УДК 517. 944

Л. Фурсевич
(Тернопільський державний технічний університет імені Івана Пулюя)

НЕЛІНІЙНА ЗАДАЧА ДЛЯ ЕВОЛЮЦІЙНОГО РІВНЯННЯ, ЯКЕ МІСТИТЬ ІНТЕГРАЛЬНІ ОПЕРАТОРИ СПАДКОЄМНОСТІ

Для математичного описання високо інтенсивних процесів енергопереносу в матеріальних середовищах, які мають теплову пам'ять, можна використати некласичне еволюційне рівняння, яке містить інтегральні оператори спадкоємності. Це рівняння із урахуванням нелінійно діючих джерел має вигляд:

$$\partial u/\partial t-\nabla^2 u+\dot{\varepsilon}*\partial u/\partial t-\dot{\lambda}*\nabla^2 u=f_0(x,t,u)\quad (x\in\Omega, t>0). \tag{1}$$

Для рівняння (2) розглядаємо наступні межові та початкову умови:

$$\partial u/\partial t+(\vec{n}\cdot\nabla u)+\dot{\varepsilon}*\partial u/\partial t+\dot{\lambda}*(\vec{n}\cdot\nabla u)=f_1(s,t,u)\quad (s\in\Gamma_1,\, t>0); \tag{2}$$

$$(\vec{n}\cdot\nabla u)=0\quad (s\in\Gamma_2, t>0);\quad u(x,0)=g(x)\ (x\in\bar{\Omega}), \tag{3}$$

де $\Omega\subset E^3$ - обмежена область точок $x=(x_1,x_2,x_3)$ із достатньо гладкою межею $\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2$, s – довільна точка на $\Gamma, \vec{n}$ – зовнішня нормаль до Γ, ∇^2-оператор Лапласа, $\varepsilon(t)$ *і* $\lambda(t)$ - (ядра релаксації) задані цілі функції експоненціального типу, $f_0(x,t,0)\in L_2(\Omega)$ *і* $f_1(s,t,0)\in L_2(\Gamma_1)$ для всіх $0<t\le t_0<\infty$; $\dot{\varepsilon}=\partial\varepsilon/\partial t$, $\dot{\lambda}=\partial\lambda/\partial t$.

Задачу формулюємо в операторному вигляді припускаючи, що $u_0(x)\in L_2(\Omega)$ *і* $u_1(s)\in L_2(\Gamma)$ Утворюємо пару $[u_0(x),u_1(x)]=\vec{u}(x)$ та вводимо дійсний гільбертовий простір $L^2(\bar{\Omega})=L_2(\Omega)\oplus L_2(\Gamma)$ із скалярним добутком

$$f_0(x,t,0)\in L_2(\Omega)\ i\ f_1(s,t,0)\in L_2(\Gamma_1) \tag{4}$$

де $\vec{u},\vec{v}\in L^2(\bar{\Omega})$. Крім того, вводимо симетричний додатно визначений оператор

$$\tilde{A}\varphi=\left[-\nabla^2\varphi(x),(\vec{n}\cdot\nabla\varphi(s))\right], \tag{5}$$

область визначення якого

$$D_{\tilde{A}}=\left\{\varphi:\varphi(x)\in C^2(\bar{\Omega}),\ (\vec{n}\cdot\nabla\varphi(s))_{\Gamma_2}=0\right\} \tag{6}$$

щільна в гільбертовому просторі $L^2(\bar{\Omega})$. Таким чином, оператор А, який є замиканням $\tilde{A}$ в $L^2(\bar{\Omega})$, самоспряжений та додатно визначений. Рівняння $A\vec{u}=\vec{f}$ в $L^2(\bar{\Omega})$ еквіва-лентне еліптичній задачі

$$-\nabla^2 u=f_0(x\in\Omega);\ (\vec{n}\cdot\nabla u)=f_1(s\in\Gamma_1);\quad (\vec{n}\cdot\nabla u)=0\ (s\in\Gamma_2), \tag{7}$$

а рівняння $A\varphi=\beta\varphi\ \ (\beta=const)$ еквівалентне задачі на власні значення

$$-\nabla^2\varphi=\beta\varphi\ (x\in\Omega);\ (\vec{n}\cdot\nabla\varphi)=\beta\varphi\ \ (s\in\Gamma_1);\ (\vec{n}\cdot\Delta\varphi)=0\ (s\in\Gamma_2). \tag{8}$$

Використовуючи оператор А, задачу (2)-(4) записуємо у вигляді:

$$\partial\vec{u}/\partial t+A\vec{u}+\dot{\varepsilon}*\partial\vec{u}/\partial t+\dot{\lambda}*Au=\vec{f}(t,\vec{u});\quad \vec{u}(0)=\vec{g}, \tag{9}$$

де $\vec{u}=[u(x,t),u(s,t)]$, $\vec{f}=[f_0(x,t,u(x,t)),f_1(s,t,u(s,t))]$, $\vec{g}=[g(x),g(s)]$.

Функція $u(x,t)$ вважається розв'язком задачі (2)-(4).