

УДК 539.375

В. Кривень, докт. фіз.-мат. наук; В. Валяшек

Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

ПЛАСТИЧНЕ ВІДШАРОВУВАННЯ ПІВБЕЗМЕЖНО ДОВГОГО ВКЛЮЧЕННЯ СКІНЧЕННОЇ ТОВЩИНИ ЗА УМОВИ ОДНОБІЧНОГО КОНТАКТУ З СЕРЕДОВИЩЕМ

Резюме. Розв'язано задачу про пластичне відшаровування півбезмежно довгого включення скінченної товщини, що контактує із середовищем тільки вздовж своєї коротшої грані. Від кожної вершини включення розвиваються дві пластичні смуги: смуга пластичного відшаровування вздовж коротшої грані і смуга, що поширюється під кутом до неї вглиб середовища. Отримано залежності довжин смуг від величини навантаження.

Ключові слова: пластичні смуги, жорстке включення, пластичне відшаровування.

V. Kryven, V.Valiashek

PLASTIC EXFOLIATION OF INFINITE LONG INCLUSION OF FINITE WIDTH AT ONE-SIDED CONTACT WITH ENVIRONMENT

The summary. Plastic exfoliation problem of semi-infinite inclusion of finite width being in contact with environment only along its shorter edge is solved. Two plastic bands develop from every vertex: plastic exfoliation band along shortest edge and band develop at an angle in deep into the environment. Bands lengths depending on the load are received.

Key words: plastic exfoliation, hard including, plastic removing layer by layer.

Вступ. У роботі [1] досліджено початкову стадію розвитку пластичних смуг в ідеально пружно-пластичному середовищі від вершин жорсткого прямокутного включення, що контактує з середовищем лише вздовж однієї пари своїх граней. Ця задача є цікавою також тому, що досить тонке включення, яке не контактує з середовищем вздовж своїх більших граней, може вважатися аналогом тріщини, котра не може розкриватися внаслідок контакту вздовж своїх менших граней. Крім того, контакт призводить до відсутності напружень на кінцях тріщиноподібного дефекту, якраз там, де для тріщини в лінійно пружному середовищі напруження необмежені. Щоб дослідити розвиток пластичних деформацій для такого особливого випадку звичайно не можна обмежитися малими навантаженнями, потрібно прослідкувати пластичне відшаровування від початку до моменту злиття смуг, що розвиваються від різних вершин включення вздовж межі включення-середовище.

Постановка задачі. Нехай ідеально пружно-пластичне середовище $-\infty < x, y, z < +\infty$ містить абсолютно жорстке півбезмежне включення $-\infty < x \leq 0$, $-b \leq y \leq b$, яке перебуває в ідеальному механічному контакті вздовж вертикальної грані $-\infty < z < +\infty$, $x = 0$, $-b \leq y \leq b$ і не контактує з середовищем вздовж двох інших своїх граней (рис. 1). І нехай середовище знаходиться у стані антиплоскої деформації, спричиненої дією прикладених на нескінченності безмежно малих зсувних навантажень, паралельних вільним граням включення. Концентрація напружень в околі ребер включення призведе до перевищення границі текучості k та появи пластичних деформацій, які ми вважатимемо локалізованими біля кожної з вершин у двох шарах:

вертикальних $-\infty < z < +\infty$, $x = 0$, $c \leq |y| \leq b$, які власне й призводять до відшарування

