Міністерство освіти і науки України
Міжнародний економіко-гуманітарний університет
ім. академіка С. Дем'янчука

Р.М.Літнарович

ТЕОРЕТИКО-МЕТОДОЛОГІЧНІ ОСНОВИ ПОБУДОВИ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ БАЗОВОЇ ДИСЦИПЛІНИ В РАМКАХ РОБОТИ НАУКОВОЇ ШКОЛИ

Частина 5

Рівне, 2009

УДК 519.876.5

Літнарович Р.М. Теоретико-методологічні основи побудови математичної моделі базової дисципліни в рамках роботи наукової школи. МЕГУ, Рівне, 2009, -100 с.

Рецензент: С.В. Лісова, доктор педагогічних наук, професор

Відповідальний за випуск: Й.В. Джунь, доктор фізико-математичних наук, професор

Дослідження проведені в рамках роботи наукової школи МЕГУ

Явище, яке залежить від багатьох факторів, можна описати за допомогою множинної регресії. Дослідивши взаємозв'язок рівнів засвоєння знань студентів і ступенів абстракції у досліджуваному семестрі, побудувавши стохастичний зв'язок між ними і з'ясувавши адекватність побудованої математико-педагогічної моделі на основі отриманих даних , цілком можливо з деякою вірогідністю прогнозувати майбутнє.

Litnarovich R.M. Theoretico-methodological bases of construction of mathematical model of base discipline within the framework of work of scientific school. IEHU, Rivne, 2009 -100 s.

Phenomenon which depends on many factors, it is possible to describe by multiple regression. Probing interconnection levels of mastering of knowledges of students and degrees of abstraction in the probed semester, building empiric connection between them and finding out adequacy of the built mathematico-pedagogical model on the basis of findings, very possibly with some authenticity to forecast the future.

ЗМІСТ

Стор.

ПЕРЕДМОВА

Після проведення екзаменаційної сесії студенти провели експертну оцінку і була отримана зведена таблиця за результатами анкетування. Даний базовий курс вивчало 38 студентів.

Це дало змогу провести аналіз педагогічного експерименту на основі вивчення множинної регресії для коригування і оптимального розподілу матеріалу та більш детального і повного представлення педагогічної ситуації, що складалася в процесі вивчення базового курсу. Зрозуміло, що всі процеси дидактики розглядалися у взаємозв'язку.

Явище, яке залежить від багатьох факторів, можна описати за допомогою множинної регресії. Дослідивши взаємозв'язок рівнів засвоєння знань студентів і ступенів абстракції у досліджуваному семестрі, побудувавши стохастичний зв'язок між ними і з'ясувавши адекватність побудованої математико-педагогічної моделі на основі отриманих даних , цілком можливо з деякою вірогідністю прогнозувати майбутнє.

Робиться оцінка точності і даються узагальнюючі висновки. Приміняємий в подальшому метод статистичних випробовувань Монте Карло дає можливість провести широкомасштабні дослідження і набрати велику статистику.

Для студентів і аспірантів педагогічних вузів.

5.1. Розробка методологічних основ побудови математичної моделі базової дисципліни в рамках роботи наукової школи

Нехай, Y-екзаменаційна оцінка студента (від 0 до 100 балів за шкалою EST – результуюча ознака).

Досліджувані фактори:
X1- інтерес до вивчення дисципліни (0-5 балів);
X2- оцінка студентами роботи викладача (0-5 балів);
X3- трудність вивчення дисципліни (0-5 балів);
X4- елементи наукового пошуку (0-5 балів);
X5- зв'язок зі спеціальністю (0-5 балів);
X6- степінь самостійності в написанні першої монографії (0-5балів);
X7- степінь самостійності в написанні другої монографії (0-5балів);
X8- оцінка студентами створеної наукової школи (0-5 балів).

X1- інтерес до вивчення дисципліни:

«0 балів»- інтерес до вивчення дисципліни відсутній; «В мене абсолютно відсутнє бажання вивчати дану дисципліну і оцінка на екзамені мене не інтересує».

«1 бал»- інтерес до вивчення дисципліни обумовлений необхідністю отримати задовільну оцінку на екзамені «50-59 балів» - E;

«2 бали»- інтерес до вивчення дисципліни обумовлений необхідністю отримати задовіль-ну оцінку що відповідає шкалі EST D «60-75 балів»; «Пристойно, але зі значними недоліками»;

«3 бали» - «Мені потрібна оцінка C «76-79 балів» для того, щоб була четвірка у виписці до диплому»;

«4 бали»- інтерес до дисципліни високий, відповідає шкалі EST «80-89 балів» - «Дуже добре,вище середнього стандарту»;

«5 балів»- підвищений інтерес; «Я бажаю внести свій внесок в дану дисципліну»- рівень творчості.

X2- оцінка студентами роботи викладача:- відповідає традиційній екзаменаційній оцінці роботи студента «від 0 до 5 балів» з тією різницею, що оцінку роботи студента за семестр ставить викладач, а оцінку роботи викладача за семестр ставить студент.

X3- трудність вивчення дисципліни:

« 0 балів» - ніякої трудності у вивченні даної дисципліни немає;

«1 бал» - при вивченні даної дисципліни потрібні мінімальні затрати сил і часу;

« 2 бали»- до вивчення дисципліни необхідно прикласти деякі зусилля і час;

« 3 бали»- методика викладання дисципліни автоматично забезпечує добру оцінку на екзамені;

« 4 бали» - до вивчення дисципліни потрібна значна концентрація зусиль і часу;

«5 балів»- максимальна концентрація зусиль і часу гарантує високу оцінку на екзамені.

X4- елементи наукового пошуку:

«0 балів»- вся інформація при вивченні даної дисципліни добре представлена у рекомендованій літературі;

«1 бал»- необхідно вести конспект лекцій , в якому висвітлюються матеріали , яких не можна почерпнути із відомих літературних джерел;

« 2 бали»- без конспекта лекцій неможливо проробляти практичні заняття;

« 3 бали»- на практичних роботах рішаються задачі, які потребують творчого підходу і максимального використання комп'ютерної техніки;

«4 бали»- максимальне використання теоретичного матеріалу лекційного курсу в поєднанні із максимальним використанням комп´ютерної техніки;

«5 балів»- написання власних монографій під керівництвом наукового керівника.

X5- зв´язок зі спеціальністю:

«0 балів»- «Я не можу відмітити зв´язку зі спеціальністю;

«1 бал» - зв´язок зі спеціальністю незначний;

« 2 бали»- зв´язок зі спеціальністю помірний;

« 3 бали»- зв´язок зі спеціальністю добрий;

«4 бали»- зв´язок зі спеціальністю високий;

«5 балів»- зв´язок зі спеціальністю повний.

X6, X7- степінь самостійності в написанні монографії:

«0 балів»- я не зміг завершити дослідження , щоб написати монографію;

«1 бал» - монографія не завершена;

« 2 бали»- «Мені допомогли завершити роботу над монографією»;

« 3 бали»- «Я сам написав монографію при консультації і наявності допоміжних матеріалів»;

«4 бали»- «Необхідні розрахункові файли створені мною особисто»;

«5 балів»- « Монографія написана, набрана на комп´ютері і видана при моїй же власній авторській редакції».

X8- оцінка студентами створеної наукової школи:

«0 балів»- наукова школа не відбулась, монографії не написані;

«1 бал» - 10 відсотків студентів написали власні монографії;

« 2 бали»- 25 відсотків студентів написали монографії;

« 3 бали»- 50 відсотків студентів написали монографії;

« 4 бали»- 75 відсотків студентів написали монографії;

« 5 балів»- 85 відсотків студентів написали монографії.

Після проведення екзаменаційної сесії студенти провели експертну оцінку і була отримана слідуюча зведена таблиця за результатами анкетування. Даний базовий курс вивчало 38 студентів.

Таблиця 5.1.1.Зведена таблиця успішності по шкалі EST											
№п.п..		Екз.оц.		Інтерес вивчення дисципл.	Оцінка викладачу	Трудність вивчення дисципліни	Елем. наук. пошуку	Зв'язок зі спец.	Оцінка моногр.1	Оцінка моногр. 2	Оцінка Наук. школ.
		У	Х0	Х1	Х2	Х3	Х4	Х5	Х6	Х7	Х8
1		100	1	5	5	4	4	4	5	5	5
2		90	1	5	5	5	5	5	5	5	5
3		90	1	5	5	5	5	5	5	5	5
4		100	1	5	5	3	5	5	5	5	5
5		89	1	4	4	3	4	4	5	4	5
6		89	1	5	5	3	4	5	5	5	5
7		95	1	5	5	5	5	5	5	5	5
8		100	1	5	5	2	5	5	5	5	5
9		90	1	5	5	5	5	5	5	5	5
10		89	1	4	5	4	5	4	5	0	5
11		100	1	5	5	5	5	5	5	5	5
12		80	1	4	5	4	5	4	0	0	4
13		89	1	4	5	4	4	4	5	4	5
14		90	1	5	5	3	5	5	5	5	5
15		10	1	5	5	4	3	5	5	5	5
		0									
16		90	1	5	5	4	4	5	5	5	5
17		100	1	4	5	4	4	4	5	5	5
18		100	1	5	5	5	5	5	4	5	5
19		77	1	5	5	3	5	5	4	0	5
20		77	1	5	5	3	5	5	5	5	5
21		100	1	5	5	5	5	5	5	5	5
22		100	1	5	5	4	4	5	5	5	5
23		90	1	4	5	4	4	4	5	4	4
24		100	1	5	5	3	5	5	5	5	5
25		100	1	5	5	3	5	5	5	5	5
26		100	1	5	5	4	4	5	5	5	5
27		100	1	5	5	3	5	5	5	5	5
28		100	1	5	5	5	5	5	5	5	5
29		100	1	5	5	3	5	5	5	5	5
30		85	1	4	5	5	5	5	5	5	5

31		90	1	5	5	3	5	5	5	5	5
32		90	1	4	5	4	5	5	5	5	5
33		86	1	5	5	5	5	5	5	5	5
34		86	1	5	5	3	5	5	5	5	5
35		100	1	5	5	3	5	5	5	5	5
36		90	1	5	5	5	5	5	5	5	5
37		95	1	5	5	3	4	5	5	5	4
38		100	1	5	5	5	5	5	5	5	5
Σ		3547	38	182	189	148	178	183	183	172	187

5.2.Представлення загальних статистичних даних по результатам педагогічного експерименту

Представимо матрицю X коефіцієнтів початкових рівнянь

Приведемо описову статистику на 8 останніх стовпчиків матриці (значень $X_1, X_2, ..., X_8$)

1		1	5	5	4	4	4	5	5	5
2		1	5	5	5	5	5	5	5	5
3		1	5	5	5	5	5	5	5	5
4		1	5	5	3	5	5	5	5	5
5		1	4	4	3	4	4	5	4	5
6		1	5	5	3	4	5	5	5	5
7		1	5	5	5	5	5	5	5	5
8		1	5	5	2	5	5	5	5	5
9		1	5	5	5	5	5	5	5	5
10		1	4	5	4	5	4	5	0	5
11		1	5	5	5	5	5	5	5	5
12		1	4	5	4	5	4	0	0	4
13		1	4	5	4	4	4	5	4	5
14		1	5	5	3	5	5	5	5	5
15		1	5	5	4	3	5	5	5	5
16		1	5	5	4	4	5	5	5	5
17		1	4	5	4	4	4	5	5	5
18		1	5	5	5	5	5	4	5	5
19		1	5	5	3	5	5	4	0	5
20		1	5	5	3	5	5	5	5	5
21		1	5	5	5	5	5	5	5	5
22		1	5	5	4	4	5	5	5	5
23		1	4	5	4	4	4	5	4	4
24		1	5	5	3	5	5	5	5	5
25		1	5	5	3	5	5	5	5	5
26		1	5	5	4	4	5	5	5	5
27		1	5	5	3	5	5	5	5	5
28		1	5	5	5	5	5	5	5	5

29		1	5	5	3	5	5	5	5	5
30		1	4	5	5	5	5	5	5	5
31		1	5	5	3	5	5	5	5	5
32		1	4	5	4	5	5	5	5	5
33		1	5	5	5	5	5	5	5	5
34		1	5	5	3	5	5	5	5	5
35		1	5	5	3	5	5	5	5	5
36		1	5	5	5	5	5	5	5	5
37		1	5	5	3	4	5	5	5	4
38		1	5	5	5	5	5	5	5	5

Відповіді студентів:
1 стовпчик-Інтерес до вивчення дисципліни (X_1);
2 стовпчик-Оцінка студентами роботи викладача (X_2);
3 стовпчик-Трудність вивчення дисципліни (X_3);
4 стовпчик-Елементи наукового пошуку (X_4)
5.стовпчик-Зв´язок зі спеціальністю (X_5);
6.стовпчик-Оцінка студентами своєї роботи над монографією 1(X_6);
7.стовпчик- Оцінка студентами своєї роботи над монографією 2(X_7);
8.стовпчик-Оцінка студентами роботи наукової школи в цілому (X_8).

Таблиця 5.1.2. Описова статистика

Столбец1		*Столбец2*		*Столбец3*		*Столбец4*	
Среднее	4,789474	Среднее	4,973684211	Среднее	3,8947368	Среднее	4,6842105
Стандартная ошибка	0,067023	Стандартная ошибка	0,026315789	Стандартная ошибка	0,1450436	Стандартная ошибка	0,085218
Медиана	5	Медиана	5	Медиана	4	Медиана	5
Мода	5	Мода	5	Мода	3	Мода	5
Стандартное отклонение	0,413155	Стандартное отклонение	0,162221421	Стандартное отклонение	0,8941091	Стандартное отклонение	0,5253191
Дисперсия выборки	0,170697	Дисперсия выборки	0,026315789	Дисперсия выборки	0,799431	Дисперсия выборки	0,2759602
Эксцесс	0,195278	Эксцесс	38	Эксцесс	-1,2813299	Эксцесс	1,1260723
Асимметричность	-1,479133	Асимметричность	-6,164414003	Асимметричность	-0,0245445	Асимметричность	-1,4031726
Интервал	1	Интервал	1	Интервал	3	Интервал	2
Минимум	4	Минимум	4	Минимум	2	Минимум	3

мум		мум		мум		мум	
Максимум	5	Максимум	5	Максимум	5	Максимум	5
Сумма	182	Сумма	189	Сумма	148	Сумма	178
Счет	38	Счет	38	Счет	38	Счет	38
Уровень надежности(95,0%)	0,135801	Уровень надежности(95,0%)	0,053320854	Уровень надежности(95,0%)	0,2938863	Уровень надежности(95,0%)	0,1726681

Столбец5		*Столбец6*		*Столбец7*		*Столбец8*	
Среднее	4,8157895	Среднее	4,815789	Среднее	4,526316	Среднее	4,921053
Стандартная ошибка	0,0637302	Стандартная ошибка	0,135227	Стандартная ошибка	0,222289	Стандартная ошибка	0,044331
Медиана	5	Медиана	5	Медиана	5	Медиана	5
Мода	5	Мода	5	Мода	5	Мода	5
Стандартное отклонение	0,3928595	Стандартное отклонение	0,833594	Стандартное отклонение	1,37028	Стандартное отклонение	0,273276
Дисперсия выбор	0,1543385	Дисперсия выбор	0,694879	Дисперсия выбо	1,877667	Дисперсия выбо	0,07468

ки		ки		рки		рки	
Эксцесс	0,925609	Эксцесс	32,21157	Эксцесс	8,110829	Эксцесс	9,054512
Асимметричность	-1,69696	Асимметричность	-5,543404	Асимметричность	-3,0518	Асимметричность	-3,25271
Интервал	1	Интервал	5	Интервал	5	Интервал	1
Минимум	4	Минимум	0	Минимум	0	Минимум	4
Максимум	5	Максимум	5	Максимум	5	Максимум	5
Сумма	183	Сумма	183	Сумма	172	Сумма	187
Счет	38	Счет	38	Счет	38	Счет	38
Уровень надежности(95,0%)	0,1291297	Уровень надежности(95,0%)	0,273996	Уровень надежности(95,0%)	0,4504	Уровень надежности(95,0%)	0,089824

Таблиця 5.1.3. Описова статистика результатів екзамену (оцінки по EST-вектор У)

Столбец1У	
Среднее	93,34211
Стандартная ошибка	1,139162
Медиана	92,5
Мода	100
Стандартное отклонение	7,022267

Дисперсия выборки	49,31223
	-
Эксцесс	0,371058
	-
Асимметричность	0,668396
Интервал	23
Минимум	77
Максимум	100
Сумма	3547
Счет	38
Наибольший(1)	100
Наименьший(1)	77
Уровень надежности(95,0%)	2,308162

Забігаючи вперед, порівняємо статистику оцінок викладача (табл..5.1.3) з оцінками,виставленими студентам комп´ютером (табл.5.1.4)

Таблиця 5.1.4.Описова статистика результатів екзамену за оцінками комп´ютера

У'Столбец1	
Среднее	93,34211
Стандартная ошибка	0,674123
Медиана	94,44051
Мода	94,44051
Стандартное отклонение	4,155576
Дисперсия выборки	17,26881
Эксцесс	4,152453
Асимметричность	-

	1,759888
Интервал	22,26522
Минимум	80,19449
Максимум	102,4597
Сумма	3547
Счет	38
Наибольший(1)	102,4597
Наименьший(1)	80,19449
Уровень надежности(95,0%)	1,365904

В подальшому приведемо теоретичні основи обробки експериментальних даних.

