МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
МІЖНАРОДНИЙ ЕКОНОМІКО-ГУМАНІТАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ АКАДЕМІКА С.ДЕМ'ЯНЧУКА

Р.М.Літнарович

КОНСТРУЮВАННЯ І ДОСЛІДЖЕННЯ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ

ПОЛІНОМІАЛЬНА АПРОКСИМАЦІЯ

ЧАСТИНА 2

Рівне, 2009

УДК 51-7:519.87

Літнарович Р.М. Конструювання і дослідження математичних моделей.Поліноміальна апроксимація . Частина 2. МЕГУ, Рівне, 2009, -36 с.

Рецензенти:

В.Г.Бурачек, доктор технічних наук, професор
Є.С.Парняков, доктор технічних наук, професор
В.О.Боровий, доктор технічних наук, професор

Відповідальний за випуск: Й.В. Джунь, доктор фізико-математичних наук, професор

Дослідження проведені в рамках роботи наукової школи МЕГУ

Вперше отримана формула розрахунку середньої квадратичної похибки зрівноваженої функції з врахуванням коефіцієнтів математичної моделі при поліноміальній апроксимації поліномом третього степеня.

Вперше формулюється і доказується теорема, яка дає можливість поширити оцінку точності на математичні моделі поліноміальної апроксимації будь-якого степеня.

Для студентів , аспірантів і пошукувачів вчених ступеней факультету Кібернетики МЕГУ.

Litnarovich R.M. Constructing and research of mathematical models.Polinomial'na approximation . Part 2. IEHU, Rivne, 2009 -36 s.

The formula of calculation of middle quadratic error of the balanced function is first got taking into account the coefficients of mathematical model during polinomial'niy approximation by the polynomial of the third degree.

A theorem which enables to spread the estimation of exactness on the mathematical models of polinomial'noy approximation of any degree is first formulated and finished telling.

For students, graduate students and seekers scientists of degree department of Cybernetics iEHU.

Зміст

П Е Р Е Д М О В А

В даній роботі автором вперше розроблена формула оцінки точності побудованих математичних моделей поліноміальної апроксимації за способом найменших квадратів з врахуванням точності визначення коефіцієнтів моделі.

Розроблена методика для оцінки точності зрівноваженої функції при побудові математичної моделі поліномом третього степеня.

На основі вперше сформульованої і доказаної теореми відкривається можливість поширити оцінку точності зрівноваженої функції на поліноми будь-якого порядку.

Всі теоретичні розробки підтверджені практичними розрахунками на основі комп'ютерного аналізу.

Створений автором розрахунковий файл в MS EXCEL дає можливість не тільки проконтролювати результати розрахунків але і поставити науково-дослідну роботу майбутніх магістрів-інформатиків по конструюванню математичних моделей складних природних і соціальних явищ , технологічних процесів, психологічних та педагогічних досліджень.

При конструюванні математичної моделі в діапазоні від експериментальних (емпіричних) даних до істинної моделі, побудованої за способом найменших квадратів, розроблені автором методи конструювання дають можливість проводити підстройку в межах діапазону абсолютних похибок і за межами діапазону.

Для студентів, магістрантів, аспірантів та пошукувачів вчених ступенів.

1. Постановка проблеми та її зв'язок з важливими науковими і практичними завданнями

В [4] реалізована формула оцінки точності функції зрівноважених величин у вигляді формули

$$\frac{1}{P_\varphi} = \varphi Q \varphi^T, \qquad (1)$$

де $\frac{1}{P_\varphi}$ - обернена вага зрівноваженої функції за способом найменших квадратів; φ - значення коефіцієнтів початкових рівнянь функції; φ^T – транспонована матриця коефіцієнтів : Q- обернена матриця коефіцієнтів нормальних рівнянь.

При цьому спочатку знаходиться допоміжна матриця

$$Q' = \varphi Q, \qquad (2)$$

а після построчно знаходиться матриця

$$\frac{1}{P_\varphi} = Q' \varphi^T. \qquad (3)$$

Проблемі контролю оцінки точності функції зрівноважених величин присвячується дана робота.

2. Аналіз останніх досліджень і публікацій, де започатковано розв'язання даної проблеми

Для випадку поліному першого степеня

$$Y' = a + bX \qquad (4)$$

контрольна формула існує [5,с.39]

$$my' = \sqrt{m_b^{\,2}\left(x - \frac{[x]}{n}\right)^2 + m_{\frac{[y]}{n}}^{\,2}}, \qquad (5)$$

де my' – середня квадратична похибка зрівноваженої функції y'; m_b – середня квадратична похибка коефіцієнта b; n – число пар факторних і результуючих ознак; []- Гаусове позначення сум.

Приймаючи до уваги, що вага арифметичної середини дорівнює n, а середня квадратична похибка арифметичної середини $\frac{[y]}{n}$ буде

$$m_{\frac{[y]}{n}} = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n-2} \cdot \frac{1}{n}}. \qquad (6)$$

$$\varepsilon = y' - y, \qquad (7)$$

Де y' і y – зрівноважене і незрівноважене значення відповідно.

За формулою (5) підраховується середня квадратична похибка зрівноваженої функції для всіх випадків повного рівняння прямої. Із формули видно, що середня квадратична похибка функції, зрівноваженої за способом найменших квадратів, при прямолінійній залежності досягає найменшого значення в точці з абсцисою $\frac{[y]}{n}$, тобто в середній точці інтервалу експериментальних визначень.

В обидві сторони від середини інтервалу похибка функції зростає.

Формула (5) дає можливість обмежити використання зрівноваженої функції таким інтервалом, в межах якого її середня квадратична похибка не перевищує заданого наперед значення.

Зона розсіювання зрівноваженої функції обмежується кривими

$$\varphi(y) = bx + a \pm \sqrt{m_b{}^2\left(x - \frac{[x]}{n}\right)^2 + m^2_{\frac{[y]}{n}}}\ , \qquad (8).$$

які проходять через точки

$$\left(x = \frac{[x]}{n};\ y = \frac{y_n}{n} \pm \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n(n-2)}}\right)\ . \qquad (9)$$

Дотичні до цих кривих у вказаних точках проходять під кутом до осі абсцис (рис.1).

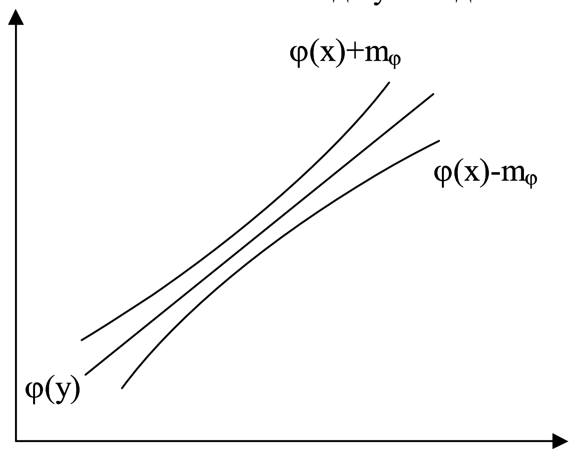


Рис.1. Зона розсіювання функції $\varphi(x) = bx + a$

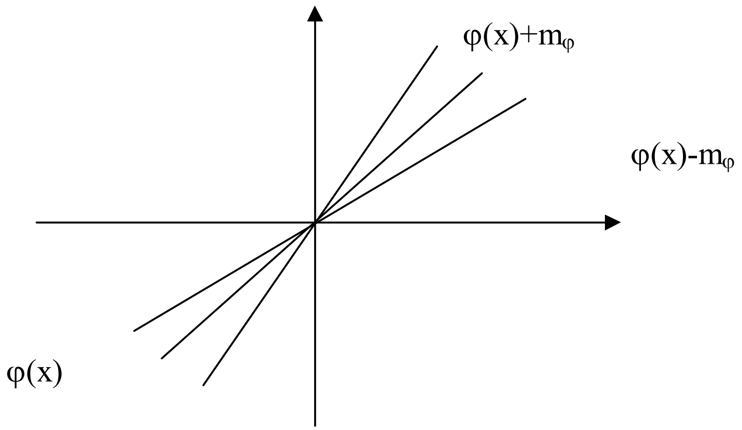


Рис. 2. Зона розсіювання функції $\varphi(x) = bx$

Значення аргумента, який відповідає наперед заданому значенню середньої квадратичної похибки, визначається за формулою

$$x = \frac{1}{m_b}\sqrt{m_\varphi^2 - m_{\frac{[Y]}{n}}{}^2} + \frac{[x]}{n}\ . \qquad (10)$$

