

УДК 517.91:532.26

О. Нікітіна

*Чернівецький факультет Національного технічного університету
„Харківський політехнічний інститут”*

ГІБРИДНЕ ІНТЕГРАЛЬНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ ТИПУ ЕЙЛЕРА- ЛЕЖАНДРА НА ПОЛЯРНІЙ ОСІ

*Методом дельта-подібної послідовності (ядро Коші) на полярній осі з однією точкою
спряження запроваджено гібридне інтегральне перетворення типу Ейлера-Лежандра.*

O. Nikitina

THE HIBRID TRANSFORMATION OF THE EULER- LEGANDE'S TYP ON POLAR AXIS

*The method of delta sequence (a kernel Koshi) on an arctic landmark with one point of interface is
inculcate hybrid integral transformation as Euler-Legendra.*

Постановка проблеми. Вивчення властивостей композитних матеріалів, які знаходяться в різних умовах експлуатації, математично приводить до задачі інтегрування сепаратної системи диференціальних рівнянь другого порядку на кусково-однорідному інтервалі. Одним з ефективних методів побудови аналітичних розв'язків таких задач є метод гібридних інтегральних перетворень, основні положення теорії яких закладено в роботі [1]. Дана стаття присвячена запровадженню одного із типів гібридного інтегрального перетворення.

Основна частина. Запровадимо інтегральне перетворення, породжене на множині $I_1^+ = \{r: r \in (0, R_1) \cup (R_1, \infty)\}$ гібридним диференціальним оператором (ГДО)

$$\mathcal{M}_{\alpha,(\mu)} = \theta(r)\theta(R_1 - r)a_1^2 B_\alpha^* + \theta(r - R_1)a_2^2 \Lambda_{(\mu)}, a_j > 0 (j = 1, 2). \quad (1)$$

У рівності (1) беруть участь диференціальний оператор Ейлера [2] $B_\alpha^* = r^2 d^2 / dr^2 + (2\alpha + 1)r d / dr + \alpha^2$, $2\alpha + 1 > 0$ та узагальнений диференціальний оператор

Лежандра [2] $\Lambda_{(\mu)} = d^2/dr^2 + \text{cth } r d/dr + 1/4 + \frac{1}{2} \left(\frac{\mu_1^2}{1 - \text{chr}} + \frac{\mu_2^2}{1 + \text{chr}} \right)$, $\mu_1 \geq \mu_2 \geq 0$, $(\mu) = (\mu_1, \mu_2)$, $\theta(x)$ – одинична функція Гевісайда [3].

Означення. Областю визначення ГДО $\mathcal{M}_{\alpha, (\mu)}$ назвемо множину G „вектор-функцій” $g(r) = \{g_1(r); g_2(r)\}$ з такими властивостями: 1) „вектор-функція” $f(r) = \{B_\alpha^* [g_1(r)]; \Lambda_{(\mu)} [g_2(r)]\}$ неперервна на множині I_1^+ ; 2) функції $g_j(r)$ задовольняють умови спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^1 \frac{d}{dr} + \beta_{j1}^1 \right) g_1(r) - \left(\alpha_{j2}^1 \frac{d}{dr} + \beta_{j2}^1 \right) g_2(r) \right]_{r=R_1} = 0, j = 1, 2; \quad (2)$$

3) існують такі числа γ_1 і γ_2 , що мають місце граничні співвідношення

$$\lim_{r \rightarrow 0} [r^{\gamma_1} g_1(r)] = 0, \lim_{r \rightarrow \infty} [r^{\gamma_2} g_2(r)] = 0. \quad (3)$$

Вважаємо виконання умов на коефіцієнти: $\alpha_{jk}^1 \geq 0$, $\beta_{jk}^1 \geq 0$, $c_{21} \cdot c_{11} > 0$, $c_{j1} = \alpha_{2j}^1 \beta_{1j}^1 - \alpha_{1j}^1 \beta_{2j}^1$.