5.3. Теоретичні основи обробки експериментальних даних

Представимо n початкових рівнянь у вигляді

$$\begin{aligned}
Y_1 &= a_0 + a_1X_{11} + a_2X_{21} + a_3X_{31} + a_4X_{41} + a_5X_{51} + a_6X_{61} + a_7X_{71} + a_8X_{81} + l_1,\\
Y_2 &= a_0 + a_1X_{12} + a_2X_{22} + a_3X_{32} + a_4X_{42} + a_5X_{52} + a_6X_{62} + a_7X_{72} + a_8X_{82} + l_2,\\
Y_3 &= a_0 + a_1X_{13} + a_2X_{23} + a_3X_{33} + a_4X_{43} + a_5X_{53} + a_6X_{63} + a_7X_{73} + a_8X_{83} + l_3,\\
Y_4 &= a_0 + a_1X_{14} + a_2X_{24} + a_3X_{34} + a_4X_{44} + a_5X_{54} + a_6X_{64} + a_7X_{74} + a_8X_{84} + l_4,\\
Y_5 &= a_0 + a_1X_{15} + a_2X_{25} + a_3X_{35} + a_4X_{45} + a_5X_{55} + a_6X_{65} + a_7X_{75} + a_8X_{85} + l_5,\\
Y_6 &= a_0 + a_1X_{16} + a_2X_{26} + a_3X_{36} + a_4X_{46} + a_5X_{56} + a_6X_{66} + a_7X_{76} + a_8X_{86} + l_6,\\
Y_7 &= a_0 + a_1X_{17} + a_2X_{27} + a_3X_{37} + a_4X_{47} + a_5X_{57} + a_6X_{67} + a_7X_{77} + a_8X_{87} + l_7,\\
Y_8 &= a_0 + a_1X_{18} + a_2X_{28} + a_3X_{38} + a_4X_{48} + a_5X_{58} + a_6X_{68} + a_7X_{78} + a_8X_{88} + l_8,\\
Y_9 &= a_0 + a_1X_{19} + a_2X_{29} + a_3X_{39} + a_4X_{49} + a_5X_{59} + a_6X_{69} + a_7X_{79} + a_8X_{89} + l_9, \quad (5.3.1)\\
Y_{10} &= a_0 + a_1X_{110} + a_2X_{210} + a_3X_{310} + a_4X_{410} + a_5X_{510} + a_6X_{610} + a_7X_{710} + a_8X_{810} + l_{10},
\end{aligned}$$

$$Y_{11}=a_0+a_1X_{111}+a_2X_{211}+a_3X_{311}+a_4X_{411}+a_5X_{511}+a_6X_{611}+a_7X_{711}+a_8X_{811}+l_{11},$$
$$Y_{12}=a_0+a_1X_{112}+a_2X_{212}+a_3X_{312}+a_4X_{412}+a_5X_{512}+a_6X_{612}+a_7X_{712}+a_8X_{812}+l_{12},$$
$$Y_{13}=a_0+a_1X_{113}+a_2X_{213}+a_3X_{313}+a_4X_{413}+a_5X_{513}+a_6X_{613}+a_7X_{713}+a_8X_{813}+l_{13},$$
$$Y_{14}=a_0+a_1X_{114}+a_2X_{214}+a_3X_{314}+a_4X_{414}+a_5X_{514}+a_6X_{614}+a_7X_{714}+a_8X_{814}+l_{14},$$
$$Y_{15}=a_0+a_1X_{115}+a_2X_{215}+a_3X_{315}+a_4X_{415}+a_5X_{515}+a_6X_{615}+a_7X_{715}+a_8X_{815}+l_{15},$$
$$Y_{16}=a_0+a_1X_{116}+a_2X_{216}+a_3X_{316}+a_4X_{416}+a_5X_{516}+a_6X_{616}+a_7X_{716}+a_8X_{816}+l_{16},$$
$$Y_{17}=a_0+a_1X_{117}+a_2X_{217}+a_3X_{317}+a_4X_{417}+a_5X_{517}+a_6X_{617}+a_7X_{717}+a_8X_{817}+l_{17},$$
$$Y_{18}=a_0+a_1X_{118}+a_2X_{218}+a_3X_{318}+a_4X_{418}+a_5X_{518}+a_6X_{618}+a_7X_{718}+a_8X_{818}+l_{18},$$
$$Y_{19}=a_0+a_1X_{119}+a_2X_{219}+a_3X_{319}+a_4X_{419}+a_5X_{519}+a_6X_{619}+a_7X_{719}+a_8X_{819}+l_{19},$$
$$Y_{20}=a_0+a_1X_{120}+a_2X_{220}+a_3X_{320}+a_4X_{420}+a_5X_{520}+a_6X_{620}+a_7X_{720}+a_8X_{820}+l_{20},$$
$$Y_{21}=a_0+a_1X_{121}+a_2X_{221}+a_3X_{321}+a_4X_{421}+a_5X_{521}+a_6X_{621}+a_7X_{721}+a_8X_{821}+l_{21},$$
$$Y_{22}=a_0+a_1X_{122}+a_2X_{222}+a_3X_{322}+a_4X_{422}+a_5X_{522}+a_6X_{622}+a_7X_{722}+a_8X_{822}+l_{22},$$
$$Y_{23}=a_0+a_1X_{123}+a_2X_{223}+a_3X_{323}+a_4X_{423}+a_5X_{523}+a_6X_{623}+a_7X_{723}+a_8X_{823}+l_{23},$$
$$Y_{24}=a_0+a_1X_{124}+a_2X_{224}+a_3X_{324}+a_4X_{424}+a_5X_{524}+a_6X_{624}+a_7X_{724}+a_8X_{824}+l_{24},$$
$$Y_{25}=a_0+a_1X_{125}+a_2X_{225}+a_3X_{325}+a_4X_{425}+a_5X_{525}+a_6X_{625}+a_7X_{725}+a_8X_{825}+l_{25},$$
$$Y_{26}=a_0+a_1X_{126}+a_2X_{226}+a_3X_{326}+a_4X_{426}+a_5X_{526}+a_6X_{626}+a_7X_{726}+a_8X_{826}+l_{26},$$
$$Y_{27}=a_0+a_1X_{127}+a_2X_{227}+a_3X_{327}+a_4X_{427}+a_5X_{527}+a_6X_{627}+a_7X_{727}+a_8X_{827}+l_{27},$$
$$Y_{28}=a_0+a_1X_{128}+a_2X_{228}+a_3X_{328}+a_4X_{428}+a_5X_{528}+a_6X_{628}+a_7X_{728}+a_8X_{828}+l_{28},$$
$$Y_{29}=a_0+a_1X_{129}+a_2X_{229}+a_3X_{329}+a_4X_{429}+a_5X_{529}+a_6X_{629}+a_7X_{729}+a_8X_{829}+l_{29},$$
$$Y_{30}=a_0+a_1X_{130}+a_2X_{230}+a_3X_{330}+a_4X_{430}+a_5X_{530}+a_6X_{630}+a_7X_{730}+a_8X_{830}+l_{30},$$
$$Y_{31}=a_0+a_1X_{131}+a_2X_{231}+a_3X_{331}+a_4X_{431}+a_5X_{531}+a_6X_{631}+a_7X_{731}+a_8X_{831}+l_{31},$$
$$Y_{32}=a_0+a_1X_{132}+a_2X_{232}+a_3X_{332}+a_4X_{432}+a_5X_{532}+a_6X_{632}+a_7X_{732}+a_8X_{832}+l_{32},$$
$$Y_{33}=a_0+a_1X_{133}+a_2X_{233}+a_3X_{333}+a_4X_{433}+a_5X_{533}+a_6X_{633}+a_7X_{733}+a_8X_{833}+l_{33},$$
$$Y_{34}=a_0+a_1X_{134}+a_2X_{234}+a_3X_{334}+a_4X_{434}+a_5X_{534}+a_6X_{634}+a_7X_{734}+a_8X_{834}+l_{34},$$
$$Y_{35}=a_0+a_1X_{135}+a_2X_{235}+a_3X_{335}+a_4X_{435}+a_5X_{535}+a_6X_{635}+a_7X_{735}+a_8X_{835}+l_{35},$$

$$Y_{36}=a_0+a_1X_{136}+a_2X_{236}+a_3X_{336}+a_4X_{436}+a_5X_{536}+a_6X_{636}+a_7X_{736}+a_8X_{836}+l_{36},$$
$$Y_{37}=a_0+a_1X_{137}+a_2X_{237}+a_3X_{337}+a_4X_{437}+a_5X_{537}+a_6X_{637}+a_7X_{737}+a_8X_{837}+l_{37},$$
$$Y_{38}=a_0+a_1X_{138}+a_2X_{238}+a_3X_{338}+a_4X_{438}+a_5X_{538}+a_6X_{638}+a_7X_{738}+a_8X_{838}+l_{38}.$$

Або в матричній формі

$$Y=Xa+l\ , \qquad (5.3.2)$$

де Y - вектор-стовпець екзаменаційних оцінок по 100-бальній шкалі EST

…………….(5.3.3)

$$Y=\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ Y_{38} \end{bmatrix}$$

X – матриця експертних оцінок студентів проведеного анкетування після здачі екзамену

$$X=\begin{bmatrix} X_0 & X_{11} & X_{21} & X_{31} & \dots & X_{81} \\ X_0 & X_{12} & X_{22} & X_{32} & \dots & X_{82} \\ X_0 & X_{13} & X_{23} & X_{33} & \dots & X_{83} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_0 & X_{138} & X_{238} & X_{338} & \dots & X_{838} \end{bmatrix},$$

………………………………………………………(5.3.4)

X_0– фіктивний фактор, всі значення якого дорівнюють одиниці.

Досліджувані фактори: Х1- інтерес до вивчення дисципліни (0-5 балів);

Х2- оцінка студентами роботи викладача (0-5 балів);

….Х3- трудність вивчення дисципліни (0-5 балів);

Х4- елементи наукового пошуку (0-5 балів);

Х5- зв'язок зі спеціальністю (0-5 балів);

Х6- степінь самостійності в написанні першої монографії (0-5балів);

Х7- степінь самостійності в написанні другої монографії (0-5балів);

Х8- оцінка студентами створеної наукової школи (0-5 балів).

Другим індексом позначений номер студента в загальному списку. Всього в експерименті приймало участь 38 студентів.

a– вектор-стовпець невідомих коефіцієнтів емпіричної формули

(5.3.5)

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \alpha_8 \end{bmatrix}$$

l– вектор-стовпець відхилень фактичних даних від розрахункових

$$l = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ l_{38} \end{bmatrix}.$$

………(5.3.6)

Так як

$$l = Y - Xa \text{ ,…………(5.3.7)}$$

то функціонал Q буде

………(5.3.8)

$$Q(a_0 \quad a_1 \quad a_2 \;\; a_3 \ldots \; a_8) = \sum_{i=1}^{38} l_i^2,$$

тобто

…………(5.3.9)

$$\sum_{i=1}^{38} l_i^2 = l^T l = [\mathrm{Y} - [\mathrm{X}]a]^T [\mathrm{Y} - [\mathrm{X}]a],$$

або

..(5.3.10)

$$\sum_{i=1}^{38} l_i^2 = \mathrm{Y}^T\mathrm{Y} - \mathrm{Y}^T[\mathrm{X}]a - a^T[\mathrm{X}]^T\mathrm{Y} + a^T[\mathrm{X}]^T[\mathrm{X}]a \ ,$$

і

…5.3.11)

$$\sum_{i=1}^{38} l_i^2 = \mathrm{Y}^T\mathrm{Y} - 2a^T[\mathrm{X}]^T\mathrm{Y} + a^T[\mathrm{X}]^T[\mathrm{X}]a \ .$$

Для функціонала $Q(a_0 \quad a_1 \quad a_2 \ \ a_3 \ldots \ a_8)$ в точці екстремуму виконується умова

$$\frac{dQ}{da^T} = 0. \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(5.3.12)}$$

З цієї умови отримаємо

$$\frac{dQ}{da^T} = -2[\mathrm{X}]^T\mathrm{Y} + 2[\mathrm{X}]^T[\mathrm{X}]a => [\mathrm{X}]^T[\mathrm{X}]a = [\mathrm{X}]^T\mathrm{Y}.$$

……………………………………………………..(5.3.13)

Домножуючи зліва останнє матричне рівняння на матрицю обернену матриці $[\mathrm{X}]^T[\mathrm{X}]$, отримаємо шуканий вектор a

$$a = \left[[\mathrm{X}]^T[\mathrm{X}]\right]^{-1}[\mathrm{X}]^T\mathrm{Y}, \ldots\ldots\ldots\ldots\text{(5.3.14)}$$

де

$$[\mathrm{X}]^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \mathrm{X}_{11} & \mathrm{X}_{12} & \mathrm{X}_{13} & \ldots & \mathrm{X}_{138} \\ \mathrm{X}_{21} & \mathrm{X}_{22} & \mathrm{X}_{23} & \ldots & \mathrm{X}_{238} \\ \mathrm{X}_{31} & \mathrm{X}_{32} & \mathrm{X}_{33} & \ldots & \mathrm{X}_{338} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathrm{X}_{81} & \mathrm{X}_{82} & \mathrm{X}_{83} & \ldots & \mathrm{X}_{838} \end{bmatrix} \qquad (5.3.15)$$

В умовах нашого експерименту транспонована матриця початкових умовних рівнянь має вигляд

Таблиця 5.3.1.Транспонована матриця початкових рівнянь

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
5	5	5	5	4	5	5	5	5	4	5	4	4	5	5	5	4	5	5	5	5	5	4	5	5	5	5	5	5	4	5	4	5	5	5	5	5	5
5	5	5	5	4	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
4	5	5	3	3	3	5	2	5	4	5	4	4	3	4	4	4	5	3	3	5	4	4	3	3	4	3	5	3	5	3	4	5	3	3	5	3	5
4	5	5	5	4	4	5	5	5	5	5	5	4	5	3	4	4	5	5	5	5	4	4	5	5	4	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	4	5
4	5	5	5	4	5	5	5	5	4	5	4	4	5	5	5	4	5	5	5	5	5	4	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	0	5	5	5	5	5	4	4	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
5	5	5	5	4	5	5	5	5	0	5	0	4	5	5	5	5	5	0	5	5	5	4	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	4	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	4	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	4	5

Початкова матриця анкетних даних

$$[\mathrm{X}] = \begin{bmatrix} 1 & \mathrm{X}_{11} & \mathrm{X}_{21} & \mathrm{X}_{31} & \ldots & \mathrm{X}_{81} \\ 1 & \mathrm{X}_{12} & \mathrm{X}_{22} & \mathrm{X}_{32} & \ldots & \mathrm{X}_{82} \\ 1 & \mathrm{X}_{13} & \mathrm{X}_{23} & \mathrm{X}_{33} & \ldots & \mathrm{X}_{83} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \mathrm{X}_{138} & \mathrm{X}_{238} & \mathrm{X}_{338} & \ldots & \mathrm{X}_{838} \end{bmatrix},$$

(5.3.16)

Таблиця 5.3.2.Матриця X коефіцієнтів початкових рівнянь

1		1	5	5	4	4	4	5	5	5
2		1	5	5	5	5	5	5	5	5
3		1	5	5	5	5	5	5	5	5
4		1	5	5	3	5	5	5	5	5
5		1	4	4	3	4	4	5	4	5
6		1	5	5	3	4	5	5	5	5
7		1	5	5	5	5	5	5	5	5
8		1	5	5	2	5	5	5	5	5
9		1	5	5	5	5	5	5	5	5
10		1	4	5	4	5	4	5	0	5
11		1	5	5	5	5	5	5	5	5
12		1	4	5	4	5	4	0	0	4
13		1	4	5	4	4	4	5	4	5
14		1	5	5	3	5	5	5	5	5
15		1	5	5	4	3	5	5	5	5
16		1	5	5	4	4	5	5	5	5
17		1	4	5	4	4	4	5	5	5
18		1	5	5	5	5	5	4	5	5
19		1	5	5	3	5	5	4	0	5
20		1	5	5	3	5	5	5	5	5
21		1	5	5	5	5	5	5	5	5
22		1	5	5	4	4	5	5	5	5
23		1	4	5	4	4	4	5	4	4
24		1	5	5	3	5	5	5	5	5
25		1	5	5	3	5	5	5	5	5
26		1	5	5	4	4	5	5	5	5
27		1	5	5	3	5	5	5	5	5
28		1	5	5	5	5	5	5	5	5

29		1	5	5	3	5	5	5	5	5
30		1	4	5	5	5	5	5	5	5
31		1	5	5	3	5	5	5	5	5
32		1	4	5	4	5	5	5	5	5
33		1	5	5	5	5	5	5	5	5
34		1	5	5	3	5	5	5	5	5
35		1	5	5	3	5	5	5	5	5
36		1	5	5	5	5	5	5	5	5
37		1	5	5	3	4	5	5	5	4
38		1	5	5	5	5	5	5	5	5

$$N = [X]^T X, \qquad (5.3.17)$$

або

$$N = \begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} X_{1i} & \sum_{i=1}^{n} X_{2i} & \sum_{i=1}^{n} X_{3i} & \ldots & \sum_{i=1}^{n} X_{mi} \\ \sum_{i=1}^{n} X_{1i} & \sum_{i=1}^{n} X_{1i}^2 & \sum_{i=1}^{n} X_{1i}X_{2i} & \sum_{i=1}^{n} X_{1i}X_{3i} & \ldots & \sum_{i=1}^{n} X_{1i}X_{mi} \\ \sum_{i=1}^{n} X_{2i} & \sum_{i=1}^{n} X_{2i}X_{1i} & \sum_{i=1}^{n} X_{2i}^2 & \sum_{i=1}^{n} X_{2i}X_{3i} & \ldots & \sum_{i=1}^{n} X_{2i}X_{mi} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sum_{i=1}^{n} X_{mi} & \sum_{i=1}^{n} X_{mi}X_{1i} & \sum_{i=1}^{n} X_{mi}X_{2i} & \sum_{i=1}^{n} X_{3i}X_{mi} & \ldots & \sum_{i=1}^{n} X_{mi}^2 \end{bmatrix} \qquad (5.3.18)$$

І в нашому випадку, ми отримали

Таблиця 5.3.3.Матриця коефіцієнтів нормальних рівнянь N

38	182	189	148	178	183	183	172	187
182	878	906	708	854	881	880	833	897
189	906	941	737	886	911	910	856	930
148	708	737	606	695	713	712	674	729
178	854	886	695	844	860	855	803	877
183	881	911	713	860	887	885	838	902
183	880	910	712	855	885	907	855	905
172	833	856	674	803	838	855	848	851
187	897	930	729	877	902	905	851	923

Вектор вільних членів розраховується за формулою

$$\ell=[X]^T Y=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ X_{11} & X_{12} & X_{13} & \dots & X_{138} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} & \dots & X_{238} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} & \dots & X_{338} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_{81} & X_{82} & X_{83} & \dots & X_{838} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ Y_{38} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{38} Y_i \\ \sum_{i=1}^{38} Y_i X_{1i} \\ \sum_{i=1}^{38} Y_i X_{2i} \\ \sum_{i=1}^{38} Y_i X_{3i} \\ . \\ . \\ . \\ \sum_{i=1}^{38} Y_i X_{8i} \end{bmatrix} \qquad (5.3.19)$$

При цьому вектор факторних ознак

№п.п..	Екз.оц.
	У
1	100
2	90
3	90
4	100
5	89
6	89
7	95
8	100
9	90
10	89
11	100
12	80
13	89
14	90
15	100
16	90
17	100
18	100
19	77
20	77
21	100
22	100
23	90
24	100
25	100
26	100
27	100
28	100
29	100
30	85
31	90
32	90
33	86
34	86
35	100
36	90
37	95
38	100

Σ	3547

І в нашому випадку вектор вільних членів

Таблиця 5.3.4. Вектор вільних членів нормальних рівнянь

3547
17023
17646
13821
16593
17098
17158
16237
17470

Представимо формулу (5.3.14) у вигляді

$$a=\left[\mathrm{N}\right]^{-1}*l, \tag{5.3.20}$$

де обернена матриця до матриці коефіцієнтів нормальних рівнянь має вигляд

$$\mathrm{N}^{-1}=\left[\left[\mathrm{X}\right]^{T}\left[\mathrm{X}\right]\right]^{-1}, \tag{5.3.21}$$

вектор вільних членів

$$\ldots\ldots\quad l=\left[\mathrm{X}\right]^{T}\mathrm{Y}.$$

Обернену матрицю знаходимо в MS Excel за формулою

$$=МОБР(A54:I62).\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5.3.23)$$

В нашому випадку матриця коефіцієнтів нормальних рівнянь знаходиться в діапазоні (A54:I62).Попередньо виділивши масив під обернену матрицю, натиском клавіш F2 , Ctrl +Shift + Enter , отримали