Для неповного рівняння прямої

$$\varphi(x) = \frac{[yx]}{[x^2]}x = bx\ . \qquad (11).$$

Середня квадратична похибка зрівноваженої функції виражається формулою

$$m_\varphi = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n-1}\cdot\frac{x^2}{[x]}} = m_b x\ . \qquad (12).$$

Із цієї формули слідує, що середня квадратична похибка неповного рівняння прямої зростає пропорційно значенню абсциси в обидві сторони від точки (x = 0, y = o). В точці (0; 0) $m_\varphi = 0$. Зона розсіювання в цьому випадку обмежується двома прямими, які проходять через точку (0; 0) arctg ($b \pm m_b$). (рис. 2)

Для поліному другого порядку

$$y = ax^2 + bx + c\ , \qquad (13),$$

зрівноважене рівняння буде

$$y' = \varphi(x) = ax^2 + bx + c\ . \qquad (14)$$

При цьому контролем служить формула [5,с.76]

$$m_\varphi = \sqrt{\frac{m_a^2\left(x^2-\frac{[x^2]}{n}\right)^2 + m_b^2\left(x-\frac{[x]}{n}\right)^2 + m^2_{\frac{[y]}{n}} + }{+2\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n-3}\frac{([x][x^2]-n[x^3])(x^2-\frac{[x^2]}{n})(x-\frac{[x]}{n})}{S}}}\quad, \qquad (15)$$

де

$$S = n([x^2][x^4]-[x^3][x^3]) + [x]([x^2][x^3]-[x][x^4]) +$$
$$+[x^2]([x][x^3]-[x^2][x^2]), \qquad (16)$$

$$m^2_{\frac{[y]}{n}} = \frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n(n-3)}\quad. \qquad (17)$$

3. Виділення невирішених раніше частин загальної проблеми, яким присв'ячена дана робота

При цьому оставалося відкритим питання контролю для випадку поліному третього степеня і взагалі поліному степеня n.

Замітимо, що вбудовані статистичні функції в MS Excel дають крім знаходження коефіцієнтів лише середню квадратичну похибку одиниці ваги μ і середні квадратичні похибки знайдених коефіцієнтів $m_{a0}, m_{a1}, m_{a2}, ..., m_{an}$. Середні квадратичні похибки зрівнова-жених функцій там не розраховуються.

4. Формулювання цілей роботи (постановка задачі)

Необхідно отримати контрольну формулу оцінки точності зрівноваженої функції для поліному третього степеня і, взагалі, поліному степеня n.

5. Виклад основного матеріалу дослідження з повним обґрунтуванням нових результатів

Для поліному третього степеня

$$y' = ax^3 + bx^2 + cx + d \qquad (18)$$

запишемо систему нормальних рівнянь у символах Гауса

$$\begin{aligned}
&[x^6]a + [x^5]b + [x^4]c + [x^3]d - [xy^3] = 0,\\
&[x^5]a + [x^4]b + [x^3]c + [x^2]d - [xy^2] = 0,\\
&[x^4]a + [x^3]b + [x^2]c + [x]d \ - [xy] = 0\quad,\\
&[x^3]a + [x^2]b + [x\,]c + n \qquad - [x\,] = 0\quad.
\end{aligned} \qquad (19)$$

Представимо матрицю коефіцієнтів нормальних рівнянь

$$N = \begin{bmatrix} [x^6] & [x^5] & [x^4] & [x^3] \\ [x^5] & [x^4] & [x^3] & [x^2] \\ [x^4] & [x^3] & [x^2] & [x\,] \\ [x^3] & [x^2] & [x\ \,] & n \end{bmatrix}\quad. \qquad \{20)$$

Таблиця 1. Коефіцієнти нормальних рівнянь

	$x^3]a$	$x^2]b$	$x]c$	$x^0]d$	a
$[x^3$	$[x^6]a$	$[x^5]b$	$[x^4]c$	$[x^3]d$	a
$[x^2$	$[x^5]a$	$[x^4]b$	$[x^3]c$	$[x^2]d$	b
$[x$	$[x^4]a$	$[x^3]b$	$[x^2]c$	$[x\ ]d$	c
$[x^0$	$[x^3]a$	$[x^2]b$	$[x\ ]c$	n	d

Обернена матриця

$$\underset{4x4}{Q} = N^{-1} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & Q_{14} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} & Q_{24} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} & Q_{34} \\ Q_{41} & Q_{42} & Q_{43} & Q_{44} \end{bmatrix} \qquad (21)$$

При цьому обернені ваги

$$\frac{1}{P_a} = Q_{11} = \frac{A_{11}}{D}\ ;\ \frac{1}{P_b} = Q_{22} = \frac{A_{22}}{D}\ ;\ \frac{1}{P_c} = Q_{33} = \frac{A_{33}}{D}\ ;$$

$$\frac{1}{P_d} = Q_{44} = \frac{A_{44}}{D},\ \frac{1}{P_{ab}} = Q_{12} = \frac{A_{12}}{D};\ \frac{1}{P_{ac}} = Q_{13} = \frac{A_{13}}{D}\ ; \qquad (22)$$

$$\frac{1}{P_{ad}} = Q_{13} = \frac{A_{13}}{D};\ \frac{1}{P_{bc}} = Q_{23} = \frac{A_{23}}{D}\ ;\ \frac{1}{P_{bd}} = Q_{24} = \frac{A_{24}}{D}\ ;$$

$$\frac{1}{P_{cd}} = Q_{34} = \frac{A_{34}}{D},$$

де A_{ij} - алгебраїчні доповнення визначника D.