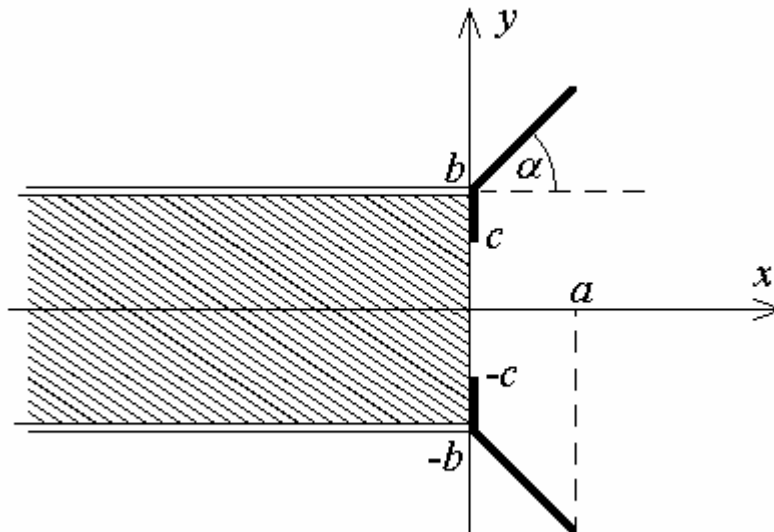


Рисунок 1. Поперечний переріз тіла. Потовщені лінії – пластичні смуги

включення, та косих $-\infty < z < +\infty$, $|y| = b + xtg\alpha$, $0 \leq x \leq d_1 \cos \alpha$. Косі смуги можуть розвиватися під різними кутами [2], тому, аналогічно як у роботах [3, 4], кут α , котрий визначає напрямок їх розвитку, вважатимемо y довільним у допустимих межах. Тут $b - c = d_2$ – довжина вертикальної смуги; d_1 – косої смуги. Величину навантаження задаватимемо асимптотикою поля напружень на нескінченності й визначатимемо залежності довжин пластичних смуг від величини навантаження.

Розв’язок задачі та його дослідження. Поза включенням та пластичними смугами середовище перебуває у пружному стані, а $\tau(\zeta) = \tau_{yz}(x, y) + i\tau_{xz}(x, y)$ ($\zeta = x + iy$) є аналітичною функцією комплексної змінної. внаслідок симетрії задачі антиплоске переміщення $w(x, y)$ непарне по змінній y і тому напружено деформівний стан досить визначити тільки у верхній півплощині у області $S = \{(x, y) | ((y > 0 \wedge x > 0) \vee (x < 0 \wedge y > b)) \wedge (0 < x < d_1 \cos \alpha \wedge y \neq b + xtg\alpha)\}$

Постановка задачі у напруженнях еквівалентна такій крайовій задачі для функції $\tau(\zeta)$

$$\begin{aligned}
 & \operatorname{Re} \tau(\zeta) = 0 \quad (\zeta = x + ib, -\infty < x < 0); \\
 & |\tau(\zeta)| = k \quad (\zeta = ib + \rho e^{i\varphi}, 0 \leq \rho \leq d_1, \varphi = \alpha \pm 0); \\
 & |\tau(\zeta)| = k \quad (\zeta = iy, b - d_2 < y < b); \\
 & \arg \tau(ib + d_1 e^{i\alpha}) = -\alpha; \\
 & \operatorname{Re} \tau(\zeta) = 0 \quad (\zeta = iy, 0 \leq y \leq b - d_2); \\
 & \operatorname{Im} \tau(\zeta) = 0 \quad (\zeta = x, 0 \leq x < +\infty); \\
 & \tau(\zeta) = \frac{M}{\sqrt{\zeta}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{\zeta}}\right) (\zeta \rightarrow \infty),
 \end{aligned} \tag{1}$$

за умови, що $|\tau(\zeta)|$ не досягає величини k поза пластичними смугами.

Умови (1) мають такий фізичний зміст: перша є результатом відсутності механічного контакту на горизонтальних гранях включення ($\tau_{yz} = 0$); друга виражає умову пластичності на берегах косої смуги; третя – ту ж умову на вертикальній смугі; четверта є необхідною умовою прямолінійного розвитку косої смуги і вимагає дотичності площини максимального зсувного напруження до смуги в її вершині; п'ята є умовою ідеального зчеплення включення на частині його поверхні, не відшарованої і не охопленої пластичними деформаціями; шоста – результат симетрії (непарності переміщення по ординатах); остання виражає асимптотику напружень на нескінченності M – параметр навантаження.

Покажемо, що (1) можна звести до задачі побудови конформного відображення. По-перше, область S , у якій слід знайти функцію $\tau(\tau)$, є повністю визначеною, тому, якщо визначеним є також її образ S при відображенні $\tau(\tau)$, розв'язання крайової задачі (1) зводиться до побудови відображення S на G . Аналізуючи образи окремих ділянок межі області S , доходимо висновку, що функція $\tau(\tau)$ реалізує конформне відображення, зображене на рис. 2.

Зауважимо, що наявність розрізу в півкрузі G має таке пояснення. Функція $\tau(\zeta)$ дорівнює нулю в точках $\zeta = 0$ і $\zeta = \infty$, отже, не є монотонною на дійсній додатній півосі: $\tau_0 = \max_{x \in [0, +\infty)} \tau_{yz}(x, 0)$. При конкретному куті α і конкретній довжині розрізу BC в області S відображення $\tau(\zeta)$, взагалі кажучи, не існує, як таке, що має на межах областей чотири пари фіксованих точок (A, B, C, F) [5]. Але при фіксованому значенні кута α воно існуватиме для певного значення d_1 , що дорівнює довжині косої смуги.

