

УДК 539.3

Р. Кушнір, докт. фіз.-мат. наук; А. Ясінський, докт. фіз.-мат. наук

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України, Україна

ОПТИМІЗАЦІЯ ТЕРМОНАПРУЖЕНОГО СТАНУ ТІЛА З МЕТОЮ ЗАПОБІГАННЯ ЙОГО ПОШКОДЖЕННЯ

Резюме. Сформульовано математичну постановку та побудовано алгоритми числового розв'язування одно- та двовимірних задач оптимального за швидкістю керування нагріванням термочутливих тіл канонічної форми. Визначено керування (температуру нагрівального середовища, тепловий потік на одній із граничних поверхонь), яке за мінімальний час переводить тіло з початкового теплового стану у кінцевий, що характеризується заданою середньоінтегральною температурою. При цьому враховано обмеження як на функцію керування, так і на максимальне значення інтенсивності дотичних напружень чи накопиченої пластичної деформації зсуву.

Ключові слова: оптимальне керування, температурні напруження, обернена задача, пружнопластичний стан.

R. Kushnir, A. Yasinsky

OPTIMIZATION OF THE THERMOSTRESSED STATE IN THE BODY FOR PREVENTION OF ITS DAMAGE

The summary. A mathematical statement has been formulated and algorithms for solving one- and two-dimensional problems on fast operation optimal heating control of thermosensitive canonical form bodies has been developed. We have determined the control (the surrounding temperature at one of the boundary surfaces or heat flux at one of the boundary surfaces) which in a minimal time carries the body from the initial thermal state to the final one, characterized by the given mean-integral temperature. In addition, restrictions on the control function and the maximal tangential stress intensity or accumulated plastic shear strain have been considered.

Key words: optimal control, thermal stresses, inverse problem, elastoplastic state.

Вступ. Низка сучасних технологічних процесів виготовлення та експлуатації елементів конструкцій, зокрема у металургійній та машинобудівній галузях промисловості, передбачає їх термічну обробку. З метою підвищення продуктивності таких процесів та мінімізації енергетичних затрат актуальною є проблема мінімізації часу нагрівання чи охолодження виробу на етапі термічної обробки [1–4]. Нерівномірний розподіл температури в тілі призводить до виникнення в ньому полів напружень, перевищення якими допустимих значень може зумовити появу і розвиток дефектів різного типу (пластичних деформацій, тріщин) [5–7]. Тому з метою забезпечення відповідних міцнісних характеристик і проектних функціональних властивостей елементів конструкцій при визначенні режимів їх найшвидшого нагрівання (охолодження) потрібно враховувати обмеження на параметри теплового і напружено-деформованого станів [1–5, 8–9]. Оскільки більшість таких процесів відбувається за умов інтенсивного теплового навантаження тіла та у широкому діапазоні температур, то важливим є врахування залежності фізико-механічних властивостей матеріалу від температури [7, 11].

Постановка задачі оптимізації. Розглянемо вільне від зовнішнього силового навантаження ізотропне термочутливе тіло, яке займає деяку область V з границею Σ . Нехай зміна температури тіла відбувається внаслідок конвективного теплообміну з навколишнім середовищем за законом Ньютона. Температурне поле тіла $T(x, \tau_*)$, коли

в ньому відсутні внутрішні теплові джерела і можна знехтувати теплоутворенням від деформування, задовольняє рівняння теплопровідності

$$\operatorname{div}(\lambda_* \operatorname{grad} T(x, \tau_*)) = c_V^* \frac{\partial T(x, \tau_*)}{\partial \tau_*} \quad (x \in V, \tau_* > 0), \quad (1)$$

де $\lambda_* = \lambda_*(T)$ – коефіцієнт теплопровідності; $c_V^* = c_V^*(T)$ – питома об’ємна теплоємність; $x = (x_1, x_2, x_3)$ – точка з області V ; τ_* – час.

Вважатимемо, що можна керувати температурою середовища $u(x, \tau_*)$, яке оточує деяку частину граничної поверхні тіла Σ_u , тобто на частині граничної поверхні Σ_u теплообмін

$$\lambda_* \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} + \alpha_u (T - u) = 0 \quad (x \in \Sigma_u) \quad (2)$$

є керований, а на решті поверхні $\Sigma_\theta = \Sigma \setminus \Sigma_u$ – заданий

$$\lambda_* \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} + \alpha_\theta (T - \theta) = 0 \quad (x \in \Sigma_\theta). \quad (3)$$

Тут α_u, α_θ – коефіцієнти теплообміну на поверхнях Σ_u і Σ_θ відповідно; $\theta(x, \tau_*)$ – задана температура середовища, яке оточує частину граничної поверхні Σ_θ ; \mathbf{n} – зовнішня нормаль до поверхні Σ .