При цьому визначник D матриці коефіцієнтів нормальних рівнянь буде

$$D = \begin{vmatrix} [x^6] & [x^5] & [x^4] & [x^3] \\ [x^5] & [x^4] & [x^3] & [x^2] \\ [x^4] & [x^3] & [x^2] & [x\ ] \\ [x^3] & [x^2] & [x\ ] & n \end{vmatrix}. \qquad (23)$$

Виразимо алгебраїчні доповнення в частинних похідних

$$A_{11} = \begin{vmatrix} [x^4] & [x^3] & [x^2] \\ [x^3] & [x^2] & [x\ ] \\ [x^2] & [x\ ] & n \end{vmatrix}. \qquad (24)$$

При цьому

$$\left[\frac{\partial a}{\partial y}\right] = \frac{A_{11}}{D}. \qquad (25)$$

$$A_{12} = \begin{vmatrix} [x^5] & [x^4] & [x^3] \\ [x^3] & [x^2] & [x\ ] \\ [x^2] & [x\ ] & n \end{vmatrix}, \qquad (26)$$

$$\left[\frac{\partial a}{\partial y}\cdot\frac{\partial b}{\partial y}\right] = \frac{A_{12}}{D}, \qquad (27)$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} [x^5] & [x^4] & [x^3] \\ [x^4] & [x^3] & [x^2\ ] \\ [x^2] & [x\ ] & n \end{vmatrix}, \qquad (28)$$

$$\left[\frac{\partial a}{\partial y}\cdot\frac{\partial c}{\partial y}\right] = \frac{A_{13}}{D}, \qquad (29)$$

$$A_{14} = \begin{vmatrix} [x^5] & [x^4] & [x^3] \\ [x^4] & [x^3] & [x^2\ ] \\ [x^3] & [x^{\ 2}\ ] & [\ x\ ] \end{vmatrix}, \qquad (30)$$

$$\left[\frac{\partial a}{\partial y}\cdot\frac{\partial d}{\partial y}\right] = \frac{A_{14}}{D}, \qquad (31)$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} [x^6] & [x^4] & [x^3] \\ [x^4] & [x^2] & [x\ ] \\ [x^3] & [x\ ] & n \end{vmatrix}, \qquad (32)$$

$$\left[\frac{\partial b}{\partial y}\right] = \frac{A_{22}}{D}. \qquad (33)$$

$$A_{23} = \begin{vmatrix} [x^6] & [x^4] & [x^3] \\ [x^5] & [x^3] & [x^2] \\ [x^3] & [x^2] & n \end{vmatrix} , \qquad (34)$$

$$\left[\frac{\partial b}{\partial y} \cdot \frac{\partial c}{\partial y}\right] = \frac{A_{23}}{D} , \qquad (35)$$

$$A_{24} = \begin{vmatrix} [x^6] & [x^4] & [x^3] \\ [x^5] & [x^3] & [x^2] \\ [x^4] & [x^2] & [x] \end{vmatrix} , \qquad (36)$$

$$\left[\frac{\partial b}{\partial y} \cdot \frac{\partial d}{\partial y}\right] = \frac{A_{24}}{D} , \qquad (37)$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} [x^6] & [x^5] & [x^3] \\ [x^5] & [x^4] & [x^2] \\ [x^3] & [x^2] & n \end{vmatrix} , \qquad (38)$$

$$\left[\frac{\partial c}{\partial y}\right] = \frac{A_{33}}{D} , \qquad (39)$$

$$A_{34} = \begin{vmatrix} [x^6] & [x^5] & [x^3] \\ [x^5] & [x^4] & [x^2] \\ [x^4] & [x^3] & [x] \end{vmatrix} , \qquad (40)$$

$$\left[\frac{\partial c}{\partial y} \cdot \frac{\partial d}{\partial y}\right] = \frac{A_{34}}{D} , \qquad (41)$$

$$A_{44} = \begin{vmatrix} [x^6] & [x^5] & [x^4] \\ [x^5] & [x^4] & [x^3] \\ [x^4] & [x^3] & [x^2] \end{vmatrix} , \qquad (42)$$

$$\left[\frac{\partial d}{\partial y}\right] = \frac{A_{44}}{D} . \qquad (43)$$

Слід відмітити, що виразами A_{ij} відмічені мінори, а не алгебраїчні доповнення.

Теорема. Якщо знаходиться середня квадратична похибка зрівноваженої функції через середні квадратичні похибки знайдених коефіцієнтів поліноміальної апроксимації, то знаки мінорів при значеннях X в непарних степенях подвоєних добутків відповідних мінорів на факторні ознаки слід змінювати на протилежні.

Таким чином, для поліному третього степеня середня квадратична похибка зрівноваженої функції буде

$$m_{y'_3} = \sqrt{\begin{aligned} & m_a^2 (x^3)^2 + m_b^2 (x^2)^2 + m_c^2 (x^1)^2 + m_d^2 + \\ & + 2\mu^2 \frac{(-A_{12} X^5 + A_{13} X^4 - A_{14} X^3 - A_{23} X^3 + A_{24} X^2 - A_{34} X)}{D} \end{aligned}} \cdot \qquad (44)$$

На основі формули (44) розписується контрольна формула середньої квадратичної похибки зрівноваженої функції n-го порядку.

Таблиця 2. Вихідні дані істинної моделі

x	1,6	2	2,1	2,3	2,5	2,8	2,9	3	3,1	3,3

y	18,021	13,864	13,167	11,986	10,898	8,949	8,101	7,108	5,939	2,965

Таблиця 3. Вихідні дані спотвореної моделі

x	1,441	1,955	2,044	2,465	2,498	2,674	2,892	3,073	3,114	3,444
y	18,021	13,864	13,167	11,986	10,898	8,949	8,101	7,108	5,939	2,965

Таблиця 4. Вихідні дані зрівноваженої моделі

x	1,441	1,955	2,044	2,465	2,498	2,674	2,892	3,073	3,114	3,444
y	17,941	14,019	13,463	10,983	10,789	9,6951	8,1708	6,7063	6,3462	2,8842

Таблиця 5. Матриця коефіцієнтів нормальних рівнянь N

4978,293	1649,133	557,212	192,944
1649,133	557,212	192,944	68,908
557,212	192,944	68,908	25,6
192,944	68,908	25,6	10

Визначник матриці коефіцієнтів нормальних рівнянь

D=17,2765289

Таблиця 6.Обернена матриця Q

2,467	-18,082	42,3898	-31,51994
-18,08169	133,32	-314,57	235,50231
42,38982	-314,57	747,693	-564,3324
-31,51994	235,5	-564,332	430,14375

Визначник оберненої матриці становить 0,05788.

Вектор вільних членів нормальних рівнянь

1493,171
577,883
234,661
100,998

Значення шуканих коефіцієнтів

a=D1/D=	-1,6078703
b=D2/D=	11,077542
c=D3/D=	-31,244768
d=D4/D=	44,775883

Чітким доказом теореми є виділення відповідним кольором значень обернених ваг і порівняння їх з відповідними елементами оберненої матриці Q_{ij}.

Значення обернених ваг

A11/D=	42,62165	A13/D=	42,38982
A22/D=	2303,276	A14/D=	31,51994
A33/D=	12917,542	A23/D=	314,5701
A44/D=	7431,3910	A24/D=	235,5023
A12/D=	18,08169	A34/D=	564,3324

Середня квадратична похибка одиниці ваги μ

$$\mu = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n-k}}, \qquad (45)$$

де $[\varepsilon\varepsilon]$ - сума квадратів відхилень зрівноваженої функції $y_i^{'}$ від вихідних значень y_i

$$\varepsilon = y_i^{'} - y_i \qquad (46)$$

n – число значень x та y, k – число визначаємих коефіцієнтів (степінь поліному плюс одиниця).