Таблиця 5.3.5. Обернена матриця N^{-1}

37,60993079	0,17429873	-5,864444295	0,097910912	0,09744857	0,307394507	0,109580929	0,033235048	-2,488659681
0,17429873	0,399089485	-0,121236141	0,0195237	0,032038288	-0,284790668	0,014785251	-0,013217014	-0,070866377
-5,864444295	-0,121236141	1,319023213	-0,046786832	-0,03985332	-0,142807802	-0,009081906	0,018636552	0,183032862
0,097910912	0,0195237	-0,046786832	0,037681079	-0,004925145	0,003787794	0,007932749	-0,006776924	-0,021981654
0,09744857	0,032038288	-0,03985332	-0,004925145	0,141204237	-0,106927314	0,021052276	0,013188052	-0,069306857
0,307394507	-0,284790668	-0,142807802	0,003787794	-0,106927314	0,551223037	-0,003562341	-0,0381499	-0,043027119
0,109580929	0,014785251	-0,009081906	0,007932749	0,021052276	-0,003562341	0,086386633	-0,02697821	-0,110034524
0,033235048	-0,013217014	0,018636552	-0,006776924	0,013188052	-0,0381499	-0,02697821	0,031623978	0,01473202
-2,488659681	-0,070866377	0,183032862	-0,021981654	-0,069306857	-0,043027119	-0,110034524	0,01473202	0,609303828

(5.3.22)

Перемноживши обернену матрицю на вектор вільних членів, за формулою (5.3.20) отримали

Таблиця 5.3.5. Вектор шуканих коефіцієнтів

. $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8)$

54,492284	X0
5,747557	X1
5,200595	X2
-0,073811	X3
-0,967014	X4
-6,978379	X5
0,037116	X6
2,585372	X7
2,438210	X8

Коефіцієнти емпіричної формули побудованої математичної моделі базової дисципліни в рамках функціонування математичної школи розраховувались в MS Excel за формулою

$$= МУМНОЖ(A66:I74;K54:K62). \qquad (5.3.24)$$

При цьому обернена матриця знаходилась в діапазоні (A66:I54) , а вектор вільних членів розміщувався в діапазоні (K54:K62). Попередньо виділивши масив під вектор коефіцієнтів математичної моделі, натиском клавіш F2 , Ctrl +Shift + Enter , отримали вище приведені значення, на основі чого представляємо математичну модель базової дисципліни в рамках функціонування математичної школи

$$Y' = 54.492284X_0 + 5.747557X_1 + 5.200595X_2 - \\ -0.073811X_3 - 0.967014X_4 - 6.978379X_5 + \\ 0.037116X_6 + 2.585372X_7 + 2.438210X_8.$$

……………………………………………………………(5.3.24)

5.4. Контроль процедури зрівноваження

Контроль процедури зрівноваження виконується за формулою

$$[YY] - a_0[Y] - a_1[YX_1] - a_2[YX_2] - a_3[YX_3] - a_4[YX_4] - \\ - a_5[YX_5] - a_6[YX_6] - a_7[YX_7] - a_8[YX_8] = [VV] \qquad (5.4.1)$$

У формулі (5.4.1) символом [ ] позначені суми за Гаусом.

Розрахунок був проведений в MS Excel за формулою

$$= P40 - МУМНОЖ(M67:U67;K54:K62) \qquad (5.4.2)$$

В чарунку P40 знаходилася сума квадратів [YY], в діапазоні (M67:U67) знаходилися значення $a_0, a_1, a_2, ..., a_8$, в діапазоні $(K54:K62)$ знаходилися вільні члени нормальних рівнянь.

В матричній формі запис формули контролю зрівноваження буде

$$\left|Y^T Y\right| - \ell K^T = \left|V^T V\right| \qquad (5.4.3)$$

В нашому випадку отримали

$$\left|Y^T Y\right| - \ell K^T = 1185{,}606675,$$
$$\left|V^T V\right| = 1185{,}606675.$$

Різниця між даними числами склала 2,00939E-08, що говорить про коректність процедури зрівноваження в цілому.

Другим контролем процедури зрівноваження був розрахунок за формулою

$$= ЛИНЕЙН(A2:A39;C2:J39;1;1) \qquad (5.4.4)$$

Діапазоном (A2:A39) відмічені екзаменаційні оцінки, діапазоном (C2:J39) відмічені результати експертних оцінок студентів.

В строчці (1) приведені коефіцієнти моделі, які повністю співпадають з відповідними коефіцієнтами в отриманій нами формулі (5.3.24) математичної моделі базової дисципліни в рамках функціонування математичної школи .

В другій строчці приведені середні квадратичні похибки (стандарти) даних коефіцієнтів.

Як видно із табл.5.4.1 , лише для коефіцієнтів a7,a5,a1 і a0 середні квадратичні похибки менші самих коефіцієнтів.

Таблиця 5.4.1. Другий контроль процедури зрівноваження

	a8	a7	a6	a5	a4	a3
1	2,43820957	2,585371732	0,037116449	-6,97837911	-0,96701487	-0,07381257
2	4,991008073	1,137050015	1,879293417	4,747172344	2,402675846	1,241174894
3	0,350193217	6,393980669	#Н/Д	#Н/Д	#Н/Д	#Н/Д
4	1,953581353	29	#Н/Д	#Н/Д	#Н/Д	#Н/Д
5	638,9459564	1185,606675	#Н/Д	#Н/Д	#Н/Д	#Н/Д

Продовження таблиці 5.4.1.

	a2	a1	a0		
1	5,20059521	5,747556833	54,49228377	=ai	
2	27,34340597	4,039303275	39,21232433	стандарт S	ai=S√dii
3	#Н/Д	#Н/Д	#Н/Д	R^2	m1=μ
4	#Н/Д	#Н/Д	#Н/Д	Fкритерій	n-m-1
5	#Н/Д	#Н/Д	#Н/Д	[(Y'-Ycp)^2]	[VV]=Y'-Y

Розраховуючи зрівноважені значення $\widetilde{Y}$, отримали

У'зрівн.
102,459713
94,4405075
94,4405075
94,58813
89
95,5551444
94,4405075
94,6619412
94,4405075
82,8182826
94,4405075
80,1944908
94,126784
94,58813
96,4483475
95,4813331
96,7121557
94,403391
81,6241549
94,58813
94,4405075
95,4813331
91,6885744
94,58813
94,58813
95,4813331
94,58813
94,4405075
94,58813
88,6929506
94,58813
88,7667619
94,4405075
94,58813
94,58813

94,4405075
93,1169348
94,4405075
3547

5.5. Дослідження матриці на невиродженість

Спочатку ми стверджуємо **теорему 1.**

Система рівнянь не має рішення в тому і тільки в тому випадку, коли визначник оберненої матриці нормальних рівнянь дорівнює абсолютному нулю. У всіх інших випадках система має рішення.

Існує думка, що коли визначник оберненої матриці близький до нуля, то рішення системи рівнянь не існує.

І дійсно, при розрахунку на калькуляторах, або при заданому числу значущих цифр, рівних 5 або 6 знаків на персональному комп´ютері , визначник буде дорівнювати нулю, а згідно головного правила математики «Не діли на нуль» , система рівнянь не буде мати розв´язку .

Навіть при рішенні нормальних рівнянь на персональному комп´ютері по розробленій автором програмі, комп´ютер видавав помилку і відмовлявся виконувати таку програму.

В роботі Дьяконова В.П.”Справочник по алгоритмам и программам на языке Бейсик для персональных ЭВМ “,М:Наука,1989,-240с, приведена програма наближеного обчислення системи лінійних рівнянь з виродженою матрицею.

При цьому система рівнянь

……. $$CX = D, \qquad (5.5.1)$$

де C – вироджена матриця, наближено рішається , якщо припустити, що C_{ij} і d_i задані з деяким t-наближенням. Тоді, цю систему можна звести до рішення системи

$$AX = B, \qquad (5.5.2.2)$$

так, що

$$\left|C_{ij} - a_{ij}\right| \le t, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5.5.2.3)$$

$$\left|b_{ij} - d_{sj}\right| \le t, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5.5.2.4)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ 0 \prec t \le 0.000000001.$$

Для рішення обчислюється параметр

$$\alpha = 0{,}5\sqrt{Nt}.\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5.5.2.5)$$

За незалежні приймаються компоненти вектора X_n , який отримують рішенням системи слідуючого виду

$$\left[\left(A^T A + \alpha E\right)\right] * \left[X_\alpha\right] = \left[A^T B\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(5.5.2.6)$$

методм квадратних коренів.

Слід відмітити, що при розрахунку за вбудованими операторами в MS Excel забезпечується точність до 17 знаків і ця проблема вирішується.

Так, в нашому випадку, при 8факторах і педагогічному експерименті (на відміну від активного експерименту, наприклад, в ядерній фізиці) , нами отримано значення визначника $\Delta = 0{,}000000007$, що не зашкодило рішити систему рівнянь.

Δ =0,0000000075=7,534420E-09.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 37,60993079 & 0,17429873 & -5,864444295 & 0,097910912 & 0,09744857 & 0,307394507 & 0,109580929 & 0,033235048 & -2,488659681 \\ 0,17429873 & 0,399089485 & -0,121236141 & 0,0195237 & 0,032038288 & -0,284790668 & 0,014785251 & -0,013217014 & -0,070866377 \\ -5,864444295 & -0,121236141 & 1,319023213 & -0,046786832 & -0,03985332 & -0,142807802 & -0,009081906 & 0,018636552 & 0,183032862 \\ 0,097910912 & 0,0195237 & -0,046786832 & 0,037681079 & -0,004925145 & 0,003787794 & 0,007932749 & -0,006776924 & -0,021981654 \\ 0,09744857 & 0,032038288 & -0,03985332 & -0,004925145 & 0,141204237 & -0,106927314 & 0,021052276 & 0,013188052 & -0,069306857 \\ 0,307394507 & -0,284790668 & -0,142807802 & 0,003787794 & -0,106927314 & 0,551223037 & -0,003562341 & -0,0381499 & -0,043027119 \\ 0,109580929 & 0,014785251 & -0,009081906 & 0,007932749 & 0,021052276 & -0,003562341 & 0,086386633 & -0,02697821 & -0,110034524 \\ 0,033235048 & -0,013217014 & 0,018636552 & -0,006776924 & 0,013188052 & -0,0381499 & -0,02697821 & 0,031623978 & 0,01473202 \\ -2,488659681 & -0,070866377 & 0,183032862 & -0,021981654 & -0,069306857 & -0,043027119 & -0,110034524 & 0,01473202 & 0,609303828 \end{vmatrix} =$$

Цікаво

відмітити, що взявши лише три фактори, визначник оберненої матриці такої системи мав значення Δ = 0,0000048087, тобто число нулів зменшилось на три знаки. Але це не значило , що похибки зрівноважених значень були меншими ніж в попередньому випадку.

На основі табл.5.3.5. , де приведено рішення нормальних рівнянь, що доказує теорему1.

Констатуємо:

Таким чином, система рівнянь не має рішення в тому і тільки в тому випадку, коли визначник оберненої матриці нормальних рівнянь дорівнює абсолютному нулю. У всіх інших випадках система має рішення. **Теорема доказана.**

5.6. Дослідження точності елементів зрівноваженої моделі

5.6.1. Дослідження коефіцієнта множинної кореляції

Одним із основних показників щільності кореляційного зв´язку показника У з факторами X_i (i=1,1,…,m),а також показника ступеня близькості математичної форми зв´язку до вибіркових даних є коефіцієнт множинної кореляції.

Відношення суми квадратів центрованих теоретичних значень показника до суми квадратів центрованих вибіркових значень показника

$$R^2 = \sum_{i=1}^{n} (\widetilde{Y}_i - \overline{Y})^2 / \sum (Y_i - \overline{Y})^2 \qquad (5.6.1)$$

називається вибірковим коефіцієнтом множинної детермінації.

Враховуючи властивість

$$\sum_{i=1}^{n}(\widetilde{Y}_i - \overline{Y})^2 = \sum (Y_i - \overline{Y})^2 - \sum \ell_i^2, \qquad (5.6.2)$$

вибірковий коефіцієнт множинної детермінації запишемо у вигляді

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \overline{Y}\right)^2 - \sum_{i=1}^{n}\ell_i^2}{\sum\left(Y_i - \overline{Y}\right)^2}, \qquad (5.6.3)$$

або

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}\ell_i^2}{\sum\left(Y_i - \overline{Y}\right)^2}, \qquad (5.6.4)$$

де $\widetilde{Y}$ – зрівноважене значення екзаменаційної оцінки;

$\overline{Y}$ – середнє арифметичне значення,

Y_i – екзаменаційна оцінка конкретного студента.

Із наведеної формули випливає, що коли

$\sum \ell_i^2 = 0,\ mo\ R^2 = 1,$ тобто якщо всі вибіркові

значення показника розміщені на лінії регресії, то коефіцієнт множинної детермінації дорівнює 1.Чим ближче вибіркові (експериментальні) значення наближаються до лінії регресії, тим ближче коефіцієнт вибіркової множинної детермінації наближається до 1.

Корінь квадратний із вибіркового коефіцієнта множинної детермінації є коефіцієнтом множинної

кореляції $$R = \sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \widetilde{Y}_i\right)^2 / \sum_{i=1}^{n}\left(Y - \overline{Y}\right)^2}. \ldots\ldots..(5.6.5)$$

Коефіцієнт множинної кореляції є оцінкою близькості математичної форми зв´язку до вибіркових даних.

Приймаючи до уваги, що

$$\sum_{i=1}^{n}\ell_i^2 = \ell^T\ell = \left[Y - [X]a\right]^T\left[Y - [X]a\right], \qquad (5.6.6)$$

або

$$\sum_{i=1}^{n}\ell_i^2 = Y^TY - 2a^T[X]^TY + a^T[X]^T[X]a. \qquad (5.6.7)$$

Тоді

$$\sum_{i=1}^{n}\ell_i^2 = Y^TY - a^T[X]^TY \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \overline{Y}\right)^2 - \sum_{i=1}^{n}\ell_i^2. \ (5.6.8)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \overline{Y}\right)^2 - \sum_{i=1}^{n}\ell_i^2 = \sum_{i=1}^{n}Y_i^2 - n\overline{Y}^2 - \sum_{i=1}^{n}\ell_i^2. (5.6.9)$$

А

$$\sum_{i=1}^{n}Y_i^2 - n\overline{Y}^2 - \sum_{i=1}^{n}\ell_i^2 = Y^TY - \left(Y^TY - a^T\left[X^T\right]Y\right) - n\overline{Y}^2. (5.6.10)$$

Або

$$Y^TY - \left(Y^TY - a^T\left[X^T\right]Y\right) - n\overline{Y}^2 = a^T[X]^TY - n\overline{Y}^2 \ldots\ldots.(5.6.11)$$

Тоді

$$a^T[X]^TY - n\overline{Y}^2 \Rightarrow R = \sqrt{\frac{a^T[X]^TY - n\overline{Y}^2}{Y^TY - n\overline{Y}^2}} \ldots\ldots(5.6.12)$$

Приведемо порівняльну таблицю за результатами зрівноваження.

Таблиця 5.6.1. Порівняльна таблиця за результатами зрівноваження

Екз. оцін. Y	У'зрівн.	V=Y'-Y	V^2	У^2	(Y-Yср)^2	(Y'-Yср)^2	Yср.
100	102,459713	2,45971252	6,0501857	10000	44,327562	83,13076	93,342105
90	94,44050	4,440507	19,7181	8100	11,1696	1,20648	93,3421

	75	46	07		68	7	05
90	94,4405075	4,44050746	19,718107	8100	11,169668	1,206487	93,342105
100	94,58813	-5,41187	29,288337	10000	44,327562	1,552578	93,342105
89	89	-1,933E-12	3,735E-24	7921	18,853878	18,85388	93,342105
89	95,5551444	6,55514436	42,969918	7921	18,853878	4,897542	93,342105
95	94,4405075	-0,5594925	0,3130319	9025	2,748615	1,206487	93,342105
100	94,6619412	-5,3380588	28,494871	10000	44,327562	1,741967	93,342105
90	94,4405075	4,44050746	19,718107	8100	11,169668	1,206487	93,342105
89	82,8182826	-6,1817174	38,21363	7921	18,853878	110,7508	93,342105
100	94,4405075	-5,5594925	30,907957	10000	44,327562	1,206487	93,342105
80	80,1944908	0,19449082	0,0378267	6400	178,01177	172,8598	93,342105
89	94,126784	5,12678395	26,283914	7921	18,853878	0,615721	93,342105
90	94,58813	4,58812998	21,050937	8100	11,169668	1,552578	93,342105
100	96,4483475	-3,5516525	12,614236	10000	44,327562	9,648741	93,342105
90	95,4813331	5,48133311	30,045013	8100	11,169668	4,576296	93,342105
100	96,7121557	-3,2878443	10,80992	10000	44,327562	11,35724	93,342105
100	94,403391	-5,596609	31,322032	10000	44,327562	1,126327	93,342105
77	81,62415	4,624154	21,3828	5929	267,064	137,310	93,3421

	49	87	08		4	4	05
77	94,58813	17,58813	309,34232	5929	267,0644	1,552578	93,342105
100	94,4405075	-5,5594925	30,907957	10000	44,327562	1,206487	93,342105
100	95,4813331	-4,5186669	20,41835	10000	44,327562	4,576296	93,342105
90	91,6885744	1,68857438	2,8512834	8100	11,169668	2,734164	93,342105
100	94,58813	-5,41187	29,288337	10000	44,327562	1,552578	93,342105
100	94,58813	-5,41187	29,288337	10000	44,327562	1,552578	93,342105
100	95,4813331	-4,5186669	20,41835	10000	44,327562	4,576296	93,342105
100	94,58813	-5,41187	29,288337	10000	44,327562	1,552578	93,342105
100	94,4405075	-5,5594925	30,907957	10000	44,327562	1,206487	93,342105
100	94,58813	-5,41187	29,288337	10000	44,327562	1,552578	93,342105
85	88,6929506	3,69295063	13,637884	7225	69,59072	21,61464	93,342105
90	94,58813	4,58812998	21,050937	8100	11,169668	1,552578	93,342105
90	88,7667619	-1,2332381	1,5208762	8100	11,169668	20,93377	93,342105
86	94,4405075	8,44050746	71,242166	7396	53,90651	1,206487	93,342105
86	94,58813	8,58812998	73,755977	7396	53,90651	1,552578	93,342105
100	94,58813	-5,41187	29,288337	10000	44,327562	1,552578	93,342105
90	94,4405075	4,44050746	19,718107	8100	11,169668	1,206487	93,342105

95	93,1169348	-1,8830652	3,5459346	9025	2,748615	0,050702	93,342105
100	94,4405075	-5,5594925	30,907957	10000	44,327562	1,206487	93,342105
3547	3547	-2,152E-10	1185,6067	332909	1824,5526	638,946	
[Y]	[Y']	V=Y'-Y	[V²]	[У²]	[(Y-Ycp)^2]	[(Y'-Ycp)^2]	

На основі даних табл.5.6.1, за формулою 5.6.4, знайдемо вибірковий коефіцієнт множинної детермінації

$$R^2 = 1 - \frac{1185.6067}{1824.5526} = 1 - 0.64981 = 0.35019.$$

Коефіцієнт множинної кореляції при цьому

$$R = \sqrt{R^2} = \sqrt{0.35019} = 0.592.$$

В педагогіці і психології використовуються дві системи класифікації кореляційних зв´язків по їх силі-загальна і часткова.

