24. *Власюк А. П.* Числове моделювання впливу тепло-масоперенесення на напружено-деформований стан багатопереламного ґрунтового масиву / *А. П. Власюк, Н. А. Федорчук* // Тез. доп. XVIII Всеукр. наук. конф. «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики». – Львів : Вид-во ЛНУ, 2012. – С. 60.
25. *Власюк А. П.* Математичне моделювання зміни напружено-деформованого стану ґрунтового масиву з вільною поверхнею під впливом тепло-масоперенесення / *А. П. Власюк, Н. А. Федорчук* // Тез. Всеукр. наук. конф. «Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів». – Рівне, 2013. – С. 45.
26. *Власюк А. П.* Комп'ютерне моделювання напружено-деформованого стану ґрунтового масиву внаслідок утворення депресійної лунки в неізотермічних умовах / *А. П. Власюк, Н. А. Федорчук* // Тез. доп. Міжнар. науково-практичної конф. «Проблеми розвитку вищої школи та економіки в XXI столітті». – Рівне : РВЦ МЕРУ імені академіка Степана Дем'янчука, 2013. – С. 80–82.
27. *Власюк А. П.* Про одну задачу моделювання впливу тепло-масоперенесення на напружено-деформований стан ґрунтового масиву у тривимірному випадку / *А. П. Власюк, Н. А. Жуковська* // Тез. Міжнар. наук. конф. «Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів». – Рівне, 2015. – С. 43.
28. *Власюк А. П.* Математичне моделювання напружено-деформованого стану ґрунтового масиву з врахуванням тепло-масоперенесення у тривимірному випадку / *А. П. Власюк, Н. А. Жуковська* // Тез. XXV Міжнар. наук. конф. «Прийняття рішень в умовах невизначеності». – Східниця, 2015. – С. 155–157.
29. *Власюк А. П.* Математичне моделювання впливу тепло-масоперенесення на напружено-деформований стан ґрунтового масиву з вільною поверхнею в тривимірному випадку / *А. П. Власюк, Н. А. Жуковська* // Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики. Збірник наукових праць. – Львів : Львівський національний університет імені Івана Франка. – 2015. – С. 87–88.

## АНОТАЦІЇ

**Жуковська Н. А. Математичне моделювання впливу тепло-масоперенесення при фільтрації сольових розчинів на деформаційні процеси ґрунтових масивів. – На правах рукопису.**

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук за спеціальністю 01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи. – Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, Тернопіль, 2016.

В дисертаційній роботі побудовано нові математичні моделі напружено-деформованого стану ґрунтових масивів і основ у нелінійній постановці з урахуванням тепло-масоперенесення при фільтрації сольових розчинів у неізотермічних умовах та залежностей коефіцієнтів фільтрації, Ламе і модуля Юнга від концентрації сольових розчинів та температури, наявності вільної поверхні ґрунтових вод та дослідження деформаційних процесів у ґрунтах, які складаються з шарів із різними механічними та фізико-хімічними властивостями. Виведено

систему рівнянь рівноваги в формі Ламе для зміщень ґрунту на основі узагальнення закону Гука з урахуванням тепло-масоперенесення та залежностей коефіцієнтів Ламе, модуля Юнга від концентрації сольових розчинів та температури. Отримано граничні умови та умови спряження для зміщень і напружень з врахуванням теплового та хімічного станів ґрунтового середовища. Розвинено обчислювальні методи для знаходження чисельних розв'язків відповідних крайових задач в одно- та двовимірному випадках. На основі розроблених алгоритмів створено відповідний програмний комплекс, проведено серію чисельних експериментів та їх аналіз. Показано вплив факторів тепло-масоперенесення при фільтрації сольових розчинів у неізотермічних умовах, наявності вільної поверхні, багатошаровості ґрунту на розподіл зміщень, нормальних та дотичних напружень та деформацій.

**Ключові слова:** математичне моделювання, напружено-деформований стан, зміщення, напруження, деформації, тепло-масоперенесення, ґрунтовий масив, вільна поверхня, конформні відображення, метод скінченних різниць, монотонна різницева схема.

**Жуковская Н. А. Математическое моделирование влияния тепло- и массопереноса при фильтрации солевых растворов на деформационные процессы грунтовых массивов. – На правах рукописи.**

Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук по специальности 01.05.02 – математическое моделирование и вычислительные методы. – Тернопольский национальный технический университет имени Ивана Пулюя, Тернополь, 2016.