І в нашому випадку отримали

Середня квадратична похибка одиниці ваги	
μ=	0,581831
Середня квадратична похибка коефіцієнта а	
ma=	0,913868
Се редня квадратична похибка коефіцієнта в	
mb=	6,71802
Середня квадратична похибка коефіцієнта с	
mc=	15,90956
Середня квадратична похибка коефіцієнта d	
md=	12,06711

Контрольне визначення виконаємо за допомогою функції ЛИНЕЙН:

a	b	**c**	d		
-1,60787	11,07754	-31,244768	44,77588	a,b,c,d	Коефіц.
0,913868	6,71802	15,909564	12,06711	m_a, m_b, m_c, m_d	ai=S√dii
0,98826	0,581831	#Н/Д	#Н/Д	R^2	μ
168,351	6	#Н/Д	#Н/Д	Fкритерій	n-m-1
170,9741	2,031161	#Н/Д	#Н/Д	[(Y'-Ycp)^2]	[εε]

Матриця φ

1	1,441	2,077	2,99356662
1	1,955	3,821	7,46785942
1	2,044	4,177	8,53759789
1	2,465	6,078	14,982690
1	2,498	6,239	15,584529
1	2,674	7,148	19,111739
1	2,892	**8,366**	24,198732
1	3,073	9,446	29,032107
1	**3,114**	**9,697**	30,197666
1	3,444	11,859	40,837656

Допоміжна матриця φ*Q=Q'

11,62471	-13,2434	4,925899	-0,59941
-8,54744	11,85062	-5,04402	0,677261
-8,60955	11,69607	-4,897	0,648478
-2,06715	2,234561	-0,66389	0,052939
-1,34483	1,243657	-0,23875	-0,00486
2,362058	-3,76812	1,880736	-0,28897
5,364267	-7,65333	3,44058	-0,48616
5,183386	-7,12868	3,073667	-0,41536
4,686795	-6,37842	2,713773	-0,36063
-7,65224	11,14703	-5,191	0,776708

Середні квадратичні похибки зрівноваженої функції

0,574624
0,369228
0,356629
0,260197
0,257783
0,265865
0,289511
0,290448
0,290938
0,550219

Комп'ютерна формула контрольного визначення

=(O1*$AA$17+M1*$AA$18+K1*$AA$19+$AA$20+(2*$R$22^2*(-N1*$D$60+M1*$D$64-L1*$D$69-L1*$D$73+K1*$D$77-I1*$D$81)/$N$21))^0,5 . (47)

Результат контрольного розрахунку

0,574624
0,369228
0,356629
0,260197
0,257783
0,265865
0,289511
0,290448
0,290938
0,550219

Що підтверджує коректність проведених досліджень і справедливість теореми.

Встановлений коефіцієнт детермінації R^2=0.98826 говорить про високу адекватність побудованої математичної моделі експериментальним значенням.

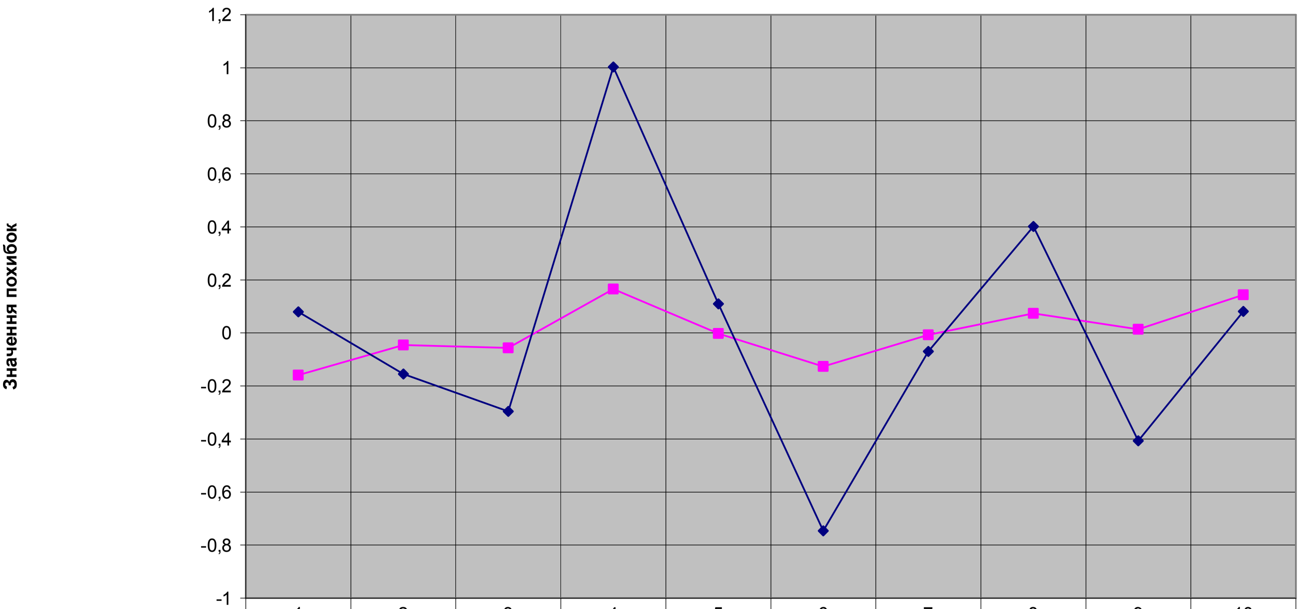
Аналіз моделі за критерієм Фішера-Снедекора

F(0,05;3;6)= 4,757063
Fрозр.= 168,351
F>F(0,05;3;6)
Модель адекватна експериментальним даним

Аналіз моделі за критерієм Стьюдента

Статистична значимість коефіцієнтів .забезпечується 84%діапазоном ймовірності Р			
ta=	1,759412		
tb=	1,648929	t(0,05;6)=	2,446912
tc=	1,963898	t(0,1;6)=	1,94318
td=	3,710571	t(0,16;6)=	1,603251

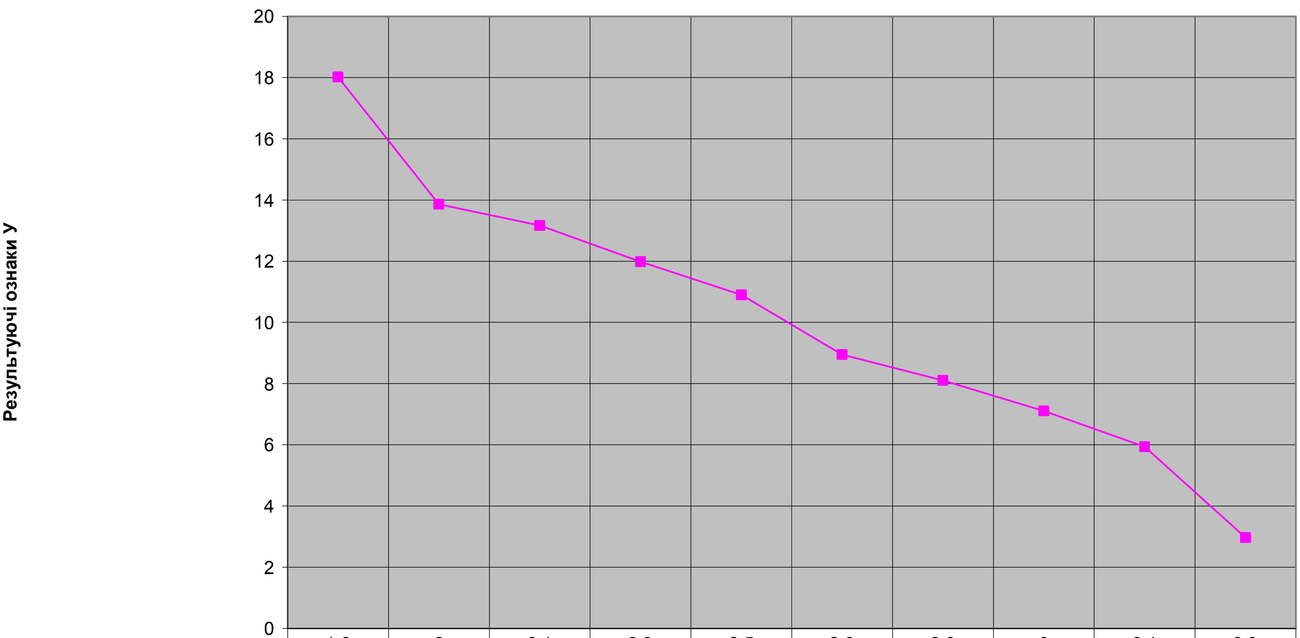
Істинні і абсолютні похибки моделі



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Істинні похибки	-0,1587821	-0,045	-0,0561678	0,165	-0,0021603	-0,126	-0,0075611	0,073	0,01404196	0,14366001
Абсолютні похибки	0,07964116	-0,1552337	-0,296131	1,00290971	0,10940819	-0,7460848	-0,0698399	0,40169385	-0,4072054	0,0808417