Загальна класифікація кореляційних зв´язків (по Івантер Е.В., Коросову А.В.,1992):

1) сильна, або тісна при коефіцієнті кореляції R>= 0.70;
2) середня……...при коефіцієнті кореляції 0,50 <R< 0.69;
3)помірна………при коефіцієнті кореляції 0,30 <R< 0.49;
4) слабка при коефіцієнті кореляції 0,20 <R< 0.29;
5) дуже слабка при коефіцієнті кореляції R< 0.19.

Часткова класифікація кореляційних зв´язків:

1) висока значима кореляція при R, що відповідає рівню статистичної значимості P<=0.01;
2) значима кореляція при R, що відповідає рівню статистичної значимості P<=0.05;
3) тенденція достовірного зв´язку при R, що відповідає рівню статистичної значимості P<=0.10;

4) незначима кореляція при R, що не досягає рівня статистичної значимості .

Слід відмітити, що ці дві класифікації не співпадають. Перша орієнтована тільки на величину коефіцієнта кореляції, а друга визначає , якого рівня значимості досягає дана величина коефіцієнта кореляції при заданому об´ємі вибірки. Чим більший об´єм вибірки , тим меншої величини коефіцієнта кореляції достатньо, щоб кореляція була признана достовірною.

І навіть при малому об´ємі вибірки може бути так, що сильна кореляція виявиться недостовірною.

Таким чином, коефіцієнт R відповідає середньому рівню кореляції 0,50<$R_{0.59}$<0.69 , забезпечуючи рівень статистичної значимості P<= 0.05.

Статистичну значущість коефіцієнта детермінації можна перевірити за допомогою F-статистики

$$F_R = \frac{R^2}{1-R^2} \cdot \frac{n-m}{m-1}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5.6.13)$$

де R^2 – коефіцієнт детермінації, n – число періодів, що спостерігаються, m – число параметрів рівняння регресії. Для заданої надійності p і ступенів вільності $k_1 = m, k_2 = n - m$ знаходимо в таблиці F-статистики критичне значення $F_{p,k1,k2}$.

Якщо $F_R > F_{p,k1,k2}$, то з надійністю p можна вважати, що коефіцієнт детермінації статистично значимий і включені у регресію фактори достатньо пояснюють стохастичну залежність показника.

Критерій Фішера можна розрахувати за формулою

$$F_{розр.} = \frac{S^2_{\tilde{Y}}}{S^2}, \text{……………………}(5.6.14)$$

………… де $S^2_{Yзрівн.} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(Y_{зрівн.} - \overline{Y}\right)^2}{m}$, ……………(5.6.15)

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(Y_{зрівн.} - Y\right)^2}{n-m-1}, \qquad (5.6.16)$$

Необхідно відмітити, що за формулою (5.6.16) розраховується дисперсія по квадратам відхилень зрівноважених значень $\tilde{Y}$ від їх експериментальних значень. Квадратний корінь із цієї дисперсії і буде середня квадратична похибка одиниці ваги- дуже важлива характеристика оцінки точності зрівноважених елементів.

На основі даних табл.5.6.1, запишемо

$$S^2 = \frac{1185{,}6067}{38-8-1} = 40.8830.$$

Тоді, середня квадратична похибка одиниці ваги μ буде дорівнювати

$$\mu = \sqrt{S^2} = \sqrt{40.8830} = 6.39398.$$

Аналогічна характеристика приведена в третій стрічці другого стовпчика табл.5.4.1.

А це означає, що середня квадратична похибка виставлення екзаменаційних оцінок по 100 бальній шкалі EST становить 6,39 бали, тобто похибка складає 6,39 %.

На жаль, ні одна стандартна комп´ютерна програма не дає можливості відповісти на питання, чому дорівнює

середня квадратична похибка екзаменаційної оцінки для конкретного студента. Дану проблему ми вирішимо нижче.

Розрахуємо дисперсію за формулою (5.6.15) по відхиленням зрівноважених значень від середнього значення $\overline{Y}$ на основі даних табл.5.6.1.

$$S^2_{Yзрівн.} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(Y_{зрівн.} - \overline{Y}\right)^2}{m} = \frac{638{,}94595}{8} = 79{,}8682,$$

При цьому розрахунковий критерій Фішера буде

$$F_{розр.} = \frac{S^2_{\tilde{Y}}}{S^2} = \frac{79{,}8682}{40{,}8830} = 1{,}95358,$$

аналогічна характеристика приведена в четвертій стрічці першого стовпчика табл.5.4.1.

За формулою (5.6.13) отримаємо

$$F_R = \frac{R^2}{1-R^2}\cdot\frac{n-m}{m-1} = \frac{0{,}3501932(38-8-1)}{(1-0{,}3501932)*8} = 1{,}953581.$$

Знайдемо допустиме значення $F_{доп.}$ для 5% діапазону за формулою

$$= FРАСПОБР(0.05;8;29)ENTER \text{ ……}(5.6.17)$$

В результаті комп´ютерного розрахунку, отримуємо $F_{доп.} = 2{,}27851$.

Як бачимо, в нашому випадку, $F_{розр.} < F_{доп.}$ Тобто, при побудові математичної моделі з 8 факторами, у нас не забезпечується 95% вірогідність результатів. Для 91%, отримаємо

$= FРАСПОБР(0.09;8;29)ENTER$ ……(5.6.18)

…………………….. $F_{доп.} = 1{,}950589$.

Тобто, $F_{розр.} > F_{доп.}$ і ми з надійністю 91% можемо вважати, що коефіцієнт детермінації статистично значимий і включені у регресію фактори достатньо пояснюють залежність показника.

5.6.2. Встановлення надійних інтервалів базисних даних та прогнозу

Встановивши середню квадратичну похибку одиниці ваги зрівноважених елементів, провівши точкову оцінку прогнозу та оцінивши параметри лінійної множинної регресії, необхідно встановити надійну зону для базисних значень і надійного інтервалу для прогнозу.

Наше рівняння регресії з оціненими параметрами має вигляд

$$\widetilde{Y} = a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + a_4 X_4 + a_5 X_5 + a_6 X_6 + a_7 X_7 + a_8 X_8.$$

……………………………………………………..(5.6.19)

Так як $a_i (i = 0,1,2,...,m = 8)$– випадкова величина, то $\widetilde{Y}$ також є випадковою величиною. Для визначення надійного інтервалу необхідно знайти оцінку дисперсії випадкової величини $\widetilde{Y}$.

Дисперсія лінійної функції визначається за формулою

$$D\left[\widetilde{Y}\right] = D\left[a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + a_4 X_4 + a_5 X_5 + a_6 X_6 + a_7 X_7 + a_8 X_8\right],$$

або

$$D\left[\widetilde{Y}\right] = D[a_0] + X_1^2 D[a_1] + X_2^2 D[a_2] + ... + X_m^2 + 2\sum_{i>j} X_i X_J K\left[a_i a_j\right], \quad (5.6.20)$$

де $K\left[a_i a_j\right]$– кореляційний момент величин a_i, a_j.

Нехай, необхідно знайти надійний інтервал для вектора

$$X_l = \left[1, X_{1l}, X_{2l}, ..., X_{ml}\right].$$

Тоді дисперсія

$D\left[\widetilde{Y}\right] = X_l \left[K[a]\right] X_l^T$, $де$ $K[a]$ – матриця коваріацій оцінок.

При цьому

$$\left[K[a]\right] = S^2 \left[\left[X\right]^T \left[X\right]\right]^{-1}. \quad (5.6.21)$$

Оцінка дисперсії $\widetilde{Y}$ для лінійної множинної регресії має вигляд

$$D\left[\widetilde{Y}_l\right] = S_{\widetilde{Y}l}^2 = S^2 X_l^T \left[\left[X\right]^T \left[X\right]\right]^{-1} X_l. \quad (5.6.22)$$

Тоді з надійністю $p = 1 - \alpha$ можна стверджувати, що істинне значення для базисних даних міститься в інтервалі

$$\left(\widetilde{Y}_l - t_{\alpha,k} S_{\widetilde{Y}l}; \widetilde{Y}_l + t_{\alpha,k} S_{\widetilde{Y}l}\right).$$

Нехай, прогноз міститься у точці $X_l = \left[1, X_{1l}, X_{2l}, ..., X_{ml}\right]$. При цьому необхідно врахувати дисперсію відхилення від лінії регресії, тобто

$$D\left[\widetilde{Y}_p\right]=S^2\left(X_p\left[[X]^T[X]\right]^{-1}X_p^T+1\right). \quad (5.6.23)$$

Звідси випливає, що з надійністю $p=1-\alpha$ можна стверджувати, що істинне значення прогнозу Y_p міститься в інтервалі $\left(\widetilde{Y}_p-t_{\alpha,k}S_{\widetilde{Y}p};\widetilde{Y}_p+t_{\alpha,k}S_{\widetilde{Y}p}\right)$.

Таким чином, значимість коефіцієнта регресії a_j можна перевірити, якщо прийняти до уваги що статистика $\left(a_j-\alpha_j\right)/S_{aj}$ має t-розподіл Стьюдента з к =n-m-1 степенями свободи.
Тому, a_j значимо відрізняється від нуля (в противному випадку гіпотеза H_0 про рівність параметра α_j нулю, тобто H_0: α_j =0 відкидається) на рівні значимості ά , якщо

$$|t|=\frac{a_j}{S_{aj}}>t_{1-\alpha;n-m-1}, \quad (5.6.24)$$

де $t_{1-\alpha;n-m-1}$ - табличне значення t- критерія Стьюдента, визначене на рівні значимості ά при числі степенів свободи к =n-m-1.

В загальній постановці гіпотеза H_0 про рівність параметра α_j заданому числу α_{j0}, тобто $H_0:\alpha_j=\alpha_{j0}$, відкидається, якщо

$$|t|=\frac{a_j-\alpha_{j0}}{S_{aj}}>t_{1-\alpha;n-m-1}, \ldots\ldots\ldots\ldots(5.6.25)$$

тому, довірчий інтервал для параметра α_j буде

$$a_j-t_{1-\alpha;n-m-1}S_{aj}<=\alpha_j<=a_j+t_{1-\alpha;n-m-1}S_{aj}\ldots..(5.6.26)$$

Знайдемо допустимі значення t за формулою

$$=СТЬЮДРАСПОБР(1-\alpha;n-m-1)ENTER. \quad (5.6.27)$$

В нашому випадку отримали

$$t_{0.05;29}=2.045 \quad ; \quad t_{0.09;29}=1.754.$$

Перевіримо значимість коефіцієнтів регресії на основі даних табл.5.4.1

$t_0=\dfrac{54.49}{39.21}=1.39<t_{0.95;29}=2.04$, тобто коефіцієнт a_0 незначимий ;

$t_1=\dfrac{5.747}{4{,}039}=1.42<t_{0.95;29}=2.04$, тобто коефіцієнт a_1 незначимий ;

$t_5=\dfrac{|-6{,}978|}{4{,}747}=1.47<t_{0.95;29}=2.04$, тобто коефіцієнт a_5 незначимий ;

$t_7=\dfrac{2.585}{1{,}137}=2.27>t_{0.95;29}=2.04$, тобто коефіцієнт a_7 значимий на 5% рівні.

Всі інші коефіцієнти a_2, a_3, a_4, a_6, a_8 не значимі

Зведемо результати розрахунків в табл. 5.6.2

Таблиця 5.6.2. Встановлення значимості коефіцієнтів математичної моделі

	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
a_i	54,49	5,747	5,200	-0,0738	-0,9670	-6,978	0,037	2,585	2,438
m_{ai}	39,21	4,039	7,343	1,241	2,402	4,747	1,879	1,137	4,991
t	1,39	1,42	0,708	-0,059	-0,402	-1,47	0,020	2.27	0,488
p/tдоп.	0,8/1,31	0,8/1,31	0,5/0,68	-	0,3/0,39	0,8/1,31	-	0,95/2,04	0,3/0,39

Теорема 2. Якщо за істинну модель прийняти зрівноважену модель, то всі коефіцієнти моделі будуть значимі при коефіцієнті множинної детермінації R^2=1.

Для доказу теореми 2 проведемо повторне зрівноваження моделі, взявши замість вектора екзаменаційних оцінок Y їх зрівноважені значення $\widetilde{Y}$.

Результати строгого зрівноваження за способом найменших квадратів представимо у вигляді таблиці 5.6.3

Таблиця 5.6.3. Результати повторного зрівноваження

a_0 2,43820957	a_1 2,585371732	a_2 0,037116449	a_3 -6,978379411	a_4 -0,9670143	=ai	
2,26247E-15	5,15436E-16	8,51902E-16	2,15194E-15	1,08916E-15	стандарт S	ai=S√dii
1	2,89845E-15	#Н/Д	#Н/Д	#Н/Д	R^2	m1=μ
9,50695E+30	29	#Н/Д	#Н/Д	#Н/Д	Fкритерій	n-m-1
638,9459564	2,4363E-28	#Н/Д	#Н/Д	#Н/Д	[(Y'-Ycp)^2]	[VV]

Продовження табл.5.6.3.

a_3 -0,07381125	a_2 5,20059521	a_1 5,747556833	a_0 54,49228377	=ai	
5,62637E-16	3,32884E-15	1,83106E-15	1,77753E-14	стандарт S	ai=S√dii
#Н/Д	#Н/Д	#Н/Д	#Н/Д	R^2	m1=μ
#Н/Д	#Н/Д	#Н/Д	#Н/Д	Fкритерій	n-m-1
#Н/Д	#Н/Д	#Н/Д	#Н/Д	[(Y'-Ycp)^2]	[VV]

Порівнюючи табл.5.6.3 з табл.5.4.1, замітимо автентичність коефіцієнтів a_i;aR^2=1; $m_a << a_i$.

Теорема 2 доказана.

5.6.3. Розробка критеріїв оцінювання знань студентів

Екзаменаційна оцінка Y відповідає традиційній формі навчання, в якій викладач на основі відповіді студента безапеляційно виставляє оцінку.

Абсолютно інший підхід до оцінювання знань студентів необхідний в проблемній формі навчання .

Якщо при виставленні оцінки в традиційній формі навчання остаточне рішення приймає викладач, то в проблемній формі навчання після здачі іспиту і виставленні попередніїх оцінок додатково проводиться анкетування студентів з метою забезпечення оберненого зв´язку «студент- викладач» .

В даній анкеті нулями позначено, що студент по тим чи іншим причинам не зміг підготовити монографію. Але, приймаючи до уваги, що він відпрацював лабораторні роботи і за результатами усної відповіді отримав позитивну оцінку.

В подальшому анкетні дані набираються в табл.1 комп´ютерної програми і зразу ж за результатами строгого зрівноваження виставляється комп´ютером оцінка з врахуванням думки не тільки викладача, але індивідуальної думки студента і всієї академічної групи.

Крім того, роздруковується середня квадратична похибка встановлення оцінки (середня квадратична похибка одиниці ваги μ) і індивідуальна середня квадратична похибка виставлення оцінки по кожному студенту.

Коли ж остаточну оцінку викладач проставляє в іспитову відомість і залікову книжку студента на основі комп´ютерної обробки матеріалів, то похибка в оцінці дорівнює нулю.

Це пояснюється тим, що коли ми в початкову систему рівнянь введемо вектор зрівноважених значень $\widetilde{Y}$ за

матеріалами комп´ютерної обробки, то отримаємо середні квадратичні похибки, рівні нулю.

Звичайно, цим забезпечується об´єктивність оцінки , чого не можна сказати про традиційне оцінювання знань студентів.

Адже при традиційному оцінюванні знань студентів абсолютно відсутня інформація про точність, з якою проведено таке оцінювання, тобто відсутня інформація про середню квадратичну похибку іспитової оцінки.

На основі розробленої математичної моделі базового курсу приводиться не тільки середня квадратична похибка оцінювання знань студентів в цілому (по всій групі, курсу тощо) , але і індивідуальна середня квадратична похибка в оцінюванні знань кожного конкретного студента.

Більше того, якщо в іспитову відомість проставляється не попередня оцінка викладача, а остаточна оцінка комп´ютера, то похибка іспитової оцінки буде зведена до нуля.

Такий підхід до оцінювання знань студентів нами розроблений вперше, він ще не описаний в педагогічній літературі.

Безумовно, даний підхід можливий лише при наявності побудованої математичної моделі по даному курсу.

Такий підхід можна впровадити і по всім академічним курсам, навіть і при традиційній формі навчання. Але це потребує від викладача розробки математичної моделі.

