УДК 517.949.2

**Л. Стельмащук**
(Тернопільський державний технічний університет імені Івана Пулюя)

# ЗНАХОДЖЕННЯ ПЕРІОДИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ОДНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ

Розглянемо інтегро - диференціальне рівняння із запізненням вигляду

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f\left(t, x(t), x\left(t-\frac{T}{2}\right), \dot{x}(t), \dot{x}\left(t-\frac{T}{2}\right), \int_0^t \varphi\left(t, s, x(t), x\left(t-\frac{T}{2}\right), \dot{x}(t), \dot{x}\left(t-\frac{T}{2}\right)\right)ds\right). \quad (1)$$

Припустимо, що функції $f(t,u,u_1,v,v_1,w)$, $\varphi(t,s,u,u_1,v,v_1)$ з правої частини (1) визначені в області

$$t, s \in R,\ u, u_1 \in [a,b],\ v, v_1 \in [c,d],\ w \in [\alpha, \beta], \quad (2)$$

неперервні за сукупністю всіх своїх змінних, $T$ - періодичні по $t, s$ і задовольняють умови обмеженості змінними $M$ та $N$ та умову Ліпшица зі змінними $K_1,...K_5$ та $L_1,...L_4$ відповідно

**Теорема.** Нехай права частина системи (1) визначена і неперервна в області (2),функції $f(t,u,u_1,v,v_1,w)$, $\varphi(t,s,u,u_1,v,v_1)$ періодичні по $t, s$ з періодом *T*, задовольняють умови

$$c \le -2\left(\pi + 2\sqrt{2}\sigma(m)\right)M \le 2\left(\pi + 2\sqrt{2}\sigma(m)\right)M \le d\ ,$$

$$\left(\pi + 2\sqrt{2}\sigma(m)\right)\left[\pi(K_1 + K_2 + K_5\theta(L_1 + L_2)) + 2(K_3 + K_4 + K_5\theta(L_3 + L_4))\right] < 1\ ,$$

найбільше власне значення $\lambda_{\max}$ матриці

$$Q = \begin{pmatrix} \left(\pi^2 + 2\sqrt{2}\pi\sigma(m)\right)(K_1 + K_2 + K_5\theta(L_1 + L_2)) & \left(\pi^2 + 2\sqrt{2}\pi\sigma(m)\right)(K_3 + K_4 + K_5\theta(L_3 + L_4)) \\ \left(2\pi + 4\sqrt{2}\sigma(m)\right)(K_1 + K_2 + K_5\theta(L_1 + L_2)) & \left(2\pi + 4\sqrt{2}\sigma(m)\right)(K_3 + K_4 + K_5\theta(L_3 + L_4)) \end{pmatrix}$$

менше одиниці та для довільних $t, s, u, u_1, v, v_1, w$ з області (2)

$$f(-t, x, x_\tau, -y, -y_\tau, w) = -f(t, x, x_\tau, y, y_\tau, w),$$

$$\varphi(-t, s, x, x_\tau, -y, -y_\tau) = -\varphi(t, s, x, x_\tau, y, y_\tau),$$

$$\varphi(t, -s, x, x_\tau, -y, -y_\tau) = -\varphi(t, s, x, x_\tau, y, y_\tau),$$

а функція $x(t)$ така, що: $x(t) = x(-t)$, а $\dot{x}(t) = -\dot{x}(-t)$.

Тоді через будь – яку точку $x_0 \in D - MT^2/6$ проходить при *t=0* парний періодичний періоду T розв'язок $x = x_\infty(t, x_0)$ системи (1), який визначається рекурентними співвідношеннями

$$x_0(t, x_0) = x_0\ ,$$

$$x_m(t, x_0) = x_0 + L^2 f\left(t, [x_{m-1}(t, x_0)], \int_0^t \varphi(t, s, [x_{m-1}(s, x_0)])ds\right), \quad m = 1, 2, ....$$

Зауваження. Множина систем виду (1), для яких існують періодичні розв'язки – не порожня. Останнє випливає, наприклад, з системи

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\int_0^t x(s)ds - x(t) - \frac{dx}{dt}\ ,$$

розв'язком якої є однопараметрична множина періодичних функцій $x(t) = C\cos t$ у чому неважко переконатися безпосередньою перевіркою.