В диссертационной работе на основании анализа литературных источников сформулированы постановки и построены новые математические модели напряженно-деформированного состояния грунтовых массивов и оснований в нелинейной постановке с учетом тепло- и массопереноса при фильтрации солевых растворов в неізотермических условиях и зависимостей коэффициентов фильтрации, Ламе и модуля Юнга от концентрации солевых растворов и температуры, наличия свободной поверхности грунтовых вод и исследования деформационных процессов в грунтах, состоящих из слоев с различными физико-химическими и механическими свойствами, а также в фильтрующей грунтовой плотине со свободной поверхностью, грунтовой массиве в результате образования депрессионной лунки. Получена система уравнений равновесия в форме Ламе для смещений грунта на основании обобщения закона Гука с учетом тепло- и массопереноса и зависимостей коэффициентов Ламе, модуля Юнга от концентрации солевых растворов и температуры. Выведены граничные условия и условия сопряжения для смещений и напряжений с учетом теплового и химического состояний почвенной среды. Получили дальнейшее развитие и эффективно использованы численные методы для отыскания приближенных решений соответствующих краевых задач в одно- и двумерном случаях. В частности, это конечно-разностные методы благодаря построению монотонных разностных схем для нелинейных уравнений параболического типа, содержащих первую производную; метод численных конформных отображений для областей почвы

сложной геометрической формы, в том числе со свободной поверхностью, который включает в себя построение численных конформных отображений; итерационный метод для отыскания численного решения системы уравнений равновесия в форме Ламе для смещений грунта. На основании разработанных алгоритмов создан соответствующий программный комплекс и проведена серия численных экспериментов. Выполнен анализ полученных результатов. Показано существенное влияние факторов тепло- и массопереноса при фильтрации солевых растворов в неизотермических условиях, зависимостей коэффициентов фильтрации, Ламе, модуля Юнга от концентрации солевых растворов и температуры, наличия свободной поверхности, многослойности почвы на распределение смещений, нормальных и касательных напряжений и деформаций.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, напряженно-деформированное состояние, смещения, напряжения, деформации, тепло- и массоперенос, грунтовый массив, свободная поверхность, конформные отображения, метод конечных разностей, монотонная разностная схема.

**Zhukovska N. A. Mathematical modelling of influence of heat and mass transfer on deformation processes of soil masses under the salt filtration. – Manuscript.**

The thesis for Candidate Degree of Technical Sciences on specialty 01.05.02 – mathematical modelling and computational methods. – Ternopil Ivan Pul'uj National Technical University, Ternopil, 2016.

Based on the literature review the new mathematical models of nonlinear boundary value problems of the stressed-strained state of soil masses, considering heat and mass transfer, filtering salt solutions in non-isothermal conditions, the dependencies of filtration and Lamé coefficients, and Young's modulus of the concentration of salt solutions and temperature, presence of free groundwater surface and study of deformation characteristics of soils consisting of layers with different mechanical and physical and chemical properties are formulated and improved. Introduced system of equilibrium equations in the form of Lamé displacement based on the generalization of Hooke's Law with regard to heat and mass transfer and the dependencies of Lamé coefficients, the Young's modulus of the concentration of salt solutions and temperatures is modified. Boundary conditions for the displacements on the thermal and chemical conditions of the soil environment are discovered. Computational methods to find numerical solutions of the corresponding nonlinear boundary value problems in one- and two-dimensional cases are improved. On the basis of the developed algorithms the appropriate software is created. A series of numerical experiments and their analysis are conducted. Significant effect of heat and mass transfer, filtering salt solutions in non-isothermal conditions, the dependence of Lamé coefficients, the Young's modulus of the concentration of salt solutions and temperature, the presence of the free surface of the soil layering on the distribution of displacements, stresses and strains are disclosed.

**Key words:** mathematical modelling, stressed-strained state, displacements, stresses, strains, heat and mass transfer, soil mass, free surface, conformal mapping, finite difference method, monotone difference scheme.

Підписано до друку 17.05.2016 р. Формат 60×90<sup>1</sup>/<sub>16</sub>.  
Папір друкарський № 1. Гарнітура Times.  
Друк різнографічний. Ум.-друк. арк. 0,9.  
Тираж 100 прим. Зам. № 5166.

---

*Видавець і виготовлювач*  
*Редакційно-видавничий відділ Національного університету*  
*водного господарства та природокористування,*  
*33028, м. Рівне, вул. Соборна, 11.*

*Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до державного*  
*реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів*  
*видавничої продукції РВ № 31 від 26.04.2005 р.*