Відображення зручно шукати в параметричній формі

$$\tau = \tau(t), \zeta = \zeta(t) \quad (t \in H, H = \{t | \text{Im} t > 0\}) . \quad (2)$$

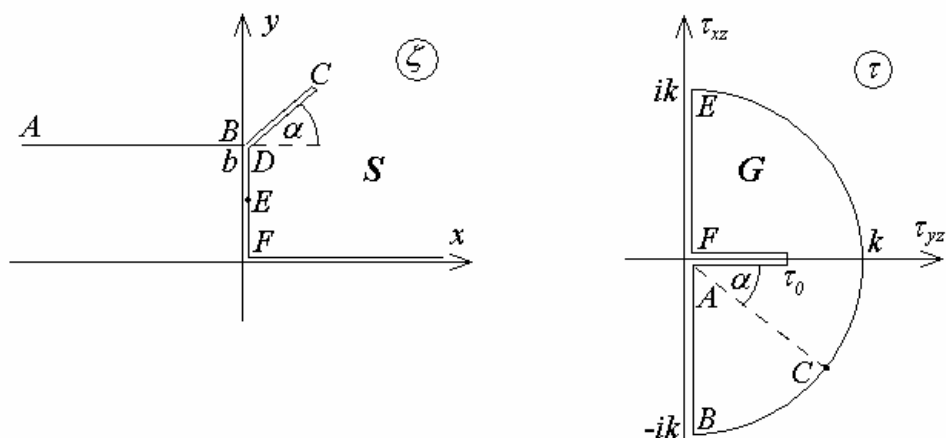


Рисунок 2. Конформне відображення, здійснюване функцією $\tau(\zeta)$

Функція (2) буде потрібним відображенням як тільки три точки межі областей S та G матимуть спільний прообраз на границі області H . Нехай такими є точки A, B, F . Площина H зображена на рис. 3.

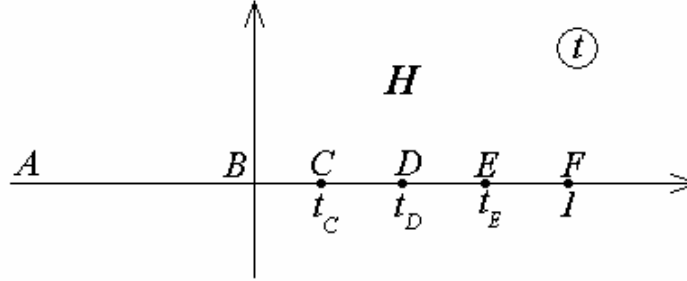


Рисунок 3. Площина допоміжної комплексної змінної t

Точка D , спільна для косої і вертикальної смуг, невизначена у площині τ , вона використовуватиметься під час побудови відображення $\zeta(t)$.

Функцію $\tau(t)$ знаходимо композицією елементарних відображень

$$\tau(t) = -km \frac{\sqrt{t-1}}{\sqrt{t^2 + (m^2 + 2m)t + t + m}}, \quad (3)$$

де $m = -\frac{4k\tau_0}{(k + \tau_0)^2}$ і змінюється в області $m \in (-1; 0)$, якщо $\tau_0 \in (0; k)$. Під $(t - q)^p$, p, q – дійсні числа і $|p| < 1$ тут і далі розумітимемо аналітичну у верхній півплощині функцію, що набуває дійсні додатні значення, коли $t - p$ є також дійсним та додатним. Її обернена є такою:

$$t = \frac{2\tau_0}{(k + \tau_0)^2} \frac{2k\sqrt{(\tau_0^2 - \tau^2)(k^4 - \tau_0^2\tau^2)} - (k^2 + \tau_0^2)(k^2 - \tau^2)}{\sqrt{(\tau_0^2 - \tau^2)(k^4 - \tau_0^2\tau^2)} - \tau_0(k^2 - \tau^2)}. \quad (4)$$

З останньої формули, поклавши τ рівним відповідно $ke^{-i\alpha}$ та ik , визначаємо параметри t_C та t_E :

$$t_C = 4k\tau_0 \frac{k^2 + \tau_0^2 + \sin \alpha \sqrt{4k^2\tau_0^2 \sin^2 \alpha + (k^2 - \tau_0^2)^2}}{(k + \tau_0)^4},$$

$$t_E = 8 \frac{k\tau_0(k^2 + \tau_0^2)}{(k + \tau_0)^4}.$$

Якщо τ_0 збільшується від 0 до k , то t_C зростає від 0 до t_E , а $t_E \in (t_C; 1)$.