Знайдемо значення оберненої ваги зрівноваженої функції $1/P_{\widetilde{Y}}$. Для цього попередньо перемножим матриці

$$Q' = XN^{-1}. \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5.6.28)$$

Де матриця X

1		1	5	5	4	4	4	5	5	5
2		1	5	5	5	5	5	5	5	5
3		1	5	5	5	5	5	5	5	5
4		1	5	5	3	5	5	5	5	5
5		1	4	4	3	4	4	5	4	5
6		1	5	5	3	4	5	5	5	5
7		1	5	5	5	5	5	5	5	5
8		1	5	5	2	5	5	5	5	5
9		1	5	5	5	5	5	5	5	5
10		1	4	5	4	5	4	5	0	5
11		1	5	5	5	5	5	5	5	5
12		1	4	5	4	5	4	0	0	4
13		1	4	5	4	4	4	5	4	5
14		1	5	5	3	5	5	5	5	5
15		1	5	5	4	3	5	5	5	5
16		1	5	5	4	4	5	5	5	5
17		1	4	5	4	4	4	5	5	5
18		1	5	5	5	5	5	4	5	5
19		1	5	5	3	5	5	4	0	5
20		1	5	5	3	5	5	5	5	5
21		1	5	5	5	5	5	5	5	5
22		1	5	5	4	4	5	5	5	5
23		1	4	5	4	4	4	5	4	4
24		1	5	5	3	5	5	5	5	5
25		1	5	5	3	5	5	5	5	5
26		1	5	5	4	4	5	5	5	5
27		1	5	5	3	5	5	5	5	5
28		1	5	5	5	5	5	5	5	5
29		1	5	5	3	5	5	5	5	5
30		1	4	5	5	5	5	5	5	5
31		1	5	5	3	5	5	5	5	5
32		1	4	5	4	5	5	5	5	5
33		1	5	5	5	5	5	5	5	5
34		1	5	5	3	5	5	5	5	5
35		1	5	5	3	5	5	5	5	5
36		1	5	5	5	5	5	5	5	5
37		1	5	5	3	4	5	5	5	4
38		1	5	5	5	5	5	5	5	5

Матриця N^{-1}

37,60993079	0,17429873	-5,864444295	0,097910912	0,09744857	0,307394507	0,109580929	0,033235048	-2,488659681
0,17429873	0,399089485	-0,121236141	0,0195237	0,032038288	-0,284790668	0,014785251	-0,013217014	-0,070866377
-5,864444295	-0,121236141	1,319023213	-0,046786832	-0,03985332	-0,142807802	-0,009081906	0,018636552	0,183032862
0,097910912	0,0195237	-0,046786832	0,037681079	-0,004925145	0,003787794	0,007932749	-0,006776924	-0,021981654
0,09744857	0,032038288	-0,03985332	-0,004925145	0,141204237	-0,106927314	0,021052276	0,013188052	-0,069306857
0,307394507	-0,284790668	-0,142807802	0,003787794	-0,106927314	0,551223037	-0,003562341	-0,0381499	-0,043027119
0,109580929	0,014785251	-0,009081906	0,007932749	0,021052276	-0,003562341	0,086386633	-0,02697821	-0,110034524
0,033235048	-0,013217014	0,018636552	-0,006776924	0,013188052	-0,0381499	-0,02697821	0,031623978	0,01473202
-2,488659681	-0,070866377	0,183032862	-0,021981654	-0,069306857	-0,043027119	-0,110034524	0,01473202	0,609303828

Матриця Q' буде

Таблиця 5.6.4.Множення матриць для оцінки точності

			Q'= X*N^{-1}					
-0,5599	0,28416	0,1696368	0,003641	0,000448	-0,46196	-0,01334	0,030267	0,104917
-0,05624	0,0509313	-0,05981	0,040185	0,0298	-0,01388	0,012081	-0,00147	-0,0294

6		1						
-0,056246	0,0509313	-0,059811	0,040185	0,0298	-0,01388	0,012081	-0,00147	-0,0294
-0,252067	0,0118839	0,0337625	-0,035177	0,03965	-0,02145	-0,00378	0,012082	0,014565
5	-1,53E-14	-1	3,05E-16	-1,05E-14	2,37E-14	-3,4E-15	-1,3E-15	1,24E-14
-0,349516	-0,020154	0,0736158	-0,030252	-0,101554	0,085475	-0,02484	-0,00111	0,083871
-0,056246	0,0509313	-0,059811	0,040185	0,0298	-0,01388	0,012081	-0,00147	-0,0294
-0,349978	-0,00764	0,0805493	-0,072858	0,044575	-0,02524	-0,01172	0,018859	0,036546
-0,056246	0,0509313	-0,059811	0,040185	0,0298	-0,01388	0,012081	-0,00147	-0,0294
-0,802025	-0,016806	0,1578369	0,013077	0,043674	-0,09335	0,127816	-0,10145	0,032816

-0,056246	0,0509313	-0,059811	0,040185	0,0298	-0,01388	0,012081	-0,00147	-0,0294
1,13873	-0,019866	0,0202135	-0,004605	0,007719	-0,03251	-0,19408	0,018711	-0,02631
-0,766533	-0,101712	0,2722364	-0,009106	-0,044778	-0,13902	-0,00115	0,01186	0,161051
-0,252067	0,0118839	0,0337625	-0,035177	0,03965	-0,02145	-0,00378	0,012082	0,014565
-0,349054	-0,032669	0,0666823	0,012354	-0,247684	0,19619	-0,03796	-0,02107	0,131197
-0,251605	-0,000631	0,026829	0,007429	-0,106479	0,089262	-0,0169	-0,00788	0,06189
-0,733298	-0,114929	0,2908729	-0,015883	-0,03159	-0,17717	-0,02813	0,043484	0,175783
-0,165827	0,0361461	-0,050729	0,032252	0,008747	-0,01031	-0,07431	0,025506	0,080636
-	0,06	-	-	-	0,17	0,04	-	0,05

0,527824	31838	0,050338	0,009226	0,047343	2859	4719	0,11906	0939
-0,252067	0,0118839	0,0337625	-0,035177	0,03965	-0,02145	-0,00378	0,012082	0,014565
-0,056246	0,0509313	-0,059811	0,040185	0,0298	-0,01388	0,012081	-0,00147	-0,0294
-0,251605	-0,000631	0,026829	0,007429	-0,106479	0,089262	-0,0169	-0,00788	0,06189
1,7221263	-0,030846	0,0892035	0,012876	0,024528	-0,09599	0,108885	-0,00287	-0,44825
-0,252067	0,0118839	0,0337625	-0,035177	0,03965	-0,02145	-0,00378	0,012082	0,014565
-0,252067	0,0118839	0,0337625	-0,035177	0,03965	-0,02145	-0,00378	0,012082	0,014565
-0,251605	-0,000631	0,026829	0,007429	-0,106479	0,089262	-0,0169	-0,00788	0,06189
-0,25	0,01188	0,03376	-0,03	0,03965	-0,02	-0,00	0,01208	0,01456

2067	39	25	5177		145	378	2	5
-0,056246	0,0509313	-0,059811	0,040185	0,0298	-0,01388	0,012081	-0,00147	-0,0294
-0,252067	0,0118839	0,0337625	-0,035177	0,03965	-0,02145	-0,00378	0,012082	0,014565
-0,230544	-0,348158	0,061425	0,020661	-0,002239	0,270914	-0,0027	0,011745	0,041468
-0,252067	0,0118839	0,0337625	-0,035177	0,03965	-0,02145	-0,00378	0,012082	0,014565
-0,328455	-0,367682	0,1082118	-0,01702	0,002687	0,267126	-0,01064	0,018522	0,063449
-0,056246	0,0509313	-0,059811	0,040185	0,0298	-0,01388	0,012081	-0,00147	-0,0294
-0,252067	0,0118839	0,0337625	-0,035177	0,03965	-0,02145	-0,00378	0,012082	0,014565
-0,25206	0,0118839	0,0337625	-0,03517	0,03965	-0,02145	-0,00378	0,012082	0,014565

7			7					
-0,056246	0,0509313	-0,059811	0,040185	0,0298	-0,01388	0,012081	-0,00147	-0,0294
2,1391437	0,050712	-0,109417	-0,008271	-0,032247	0,128502	0,085197	-0,01584	-0,52543
-0,056246	0,0509313	-0,059811	0,040185	0,0298	-0,01388	0,012081	-0,00147	-0,0294

Комп´ютерна формула отримання допоміжної матриці

$$= МУМНОЖ(B2:J39; A66:I74)\ F2,\ Ctrl + Shift + Enter \qquad (5.6.29)$$

Величина оберненої ваги зрівноваженої функції знаходиться построчним множенням цієї допоміжної матриці на відповідний стовпчик транспонованої матриці X^T за формулами

$$= МУМНОЖ(S2:AA2; A43:A51)\ F2,\ Ctrl + Shift + Enter \qquad (5.6.30)$$
$$= МУМНОЖ(S3:AA3; B43:B51)\ F2,\ Ctrl + Shift + Enter \qquad (5.6.31)$$
$$= МУМНОЖ(S4:AA4; C43:C51)\ F2,\ Ctrl + Shift + Enter \qquad (5.6.32)$$
$$= МУМНОЖ(S5:AA5; D43:D51)\ F2,\ Ctrl + Shift + Enter \qquad (5.6.33)$$
$$= МУМНОЖ(S6:AA6; E43:E51)\ F2,\ Ctrl + Shift + Enter \qquad (5.6.34)$$
$$= МУМНОЖ(S7:AA7; F43:F51)\ F2,\ Ctrl + Shift + Enter \qquad (5.6.35)$$
$$= МУМНОЖ(S8:AA8; G43:G51)\ F2,\ Ctrl + Shift + Enter \qquad (5.6.36)$$
$$= МУМНОЖ(S9:AA9; H43:H51)\ F2,\ Ctrl + Shift + Enter \qquad (5.6.37)$$
$$= МУМНОЖ(S10:AA10; I43:I51)\ F2,\ Ctrl + Shift + Enter \qquad (5.6.38)$$
$$= МУМНОЖ(S11:AA11; J43:J51)\ F2,\ Ctrl + Shift + Enter \qquad (5.6.39)$$
$$= МУМНОЖ(S12:AA12; K43:K51)\ F2,\ Ctrl + Shift + Enter \qquad (5.6.40)$$
$$= МУМНОЖ(S13:AA13; L43:L51)\ F2,\ Ctrl + Shift + Enter \qquad (5.6.41)$$
$$= МУМНОЖ(S14:AA14; M43:M51)\ F2,\ Ctrl + Shift + Enter \qquad (5.6.42)$$
$$= МУМНОЖ(S15:AA15; N43:N51)\ F2,\ Ctrl + Shift + Enter \qquad (5.6.43)$$
$$= МУМНОЖ(S16:AA16; O43:O51)\ F2,\ Ctrl + Shift + Enter \qquad (5.6.44)$$
$$= МУМНОЖ(S17:AA17; P43:P51)\ F2,\ Ctrl + Shift + Enter \qquad (5.6.45)$$
$$= МУМНОЖ(S18:AA18; Q43:Q51)\ F2,\ Ctrl + Shift + Enter \qquad (5.6.46)$$
$$= МУМНОЖ(S19:AA19; R43:R51)\ F2,\ Ctrl + Shift + Enter \qquad (5.6.47)$$
$$= МУМНОЖ(S20:AA20; S43:S51)\ F2,\ Ctrl + Shift + Enter \qquad (5.6.48)$$
$$= МУМНОЖ(S21:AA21; T43:T51)\ F2,\ Ctrl + Shift + Enter \qquad (5.6.49)$$
$$= МУМНОЖ(S22:AA22; U43:U51)\ F2,\ Ctrl + Shift + Enter \qquad (5.6.50)$$
$$= МУМНОЖ(S23:AA23; V43:V51)\ F2,\ Ctrl + Shift + Enter \qquad (5.6.51)$$
$$= МУМНОЖ(S24:AA24; W43:W51)\ F2,\ Ctrl + Shift + Enter \qquad (5.6.52)$$
$$= МУМНОЖ(S25:AA25; X43:X51)\ F2,\ Ctrl + Shift + Enter \qquad (5.6.53)$$
$$= МУМНОЖ(S26:AA26; Y43:Y51)\ F2,\ Ctrl + Shift + Enter \qquad (5.6.54)$$
$$= МУМНОЖ(S27:AA27; Z43:Z51)\ F2,\ Ctrl + Shift + Enter \qquad (5.6.55)$$
$$= МУМНОЖ(S28:AA28; AA43:AA51)\ F2,\ Ctrl + Shift + Enter \qquad (5.6.56)$$
$$= МУМНОЖ(S29:AA29; AB43:AB51)\ F2,\ Ctrl + Shift + Enter \qquad (5.6.57)$$
$$= МУМНОЖ(S30:AA30; AC43:AC51)\ F2,\ Ctrl + Shift + Enter \qquad (5.6.58)$$
$$= МУМНОЖ(S31:AA31; AD43:AD51)\ F2,\ Ctrl + Shift + Enter \qquad (5.6.59)$$

$= МУМНОЖ(S32:AA32; AE43:AE51)\ F2, Ctrl + Shift + Enter$ (5.6.60)
$= МУМНОЖ(S33:AA33; AF43:AF51)\ F2, Ctrl + Shift + Enter$ (5.6.61)
$= МУМНОЖ(S34:AA34; AG43:AG51)\ F2, Ctrl + Shift + Enter$ (5.6.62)
$= МУМНОЖ(S35:AA35; AH43:AH51)\ F2, Ctrl + Shift + Enter$ (5.6.63)
$= МУМНОЖ(S36:AA36; AI43:AI51)\ F2, Ctrl + Shift + Enter$ (5.6.64)
$= МУМНОЖ(S37:AA37; AJ43:AJ51)\ F2, Ctrl + Shift + Enter$ (5.6.65)
$= МУМНОЖ(S38:AA38; AK43:AK51)\ F2, Ctrl + Shift + Enter$ (5.6.66)
$= МУМНОЖ(S39:AA39; AL43:AL51)\ F2, Ctrl + Shift + Enter$ (5.6.67)

В результаті отримали вектор-стовпець обернених ваг $1/P_{\tilde{Y}}$

1/Py'
0,487704
0,085940
0,085940
0,075925
1
0,13783
0,08594
0,183961
0,08594
0,62038
0,08594
0,945212
0,263131
0,075925
0,469169
0,115006
0,318474
0,148166
0,569883
0,075925
0,08594

0,115006
0,550332
0,075925
0,075925
0,115006
0,075925
0,08594
0,075925
0,383167
0,075925
0,379526
0,08594
0,075925
0,075925
0,08594
0,579391
0,08594

Для визначення середньої квадратичної похибки функції необхідно знайти квадратний корінь із даного вектора, а після перемножити середню квадратичну похибку одиниці ваги μ на корінь квадратний із вектора обернених ваг.

Ітак, вектор квадратного кореня із обернених ваг зрівноваженої оцінки $\tilde{Y}$ буде

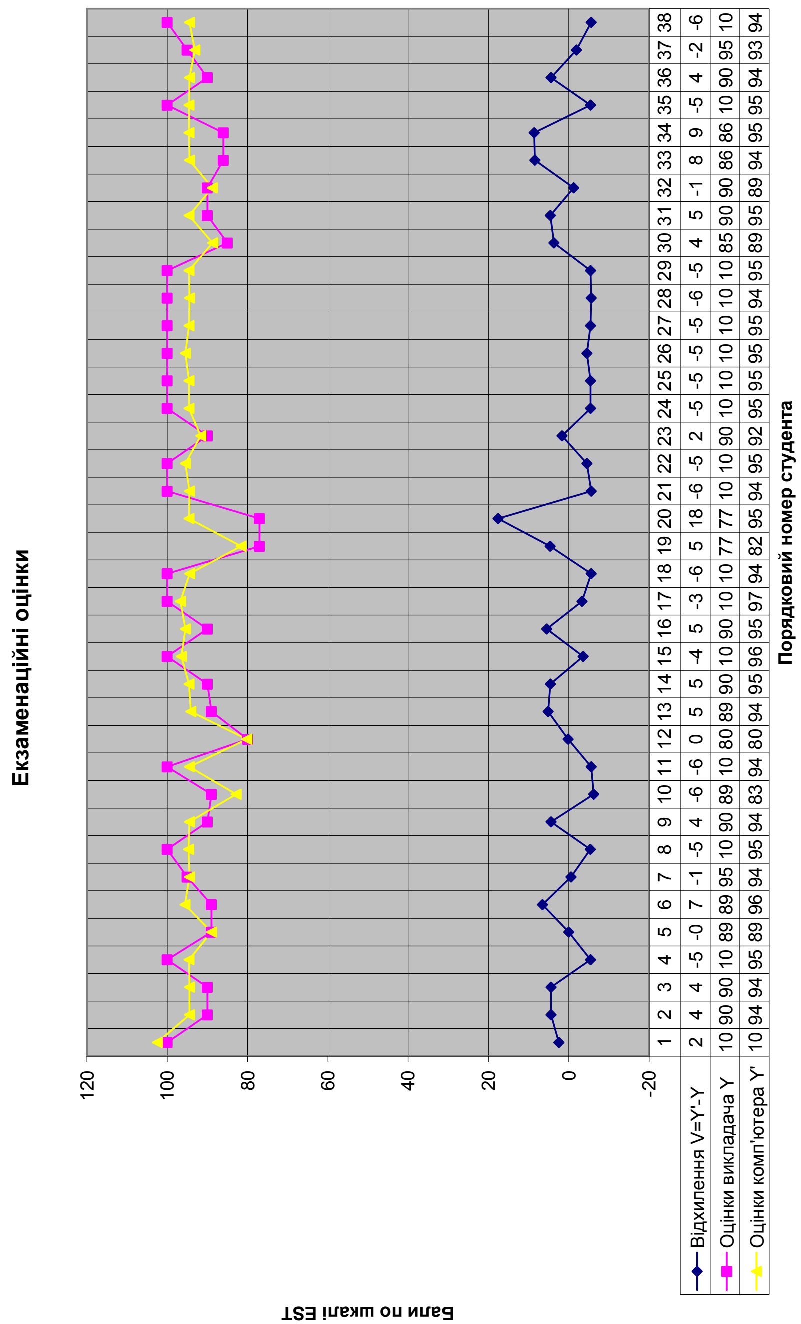
√(1/Py')
0,698358
0,293155
0,293155
0,275546

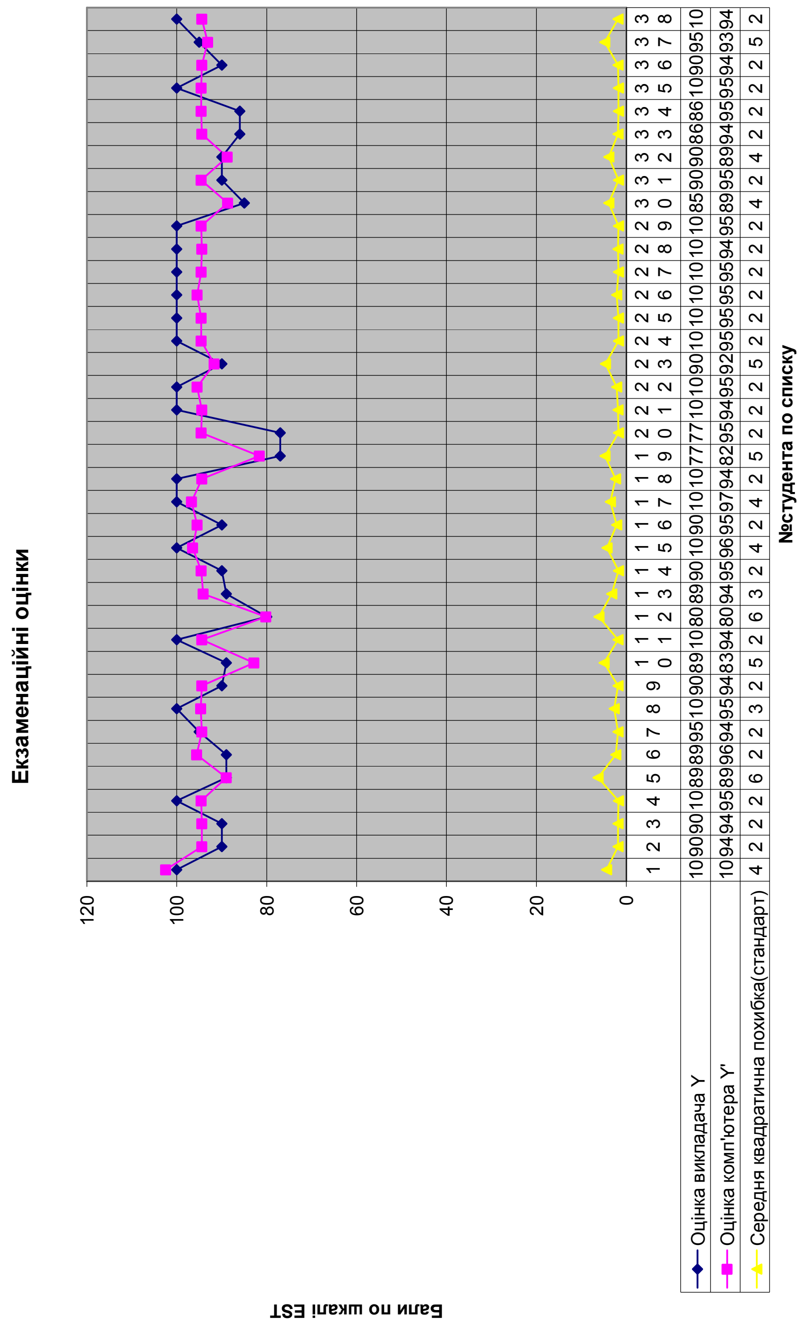
1
0,371254
0,293155
0,428907
0,293155
0,787642
0,293155
0,97222
0,512963
0,275546
0,684959
0,339126
0,564335
0,384923
0,754906
0,275546
0,293155
0,339126
0,741844
0,275546
0,275546
0,339126
0,275546
0,293155
0,275546
0,619005
0,275546
0,616057
0,293155
0,275546
0,275546
0,293155
0,761177
0,293155