Задача оптимізації полягає у визначенні такого керування $u(x, \tau_*)$, яке задовольняючи умову

$$U_1(x, \tau_*) \leq u(x, \tau_*) \leq U_2(x, \tau_*) \quad (x \in \Sigma_u, \tau_* \geq 0) \quad (4)$$

та забезпечуючи виконання обмеження

$$RT(x, \tau_*) \leq N(T, \tau_*) \quad (x \in \bar{V}), \quad (5)$$

за мінімальний час $\tau_0 = \min \tau_*$ переведе тіло із початкового стану

$$T(x, 0) = T_0(x) \quad (x \in \bar{V}) \quad (6)$$

у кінцевий, що характеризується заданою середньоінтегральною температурою

$$T_c(\tau_0) = \frac{1}{V_*} \int_V T(x, \tau_0) dV = T_* \quad (7)$$

Тут $U_i(x, \tau_*)$ ($i = 1, 2$) – відповідно нижня ($i = 1$) та верхня ($i = 2$) границі обмеження на функцію керування; $RT(x, \tau_*)$ – деякий оператор, за допомогою якого виражаються параметри напружено-деформованого стану тіла, на які накладається задане обмеження $N(T, \tau_*)$; $T_0(x)$ – початкова температура тіла; V_* – об’єм області V ; T_* – задана середньоінтегральна температура; $\bar{V} = V \cup \Sigma$.

За оператор R в умові (5) братимемо максимальне значення інтенсивності дотичних напружень у тілі $S = (s_{ij} s_{ij} / 2)^{1/2}$ або максимальну величину накопиченої

пластичної деформації зсуву $\Gamma_p = \int_0^{\tau_*} \left(\frac{1}{2} \dot{e}_{ij}^{(p)} \dot{e}_{ij}^{(p)} \right)^{1/2} d\tau_*$ [6, 7], де s_{ij} – компоненти діватора напружень; $\dot{e}_{ij}^{(p)}$ – похідна за часом від компонент діватора пластичних деформацій.

При побудові розв'язків сформульованих задач оптимізації припускається керуваність розглядуваного процесу, тобто вважається, що умови теплового навантаження забезпечують виникнення і розвиток у тілі пластичних деформацій, а функції $U_i(x, \tau_*)$ ($i=1,2$), $N(T, \tau_*)$, $T_0(x)$ та стала T_* задані так, що можливим є досягнення кінцевої мети нагрівання (7).

Зазначимо, що за функцію керування може бути вибраний також тепловий потік на поверхні Σ_u , оскільки з граничної умови третього роду (2) можна отримати граничну умову другого роду.

Алгоритм розв'язання задачі. Для побудови розв'язку сформульованої задачі оптимізації використаємо метод оберненої задачі термомеханіки [2, 3]. Згідно з ним оптимальне за швидкодією керування приймаємо рівним верхній межі гранично допустимого обмеження

$$u(x, \tau_*) = U_2(x, \tau_*) \quad (x \in \Sigma_u, \tau_* \geq 0), \quad (8)$$

або таким, що забезпечує виконання рівності

$$RT(x, \tau_*) = N(T, \tau_*). \quad (9)$$

Це означає, що найшвидше нагрівання тіла за обмежень (4) та (5) здійснюється по верхній межі одного із цих обмежень. Очевидно, що при такому підході найшвидше охолодження тіла буде здійснюватися по нижній межі одного із наведених обмежень. Через це розв'язання задачі оптимального за швидкодією керування нагріванням тіла здійснюємо поетапно.

Етап 1. На першому етапі припускаємо, що початковий розподіл температури $T_0(x)$ задовольняє умову (5) і розв'язуємо пряму задачу термопластичності за умови (8). Якщо в процесі нагрівання тіла за законом (8) умова (5) завжди виконується, то оптимальне за швидкодією керування визначаємо із умови (8) до моменту досягнення кінцевої мети нагрівання (7).

Оскільки задача теплопровідності (1)–(3), (6) є нелінійною, то її розв'язок будемо визначати числово за допомогою методу скінченних елементів [12].