Фігура S є прямолінійним багатокутником, тому відображення $\zeta(t)$ шукатимемо за допомогою перетворення Шварца-Крістофеля

$$\zeta(t) = iKb \int_0^t \eta^{-\frac{\alpha}{\pi}} (\eta - t_C)^{\frac{\alpha}{\pi} - 1} (\eta - t_D)^{\frac{\alpha}{\pi} - 1} (\eta - 1)^{\frac{1}{2}} d\eta. \quad (5)$$

$$\text{Тут } K = \left(\int_{t_D}^1 F(\eta) d\eta \right)^{-1}, \quad F(\eta) = |\eta|^{-\frac{\alpha}{\pi}} |\eta - t_C| |\eta - t_D|^{\frac{\alpha-1}{2}} |\eta - 1|^{-\frac{1}{2}}.$$

Перетворення (5) забезпечує для фігури S потрібні значення кутів при її вершинах і довжину її сторони DF . Довжини берегів розрізу для довільного $t_D \in (t_C; t_E)$ будуть рівними між собою, якщо виконуватиметься співвідношення

$$\int_0^{t_C} F(\eta) d\eta = \int_{t_C}^{t_D} F(\eta) d\eta. \quad (6)$$

Для знаходження параметра t_D розв'яжемо останнє рівняння, скориставшись методом послідовних наближень.

Покладемо $t_D^{(0)} = \frac{1}{2}(t_C + t_E)$, а j -е наближення шуканого параметра позначимо $t_D^{(j)}$, а через $BC^{(j)}$ і $CD^{(j)}$ – праву та ліву частини рівності (6), у яких t_D замінено на $t_D^{(j)}$.

Можна переконатися, що послідовність

$$t_D^{(j+1)} = t_D^{(j)} + (t_E - t_D^{(j)}) \frac{BC^{(j)} - CD^{(j)}}{BC^{(j)} + CD^{(j)}}.$$

збіжна і дає в границі розв'язок рівняння (6).

Аби зв'язати максимальне напруження на осі абсцис τ_0 навантаженням на нескінченності, з'ясуємо асимптотику напружень при $\zeta \rightarrow \infty$. З формул (3) і (5) випливає, що $\zeta \rightarrow \infty$ коли $t \rightarrow \infty$ і крім того $\tau(t) = \frac{4k^2\tau_0}{(k + \tau_0)^2} \frac{1}{\sqrt{t}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$, $\zeta(t) = Kbt + o(t)$. Тому при $\zeta \rightarrow \infty$

$$\tau(\zeta) = \frac{4k^2\tau_0\sqrt{Kb}}{(k + \tau_0)^2} \frac{1}{\sqrt{\zeta}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{\zeta}}\right).$$

Величина $M = \frac{4k^2\tau_0\sqrt{Kb}}{(k + \tau_0)^2}$, що задає прикладене на нескінченності навантаження, є

відомою. Оскільки τ_0 знаходиться у межах від 0 до k , то $0 \leq M < k\sqrt{Kb}$,

$$\tau_0 = \frac{k\sqrt{M}}{\sqrt{k\sqrt{Kb} + \sqrt{k\sqrt{Kb} - M}}}.$$

Тепер за формулою (5) знаходимо довжини пластичних смуг

$$d_1 = Kb \int_0^{t_C} F(\eta) d\eta, \quad d_2 = Kb \int_{t_D}^{t_E} F(\eta) d\eta. \quad (7)$$

Залежності довжин пластичних смуг від навантаження для кількох значень кута α зображено на рис. 3а–3б.