Зауважимо, що з умов спряження (2) випливає базова тотожність: для $u \in G$ та $v \in G$ справджується рівність

$$\left(u_1(r) \frac{dv_1}{dr} - v_1(r) \frac{du_1}{dr} \right) \Big|_{r=R_1} = \frac{c_{21}}{c_{11}} \left(u_2(r) \frac{dv_2}{dr} - v_2(r) \frac{du_2}{dr} \right) \Big|_{r=R_1}. \quad (4)$$

Введемо до розгляду вагову функцію

$$\sigma(r) = \theta(r)\theta(R_1 - r) \sigma_1 r^{2\alpha-1} + \theta(r - R_1) \sigma_2 \text{sh } r, \quad \sigma_1 = \frac{c_{11}}{c_{21}} \frac{\text{sh} R_1}{R_1^{2\alpha+1}} \frac{1}{a_1^2}, \quad \sigma_2 = \frac{1}{a_2^2},$$

і скалярний добуток

$$(u(r), v(r)) = \int_0^\infty uv\sigma(r)dr \equiv \int_0^{R_1} u_1(r)v_1(r)\sigma_1 r^{2\alpha-1}dr + \int_{R_1}^\infty u_2(r)v_2(r)\sigma_2 \text{sh} r dr. \quad (5)$$

Перевіримо, що ГДО $M_{\alpha, (\mu)}$ самоспряжений.

Розглянемо скалярний добуток

$$(M_{\alpha, (\mu)}[u], v) = \int_0^{R_1} a_1^2 B_\alpha^*[u_1]v_1(r)\sigma_1 r^{2\alpha-1}dr + \int_{R_1}^\infty a_2^2 \Lambda_{(\mu)}[u_2]v_2(r)\sigma_2 \text{sh} r dr.$$

Проінтегруємо під знаком інтегралів два рази частинами:

$$\begin{aligned} (M_{\alpha, (\mu)}[u], v) &= a_1^2 \sigma_1 r^{2\alpha+1} \left(\frac{du_1}{dr} v_1 - u_1 \frac{dv_1}{dr} \right) \Big|_0^{R_1} + \int_0^{R_1} u_1(r) (a_1^2 B_\alpha^*[v_1]) \sigma_1 r^{2\alpha-1} dr + \\ &+ \sigma_2 a_2^2 \text{sh} r \left(\frac{du_2}{dr} v_2 - u_2 \frac{dv_2}{dr} \right) \Big|_{R_1}^\infty + \int_{R_1}^\infty u_2(r) (a_2^2 \Lambda_{(\mu)}[v_2]) \sigma_2 \text{sh} r dr. \end{aligned}$$

На підставі базової тотожності (4) та структури σ_1, σ_2 одержуємо, що

$$\begin{aligned} a_1^2 \sigma_1 R_1^{2\alpha+1} \left(\frac{du_1}{dr} v_1 - u_1 \frac{dv_1}{dr} \right) \Big|_{r=R_1} - \sigma_2 a_2^2 \text{sh} R_1 \left(\frac{du_2}{dr} v_2 - u_2 \frac{dv_2}{dr} \right) \Big|_{r=R_1} = \\ = \left(a_1^2 \sigma_1 R_1^{2\alpha+1} \frac{c_{21}}{c_{11}} - a_2^2 \sigma_2 \text{sh} R_1 \right) \left(\frac{du_2}{dr} v_2 - u_2 \frac{dv_2}{dr} \right) \Big|_{r=R_1} = 0. \end{aligned}$$

В силу рівностей (3) позаінтегральні доданки в точках $r = 0$ та $r = \infty$ заноляються. Отже, має місце рівність

$$(M_{\alpha, (\mu)}[u], v) = (u, M_{\alpha, (\mu)}[v]),$$

що означає самоспряженість ГДО $M_{\alpha, (\mu)}$.

Зауважимо, що ГДО $M_{\alpha, (\mu)}$ має дві особливі точки $r = 0$ та $r = \infty$ [1].