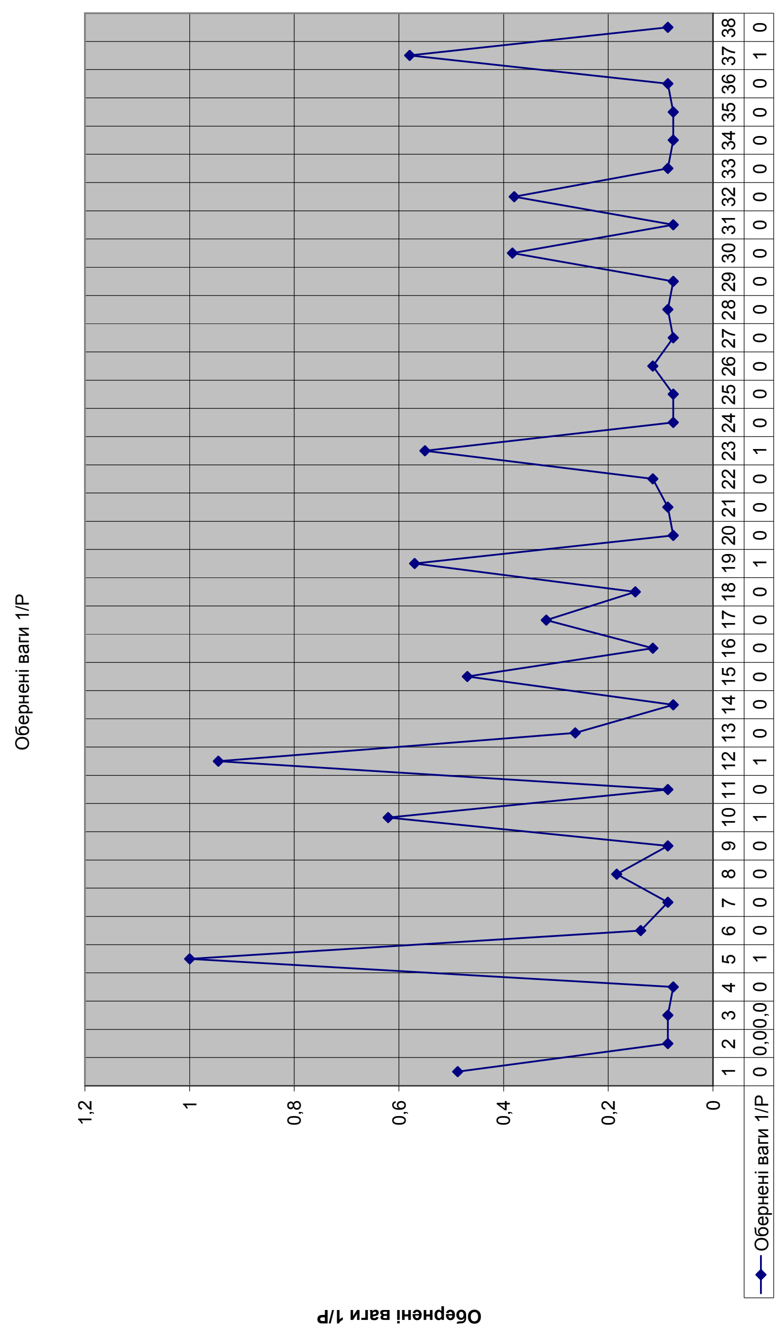
А середні квадратичні похибки (стандарти) зрівноважених оцінок студентів будуть

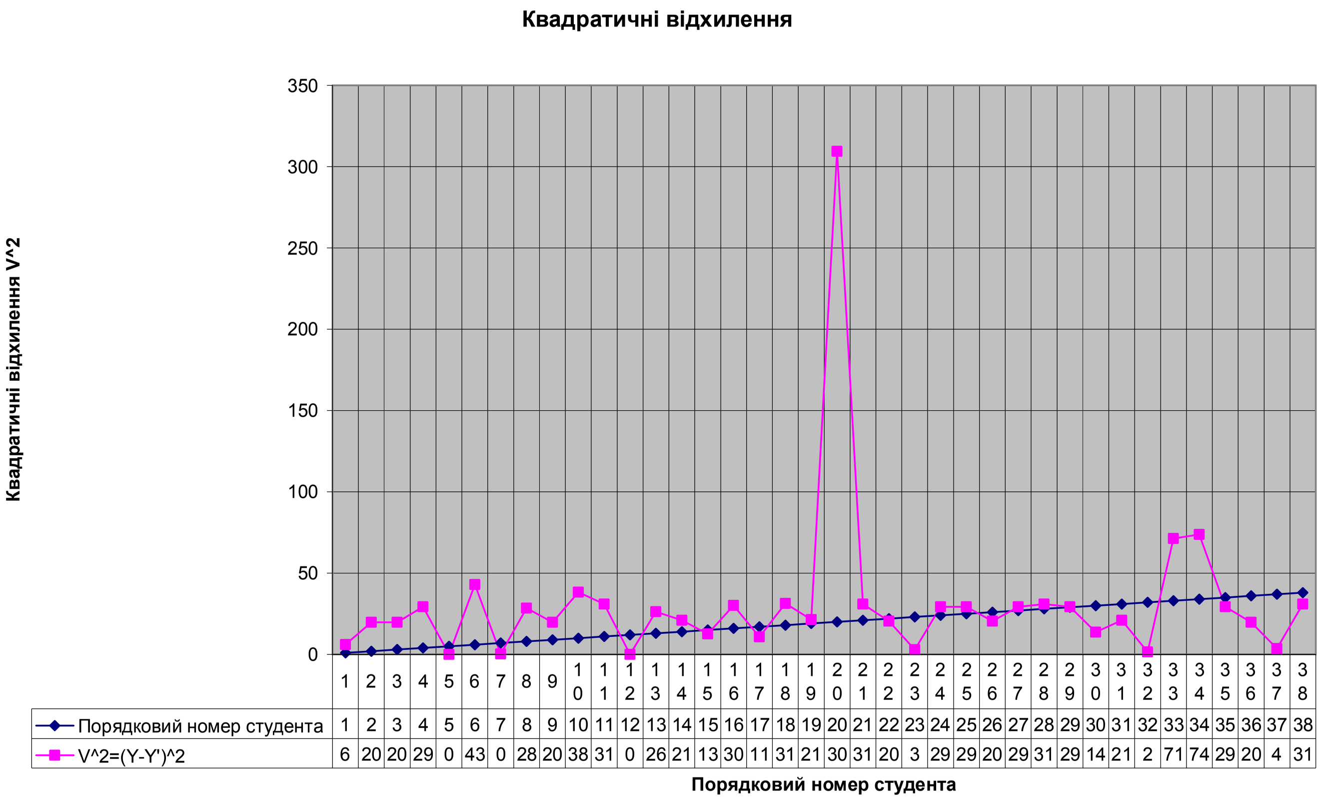
№студ.	my'
1	4,46529
2	1,87443
3	1,87443
4	1,761834
5	6,393981
6	2,373793
7	1,87443
8	2,742424
9	1,87443
10	5,036169
11	1,87443
12	6,216358
13	3,279873
14	1,761834
15	4,379617
16	2,168364
17	3,608346
18	2,461189
19	4,826852

20	1,761834
21	1,87443
22	2,168364
23	4,743334
24	1,761834
25	1,761834
26	2,168364
27	1,761834
28	1,87443
29	1,761834
30	3,957904
31	1,761834
32	3,939055
33	1,87443
34	1,761834
35	1,761834
36	1,87443
37	4,866953
38	1,87443
∑=	4,46529
my'/n=	1,87443

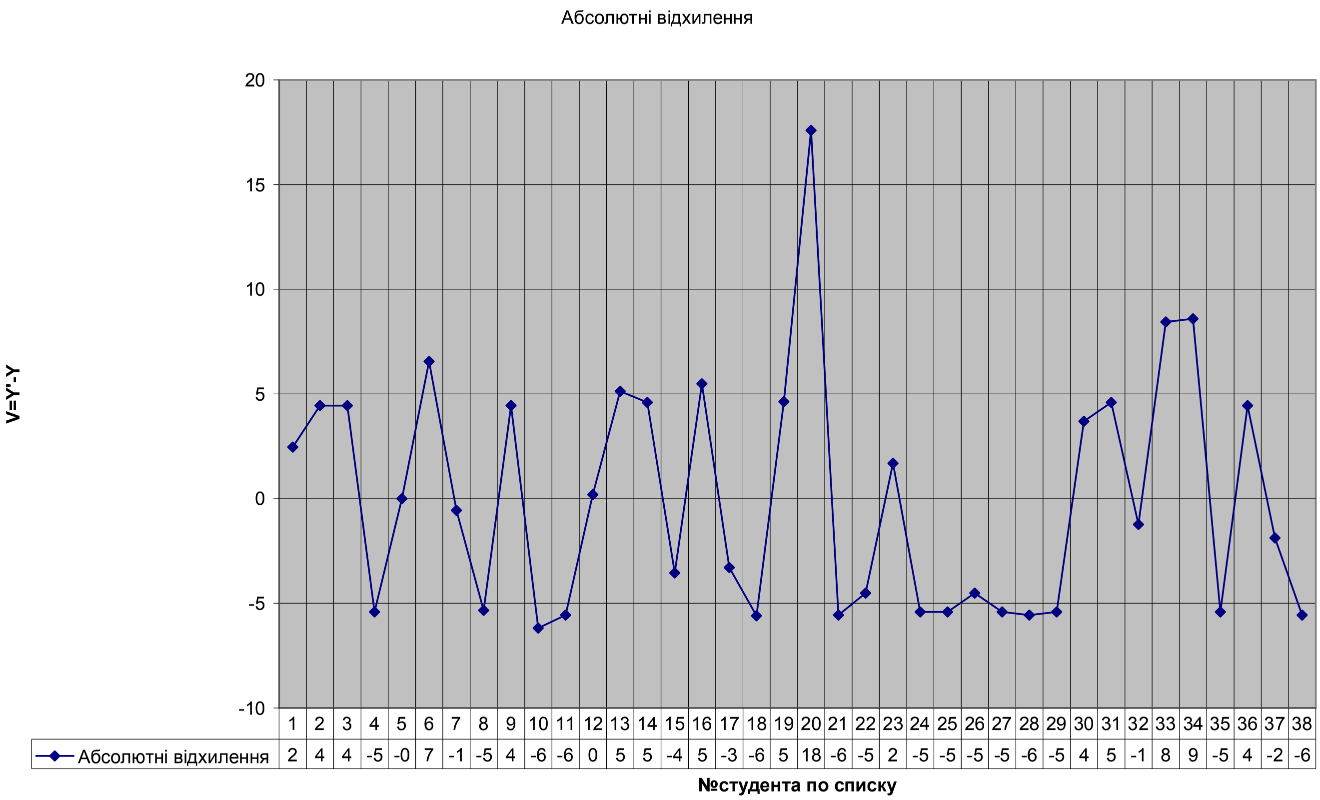



Екзаменаційні оцінки
Бали по шкалі EST
№студента по списку
Оцінка викладача Y
Оцінка комп'ютера Y'
Середня квадратична похибка(стандарт)


Обернені ваги 1/P
Обернені ваги 1/P
№ студента по списку
Обернені ваги 1/P

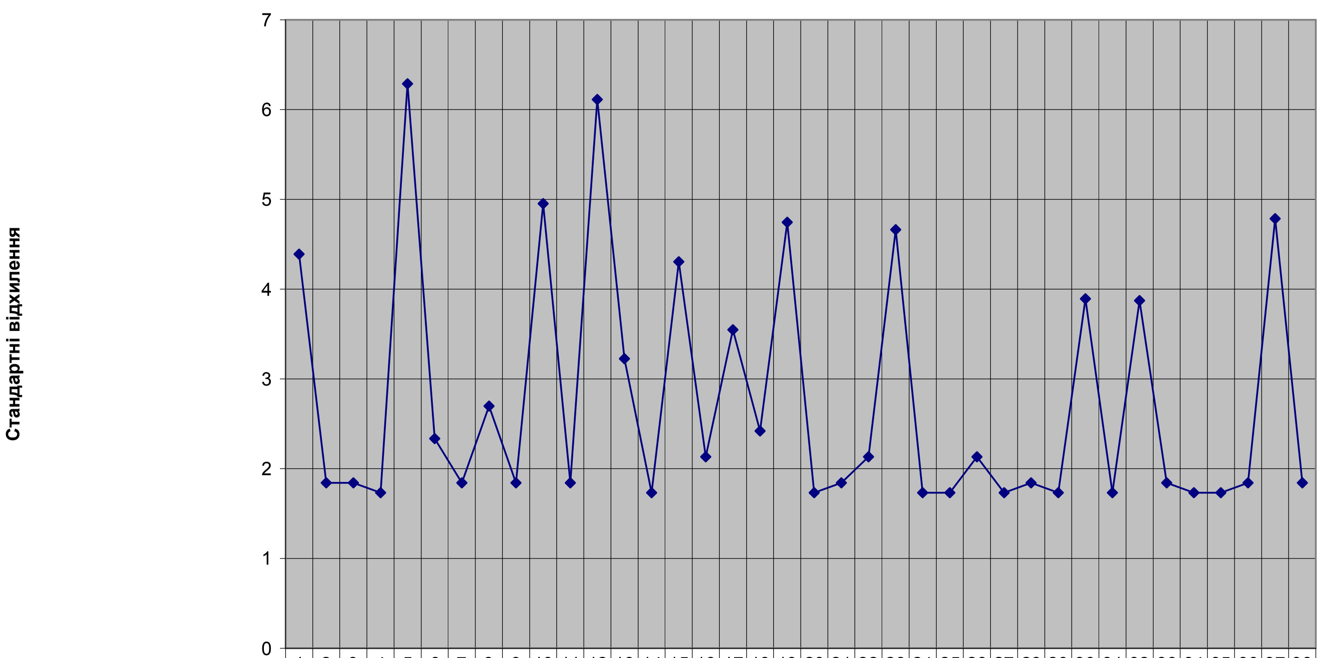


	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38
Порядковий номер студента	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38
V^2=(Y-Y')^2	6	20	20	29	0	43	0	28	20	38	31	0	26	21	13	30	11	31	21	30	31	20	3	29	29	20	29	31	29	14	21	2	71	74	29	20	4	31



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38
Абсолютні відхилення	2	4	4	-5	-0	7	-1	-5	4	-6	-6	0	5	5	-4	5	-3	-6	5	18	-6	-5	2	-5	-5	-5	-5	-6	-5	4	5	-1	8	9	-5	4	-2	-6

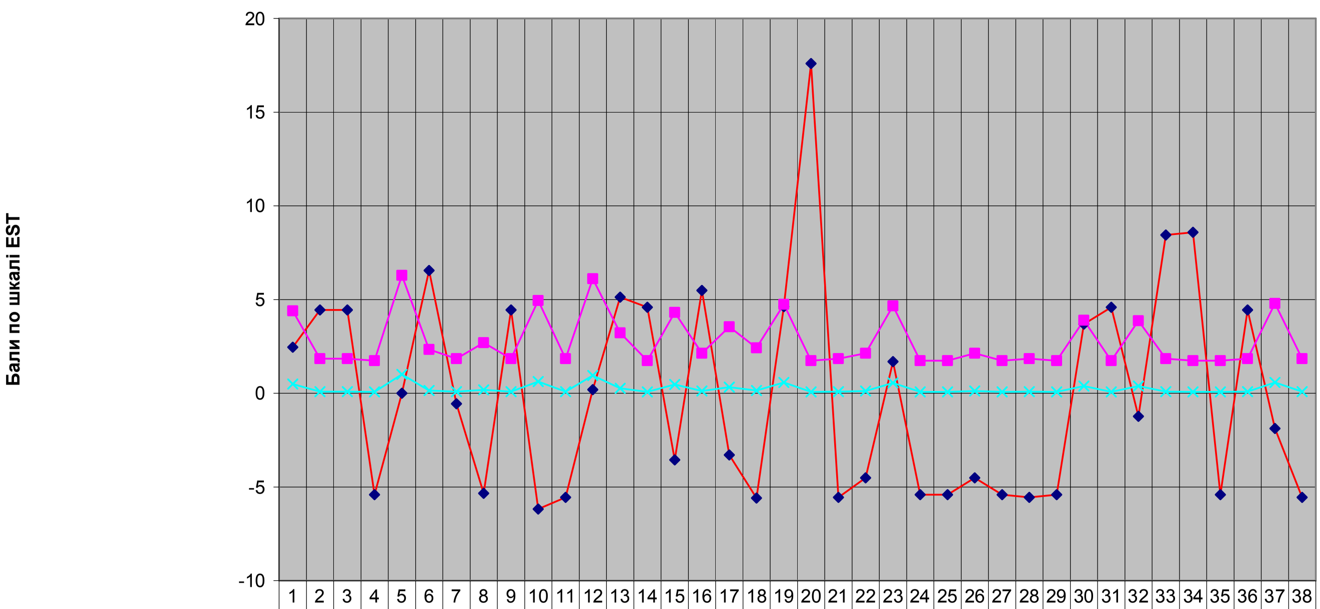
Стандартні відхилення



№ студента	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Стандартні відхилення	4	2	2	2	6	2	2	3	2	5	2	6	3	2	4	2	4	2	5

№ студента	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38
Стандартні відхилення	2	2	2	5	2	2	2	2	2	2	4	2	4	2	2	2	2	5	2

Порівняльний аналіз похибок



№ студента	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Абсолютні відхилення	2	4	4	-5	-0	7	-1	-5	4	-6	-6	0	5	5	-4	5	-3	-6	5
Обернені ваги 1/P	0	0,	0,	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1
Стандарти	4	2	2	2	6	2	2	3	2	5	2	6	3	2	4	2	4	2	5

№ студента	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38
Абсолютні відхилення	18	-6	-5	2	-5	-5	-5	-5	-6	-5	4	5	-1	8	9	-5	4	-2	-6
Обернені ваги 1/P	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
Стандарти	2	2	2	5	2	2	2	2	2	2	4	2	4	2	2	2	2	5	2

При побудові довірчого інтервалу для параметра σ^2 виходять із того, що статистика $\frac{nS^2}{\sigma^2}$ має χ^2- розподіл з k=n-2 степенями свободи.

