УДК 536.2

М. Шелестовська
(Тернопільський національний економічний університет)

РОЗВ’ЯЗОК РІВНЯННЯ ЛАПЛАСА ДЛЯ ПІВПРОСТОРУ ПРИ МІШАНИХ ГРАНИЧНИХ УМОВАХ

Розглянемо ізотропний півпростір на границі якого в круговій області здійснюється неідальний тепловий контакт з гарячим штампом через проміжковий шар. Зовні кругової області з поверхні півпростору і з бічної поверхні проміжкового шару відбувається теплообмін за законом Ньютона. Задача визначення температурного поля $T_1(r,z)$ в півпросторі зводиться до розв’язування рівняння Лапласа, яке в циліндричній системі координат r,φ,z у випадку осьової симетрії та стаціонарного поля записується так:

$$\Delta T_1=\frac{\partial^2 T_1}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\ \frac{\partial T_1}{\partial r}+\frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2}=0 \tag{1}$$

Граничні умови при $z=0$:

$$\lambda\,\Delta T_1-3\lambda_1\frac{\partial T_1}{\partial z}-3h\left(T_1-T_0\right)=0,\quad 0\le r<a, \tag{2}$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial z}=kT_1,\quad r>a, \tag{3}$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial r}=-k_1 T_1,\quad r=a \tag{4}$$

Розв’язок рівняння (1) подамо у вигляді:

$$T_1=\int_0^\infty \alpha\, A(\alpha)e^{-\alpha z}\, J_0(\alpha r)\,d\alpha \tag{5}$$

Умова (2) запишеться так:

$$\Delta T_1-\frac{3h}{\lambda}T_1=-\frac{3h}{\lambda}\cdot T_0-\frac{3\lambda_1}{\lambda}\int_0^\infty \alpha^2 A(\alpha)\,J_0(\alpha r)\,d\alpha. \tag{6}$$

Загальний розв’язок рівняння (6):

$$T=C_0\mathrm{I}_0\left(\sqrt{\frac{\lambda}{3h}}\cdot r\right)+T_0+\frac{3\lambda_1}{\lambda}\int_0^\infty \frac{\alpha^2\,A(\alpha)}{\alpha^2+3h\lambda^{-1}}\,J_0(\alpha r)\,d\alpha \tag{7}$$

Задовольняючи граничні умови (2)-(4), одержимо парні інтегральні рівняння

$$\int_0^\infty E(\alpha)\,J_0(\alpha r)\,d\alpha=C_0\mathrm{I}_0\left(\sqrt{\frac{\lambda}{3h}}\cdot r\right)+T_0\,,\ 0\le r<a, \tag{8}$$

$$\int_0^\infty \frac{\alpha\,E(\alpha)}{1-g(\alpha)}\,J_0(\alpha r)\,d\alpha=0,\quad r>a,\qquad E(a)=\left[\alpha-\frac{3\lambda_1 a}{\lambda L}\left(\frac{\alpha^2}{\alpha^2+3ha^2\,\lambda^{-1}}\right)\right]A(\alpha),$$

які зводяться до інтегрального рівняння Фредгольма другого роду

$$\varphi(x)-\frac{1}{\pi}\int_0^1\varphi(t)\left[G(x+t)+G(x-t)\right]dt=F(x),\quad 0\le x\le 1. \tag{9}$$

Тут $g(\alpha)$ відома раціональна функція, $G(y)=\int\limits_0^\infty g(\alpha)\cos\alpha y\,d\alpha$

Функція $E(\alpha)$ визначається за формулою:

$$E(\alpha)=\left[1-g(\alpha)\right]\int_0^1\varphi(t)\cos\alpha t\,dt. \tag{10}$$