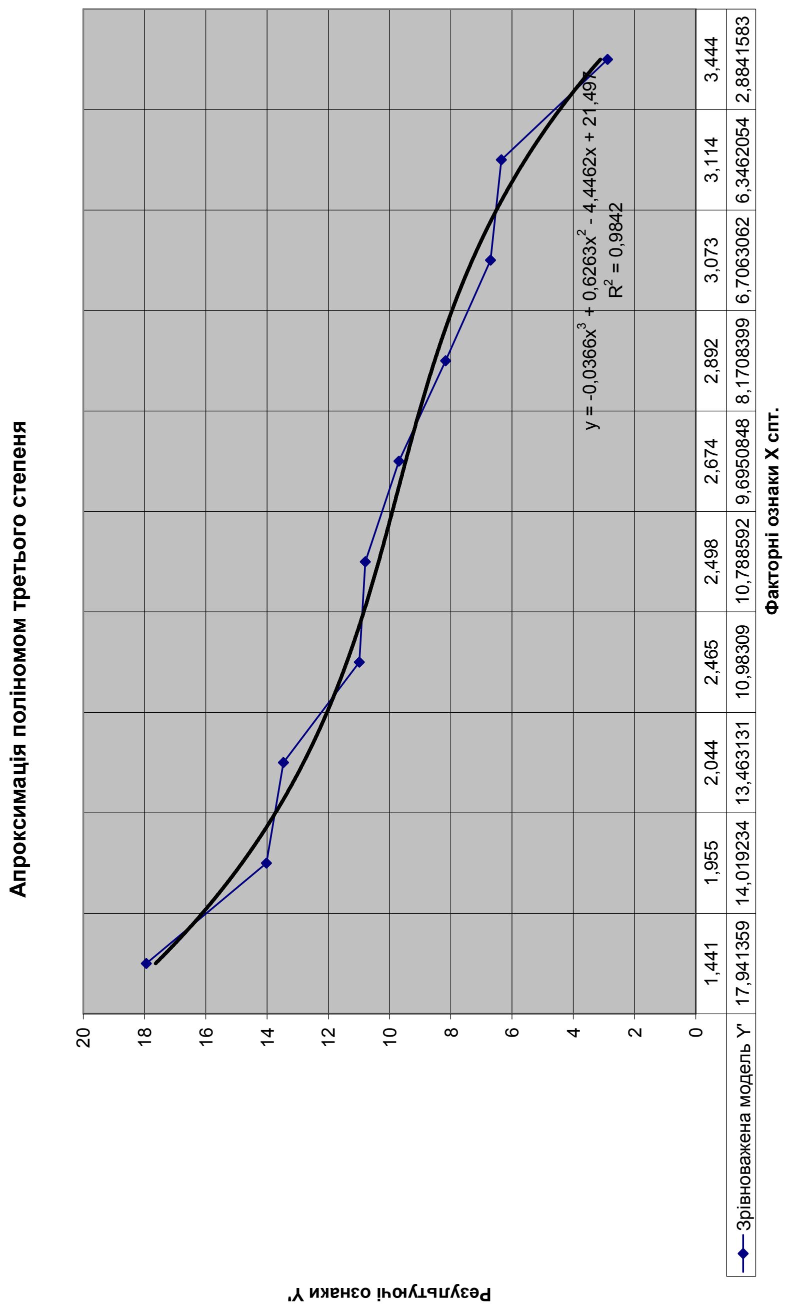
Номера експериментальних визначень

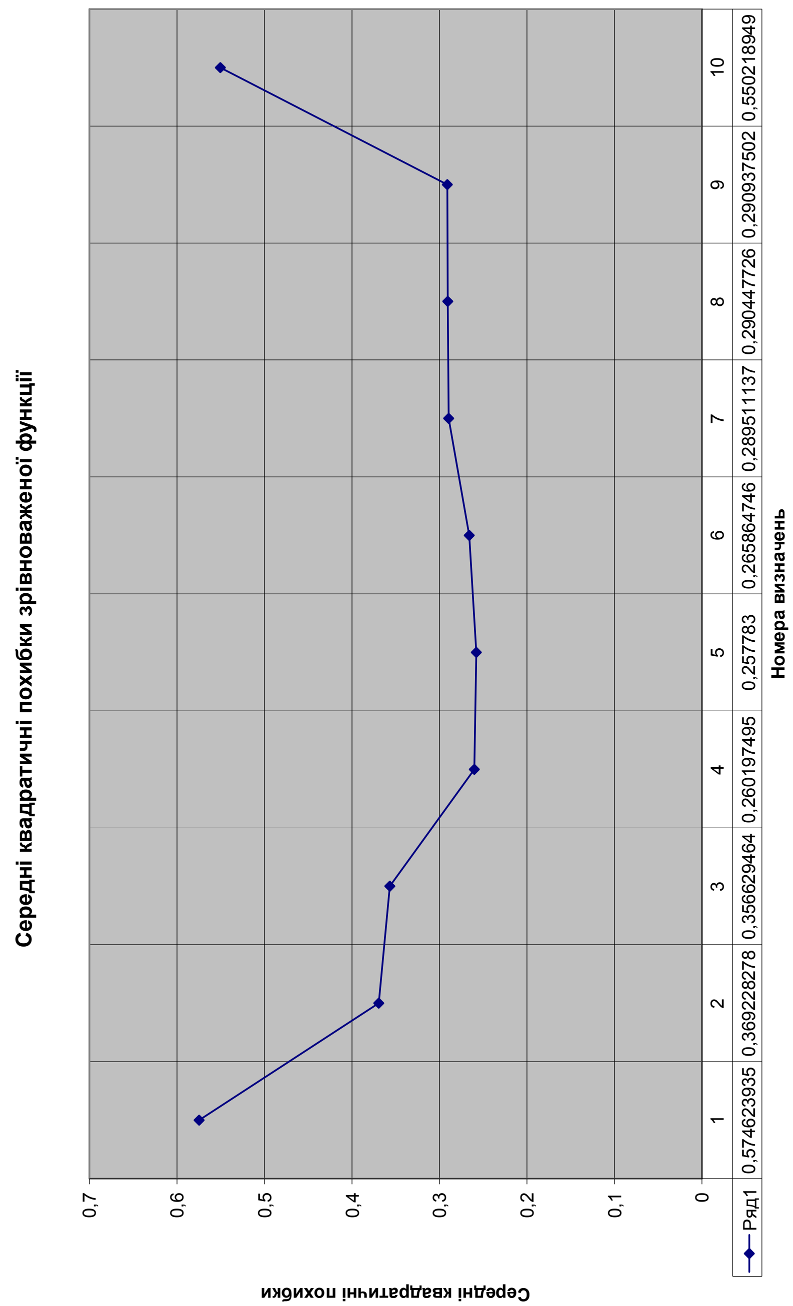
Істинна модель

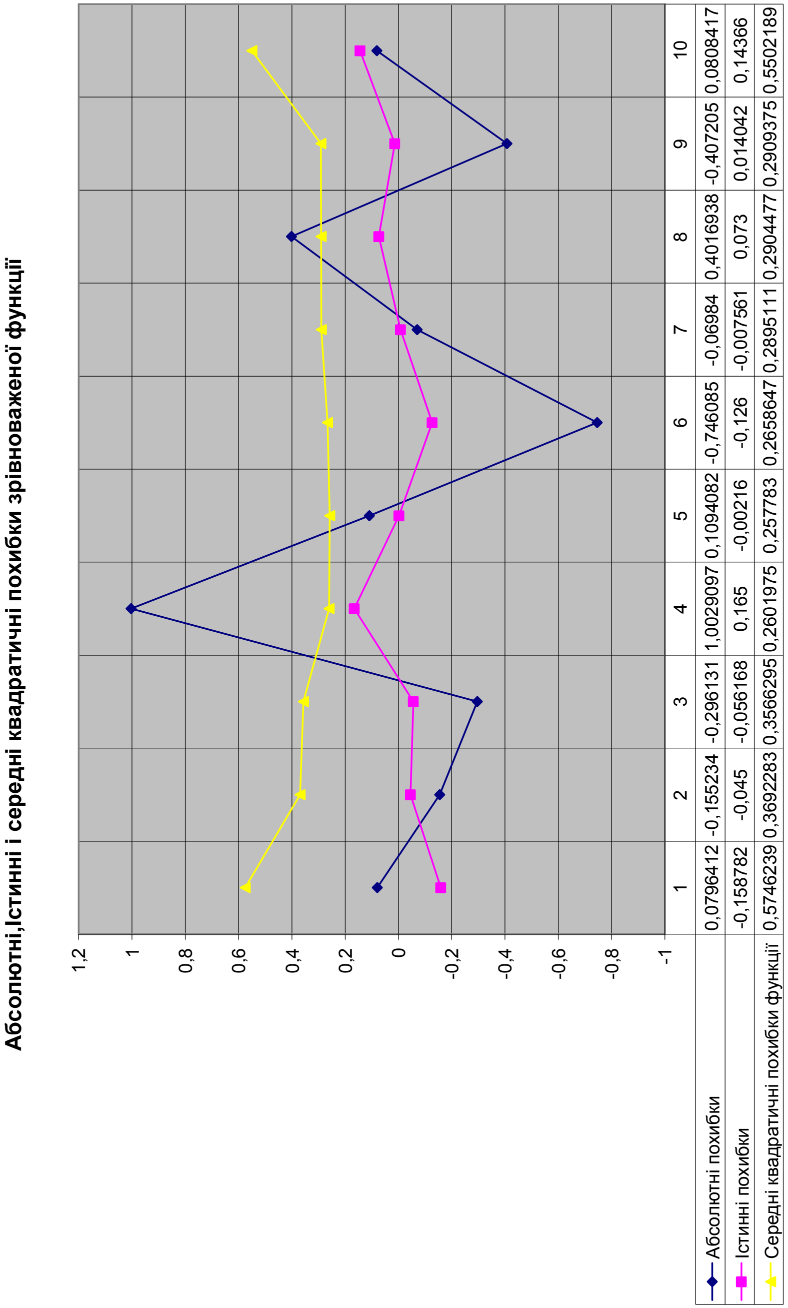


	1,6	2	2,1	2,3	2,5	2,8	2,9	3	3,1	3,3
Істинні значення моделі	18,021	13,864	13,167	11,986	10,898	8,949	8,101	7,108	5,939	2,965

Факторні ознаки X


Апроксимація поліномом третього степеня
Результуючі ознаки Y'
Факторні ознаки X спт.
$y = -0,0366x^3 + 0,6263x^2 - 4,4462x + 21,497$
$R^2 = 0,9842$
20 18 16 14 12 10 8 6 4 2 0
1,441 1,955 2,044 2,465 2,498 2,674 2,892 3,073 3,114 3,444
Зрівноважена модель Y' 17,941359 14,019234 13,463131 10,98309 10,788592 9,6950848 8,1708399 6,7063062 6,3462054 2,8841583


Середні квадратичні похибки зрівноваженої функції
Середні квадратичні похибки
Номера визначень
0,7 0,6 0,5 0,4 0,3 0,2 0,1 0
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
Ряд1 0,574623935 0,369228278 0,356629464 0,260197495 0,257783 0,265864746 0,289511137 0,290447726 0,290937502 0,550218949



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Абсолютні похибки	0,0796412	-0,155234	-0,296131	1,0029097	0,1094082	-0,746085	-0,06984	0,4016938	-0,407205	0,0808417
Істинні похибки	-0,158782	-0,045	-0,056168	0,165	-0,00216	-0,126	-0,007561	0,073	0,014042	0,14366
Середні квадратичні похибки функції	0,5746239	0,3692283	0,3566295	0,2601975	0,257783	0,2658647	0,2895111	0,2904477	0,2909375	0,5502189

ВИСНОВКИ

1.По способу найменших квадратів побудована математична модель у вигляді емпіричної формули

$$Y' = -1.6078703X^3 + 11.077542X^2 - 31.244768X + 44.775883\,.$$

2. Отримана контрольна формула середньої квадратичної похибки зрівноваженої функції для поліному третього степеня