Тому, інтервальна оцінка для σ^2 на рівні значимості ά має вигляд

$$\frac{nS^2}{\chi^2_{\alpha/2;n-2}} <= \sigma^2 <= \frac{nS^2}{\chi^2_{1-\alpha/2;n-2}} \quad \text{……….(5.6.68)}$$

Довірчий інтервал вибирається таким чином, щоб

$$P\left(\chi^2 < \chi_{1-\alpha/2;n-2}\right) = P\left(\chi^2 > \chi^2_{\alpha/2;n-2}\right) = \frac{\alpha}{2}.$$

Знайдемо параметр χ^2 за формулою

$$= ХИ2ОБР(0.025;29) \quad \text{…………………..(5.6.70)}$$
$$= ХИ2ОБР(0.975;29)$$

$$\chi^2_{\alpha/2;n-p-1} = \chi^2_{0.025;29} = 45.722;$$

$$\chi^2_{1-\alpha/2;n-p-1} = \chi^2_{0.975;29} = 16.047.$$

Для 95% відсоткового довірчого інтервалу для середньої квадратичної похибки одиниці ваги μ^2 за формулою (5.6.68) отримаємо

Розглянемо конкретні інтервальні оцінки точності встановлення

$$\frac{n\mu^2}{\chi^2_{\alpha/2;n-2}} <= \mu^2 <= \frac{n\mu^2}{\chi^2_{1-\alpha/2;n-2}},$$

$$\frac{29*6,394^2}{45,722} <= \mu^2 <= \frac{29*6,394^2}{16,047},$$

$$\frac{1185,61}{45,722} <= \mu^2 <= \frac{1185,61}{16,047},$$

$$25,93 <= \mu^2 <= 73,88,$$

$$\sqrt{25,93} <= \mu <= \sqrt{73,88},$$

$$5,09 <= \mu <= 8,60.$$

екзаменаційних оцінок по шкалі EST

$$\frac{29*4,46^2}{45,722} <= \sigma_1^2 <= \frac{29*4,46^2}{16,047}; \quad 0,634*4,46^2 <= \sigma_1^2 <= 1,807*4,46^2;$$

$$12,61 <= \sigma_1^2 <= 35,94; \quad \sqrt{12.61} <= \sigma_1 <= \sqrt{35.94}; \quad 3,55 <= \sigma_1 <= 5.99$$

$$\sqrt{0,634}*1,87 <= \sigma_2 <= \sqrt{1,807}*1,87; \quad 1,49 <= \sigma_2 <= 2,51,$$

$$0,796*1,87 <= \sigma_3 <= 1,344*1,87; \quad 1,49 <= \sigma_3 <= 2,51,$$

$$0,796*1,76 <= \sigma_4 <= 1,344*1,76; \quad 1,40 <= \sigma_4 <= 2,36,$$

$$0,796*6,39 <= \sigma_5 <= 1,344*6,39; \quad 5,09 <= \sigma_5 <= 8,59,$$

$$0,796*2,37 <= \sigma_6 <= 1,344*2,37; \quad 1,89 <= \sigma_6 <= 3,18,$$

(5.6.69)

$$0,796*1,87 <= \sigma_7 <= 1,344*1,87; \quad 1,49 <= \sigma_7 <= 2,51,$$

$$0,796*2,74 <= \sigma_8 <= 1,344*2,74; \quad 2,18 <= \sigma_8 <= 3,68,$$

$$0,796*1,87 <= \sigma_9 <= 1,344*1,87; \quad 1,49 <= \sigma_9 <= 2,51,$$

$$0,796*5,04 <= \sigma_{10} <= 1,344*5,04; \quad 4,01 <= \sigma_{10} <= 6,77,$$

$$0,796*1,87 <= \sigma_{11} <= 1,344*1,87; \quad 1,49 <= \sigma_{11} <= 2,51,$$

$$0,796*6,22 <= \sigma_{12} <= 1,344*6,22; \quad 4,95 <= \sigma_{12} <= 8,36,$$

$$0,796*3,28 <= \sigma_{13} <= 1,344*3,28; \quad 2,61 <= \sigma_{13} <= 4,41,$$

$$0,796*1,76 <= \sigma_{14} <= 1,344*1,76; \quad 1,40 <= \sigma_{14} <= 2,36,$$

$$0,796*4,38 <= \sigma_{15} <= 1,344*4,38; \quad 3,49 <= \sigma_{15} <= 5,89,$$

$$0,796*2,17 <= \sigma_{16} <= 1,344*2,17; \quad 1,73 <= \sigma_{16} <= 2,92,$$

$$0,796*3,61 <= \sigma_{17} <= 1,344*3,61; \quad 2,87 <= \sigma_{17} <= 4,85,$$

$$0,796*2,46 <= \sigma_{18} <= 1,344*2,46; \quad 1,96 <= \sigma_{18} <= 3,31,$$

$$0,796*4,83 <= \sigma_{19} <= 1,344*4,83; \quad 3,84 <= \sigma_{19} <= 6,49,$$

$$0{,}796*1{,}76 <= \sigma_{20} <= 1{,}344*1{,}76; \qquad 1{,}40 <= \sigma_{20} <= 2{,}36,$$
$$0{,}796*1{,}87 <= \sigma_{21} <= 1{,}344*1{,}87; \qquad 1{,}49 <= \sigma_{21} <= 2{,}51\ ,$$
$$0{,}796*2{,}17 <= \sigma_{22} <= 1{,}344*2{,}17; \qquad 1{,}73 <= \sigma_{22} <= 2{,}92,$$
$$0{,}796*4{,}74 <= \sigma_{23} <= 1{,}344*4{,}74; \qquad 3{,}77 <= \sigma_{23} <= 6{,}37,$$
$$0{,}796*1{,}76 <= \sigma_{24} <= 1{,}344*1{,}76; \qquad 1{,}40 <= \sigma_{24} <= 2{,}36,$$
$$0{,}796*1{,}76 <= \sigma_{25} <= 1{,}344*1{,}76; \qquad 1{,}40 <= \sigma_{25} <= 2{,}36,$$
$$0{,}796*2{,}17 <= \sigma_{26} <= 1{,}344*2{,}17; \qquad 1{,}73 <= \sigma_{26} <= 2{,}92,$$
$$0{,}796*1{,}76 <= \sigma_{27} <= 1{,}344*1{,}76; \qquad 1{,}40 <= \sigma_{27} <= 2{,}36,$$
$$0{,}796*1{,}87 <= \sigma_{28} <= 1{,}344*1{,}87; \qquad 1{,}49 <= \sigma_{28} <= 2{,}51,$$
$$0{,}796*1{,}76 <= \sigma_{29} <= 1{,}344*1{,}76; \qquad 1{,}40 <= \sigma_{29} <= 2{,}36,$$
$$0{,}796*3{,}96 <= \sigma_{30} <= 1{,}344*3{,}96; \qquad 3{,}15 <= \sigma_{30} <= 5{,}32,$$
$$0{,}796*1{,}76 <= \sigma_{31} <= 1{,}344*1{,}76; \qquad 1{,}40 <= \sigma_{31} <= 2{,}36,$$
$$0{,}796*3{,}94 <= \sigma_{32} <= 1{,}344*3{,}94; \qquad 3{,}14 <= \sigma_{32} <= 5{,}30,$$
$$0{,}796*1{,}87 <= \sigma_{33} <= 1{,}344*1{,}87; \qquad 1{,}49 <= \sigma_{33} <= 2{,}51,$$
$$0{,}796*1{,}76 <= \sigma_{34} <= 1{,}344*1{,}76; \qquad 1{,}40 <= \sigma_{34} <= 2{,}36,$$
$$0{,}796*1{,}76 <= \sigma_{35} <= 1{,}344*1{,}76; \qquad 1{,}40 <= \sigma_{35} <= 2{,}36,$$
$$0{,}796*1{,}87 <= \sigma_{36} <= 1{,}344*1{,}87; \qquad 1{,}49 <= \sigma_{36} <= 2{,}51,$$
$$0{,}796*4{,}87 <= \sigma_{37} <= 1{,}344*4{,}87; \qquad 3{,}88 <= \sigma_{37} <= 6{,}54,$$
$$0{,}796*1{,}87 <= \sigma_{38} <= 1{,}344*1{,}87; \qquad 1{,}49 <= \sigma_{38} <= 2{,}51.$$

Як бачимо, верхня межа похибки у 8 балів стосується 5-го і 12-го студента; верхня межа в 6 балів стосується 10-го,19-го, 23-го і 37 студентів.

5.6.4. Аналіз коваріаційної та кореляційної матриць

При визначенні взаємного впливу різних характеристик педагогічного процесу слід використовувати достатньо ефективні статистичні підходи . Статистичний зв´язок між

змінними будемо досліджувати методом кореляційного аналізу.

Представимо коваріаційну матрицю K зрівноважених невідомих a_i формулою

$$K = M^2 = \mu^2 N^{-1}. \qquad (5.6.71)$$

			Коваріаційна	матриця	$K=N^{-1}\mu^2$			
1537,606379	7,125853016	-239,7560104	4,002890715	3,983988787	12,56720618	4,479995897	1,358748088	-101,7438459
7,125853016	16,31597094	-4,956495801	0,798187217	1,309820976	-11,6430937	0,604465252	-0,54035105	-2,897229286
-239,7560104	-4,956495801	53,92561124	-1,912785509	-1,62932282	-5,838409773	-0,371295478	0,761917965	7,482930465
4,002890715	0,798187217	-1,912785509	1,540515117	-0,20135463	0,154856331	0,324314497	-0,27706091	-0,89867571
3,983988787	1,309820976	-1,62932282	-0,20135463	5,77285122	-4,371508184	0,860679952	0,539166984	-2,833471473
12,56720618	-11,6430937	-5,838409773	0,154856331	-4,371508184	22,53564527	-0,145639162	-1,55968195	-1,759077204
4,479995897	0,604465252	-0,371295478	0,324314497	0,860679952	-0,145639162	3,531743749	-1,102949845	-4,498540203
1,358748088	-0,54035105	0,761917965	-0,27706091	0,539166984	-1,55968195	-1,102949845	1,292882737	0,602289023
-101,7438459	-2,897229286	7,482930465	-0,89867571	-2,833471473	-1,759077204	-4,498540203	0,602289023	24,91016158

Коваріація K_{ii} разом з дисперсіями $D_i = K_{ij}$ утворюють коваріаційну матрицю, яка складається з m рядків і m стовпців . В нашому випадку m=9

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & \dots & K_{1m} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & \dots & K_{2m} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & \dots & K_{3m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{m1} & K_{m2} & K_{m3} & \dots & K_{mm} \end{bmatrix} \qquad (5.6.72$$

Множення оберненої матриці N^{-1} на квадрат середньої квадратичної похибки одиниці ваги μ^2 проведено за комп´ютерною формулою

$$= \{(A66:I74)*O55\text{^}2\}\, F2,\ Ctrl + Shift + Enter, \qquad (5.6.73)$$

де діапазоном (A66:I74) позначено обернену матрицю нормальних рівнянь N^{-1}, чарунком O55 вказано місцеположення середньої квадратичної похибки одиниці ваги μ .

Коваріаційна матриця симетрична відносно головної діагоналі $K_{ij} = K_{ji}$. На головній діагоналі стоїть дисперсія ознак.

В першу чергу, коваріаційна матриця зрівноважених елементів корисна тим, що дає дисперсії коефіцієнтів побудованої математичної моделі. А взявши квадратний корінь із даних дисперсій, отримаємо стандарти σ_i (або середні квадратичні похибки коефіцієнтів побудованої математичної моделі).

Так, ми отримали

$= КОРЕНЬ(A85)\ Enter \quad \rightarrow 39.21232433 = \sigma_{a0}$,

$= КОРЕНЬ(B86)\ Enter \quad \rightarrow 4.039303275 = \sigma_{a1}$,

$= КОРЕНЬ(C87)\ Enter \quad \rightarrow 7.343405970 = \sigma_{a2}$,

$= КОРЕНЬ(D88)\ Enter \quad \rightarrow 1.241174894 = \sigma_{a3}$,

$= КОРЕНЬ(E89)\ Enter \quad \rightarrow 2.402675846 = \sigma_{a4}$,

$= КОРЕНЬ(F90)\ Enter \quad \rightarrow 4.747172344 = \sigma_{a5}$,

$= КОРЕНЬ(G91)\ Enter \quad \rightarrow 1.879293417 = \sigma_{a6}$,

$= КОРЕНЬ(H92)\ Enter \quad \rightarrow 1.137050015 = \sigma_{a7}$,

$= КОРЕНЬ(I93)\ Enter \quad \rightarrow 4.991008073 = \sigma_{a8}$.

Стандартні відхилення зрівноважених значень коефіцієнтів повністю автентичні з приведеними в табл.5.4.1 (друга строчка). Приведемо інтервальну оцінку точності

$0{,}796 * 39{,}21 <= \sigma_{a0} <= 1{,}344 * 39{,}21; \quad 31{,}21 <= \sigma_{a0} <= 52{,}70$,

$0{,}796 * 4{,}04 <= \sigma_{a1} <= 1{,}344 * 4{,}04; \quad 3{,}22 <= \sigma_{a1} <= 5{,}43$,

$0{,}796 * 7{,}34 <= \sigma_{a2} <= 1{,}344 * 7{,}34; \quad 5{,}82 <= \sigma_{a2} <= 9{,}86$,

$0{,}796 * 1{,}24 <= \sigma_{a3} <= 1{,}344 * 1{,}24; \quad 0.99 <= \sigma_{a3} <= 1{,}67$,

$0{,}796 * 2{,}40 <= \sigma_{a4} <= 1{,}344 * 2{,}40; \quad 1{,}91 <= \sigma_{a4} <= 3{,}22$,

$0{,}796 * 4{,}75 <= \sigma_{a5} <= 1{,}344 * 4{,}75; \quad 3{,}78 <= \sigma_{a5} <= 6{,}38$,

$0{,}796 * 1{,}88 <= \sigma_{a6} <= 1{,}344 * 1{,}88; \quad 1{,}50 <= \sigma_{a6} <= 2{,}53$,

$0{,}796 * 1{,}14 <= \sigma_{a7} <= 1{,}344 * 1{,}14; \quad 0{,}91 <= \sigma_{a7} <= 1{,}53$,

$0{,}796 * 5{,}00 <= \sigma_{a8} <= 1{,}344 * 5{,}00; \quad 3{,}98 <= \sigma_{a8} <= 6{,}72$.

Представимо коваріаційну матрицю для матриці X коефіцієнтів початкової системи
рівнянь, використавши вбудовану в MS EXCEL функцію «Сервис:Анализ данных:Ковариация»

Коваріаційна матриця K(Xij)								
	Столбец 1	*Столбец 2*	*Столбец 3*	*Столбец 4*	*Столбец 5*	*Столбец 6*	*Столбец 7*	*Столбец 8*
Столбец 1	0,650935							
Столбец 2	0,62329	0,562919						
Столбец 3	0,477196	0,447682	0,517654					
Столбец 4	0,660651	0,617999	0,479012	0,658491				
Столбец 5	0,664426	0,617492	0,474553	0,656923	0,638263			
Столбец 6	0,65541	0,612426	0,467147	0,644947	0,649867	0,643146		
Столбец 7	0,734328	0,684717	0,532372	0,715769	0,729207	0,735241	0,827919	
Столбец 8	0,636519	0,594144	0,457765	0,631122	0,630806	0,628049	0,700254	0,589242

Коваріація K_{ij} характеризує щільність зв´язку факторів і розкид. Щоб дістати характеристику, яка описує лише залежність між ознаками без розкиду, коваріацію ділять на

добуток середніх квадратичних відхилень $\sigma_{X_i}\sigma_{X_j}$, тобто

$$r_{ij} = K_{ij} / \left(\sigma_{X_i}\sigma_{X_j}\right). \qquad (5.6.74)$$

Безрозмірна величина r_{ij} називається коефіцієнтом кореляції ознак X_i і X_j . Вона характеризує щільність лінійної залежності цих ознак, змінюється в межах від -1 до +1. Якщо $r_{ij}>0$, то випадкові величини X_i і X_j зв´язані додатною кореляцією, тобто при зростанні однієї випадкової величини друга також має тенденцію до зростання.Якщо $r_{ij}<0$, то випадкові величини зв´язані від´ємною кореляцією (при зростанні однієї випадкової величини- друга зменшується).

Для будь-яких двох факторів X_i і X_j коефіцієнт кореляції має властивість

$$-1 \le r_{ij} \le +1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5.6.75)$$

Парні вибіркові коефіцієнти кореляції визначаються за формулою

$$r_{ij} = \sum_{l=1}^{n}\left(X_{il}-\overline{X}_i\right)\left(X_{jl}-\overline{X}_j\right) / \left(\sqrt{\sum_{l=1}^{n}\left(X_{il}-\overline{X}_i\right)^2 \sum_{l=1}^{n}\left(X_{jl}-\overline{X}_j\right)^2}\right)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5.6.76)$$

Вибіркова кореляційна матриця в загальному вигляді буде

$$[R] = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & \cdots & r_{1m} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & \cdots & r_{2m} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & \cdots & r_{3m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{m1} & r_{m2} & r_{m3} & \cdots & r_{mm} \end{bmatrix}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5.6.77)$$

Властивості кореляційної матриці:

- вона симетрична відносно головної діагоналі $\left(r_{ij}=r_{ji}\right)$;

-елементи головної діагоналі дорівнюють одиниці $\left(r_{ii}=1\left(i=1,2,\ldots,m\right)\right)$.