Пружно-пластичне деформування тіла досліджуємо в межах теорії неізотермічного деформування елементів тіла за траєкторіями малої кривини [7]. Оскільки сформульована вище задача термопластичності є нелінійною, то для її розв'язання використовуємо метод додаткових деформацій [6, 7].

Етап 2. В момент часу $\tau_* = \tau_k$, коли порушується умова (5), здійснюємо перемикання керування (8) на керування, яке забезпечує виконання умови (9). Ця умова виступає умовою спряження температурних режимів, визначених на першому та другому етапах керування, і використовується для визначення часу перемикання τ_k . Отже, починаючи з моменту часу τ_k , переходимо до розв'язання оберненої задачі термопластичності: за заданим допустимим обмеженням $RT(x, \tau_*) = N(T, \tau_*)$ визначаємо відповідну теплову дію – функцію керування $u(x, \tau_*)$.

Для визначення керування дискретний аналог відповідної задачі теплопровідності з невідомою тепер, крім температури, функцією $u(x, \tau_*)$ доповнюємо умовою (9), яка замикає цю систему рівнянь. Умову (9) записуємо через розподіл температури і додаткових деформацій на основі розв'язку задачі термопружності з додатковими деформаціями.

Невідомий в момент часу $\tau_* = \tau_k$ розподіл пластичної деформації, а, отже, й керування, визначаємо методом послідовних наближень. За початкове наближення для розрахунку пластичних деформацій у момент часу $\tau_* = \tau_k$ приймаємо розподіл пластичних деформацій у момент часу $\tau_* = \tau_{k-1}$. Потім визначаємо початкове наближення додаткових деформацій і розв'язуємо розширену систему рівнянь (1)–(3), (6), (9), тобто визначаємо початкові наближення функції керування і температурного поля у тілі. За знайденим наближенням функції керування на основі розв'язку прямої задачі термопластичності визначаємо перше наближення розподілу пластичних деформацій $\left(\varepsilon_{ij}^{(p)}\right)^{(k)}$, а потім – перше наближення додаткових деформацій у момент часу $\tau_* = \tau_k$. У результаті розв'язання оберненої задачі за знайденим наближенням додаткових деформацій визначаємо нове наближення функції керування і температурного режиму. Процес послідовних наближень для моменту часу $\tau_* = \tau_k$ продовжуємо до збігання з наперед заданою точністю двох послідовних наближень керування.

При досягненні функцією керування гранично допустимого значення здійснюємо перехід на перший етап алгоритму розв'язання задачі керування. З умови (8) визначаємо момент перемикавання керування. Обчислення припиняємо при досягненні кінцевої мети нагрівання (7).

Числові результати. Розглянемо реалізацію запропонованого алгоритму на прикладі оптимізації температурного режиму для довгого порожнистого циліндра, виготовленого зі сталі EI-437 [7]. Приймали, що теплоізольований по внутрішній поверхні циліндр нагрівається через зовнішню поверхню тепловим потоком, який вибрано за функцію керування.

Задача оптимізації полягає у визначенні такого керування, яке, задовольняючи умову (4), за мінімальний час переведе тіло із початкового стану в кінцевий, що характеризується заданим максимальним значенням інтенсивності накопиченої пластичної деформації зсуву

$$\max_{\rho \in [k, 1]} \Gamma_p = \Gamma_p^* \quad (10)$$

та середньоінтегральною температурою (7). Тут Γ_p^* – гранично допустиме значення накопиченої пластичної деформації;

Відповідно до описаного вище алгоритму, побудову розв'язку задачі оптимізації здійснюємо поетапно.

На *першому* етапі припускаємо виконання умови (8) і розв'язуємо пряму задачу термопластичності.

У момент часу $\tau_* = \tau_k$, коли максимальне значення Γ_p перевищує допустиме Γ_p^* , здійснюємо перехід на *другий* етап алгоритму і визначаємо керування, яке забезпечує виконання умови (10). Для цього дискретний аналог відповідної задачі теплопровідності з невідомою тепер, крім температури, функцією $u(\tau)$ доповнюємо умовою

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T} \right)^{(k-1)} + \frac{\sigma^{(k-1)}}{\left(E^{(k-1)} \right)^2} \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)^{(k-1)} \right) dT^{(k)} + \frac{3}{2} \left(\frac{1}{E_1^{(k-1)}} + \frac{1}{E^{(k-1)}} \right) dS^{(k)} = \\ & = d\Gamma_p^{(k)} = \Gamma_p^* - \Gamma_p^{(k-1)}, \quad \varepsilon = \frac{S\sqrt{3}}{E} + \frac{2\sqrt{3}}{3} \Gamma_p, \quad E_1 = \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon}. \end{aligned} \quad (11)$$

Тут $E(T)$ – модуль Юнга; $\sigma = f(\varepsilon, T)$ – рівняння миттєвої термомеханічної поверхні.