$$m_{y_3'} = \sqrt{\begin{array}{l} m_a^2 (x^3)^2 + m_b^2 (x^2)^2 + m_c^2 (x^1)^2 + m_d^2 + \\ + 2\mu^2 \dfrac{(-A_{12}X^5 + A_{13}X^4 - A_{14}X^3 - A_{23}X^3 + A_{24}X^2 - A_{34}X)}{D} \end{array}} \cdot \qquad (44)$$

3. Дана формула дає можливість поширити її на оцінку точності поліномом будь-якого степеня.

4. Згідно діаграми №1 встановлено, що абсолютні похибки зрівноваженої моделі мають тенденцію уподібнення до істинних похибок, які виражаються в дещо зменшеному вигляді.

5. Згідно діаграми 5 графічно встановлена оптимальність оцінки точності зрівноваженої функції за способом найменших квадратів.

6. Діаграма 4 графічно ілюструє оптимальність апроксимації емпіричних даних кубічним поліномом.

При цьому слід зауважити, що масштабування діаграм виконується комп'ютером на свій розсуд без виводу коефіцієнтів масштабування. Тому, формули які виписуються на діаграмах без знання коефіцієнтів масштабування слід використовувати дуже обережно.

7. Результати проведених досліджень проконтрольовані функцією MS Excel, «ЛИНЕЙН» ,яка є досить потужним і коректним апаратом досліджень і показана повна автентичність отриманих результатів.

8. Застосований автором метод статистичних випро-

бувань Монте Карло дає слушну нагоду провести виключно важливі дослідження порівняльного аналізу істинних похибок математичної моделі і абсолютних похибок , отриманих із результатів зрівноваження.

9. Хоча вбудовані функції MS EXCEL не дають можливості отримати середню квадратичну похибку зрівноваженої функції ,запропонована автором формула дає змогу продовжити дослідження за межами формул MS EXCEL.

