Секція: **МАТЕМАТИКА**

УДК 517.9

Даценюк В. – ст. гр. ПМ-21

Тернопільський державний технічний університет імені Івана Пулюя

ТРЕТЯ КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ В КРУЗІ (СТАЦІОНАРНИЙ ВИПАДОК)

Науковий керівник: к.ф.-м.н., доц. Габрусєв В.Г.

Зафіксуємо на площині полярну систему координат (O, r, φ) і розглянемо круг з центром в точці O і радіусом R. Нехай між кругом і зовнішнім середовищем відбувається теплообмін за законом:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = -\sigma\left[u(r,\varphi) - u_0(r,\varphi)\right], \ r = R, \ -\pi \le \varphi \le \pi, \quad (1)$$

тут: σ – коефіцієнт теплообміну, $u(r,\varphi)$ – температура точок круга, $u_0(r,\varphi)$ – температура точок зовнішнього середовища.

Як відомо функція $u(r,\varphi)$ повинна бути розв’язком рівняння теплопровідності [1], яке в стаціонарному випадку при відсутності джерел та стоків тепла, в полярних координатах, матиме вид:

$$r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (2)$$

Отже нам потрібно розв’язати задачу математичної фізики для рівняння (2) з граничною умовою (1), тобто третю крайову задачу для рівняння теплопровідності.

Розв’язання проведемо методом Фур’є [1] (відокремлення змінних) шукаючи розв’язок у вигляді:

$$u(r,\varphi) = F(\varphi)\,p(r), \quad (3)$$

що приводить до розгляду двох звичайних диференціальних рівнянь $F''(\varphi) + k^2 F(\varphi) = 0$ та $r^2 p''(r) + rp'(r) - k^2 p(r) = 0$, тут k – ціле число.

Маючи на увазі періодичність та обмеженість функції $u(r,\varphi)$, що визначається рівністю (3), для $0 \le r \le R$ одержимо:

$$u(r,\varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\right) r^n \quad (4)$$

Вимагаючи для (4) виконання умови (1) будемо мати:

$$\frac{\sigma A_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\right)\left(nR^{n-1} + \sigma R^n\right) = \sigma T_0, \ -\pi \le \varphi \le \pi, \text{ тут } T_0(\varphi) = u_0(r,\varphi)\big|_{r=R}.$$

Вважаючи, що $T_0(\varphi)$ задовольняє умовам розвинення функції в ряд Фур’є, одержимо:

$$A_n = \frac{\sigma}{\pi\left(nR^{n-1} + \sigma R^n\right)} \int_{-\pi}^{\pi} T_0(\varphi)\cos n\varphi \, d\varphi, \ n = 0,1,..$$

$$B_n = \frac{\sigma}{\pi\left(nR^{n-1} + \sigma R^n\right)} \int_{-\pi}^{\pi} T_0(\varphi)\sin n\varphi \, d\varphi, \ n = 1,2,..$$

Література

1. Овчинников П., и др. Высшая математика, – К., “Вища школа”, 1989. – 559с.