На рисунках 1–3 наведено числові результати розв’язування задачі оптимізації для циліндра з внутрішнім безрозмірним радіусом $k = R_1/R_2 = 0,5$, де R_i ($i = 1, 2$) – відповідно його внутрішній та зовнішній радіуси. Кривою 1 (суцільна лінія) на рис. 1 зображено поведінку в часі оптимального керування, коли $\Gamma_p^* = 0,001$, $T_* = 270^\circ\text{C}$ і $T_0 = 20^\circ\text{C}$, а кривою 2 (суцільна лінія) – поведінку в часі максимального значення інтенсивності накопиченої пластичної деформації зсуву, що відповідає знайденому керуванню. Тут $\tau = \lambda_0 \tau_* / (c_V^0 R_2^2)$ – безрозмірний час; λ_0, c_V^0 – значення коефіцієнта теплопровідності і питомої об’ємної теплоємності за початкової температури. Суцільними лініями 1–3 на рис. 2 зображено поведінку в часі величин $\max_{\rho \in [k, 1]} (\bar{S})$, $\max_{\rho \in [k, 1]} T$ та T_c , які відповідають оптимальному керуванню. Тут $\bar{S} = S\sqrt{3}$. Штрихові лінії 2 на рис. 1 та 1–3 на рис. 2, які продовжують суцільні, зображають поведінку відповідних величин у випадку, коли тепловий потік набуває гранично допустиме значення (штрихова лінія 1 на рис. 1) протягом усього процесу нагрівання й обмеження на інтенсивність накопиченої пластичної деформації зсуву відсутнє. З рисунків бачимо, що знайдене оптимальне керування на проміжках $\tau \in [0, \tau_1]$ та $\tau \in [\tau_2, \tau_0]$ дорівнює гранично допустимому, в момент часу $\tau = \tau_1$ забезпечує виконання умови (11), а на проміжку $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$ забезпечує нейтральне навантаження зовнішньої граничної поверхні.

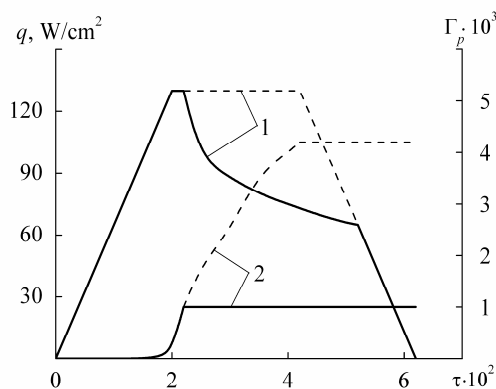


Рисунок 1. Поведінка в часі функції керування (лінія 1) та максимального значення інтенсивності накопиченої пластичної деформації зсуву (лінія 2) циліндра

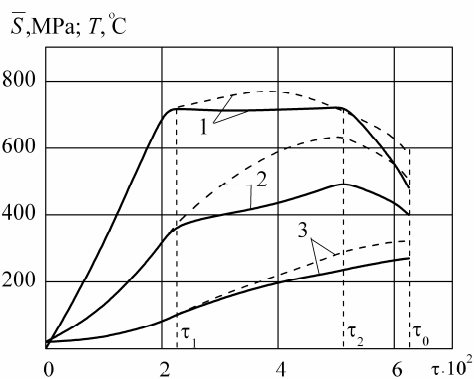


Рисунок 2. Поведінка в часі максимального значення інтенсивності дотичних напружень (лінія 1), максимальної (лінія 2) та середньої (лінія 3) температур циліндра

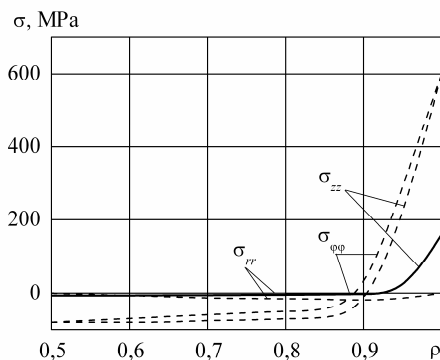


Рисунок 3. Розподіл за радіальною координатою залишкових напружень у циліндрі

На рис. 3 зображено розподіл за радіусом залишкових напружень. Суцільні лінії відповідають режиму оптимального керування нагріванням циліндра за наявності обмеження на максимальну величину інтенсивності накопиченої пластичної деформації зсуву, а штрихові – за його відсутності. Як бачимо із рисунка, наявність обмеження на максимальну величину інтенсивності накопиченої пластичної деформації зсуву обмежує максимальне значення залишкових напружень. Тут $\rho = r/R_2$ – безрозмірна радіальна координата; r – радіальна координата.