10. Виходом в світ даної наукової праці можна вважати завершеним ансамбль побудови математичної моделі поліномом будь-якого степеня (це не стосується множинної регресії).

11. Приймаючи до уваги, що вдосконаленню немає меж, а науки завжди океан, для аспірантів і магістрів-інформатиків ми б запропонували розробити методику введення ваг в емпіричні дані за результатами попереднього зрівноваження з подальшим повторним зрівноваженням, повторною оцінкою точності і порівняльним аналізом результатів.

12. Але, вважаючи на великий інтерес автора до наукових досліджень взагалі і до даних досліджень особливо, автор залишає за собою право перегорнути слідуючу сторінку і продовжити дані дослідження.

ЛІТЕРАТУРНІ ДЖЕРЕЛА

1.Бугір М.К. Математика для економістів.Посібник.-К.:Видавничий центр «Академія»,2003,-520 с.

2.Дьяконов В.П. Справочник по алгоритмам и программам на языке БЕЙСИК для персональних ЭВМ.-М. Наука, 1989,-240 с.

3.Ермаков С.М.,Михайлов Г.А. Курс статистического моделирования.-М.: Наука, 1976,- 319 с.

4. Літнарович Р.М. Побудова і дослідження економіко-математичної моделі поліномом m-го порядку.Вісник МЕГУ.Збірник наукових праць.Серія: Системні науки та кібернетика. Випуск 1.МЕГУ, Рівне,2009.- с.41-51.

5. Літнарович Р.М. Застосування способу найменших квадратів до обробки матеріалів психологічних і педагогічних експериментів. Частина 2. Курс лекцій. МЕГУ, Рівне, 2007.-110 с.

6.Ромакин М.И. Математический аппарат оптимизационных задач.-М.:Статистика, 1975,112 с.

7. Ржевский С.В.,Александрова В.М. Дослідження операцій. Підручник.- К.:” Академвидав“, 2006,-560 с.

8. Программирование, отладка и решение задач на ЭВМ единой серии. Язык Фортран. Учебн. Пособие для вузов/И.А.Кудряшов,Н.Х.Кушнер, Л.В. Петрова,Н.А.Силов; Под ред.И.А.Кудряшева.-Л.:Энергоатомиздат,1988,-208 с.

9. Тойберт П. Оценка точности результатов измерений: пер. с нем. – М.: Энергоатомиздат, 1988,-88 с.

10. Толбатов Ю.А. Економетрика. Тернопіль.Видавництво «Підручники і посібники »,2008,-288 с.

Додатки

Додаток 1.Генерування псевдовипадкових чи-сел, під порядкування їх нормальному закону розподілу і розрахунок істинних похибок

№	ξ_i	$\xi_{cp.}$	$\Delta'_i = \xi_i - \xi_{cp}$	Δ'^2_i	$\Delta_i = \Delta'_i k$	Δ^2_i
1	0,18	0,474	-0,294	0,086436	-0,1588	0,02521176
2	0,39	0,474	-0,084	0,007056	-0,045	0,00205810
3	0,37	0,474	-0,104	0,010816	-0,0562	0,00315482
4	0,78	0,474	0,306	0,093636	0,165	0,02731187
5	0,47	0,474	-0,004	1,6E-05	-0,0022	0,00000467
6	0,24	0,474	-0,234	0,054756	-0,126	0,01597130
7	0,46	0,474	-0,014	0,000196	-0,0076	0,00005717
8	0,61	0,474	0,136	0,018496	0,073	0,00539494
9	0,5	0,474	0,026	0,000676	0,01404	0,00019718
10	0,74	0,474	0,266	0,070756	0,14366	0,02063820
11	4,74	Суми	0	0,34284	0,0E+00	0,10000000
12	A	B	C	D	E	F
13						
14	Генер	Серд	Попередні	Квадрат	Істинні	Квадрат

Додаток 2. Побудова спотвореної моделі

№	Уістн.	X істин.	Істин.пох	Хспотв
1	0	8,803	-0,1588	1,441
2	11,25	8,957	-0,045	1,955
3	22,5	8,851	-0,0562	2,044
4	33,75	8,598	0,165	2,465
5	45	8,274	-0,0022	2,498
6	56,25	8,011	-0,126	2,674
7	67,5	7,904	-0,0076	2,892
8	78,75	8,057	0,073	3,073
9	84,375	8,264	0,01404	3,114
10	90	8,575	0,14366	3,444
11	489,375	84,294	0,0E+00	25,600
12	**H**	**G**	**E**	**I**

Додаток 3. Розрахункова таблиця

№	Хспотв.	X0	X^2	X^3	X^4	X^5	X^6
1	1,441	1	2,077	2,99356662	4,314	6,218	8,961
2	1,955	1	3,821	7,46785942	14,597	28,532	55,769
3	2,044	1	4,177	8,53759789	17,449	35,664	72,891
4	2,465	1	6,078	14,9826896	36,936	91,058	224,481
5	2,498	1	6,239	15,5845293	38,928	97,235	242,878
6	2,674	1	7,148	19,1117393	51,098	136,616	365,259
7	2,892	1	8,366	24,1987316	69,993	202,452	585,579
8	3,073	1	9,446	29,0321069	89,229	274,240	842,863
9	3,114	1	9,697	30,1976661	94,037	292,835	911,899
10	3,444	1	11,859	40,8376556	140,631	484,285	1667,714
11	25,600	10	68,908	192,944142	557,212	1649,133	4978,293
12	**I**	**J**	**K**	**L**	**M**	**N**	**O**

Продовження розрахункової таблиці

№	YX	YX^2	YX^3	Yзрівн.	ε=Yi-Yз	εε
1	25,97219	37,43158	53,94706	17,941	0,07964	0,0063427
2	27,09904	52,9687	103,5344	14,019	-0,15523	0,0240975
3	26,91114	55,00185	112,4146	13,463	-0,29613	0,0876935
4	29,54864	72,84518	179,5825	10,983	1,00291	1,0058279
5	27,22146	67,99484	169,8402	10,789	0,10941	0,0119702
6	23,92625	63,96975	171,031	9,6951	-0,74608	0,5566425
7	23,43165	67,77461	196,0339	8,1708	-0,06984	0,0048776
8	21,84608	67,14285	206,3602	6,7063	0,40169	0,1613579
9	18,4943	57,59201	179,3439	6,3462	-0,40721	0,1658162
10	10,21045	35,16133	121,0836	2,8842	0,08084	0,0065354
11	234,661	577,883	1493,171	101,00	0,000	2,031
12	**P**	**Q**	**R**	**S**	**T**	**U**

Додаток 4. Розрахунок визначників

№	M	N	O	P
16	4978,293	1649,133	557,212	192,944
17	1649,133	557,212	192,944	68,908
18	557,212	192,944	68,908	25,6
19	192,944	68,908	25,6	10
20				
21	D=	17,2765289		
22				
23	1493,171	1649,133	557,212	192,944
24	577,883	557,212	192,944	68,908
25	234,661	192,944	68,908	25,600
26	100,998	68,908	25,600	10
27				
28	D1=	-27,7784179		
29				
30	4978,293	1493,171	557,212	192,944
31	1649,133	577,883	192,944	68,908

32	557,212	234,661	68,908	25,6
33	192,944	100,998	25,6	10
34				
35	D2=	191,38147		
36				
37	4978,293	1649,133	1493,171	192,944
38	1649,133	557,212	577,883	68,908
39	557,212	192,944	234,661	25,6
40	192,944	68,908	100,998	10
41				
42	D3=	-539,8011		
43				
44	4978,293	1649,133	557,212	1493,171
45	1649,133	557,212	192,944	577,883
46	557,212	192,944	68,908	234,661
47	192,944	68,908	25,6	100,998
48				
49	D4=	773,5718		