Відомо, що спектр самоспряженого оператора дійсний та неперервний, а спектральна функція комплекснозначна [1]. Можна вважати, що спектральний параметр $\beta \in (0, \infty)$. Йому відповідає спектральна функція

$$V_{\alpha, (\mu)}(r, \beta) = \theta(r)\theta(R_1 - r) V_{\alpha, (\mu); 1}(r, \beta) + \theta(r - R_1) V_{\alpha, (\mu); 2}(r, \beta).$$

При цьому функції $V_{\alpha, (\mu); j}(r, \beta) = V_{\alpha, (\mu); j1}(r, \beta) + i V_{\alpha, (\mu); j2}(r, \beta)$, $j = 1, 2$, $i^2 = -1$.

Фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Ейлера $(B_\alpha^* + b_1^2)v = 0$ утворюють функції $v_1 = r^{-\alpha} \cos(b_1 \ln r)$ та $v_2 = r^{-\alpha} \sin(b_1 \ln r)$ [2]; фундаментальну систему розв'язків для узагальненого диференціального рівняння Лежандра $(\Lambda_{(\mu)} + b_2^2)v = 0$ утворюють узагальнені приєднані функції Лежандра першого роду $P_{\nu_2}^{(\mu)}(chr)$ та другого роду $L_{\nu_2}^{(\mu)}(chr)$ або їх лінійні комбінації $A_{\nu_2}^{(\mu)}(chr)$ та $B_{\nu_2}^{(\mu)}(chr)$ [1]; $b_j = (\beta^2 + k_j^2)^{1/2}$, $k_j^2 \geq 0$, $j = 1, 2$; $\nu_2^* = -1/2 + ib_2$.

Якщо покласти

$$V_{\alpha, (\mu); 1}(r, \beta) = A_1 r^{-\alpha} \cos(b_1 \ln r) + B_1 r^{-\alpha} \sin(b_1 \ln r) + i(C_1 r^{-\alpha} \cos(b_1 \ln r) + D_1 r^{-\alpha} \sin(b_1 \ln r)),$$

$$V_{\alpha, (\mu); 2}(r, \beta) = A_2 A_{\nu_2}^{(\mu)}(chr) + B_2 B_{\nu_2}^{(\mu)}(chr) + i(C_2 A_{-\nu_2}^{(\mu)}(chr) + D_2 B_{\nu_2}^{(\mu)}(chr)),$$

то умови спряження для визначення восьми величин A_j, B_j, C_j, D_j ($j = 1, 2$) дають чотири алгебраїчні рівняння, що явно недостатньо.

Отже, величини A_j, B_j, C_j, D_j як розв'язок відповідної спектральної задачі Штурма-Ліувілля визначити неможливо.

Скористаємося методом дельта-подібної послідовності – ядро Коші як фундаментальна матриця розв'язку задачі Коші для параболічної системи, породженої ГДО $M_{\alpha; (\mu)}$.

Розглянемо задачу про конструкцію обмеженого в області

$$D_1^+ = \{(t, r): t \in (0, \infty); r \in I_1^+ \equiv (0, R_1) \cup (R_1, \infty)\}$$

розв'язку системи рівнянь теплопровідності параболічного типу [4]

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} + \gamma_1^2 u_1 - a_1^2 B_{\alpha}^*[u_1(t, r)] &= 0, \gamma_1^2 \geq 0, r \in (0, R_1), \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} + \gamma_2^2 u_2 - a_2^2 \Lambda_{(\mu)}[u_2(t, r)] &= 0, \gamma_2^2 \geq 0, r \in (R_1, \infty) \end{aligned} \quad (6)$$

за початковими умовами

$$u_j(t, r)|_{t=0} = g_j(r), r \in (R_{j-1}, R_j), j = 1, 2, R_0 = 0, R_2 = \infty \quad (7)$$

та умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^1 \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j1}^1 \right) u_1(t, r) - \left(\alpha_{j2}^1 \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j2}^1 \right) u_2(t, r) \right]_{r=R_1} = 0, j = 1, 2. \quad (8)$$