Аналіз величин радіусів кривини траєкторій деформування максимально навантаженої точки циліндра, побудованих у двовимірному просторі Ільюшина [7], підтвердив правомірність використання для розрахунку напружено-деформованого стану циліндра визначальних співвідношень теорії процесів деформування елементів тіла за траєкторіями малої кривини.

Висновки. Для випадку пружно-пластичного деформування матеріалу сформульовано постановки задач оптимального за швидкодією керування нагріванням термочутливих тіл канонічної форми за обмежень на функцію керування (тепловий потік на одній із граничних поверхонь, температура нагрівального середовища) та максимальну величину інтенсивності дотичних напружень або накопиченої пластичної деформації зсуву. За фізичні рівняння вибрано співвідношення, які описують неізотермічні процеси деформування елементів тіла за траєкторіями малої кривини.

На основі методу оберненої задачі термомеханіки побудовано числові алгоритми розв'язання сформульованих задач оптимізації, що передбачають зведення їх до послідовності прямих та обернених задач термопластичності. Нелінійні задачі теплопровідності розв'язані методом скінченних елементів, а лінеаризацію і розв'язання задач термопластичності здійснено за допомогою методу додаткових деформацій.

Знайдені оптимальні за швидкодією температурні режими нагрівання термочутливих тіл дають змогу, шляхом вибору відповідних значень обмежуючих параметрів, керувати рівнем залишкових деформацій і напружень у тілі, що важливо з огляду на запобігання пошкодження матеріалу елементів конструкцій.

Література

1. Бутковский, А.Г. Управление нагревом металла [Текст] / А.Г. Бутковский, С.А. Малый, Ю.Н. Андреев. – М., 1981. – 2 71 с.
2. Вигак, В.М. Оптимальное управление нестационарными температурными режимами [Текст] / В.М. Вигак. – К., 1979. – 3 60 с.
3. Вигак, В.М. Управление температурными напряжениями и перемещениями [Текст] / В.М. Вигак. – К., 1988. – 312 с.
4. Рапопорт, Э.Я. Оптимизация процессов индукционного нагрева металла [Текст] / Э.Я. Рапопорт. – М., 1993. – 280 с.
5. Гудрамович, В.С. Контактные взаимодействия и оптимизация оболочечных конструкций при локальном нагружении [Текст] / В.С. Гудрамович, А.П. Дзюба // *Мат. методи та фіз.-мех. поля*, 2008. – Т.51. – № 2. – С. 188–201.
6. Термопрочность деталей машин [Текст] / И.А. Биргер, Б.Ф. Шорр, И.В. Демянушко, Р.А. Дульнев. – М., 1975. – 455 с.
7. Шевченко, Ю.Н. Термовязкопластичность [Текст] / Ю.Н. Шевченко, В.Г. Савченко. – К., 1987. – 263 с.
8. Ashida, F. Control of transient thermoelastic displacement in a composite disk / F. Ashida, T.R. Tauchert // *J. Thermal Stresses*, 2002. – Vol. 25. – P. 99–121.
9. Kushnir, R.M. Optimal heating control of thermosensitive rectangular domain under restrictions on stresses in a plastic zone / R.M. Kushnir, A.V. Yasinsky // *J. Thermal Stresses*, 2010. – Vol. 33. – P. 251–261.
10. Nyashin, Y. Control of thermal stresses and strain / Y. Nyashin, V. Kiryukhin, F. Ziegler // *J. Thermal Stresses*, 2000. – Vol. 23. – P. 309–326.
11. Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл; за заг. ред. Я.Й. Бурака, Р.М. Кушніра. Т.3: Термопружність термочутливих тіл [Текст] / Р.М. Кушнір, В.С. Попович. – Львів, 2009. – 412 с.
12. Зенкевич, О. Конечные элементы и аппроксимация [Текст] / О. Зенкевич, К. Морган. – М., 1986. – 319 с.