Додаток 5. Розрахунок мінорів

№	C	D	E	F	G	H
36				4978,293	1649,133	557,212
37	A44=	7431,3910		1649,133	557,212	192,944
38				557,212	192,944	68,908
39						
40				4978,293	557,212	192,944
41	A22=	2303,276		557,212	68,908	25,6
42				192,944	25,600	10
43						
44	A33=	12917,542		4978,293	1649,133	192,944
45				1649,133	557,212	68,908
46				192,944	68,908	10
47						
48				557,212	192,944	68,908

49	A11=	42,62165		192,944	68,908	25,6
50				68,908	25,6	10

№	C	D	E	F	G	H
59				1649,133	557,212	192,944
60	A12=	312,3888		192,944	68,908	25,6
61				68,908	25,600	10
62						
63				1649,133	557,212	192,944
64	A13=	732,349		557,212	192,944142	68,908
65				68,908	25,600	10
66						
67						
68				1649,133	557,212	192,944
69	A14=	544,5552		557,212	192,944142	68,908
70				192,944142	68,908	25,600
71						
72				4978,293	557,212	192,944142
73	A23=	5434,68		1649,133	192,944142	68,908
74				192,944142	25,600	10
75						
76				4978,293	557,212	192,944142
77	A24=	4068,662		1649,133	192,944142	68,908
78				557,212	68,908	25,600
79						
80				4978,293	1649,133	192,944142
81	A34=	9749,705		1649,133	557,212	68,908
82				557,212	192,944142	25,600

Додаток 6. Матриця φ

№	W	X	Y	Z
37	1	1,441	2,077	2,99356662
38	1	1,955	3,821	7,46785942
39	1	2,044	4,177	8,53759789
40	1	2,465	6,078	14,982690
41	1	2,498	6,239	15,584529
42	1	2,674	7,148	19,111739

43	1	2,892	**8,366**	24,198732
44	1	3,073	9,446	29,032107
45	1	**3,114**	**9,697**	30,197666
46	1	3,444	11,859	40,837656

Додаток 7. Матриця коефіцієнтів нормальних рівнянь N

№	M	N	O	P
16	4978,293	1649,133	557,212	192,944
17	1649,133	557,212	192,944	68,908
18	557,212	192,944	68,908	25,6
19	192,944	68,908	25,6	10

Додаток 8.Обернена матриця $Q=N^{-1}$

№	R	S	T	U
37	2,467	-18,082	42,3898	-31,51994
38	-18,08169	133,32	-314,57	235,50231
39	42,38982	-314,57	747,693	-564,3324
40	-31,51994	235,5	-564,332	430,14375
41		Визначник=	0,05788	

Додаток 9. Вільні члени нормальних рівнянь

№	R
16	1493,171
17	577,883
18	234,661
19	100,998

Додаток 10. Розрахунок коефіцієнтів апроксимуючого поліному

№	M	N
51	a=D1/D=	-1,6078703
52	b=D2/D=	11,077542
53	c=D3/D=	-31,244768
54	d=D4/D=	44,775883
55		

56	Y=aX^3+bX^2+cX+d

Нами виведена формула за результатами теоретичних досліджень:

$$y' = -1{,}6078703x^3 + 11{,}077542x^2 - 31{,}244768x + 44{,}775883.$$

Додаток 11. Контроль зрівноваження

[yy]-	α[yx³]-	b[yx²]	- c[yx] -	d[y]	=	2,0311614
					[εε] =	2,031161
					Різниця=	0,000000

Додаток 12. Оцінка точності зрівноважених елементів

	R	№	
Середня	квадратична похибка одиниці ваги		
μ=	0,104398507	22	
		23	
Середня	квадратична похибка коефіцієнта а		
ma=	1,94076E-06	25	
Се редня квадратична похибка коефіцієнта в			
mb=	0,000266322	28	
Середня квадратична похибка коефіцієнта с			
mc=	0,009917489	30	
Середня квадратична похибка коефіцієнта d			
md=	0,096703497	32	

Додаток 13. Допоміжна матриця φ*Q=Q'

№	AB	AC	AD	AE
44	11,62471	-13,2434	4,925899	-0,59941
45	-8,54744	11,85062	-5,04402	0,677261
46	-8,60955	11,69607	-4,897	0,648478
47	-2,06715	2,234561	-0,66389	0,052939
48	-1,34483	1,243657	-0,23875	-0,00486
49	2,362058	-3,76812	1,880736	-0,28897
50	5,364267	-7,65333	3,44058	-0,48616

51	5,183386	-7,12868	3,073667	-0,41536
52	4,686795	-6,37842	2,713773	-0,36063
53	-7,65224	11,14703	-5,191	0,776708

Додаток 14.Середні квадратичні похибки зрівноваженої функції mφ=

0,574624
0,369228
0,356629
0,260197
0,257783
0,265865
0,289511
0,290448
0,290938
0,550219

Додаток 15. Квадрати середніх квадратичних похибок коефіцієнтів

№		AA
17	m_a^2	0,835155
18	m_b^2	45,1318
19	m_c^2	253,1142
20	m_d^2	145,6152

Додаток 16. Обернені ваги коефіцієнтів

№	Q	R
66	A11/D=	42,62165
67	A22/D=	2303,276
68	A33/D=	12917,542
69	A44/D=	7431,3910
70	A12/D=	18,08169
71	A13/D=	42,38982
72	A14/D=	31,51994
73	A23/D=	314,5701
74	A24/D=	235,5023
75	A34/D=	564,3324

Додаток 17. Контрольні визначення функцією «ЛИНЕЙН»

a	b	c	d		
-1,60787	11,07754	-31,244768	44,77588	a,b,c,d	Коефіц.
0,913868	6,71802	15,909564	12,06711	стандарт S	ai=S√dii
0,98826	0,581831	#Н/Д	#Н/Д	R^2	μ
168,351	6	#Н/Д	#Н/Д	Fкритерій	n-m-1
170,9741	2,031161	#Н/Д	#Н/Д	[(Y'-Ycp)^2]	[εε]

Додаток 18. Контрольні визначення середньої квадратичної похибки зрівноваженої функції mφ=

0,574624
0,369228
0,356629
0,260197
0,257783
0,265865
0,289511
0,290448
0,290938
0,550219

Додаток 18. Обернені ваги зрівноваженої функції

1/P=Q'*φ™
0,975381
0,402714
0,375700
0,199992
0,196297
0,208799
0,247592
0,249197
0,250038
0,894289

Л і т н а р о в и ч Руслан Миколайович,

доцент,кандидат технічних наук

КОНСТРУЮВАННЯ І ДОСЛІДЖЕННЯ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ

ПОЛІНОМІАЛЬНА АПРОКСИМАЦІЯ

ЧАСТИНА 2

Наукове видання

Комп'ютерний набір, верстка і макетування та дизайн в редакторі Microsoft®Office® Word 2003 Р.М. Літнарович

Міжнародний економіко-гуманітарний університет

ім.акад. Степана Дем'янчука

Кафедра математичного моделювання

33027,м.Рівне,Україна
Вул.акад. С.Дем'янчука,4, корпус 1
Телефон:(+00380) 362 23-73-09
Факс:(+00380) 362 23-01-86
E-mail:mail@regi.rovno.ua