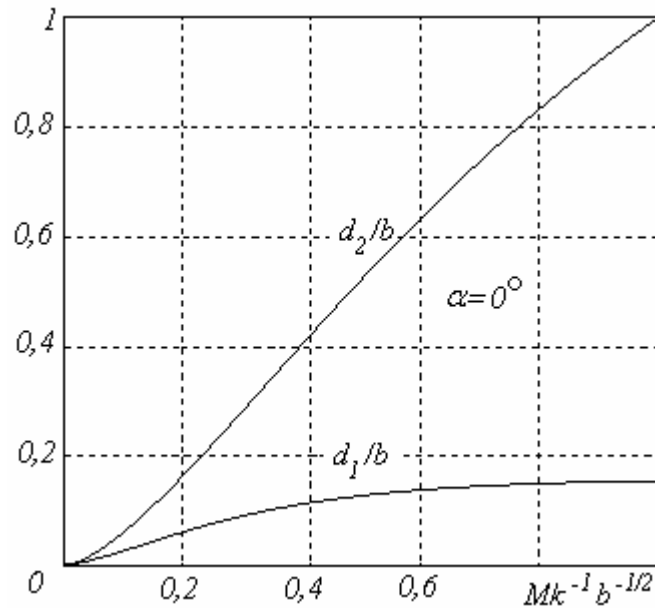


Рисунок 3а. Залежність довжин пластичних смуг від навантаження для значення кута $\alpha = 0^\circ$

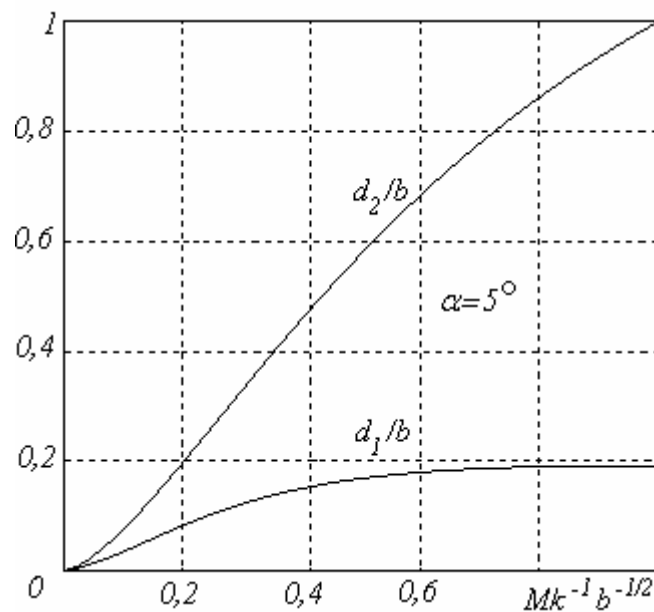


Рисунок 3б. Залежність довжин пластичних смуг від навантаження для значення кута $\alpha = 5^\circ$

Висновки. Отримано аналітичні залежності, що описують розвиток двох пластичних смуг при вершинах тонкого жорсткого включення, котре не контактує з середовищем вздовж більших свої граней. Зокрема встановлено, що відшаровування включення проходить інтенсивніше, ніж розвиток косої смуги, напрямком якої близький до горизонтального. Коса смуга швидко розвивається лише на початковій стадії розвитку, далі її ріст пригальмовується і згодом практично зупиняється. Це тим помітніше, коли збільшується відхилення напрямку її розвитку від горизонтального. На початковій стадії розвитку, поки обидві смуги приблизно на порядок менші від ширини включення, довжини смуг збільшуються пропорційно, що дає підставу для застосування лінійної моделі пластичної зони (ЛМПЗ).

Література

1. Кривень, В.А. Початкова стадія пластичного відшаровування. прямокутного включення за умови одностороннього контакту з середовищем [Текст] / В.А. Кривень, В.Б. Валяшек // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2010. – Т. 53, №4. – С. 107-116.
2. Надаи, А.Л. Пластичность и разрушение твердых тел [Текст] / А.Л. Надаи. – М.: Изд-во ИЛ, 1954. – 647с.
3. Кривень, В.А. Узагальнене представлення зони пластичності при антиплоскій деформації пружнопластичного тіла із гострокінцевим концентратором напружень [Текст] / В.А. Кривень // Доп. АН УРСР. Сер.А. – 1983. – №2. – С. 31–34.
4. Кривень, В.А. Непрерывное и разрывное решения упругопластической задачи об антиплоской деформации тела с трещиной [Текст] / В.А. Кривень // Физ.-хим. мех. материалов. - 1985. – №6. – С. 10–16.
5. Иванов, В.И. Конформные отображения и их приложения [Текст] / В.И. Иванов, В.Ю. Попов. – М.: Едиториал УРСС, 2002 – 324 с.
6. Кривень, В.А. Лінійна модель пластичної зони біля гострокінцевого концентратора напружень за поздовжнього зсуву [Текст] / В.А. Кривень // Фіз.-хім. механіка матер. – 2004. – №4. – С. 41–46.