УДК 517
Филима Є. – ст.гр. ХК-11
Тернопільський державний технічний університет імені Івана Пулюя

МЕТОД ВВЕДЕННЯ ПАРАМЕТРА ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ, НЕ РОЗВ'ЯЗАНИХ ВІДНОСНО ПОХІДНОЇ

Науковий керівник: к.ф.-м.н., доцент Стельмащук Л.В.

Як правило, диференціальне рівняння першого порядку вигляду

$$F\left(x, y, \frac{dx}{dy}\right) = 0 \qquad (1)$$

розв'язують зведенням до одного чи кількох рівнянь типу $y' = f_i(x, y),\ i = 1, 2, ..., k$. Проте рівняння (1) не завжди можна в явному вигляді розв'язати відносно y'. На практиці часто використовують метод введення параметра.

Припустимо, що рівняння (1) можна розв'язати відносно x чи y. Наприклад, записати у вигляді $y = f(x, y')$. Ввівши параметр $y' = p$, дістанемо $y = f(x, p)$. Взявши повний диференціал від обох частин рівності і замінивши $dy = pdx$, дістанемо

$pdx = \dfrac{\partial f(x, p)}{\partial x} dx + \dfrac{\partial f(x, p)}{\partial p} dp$, тобто $M(x, p)dx + N(x, p)dp = 0$.

Якщо розв'язки останнього рівняння задані формулою $x = \Phi(p, c)$, то розв'язки рівняння (1) можна записати в параметричній формі

$$\begin{cases} x = \Phi(p, c), \\ y = f(x, p). \end{cases}$$

Прикладами рівнянь, які можна розв'язати викладеним методом є рівняння Лагранжа $y = x\varphi(y') + \psi(y')$ та рівняння Клеро $y = xy' + \psi(y')$.

Використання методу продемонструємо на прикладі наступної задачі.

Знайти криву, у якої відрізок будь-якої дотичної між координатними осями дорівнює a.

Записавши рівняння дотичної до цієї кривої в довільній її точці, та врахувавши, що вона перетинає осі координат в точках $(x - y/y'; 0)$ і $(0; y - xy')$, за умовою маємо: $\sqrt{\left(x - \dfrac{y}{y'}\right)^2 + (y - xy')^2} = a$. Розв'язавши відносно y, маємо $y = xy' \pm \dfrac{ay'}{\sqrt{1 + y'^2}}$ – рівняння Клеро. Скористаємось методом введення параметра і одержимо розв'язки:

$$\begin{cases} x = \pm \dfrac{a}{\left(1 + p^2\right)^{3/2}}, \\ y = xp \pm \dfrac{a}{\sqrt{1 + p^2}} = \pm \dfrac{ap^3}{\left(1 + p^2\right)^{3/2}}. \end{cases}$$

Виключивши p з останніх двох рівностей, дістанемо рівняння астроїди $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

Література. Самойленко А.М., Кривошия С.А., Перестук М.О. Диференціальні рівняння у прикладах та задачах. Навч.посібник – К.: Вища школа, 1994. – 455 с.: іл.