

Симплекс-метод оптимізації

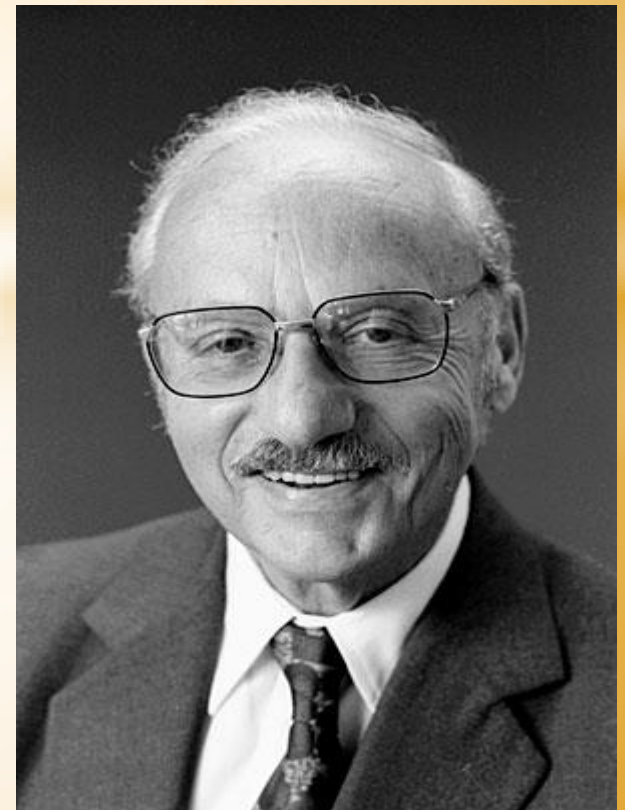
Виконала:

студентка групи СЖм-51

Барабаш Світлана

Симплекс-метод — це метод розв'язання задачі лінійного програмування, в якому здійснюється скерований рух по опорних планах до знаходження оптимального розв'язку; симплекс-метод також називають методом поступового покращення плану.

Метод був розроблений американським математиком Джорджем Данцігом у 1947 році.



Алгоритм симплекс-методу

1. Перетворення стандартної форми задачі лінійного програмування в канонічну.

$$F = \sum_{i=1}^r C_i x_i \rightarrow \max; \sum_{i=1}^n a_{ji} x_i + x_{n+j} = b_j, j = 1, m, x_i \geq 0, i = 1, n$$

2. Побудова і заповнення початкової симплекс таблиці.

$$F = \sum_{i=1}^r C_i x_i \rightarrow \max; F - \sum_{i=1}^r C_i x_i = 0$$

Базис	План	x_1	x_2	...	x_s	...	x_n	x_{n+1}	...	x_{n+m}	MRT
F	0	$-c_1$	$-c_2$...	$-c_s$...	$-c_n$	0	...	0	
x_{n+1}	b_1	a_{11}	a_{12}	...	a_s	...	a_{1n}	1	...	0	b_1/a_{1s}
...											
x_{n+r}	b_r	a_{r1}	a_{r2}	...	a_{rs}	...	a_{rn}	0	...	0	b_r/a_{rs}
x_{n+m}	b_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{ms}	...	a_{mn}	0	...	1	b_m/a_{ms}

3. Перевірка на оптимальність.

4. Вибір ведучого стовпця.

5. Вибір ведучого рядка та ведучого елемента a_{rs} .

6. Модифікація симплекс таблиці по відношенню до ведучого елемента a_{rs} .

1) для ведучого рядка – $\hat{a}_{rj} = \frac{a_{rj}}{a^*_{rs}}$;

2) для ведучого стовпця – $\hat{a}_{rs} = 1, \hat{a}_{is} = 0, j = \overline{1, m}, i \neq r$;

3) для решти елементів – $\hat{a}_{ij} = \frac{a_{ij}a^*_{rs} - a_{rj}a_{is}}{a^*_{rs}}$.

Згідно наведених правил здійснюємо перерахунок елементів для нової симплекс таблиці.

7. Повернення до кроку 3.

Приклад

Розв'язання матричної гри з використанням симплекс-методу

Нехай маємо початкову матрицю

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \setminus 1 \end{matrix}$$

Дана матриця не містить сідлової точки, отже для неї можна записати наступну систему рівнянь:

$$x_1 + 3x_2 + x_4 \leq 1$$

$$2x_1 + x_3 + 2x_4 \leq 1$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 1$$

Перетворимо стандартну форму задачі лінійного програмування в канонічну:

$$x_1 + 3x_2 + x_4 + x_5 = 1$$

$$2x_1 + x_3 + 2x_4 + x_6 = 1$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + x_7 = 1$$

Цільова функція має вигляд:

$$F = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \rightarrow \max$$

Перепишемо цільову функцію F у вигляді аналогічному до системи обмежень:

$$F - x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0.$$

Побудуємо та заповнимо початкову симплекс-таблицю:

Базис	План	X_1	$\downarrow X_2$	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	MRT
F	0	-1	-1	-1	-1	0	0	0	
$\rightarrow X_5$	1	1	3	0	1	1	0	0	1/3
X_6	1	2	0	1	2	0	1	0	∞
X_7	1	1	2	3	4	0	0	1	1/2

Наступна симплекс-таблиця:

Базис	План	X_1	X_2	$\downarrow X_3$	X_4	X_5	X_6	X_7	MRT
F	1/3	-2/3	0	-1	-2/3	1/3	0	0	
X_2	1/3	1/3	1	0	1/3	1/3	0	0	∞
$\rightarrow X_6$	1	2	0	1	3	0	1	0	1
X_7	1/3	1/3	0	3	10/3	-2/3	0	1	1

Наступна симплекс-таблиця:

Базис	План	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
F	4/3	4/3	0	0	7/3	1/3	1	0
x_2	1/3	1/3	1	0	1/3	1/3	0	0
x_3	1	2	0	1	3	0	1	0
x_7	-8/3	-23/3	0	0	-17/3	2/3	-3	1

Дана таблиця є найоптимальнішим варіантом.

Ціна гри рівна: $V = \frac{1}{F_{\text{пл}}} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}$.

Ймовірності з якими перший гравець може застосовувати свої стратегії рівні: $P(x_1) = V \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$; $P(x_2) = V \cdot 1 = \frac{3}{4} \cdot 1 = \frac{3}{4}$; $P(x_3) = V \cdot 0 = \frac{3}{4} \cdot 0 = 0$.

$$X \left(\frac{1}{4}; \frac{3}{4}; 0 \right)$$

Ймовірності з якими другий гравець може застосовувати свої стратегії рівні: $P(y_2) = V \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$; $P(y_3) = V \cdot 1 = \frac{3}{4} \cdot 1 = \frac{3}{4}$.

$$Y \left(0; \frac{1}{4}; \frac{3}{4}; 0 \right)$$

Список використаних джерел

1. Смородинский С.С., Батин Н.В. Методи і алгоритми для вирішення оптимізаційних завдань лінійного програмування. Ч.2. - Мн.: БГУИР, 1996.
2. Хемди А. Таха Глава 3. Симплекс-метод // Введение в исследование операций. -- 7-е изд. -- М.: "Вильямс", 2007.
3. <http://uk.wikipedia.org/wiki/Симплекс-метод>
4. <http://znaimo.com.ua/Симплекс-метод>

Дякую за увагу!