Припустимо, що вектор-функція $u(t, r) = \{u_1(t, r); u_2(t, r)\}$ є оригіналом за Лапласом стосовно t [5]. У зображенні за Лапласом одержуємо, що параболічній задачі (8) – (10) відповідає крайова задача: побудувати обмежений на множині I_1^+ розв'язок сепаратної системи диференціальних рівнянь Ейлера та Лежандра для модифікованих функцій

$$\begin{aligned} (B_{\alpha}^* - q_1^2) u_1^*(p, r) &= -\bar{g}_1(r), r \in (0, R_1), \\ (\Lambda_{(\mu)} - q_2^2) u_2^*(p, r) &= -\bar{g}_2(r), r \in (R_1, \infty) \end{aligned} \quad (9)$$

за умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^1 \frac{d}{dr} + \beta_{j1}^1 \right) u_1^*(p, r) - \left(\alpha_{j2}^1 \frac{d}{dr} + \beta_{j2}^1 \right) u_2^*(p, r) \right]_{r=R_1} = 0, j = 1, 2. \quad (10)$$

$$\text{Тут } q_j = a_j^{-1} (p + \gamma_j^2)^{1/2}, \bar{g}_j(r) = a_j^{-2} g_j(r), j = 1, 2.$$

Фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Ейлера $(B_{\alpha}^* - q_1^2)v = 0$ утворюють функції $v_1 = r^{-\alpha+q_1}$ та $v_2 = r^{-\alpha+q_1}$ [2]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Лежандра $(\Lambda_{(\mu)} - q_2^2)v = 0$ утворюють узагальнені приєднані функції Лежандра першого роду $P_{\nu_2}^{(\mu)}(\text{chr})$ та другого роду $L_{\nu_2}^{(\mu)}(\text{chr})$ [1], $\nu_2 = -1/2 + q_2$.

Наявність фундаментальної системи розв'язків дозволяє побудувати загальний розв'язок крайової задачі (9), (10) методом функцій Коші [2, 3]:

$$\begin{aligned} u_1^*(p, r) &= A_1 r^{-\alpha+q_1} + \int_0^{R_1} E_1^*(p, r, \rho) \bar{g}_1(\rho) \rho^{2\alpha-1} d\rho, \\ u_2^*(p, r) &= A_2 L_{\nu_2}^{(\mu)}(\text{chr}) + \int_{R_1}^{\infty} E_2^*(p, r, \rho) \bar{g}_2(\rho) \text{sh} \rho d\rho. \end{aligned} \quad (11)$$

Тут $E_j^*(p, r, \rho)$ – функції Коші [2, 3]:

$$E_j^*(p, r, \rho) \Big|_{r=\rho+0} - E_j^*(p, r, \rho) \Big|_{r=\rho-0} = 0, \varphi_1(\rho) = \rho^{2\alpha+1},$$

$$\left. \frac{dE_j^*(p, r, \rho)}{dr} \right|_{r=\rho+0} - \left. \frac{dE_j^*(p, r, \rho)}{dr} \right|_{r=\rho-0} = -\frac{1}{\varphi_j(\rho)}, \quad \varphi_2(\rho) = \text{sh} \rho. \quad (12)$$

Припустимо, що функція Коші

$$E_1^*(p, r, \rho) = \begin{cases} \bar{E}_1^* \equiv C_1 r^{-\alpha+q_1}, & 0 < r < \rho < R_1, \\ E_2^* \equiv C_2 r^{-\alpha+q_1} + D_2 r^{-\alpha-q_1}, & 0 < \rho < r < R_1. \end{cases}$$

Властивості (12) для визначення величин C_1 , C_2 та D_2 дають алгебраїчну систему з двох рівнянь:

$$(C_2 - C_1) \rho^{-\alpha+q_1} + D_2 \rho^{-\alpha-q_1} = 0,$$

$$(-\alpha + q_1)(C_2 - C_1) \rho^{-\alpha+q_1} - (\alpha + q_1) D_2 \rho^{-\alpha-q_1} = -\rho^{-2\alpha}.$$

Звідси знаходимо співвідношення:

$$C_2 - C_1 = -\frac{1}{2q_1} \rho^{-\alpha-q_1}, \quad D_2 = \frac{1}{2q_1} \rho^{-\alpha+q_1}. \quad (13)$$

