УДК 517.949
Кацюра В. – ст.гр. ХК-11
Тернопільський державний технічний університет імені Івана Пулюя

РІЗНІ СПОСОБИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Науковий керівник: к.ф.-м.н., доцент Стельмащук Л.В.

Вивчення систем диференціальних рівнянь для нематематичних спеціальностей вищої освіти України часто обмежується лише розглядом методу виключення для систем диференціальних рівнянь у нормальній формі (розв'язаних відносно похідних шуканих функцій). Проте практичні задачі вимагають різноманітнішого підходу до їх аналізу. Доцільним, на нашу думку. є хоча б побіжне знайомство з іншими методами, серед яких виділимо метод інтегрованих комбінацій, метод Ейлера та матричний метод.

Метод інтегрованих комбінацій полягає в тому, що, використовуючи арифметичні операції, система зводиться до рівнянь, що легко інтегруються.

Розглянемо систему вигляду

$$\frac{dx}{x(y-z)}=\frac{dy}{y(z-x)}=\frac{dz}{z(x-y)}.$$

Користуючись властивістю рівних дробів, складемо інтегровні комбінації:

$$\frac{ydx+xdy}{x(y-z)+y(z-x)}=\frac{dz}{z(x-y)} \Rightarrow \frac{d\left(x+y\right)}{z(y-x)}=\frac{dz}{z(x-y)} \Rightarrow x+y+z=C_1;$$

$$\frac{ydx+xdy}{xy(y-z)+xy(z-x)}=\frac{dz}{z(x-y)} \Rightarrow \frac{d(xy)}{xy}=\frac{dz}{-z} \Rightarrow xyz=C_2.$$

Метод Ейлера використовують для розв'язування систем лінійних рівнянь зі сталими коефіцієнтами (СЛРСК) $\frac{dx}{dt}=Ax$. При цьому розв'язки шукають у вигляді $x=e^{\lambda t}h$, де λ – власне значення матриці A, а h – власний вектор цієї матриці, що відповідає λ. Аналогічно, як при досліджені лінійних диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами, розглядають різні випадки існування власних значень матриці A.

Для системи $\frac{dx}{dt}=y+z,\ \ \frac{dy}{dt}=x+z,\ \ \frac{dz}{dt}=x+y$, розв'язки шукаємо у вигляді: $x=\alpha e^{\lambda t},\ \ y=\beta e^{\lambda t},\ \ z=\gamma e^{\lambda t}$. Власні значення системи $\lambda_1=2$ та $\lambda_2=\lambda_3=-1$.

Кореню $\lambda_1=2$ відповідають частинні розв'язки $x_1=e^{2t}, y_1=e^{2t}, z_1=e^{2t}$, а кратному кореню $\lambda_2=\lambda_3=-1$ – системи розв'язків $x_2=e^{-t}, y_2=0, z_2=-e^{-t}$ та $x_3=0,\ \ y_3=-e^{-t},\ \ z_3=e^{-t}$. Перевіривши систему на фундаментальність, формуємо її загальний розв'язок: $x=C_1e^{2t}+C_2e^{-t}$; $y=C_1e^{2t}-C_3e^{-t}$; $z=C_1e^{2t}-C_2e^{-t}+C_3e^{-t}$.

Матричний метод інтегрування СЛРСК ґрунтується на безпосередньому знаходженні фундаментальної матриці системи через суму спеціально побудованого ряду, яку називають експонентою матриці та жорданову форму матриці *A*.

Література. Самойленко А.М., Кривошия С.А., Перестук М.О. Диференціальні рівняння у прикладах та задачах. Навч.посібник – К.: Вища школа, 1994. – 455 с.: іл.