Кореляційна матриця для коефіцієнтів початкової системи рівнянь $\left\lfloor X \right\rfloor$ буде

Кореляційна матриця системи початкових рівнянь X

	Столбец 1	Столбец 2	Столбец 3	Столбец 4	Столбец 5	Столбец 6	Столбец 7	Столбец 8
Столбец 1	1	0,31835727	-0,061611418	0,183512877	0,753690358	0,27672723	0,439704044	0,32756921
Столбец 2	0,31835727	1	0,166722763	0,216998446	0,345964044	-0,036817127	0,063992219	-0,048131095
Столбец 3	-0,061611418	0,166722763	1	0,099941282	0,020248226	-0,026719455	0,090560639	0,075682513
Столбец 4	0,183512877	0,216998446	0,099941282	1	0,365308801	-0,136431967	-0,100781854	0,198175279
Столбец 5	0,753690358	0,345964044	0,020248226	0,365308801	1	0,306225931	0,486201157	0,364366275
Столбец 6	0,27672723	-0,036817127	-0,026719455	-0,136431967	0,306225931	1	0,631376931	0,527648579
Столбец 7	0,439704044	0,063992219	0,090560639	-0,100781854	0,486201157	0,631376931	1	0,330485672
Столбец 8	0,32756921	-0,048131095	0,075682513	0,198175279	0,364366275	0,527648579	0,330485672	1

Кореляційна матриця результатів педагогічного експерименту R(Y,X1,X2,X3,X4,X5,X6,X7,X8)

	Y	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8
	Столбец 1	Столбец 2	Столбец 3	Столбец 4	Столбец 5	Столбец 6	Столбец 7	Столбец 8	Столбец 9
Столбец 1	1								
Столбец 2	0,323592401	1							
Столбец 3	0,103017993	0,31835727	1						
Столбец 4	0,027413357	-0,061611418	0,166722763	1					
Столбец 5	-0,160412227	0,183512877	0,216998446	0,099941282	1				
Столбец 6	0,16061577	0,753690358	0,345964044	0,020248226	0,365308801	1			
Столбец 7	0,352719734	0,27672723	-0,036817127	-0,026719455	-0,136431967	0,306225931	1		
Столбец 8	0,511634281	0,439704044	0,063992219	0,090560639	-0,100781854	0,486201157	0,631376931	1	
Столбец 9	0,211627189	0,32756921	-0,048131095	0,075682513	0,198175279	0,364366275	0,527648579	0,330485672	1

2,520565168	-0,300645696	0,266850063	0,257280689	-1,710321069	0,188407423	-0,276858173	-0,296044435
-0,300645696	1,284312076	-0,251086901	-0,125660166	-0,336743381	-0,04544034	0,153279758	0,300220944
0,266850063	-0,251086901	1,114566642	-0,085592242	0,049228404	0,218761335	-0,307209146	-0,198725947
0,257280689	-0,125660166	-0,085592242	1,441769573	-0,816489851	0,341097548	0,351248826	-0,36813162
-1,710321069	-0,336743381	0,049228404	-0,816489851	3,147773661	-0,043164736	-0,7598741	-0,170916182
0,188407423	-0,04544034	0,218761335	0,341097548	-0,043164736	2,221045801	-1,140194061	-0,927443161
-0,276858173	0,153279758	-0,307209146	0,351248826	-0,7598741	-1,140194061	2,197034259	0,204115191
-0,296044435	0,300220944	-0,198725947	-0,36813162	-0,170916182	-0,927443161	0,204115191	1,683602683
	Обернена	кореляційна	матриця	Z=1/R			

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	-0,167097804	0,159208161	0,134961625	-0,607193246	0,079628821	-0,117649468	-0,143710378
2	-0,167097804	1	-0,20986294	-0,09234522	-0,167479647	-0,026904661	0,091249629	0,204167165
3	0,159208161	-0,20986294	1	-0,067520159	0,026282156	0,139039689	-0,196319169	-0,145071382
4	0,134961625	-0,09234522	-0,067520159	1	-0,383266724	0,190612735	0,197355184	-0,236284585
5	-0,607193246	-0,167479647	0,026282156	-0,383266724	1	-0,016324827	-0,288949188	-0,074244046
6	0,079628821	-0,026904661	0,139039689	0,190612735	-0,016324827	1	-0,51615674	-0,479610565
7	-0,117649468	0,091249629	-0,196319169	0,197355184	-0,288949188	-0,51615674	1	0,106129742
8	-0,143710378	0,204167165	-0,145071382	-0,236284585	-0,074244046	-0,479610565	0,106129742	1
	Частинні коефіцієнти кореляції			r ij =	zij/√(zii*zjj)			

На основі представлення коваріаційної та кореляційної матриці, були отримані результати

Таблиця 5.6.5. Основні критерії

det(Мкор)=	0,0667232	χікв р=	11,731211
		χікв кр=	41,337138
Не існує мультиколінеарність Фактори незалежні			
		t(0,05;30)=	2,0422724
		t7>tα найбільш суттєвий фактор	

	X0	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8
S(ai)=	39,21232	4,039303275	7,34340597	1,2411749	2,4026758	4,7471723	1,8792934	1,13705	4,9910081
t(ai)=	1,389672	1,422907972	0,708199333	-0,059469	-0,4024739	-1,4700076	0,0197502	2,2737537	0,4885205
Ккор(Y,Xi)=		0,323592401	0,103017993	0,0274134	-0,1604122	0,1606158	0,3527197	0,5116343	0,2116272
		c Інтерес	d Робота виклад	e Трудність	f Наука	g зв'яз. спец	h Моногр1	i Моногр2	j Наук. школа

При дослідженні зв´язку факторів багатовимірної моделі педагогічного експерименту недостатньо знайти вибіркову

кореляційну матрицю. Необхідно визначити частинні коефіцієнти кореляції.

Частинною кореляцією між ознаками X_i і X_j буде кореляційна залежність між цими ознаками при фіксованих значеннях інших ознак.

Формула частинного коефіцієнта кореляції між ознаками X_i і X_j має вигляд

$$r_{ij.12...m} = R_{ij} / \sqrt{R_{ii} Rjj}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5.6.78)$$

де $R_{ij}, R_{ii} Rjj$ - алгебраїчні доповнення , відповідно до елементів r_{ij}, r_{ii}, r_{jj} вибіркової кореляційної матриці.

Після визначення вибіркових частинних елементів кореляції необхідно перевірити гіпотезу про значущість кореляційного зв´язку між певними ознаками. Вводиться нульова гіпотеза H_0 про відсутність кореляційного зв´язку між ознаками і гіпотеза H_1 про наявність зв´язку між цими ознаками. Ці гіпотези перевіряються. Для цього обчислюється t-статистика

$$t_{ij} = r_{ij.12...m} \sqrt{\frac{n-m-1}{1-r^2_{ij.12...m}}}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5.6.79)$$

яка має розподіл Стьюдента з $k = n-m-1$ ступенями вільності, де n -число дослідів, m - порядок кореляційної матриці, що розглядається. Для перевірки нульової гіпотези за заданою надійною ймовірністю p і числом ступенів вільності k необхідно за таблицею розподілу Стьюдента знайти критичне значення $t_{p,k}$.

Якщо, $\left|t_{ij}\right| \geq t_{p,k}$, то нульву гіпотезу про відсутність кореляційного зв´язку між ознаками X_i і X_j слід відкинути, тобто із заданою надійністю Р можна вважати, що кореляційний зв´язок між ознаками X_i і X_j існує.

Формулу частинного коефіцієнта кореляції можна виразити не лише через алгебраїчні доповнення, а й через елементи матриці, оберненої до кореляційної матриці.

Якщо, чисельник і знаменник поділити на визначник кореляційної матриці, то частинний коефіцієнт кореляції можна представити у вигляді формули

$$r_{ij.12...m} = \frac{R_{ij}/|R|}{\sqrt{R_{ii}Rjj/|R|^2}} = \frac{z_{ij}}{\sqrt{z_{ii}z_{jj}}}, \qquad (5.6.80)$$

де z_{ij}, z_{ii}, z_{jj} - елементи матриці $\lfloor Z \rfloor$, оберненої до матриці $\lfloor R \rfloor$.

Так як обернена матриця може знаходитися за формулою

$$\left[R^{-1}\right] = \begin{bmatrix} \frac{R_{11}}{|R|} & \frac{R_{21}}{|R|} & \frac{R_{31}}{|R|} & \ldots & \frac{R_{m1}}{|R|} \\ \frac{R_{12}}{|R|} & \frac{R_{22}}{|R|} & \frac{R_{32}}{|R|} & \ldots & \frac{R_{m2}}{|R|} \\ \frac{R_{13}}{|R|} & \frac{R_{23}}{|R|} & \frac{R_{33}}{|R|} & \ldots & \frac{R_{m3}}{|R|} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{R_{1m}}{|R|} & \frac{R_{2m}}{|R|} & \frac{R_{3m}}{|R|} & \ldots & \frac{R_{mm}}{|R|} \end{bmatrix}, \qquad (5.6.81)$$

то $R_{ij}/|R|$ – елемент Z_{ij} оберненої матриці . Для симетричної матриці $Z_{ij}=Z_{ji}$.

Раціонально користуватися формулою частинного коефіцієнта кореляції, вираженого через елементи оберненої матриці, тому що в оболонці електронних таблиць можна знаходити кореляційну матрицю та оберену до неї.

5.7. Виключення з математичної моделі незначимих факторів

Приведемо таблицю коефіцієнтів множинної кореляції факторів.

Таблиця 5.7.1. Таблиця коефіцієнтів множинної кореляції факторів

№п/п	Xi	Фактори	$R(X_i)$
1	X7	Монографія 2	0,512
2	X6	Монографія 1	0,353
3	X1	Інтерес до вивчення дисципліни	0,324
4	X8	Наукова школа	0,212
5	X5	Зв´язок зі спеціальністю	0,161
6	X2	Оцінка студентами роботи викладача	0,103
7	X3	Трудність вивчення дисципліни	0,027
8	X4	Елементи наукового пошуку	0,160

Побудуємо математичну модель на основі перших трьох факторів.

Приведемо таблицю коефіцієнтів початкових рівнянь.

Таблиця 5.7.2. Таблиця коефіцієнтів початкових рівнянь

Оцінка EST=Y	X0	X1	X6	X7
100	1	5	5	5
90	1	5	5	5
90	1	5	5	5
100	1	5	5	5
89	1	4	5	4
89	1	5	5	5
95	1	5	5	5
100	1	5	5	5
90	1	5	5	5
89	1	4	5	0
100	1	5	5	5
80	1	4	0	0
89	1	4	5	4
90	1	5	5	5
100	1	5	5	5
90	1	5	5	5
100	1	4	5	5
100	1	5	4	5
77	1	5	4	0
77	1	5	5	5
100	1	5	5	5
100	1	5	5	5
90	1	4	5	4
100	1	5	5	5
100	1	5	5	5
100	1	5	5	5
100	1	5	5	5
100	1	5	5	5
100	1	5	5	5
85	1	4	5	5

90	1	5	5	5
90	1	4	5	5
86	1	5	5	5
86	1	5	5	5
100	1	5	5	5
90	1	5	5	5
95	1	5	5	5
100	1	5	5	5
3547	38	182	183	172

Матриця коефіцієнтів нормальних рівнянь матиме вигляд

Матриця коефіцієнтів нормальних рівнянь			
38	182	183	172
182	878	880	833
183	880	907	855
172	833	855	848

Обернена матриця при цьому буде

Обернена матриця			
4,382366377	-0,82275011	-0,19963453	0,120603015
-0,82275011	0,19628285	0,000144262	-0,026077757
-0,19963453	0,000144262	0,064677454	-0,024861148
0,120603015	-0,02607775	-0,02486114	0,027400159

Визначник оберненої матриці	
Δ=4,80873E-06	

Встановимо значення вектора вільних членів

YX0	YX1	YX6	YX7
100	500	500	500
90	450	450	450
90	450	450	450
100	500	500	500
89	356	445	356
89	445	445	445
95	475	475	475
100	500	500	500
90	450	450	450
89	356	445	0
100	500	500	500
80	320	0	0
89	356	445	356
90	450	450	450
100	500	500	500
90	450	450	450
100	400	500	500
100	500	400	500
77	385	308	0
77	385	385	385
100	500	500	500
100	500	500	500
90	360	450	360
100	500	500	500
100	500	500	500
100	500	500	500
100	500	500	500
100	500	500	500
100	500	500	500

85	340	425	425
90	450	450	450
90	360	450	450
86	430	430	430
86	430	430	430
100	500	500	500
90	450	450	450
95	475	475	475
100	500	500	500
3547	17023	17158	16237

Таким чином, вектор вільних членів буде

Вектор вільних членів	
3547	L0
17023	L1
17158	L6

В результаті рішення нормальних рівнянь, отримали

Вектор невідомих	
71,48012791	X0
2,07899786	X1
0,417373951	X6
2,18603544	X7

Таким чином, нами отримана математична модель у вигляді:

$$\widetilde{Y} = 71.480128 + 2.078998X_1 + 0.417374X_6 + 2.186035X_7. \quad (5.7.1)$$

За вбудованою в MS Excel функцією ЛИНЕЙН, ми отримали

X7	X6	X1	X0=1		
2,18603544	0,417373951	2,07899786	71,48012791	=ai	Коефіцієнти
1,032269785	1,585963307	2,762853478	13,0548239	стандарт S	ai=S√dii
0,275303983	6,236151774	#Н/Д	#Н/Д	R^2	m1=μ
4,3054077	34	#Н/Д	#Н/Д	Fстатистика	n-m-1
502,3066072	1322,246024	#Н/Д	#Н/Д	[(Y'-Ycp)^2]	[VV]Остаточна

	ФункціяЛИНЕЙНдля X7				
2,621969697	81,47424242	#Н/Д	#Н/Д	=ai	Коефіцієнти
0,733859185	3,466720766	#Н/Д	#Н/Д	стандарт S	ai=S√dii
0,261769637	6,116780543	#Н/Д	#Н/Д	R^2	m1=μ
12,76526597	36	#Н/Д	#Н/Д	Fстатистика	n-m-1
477,6124801	1346,940152	#Н/Д	#Н/Д	[(Y'-Ycp)^2]	[VV]Остаточна

	ФункціяЛИНЕЙНдляX6		
2,971340839	79,03275333	=ai	Коефіцієнти
1,313776715	6,418497928	стандарт S	ai=S√dii
0,12441121	6,66157687	R^2	m1=μ
5,115190636	36	Fстатистика	n-m-1
226,9948015	1597,55783	[(Y'-Ycp)^2]	[VV]Остаточна

	ФункціяЛИНЕЙНдляX1		
5,5	67	=ai	Коефіцієнти
2,680368445	12,88397745	стандарт S	ai=S√dii
0,104712042	6,736096793	R^2	m1=μ
4,210526316	36	Fстатистика	n-m-1
191,0526316	1633,5	[(Y'-Ycp)^2]	[VV]Остаточна

Висновки

При проведенні теоретичних і експериментальних досліджень отримані слідуючі результати.

1. Розроблені методологічні основи побудови математичної моделі в рамках роботи наукової школи.

Після здачі курсового екзамену по дисципліні «Економіко математичне моделювання» , було проведено анкетування з метою врахування думки студентів і вдосконалення роботи викладача. Студенти відповіли на 8 факторних ознак , на основі яких з'явилась можливість побудови регресійної моделі залежності якості засвоєння дисципліни в залежності від таких факторних ознак як інтерес до вивчення дисципліни, трудність вивчення дисципліни, зв'язок зі спеціальністю і т.і.

2. Приведена описова статистика матриці значень факторних ознак ,

де були встановлені по кожній із них середнє значення,стандартна похибка,медіана, мода, стандартне відхилення , дисперсія вибірки, ексцес, асиметричність, мінімум, максимум при рівні надійності 95%.

3.Порівнюючи результати екзамену на осонові цінки викладача з оцінками, виставленими комп'ютером, середній бал викладача склав 93,34 і комп'ютера, також, 93,34; стандартна похибка 1,13 бали і 0,67;медіана 92,5 і 94,4;мода 100 і 94,4; стандартне відхилення 7,0 і 4,1; дисперсія вибірки 49,3 і 17,2; ексцес – 0,37 і 4,15; асиметричність -0,66 і -1,76.

4.Приведені теоретичні основи обробки експериментальних даних.При цьому на базі факторних ознак формується система початкових рівнянь. Від системи початкових рівнянь проведений перехід до системи нормальних рівнянь , що дало можливість застосувати традиційну процедуру способу найменших квадратів і отримати математичну модель

………$Y' = 54.492X_0 + 5.747X_1 + 5.200X_2 - 0.074X_3 - 0.967X_4 - 6.978X_5 + 0.037X_6 + 2.585X_7 + 2.438X_8$.

5.Проведений контроль процедури зрівноваження, який засвідчив коректність виконання розрахунків.

6. Виконано дослідження матриці на невиродженість, де була доказана теорема: **Система рівнянь не має рішення в тому і тільки в тому випадку , коли визначник оберненої матриці нормальних рівнянь дорівнює абсолютному нулю. У всіх інших випадках система має рішення.**

7. Відображено дослідження коефіцієнта множинної кореляції.

8. Встановлено, що з надійністю 91% коефіцієнт детермінації статистично значимий і включені у регресію фактори достатньо пояснюють залежність показника.

9. Висвітлені надійні інтервали базисних даних та прогнозу. Доказується теорема 2 п'ятого розділу:

Якщо за істинну модель прийняти зрівноважену модель, то всі коефіцієнти моделі будуть значимі при коефіцієнті множинної детермінації $R^2=1$.

10. Розроблені критерії оцінювання знань студентів.

При традиційному оцінюванні знань студентів абсолютно відсутня інформація про точність з якою проведено таке оцінювання , тобто відсутня інформація про середню квадратичну похибку іспитової оцінки.

На основі розробленої математичної моделі базового курсу приводиться не лише середня квадратична похибка оцінювання знань студентів (по всій групі ,курсу, тощо) , але і індивідуальна середня квадратична похибка в оцінюванні знань кожного конкретного студента.

Такий підхід до оцінювання знань студентів нами розроблений вперше.

11.Проведений аналіз коваріаційної та кореляційної матриць, який дав можливість встановити повну оцінку точності зрівноважених елементів і виявити тісноту зв'язку окремих факторів з результуючою ознакою.

12.Проведено виключення з математичної моделі незначимих факторів.

Отримана математична модель:

$$Y' = 71.480 + 2.079X_1 + 0.417X_6 + 2.186X_7.$$

При включенні в математичну модель лише одного фактора X_7: $Y' = 81.474 + 2.621X_7$. При цьому середні квадратичні похибки коефіцієнтів $m_{x0}=3.466$, $m_{x7}=0.733$. При включенні в математичну модель X_6:$Y'=79.033+971X_6$; $m_{x0}=6.41$; $m_{x6}=1.31$.При включенні в математичну модель X_1:$Y'=67+5.5X_1$; $m_{x0}=12.88$; $m_{x1}=2.68$.

ЛІТЕРАТУРНІ ДЖЕРЕЛА

1. Андрощук Л.М. Побудова і дослідження математичної моделі якості засвоєння базової дисципліни методом статистичних випробувань Монте Карло. Апроксимація поліномом першого степеня. Модель ППП 81-95.МЕГУ, Рівне, 2009,-32 с.
2.Бугір М.К.Теорія ймовірності та математична статистика: Підручники & Посібники, Тернопіль,1998,-176 с.
3. Васильченко І.П., Васильченко З.М. Фінансова математика. Навч. Посібник.-К.:Кондор, 2007.-184 с.
4. Гласс Дж., Стэнли Дж. Статистические методы в педагогике и психологии. М.:Прогресс, 1976, -495 с.
5. Казаков В.А. Самостоятельная работа студентов:учебное пособие.-К.:УМК ВО.- 1989,-252 с.
6. Кремер Н.Ш.,Путко Б.А.Эконометрика.:Учебник для Вузов./Под ред. Проф. Н.Ш.Кремера.-М.: ЮНИТИ – ДАНА, 2003, - 311 с.
7. Літнарович Р.М. Теоретико-методологічні аспекти і базові принципи функціонування наукової школи в рамках професійної освіти. Монографія. МЕГУ, Рівне, 2009, - 383 с.
8.Літнарович Р.М.Побудова і дослідження істинної моделі якості засвоєння базової дисципліни. Апроксимація поліномом першого степеня. МЕГУ, Рівне, 2009,-32 с.
9. Ржевський С .В., Александрова В.М. Дослідження операцій. К.: Академвидав, 2006, - 560 с.
10. Сидоренко Е.В. Методы математической обработки в психологии.- СПб.: ООО «Речь», 2003.- 350 с.
11. Тихонов И.И. Методы научной организации и управления в учебном процессе.- М.: Знание,1976,-42 с.
12. Толбатов Ю.А. Економетрика. Тернопіль:Підручники і посібники, 20087, - 288 с.

ЛІТНАРОВИЧ РУСЛАН МИКОЛАЙОВИЧ ,
кандидат технічних наук, доцент

ТЕОРЕТИКО-МЕТОДОЛОГІЧНІ ОСНОВИ ПОБУДОВИ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ БАЗОВОЇ ДИСЦИПЛІНИ В РАМКАХ РОБОТИ НАУКОВОЇ ШКОЛИ

Частина 5

Наукове видання

Комп'ютерний набір, верстка, редагування
і макетування та дизайн в редакторі
Microsoft ® Office ® Word 2003 Р.М.Літнарович

33027 Рівне , Україна
Вул..С.Дем'янчука, 4, корпус 1
Телефон : (+00380) 362 23 – 73 – 09
Факс :(+00380) 362 23 – 01 – 86
E-mail:mail@regi.rovno.ua