Доповнимо рівності (13) алгебраїчним рівнянням:

$$\left(\alpha_{11}^1 \frac{d}{dr} + \beta_{11}^1 \right) \bar{E}_1^* \Big|_{r=R_1} = 0 : Z_{\alpha,11}^{12}(q_1, R_1) C_2 + Z_{\alpha,11}^{11}(q_1, R_1) D_2 = 0. \quad (14)$$

Із алгебраїчної системи (13), (14) знаходимо, що

$$C_1 = [2q_1 Z_{\alpha,11}^{12}(q_1, R_1)]^{-1} \Psi_{\alpha,11}^{1*}(q_1, \rho).$$

Цим функція Коші $E_1^*(p, r, \rho)$ визначена й внаслідок симетрії відносно діагоналі $r = \rho$ має структуру:

$$E_1^*(p, r, \rho) = \frac{1}{2q_1 Z_{\alpha,11}^{12}(q_1, R_1)} \begin{cases} r^{-\alpha+q_1} \Psi_{\alpha,11}^{1*}(q_1, \rho), & 0 < r < \rho < R_1, \\ \rho^{-\alpha+q_1} \Psi_{\alpha,11}^{1*}(q_1, r), & 0 < \rho < r < R_1. \end{cases} \quad (15)$$

У рівностях (14), (15) беруть участь функції:

$$Z_{\alpha,j1}^{11}(q_1, R_1) = [-(\alpha + q_1) \alpha_{j1}^1 R_1^{-1} + \beta_{j1}^1] R_1^{-\alpha-q_1},$$

$$Z_{\alpha,j1}^{12}(q_1, R_1) = [-(\alpha - q_1) \alpha_{j1}^1 R_1^{-1} + \beta_{j1}^1] R_1^{-\alpha+q_1},$$

$$\Psi_{\alpha,j1}^{1*}(q_1, r) = Z_{\alpha,j1}^{12}(q_1, R_1) r^{-\alpha-q_1} - Z_{\alpha,j1}^{11}(q_1, R_1) r^{-\alpha+q_1}, \quad j = 1, 2.$$

Припустимо, що функція Коші

$$E_2^* = \begin{cases} \bar{E}_2^* \equiv C_1 P_{\nu_2}^{(\mu)}(\text{chr}) + D_1 L_{\nu_2}^{(\mu)}(\text{chr}), & R_1 < r < \rho < \infty, \\ E_2^* \equiv D_2 L_{\nu_2}^{(\mu)}(\text{chr}), & R_1 < \rho < r < \infty. \end{cases}$$

Властивості (12) функції Коші дають алгебраїчну систему з двох рівнянь:

$$-C_1 P_{\nu_2}^{(\mu)}(\text{ch}\rho) + (D_2 - D_1) L_{\nu_2}^{(\mu)}(\text{ch}\rho) = 0,$$

$$-C_1 P_{\nu_2}^{(\mu)'}(\text{ch}\rho) + (D_2 - D_1) L_{\nu_2}^{(\mu)'}(\text{ch}\rho) = -\frac{1}{\text{sh}^2 \rho}.$$

Звідси маємо співвідношення:

$$C_1 = B_{(\mu)}(q_2) L_{\nu_2}^{(\mu)}(\text{ch}\rho), \quad D_2 - D_1 = B_{(\mu)}(q_2) P_{\nu_2}^{(\mu)}(\text{ch}\rho). \quad (16)$$

Доповнимо рівності (16) алгебраїчним рівнянням:

$$\left(\alpha_{12}^1 \frac{d}{dr} + \beta_{12}^1 \right) \bar{E}_2^* \Big|_{r=R_1} = 0 : Z_{\nu_2,12}^{(\mu);11}(\text{ch}R_1) C_1 + Z_{\nu_2,12}^{(\mu);12}(\text{ch}R_1) D_1 = 0. \quad (17)$$

Із алгебраїчної системи (16), (17) знаходимо, що

$$D_2 = -[Z_{\nu_2,12}^{(\mu);12}(\text{ch}R_1)]^{-1} B_{(\mu)}(q_2) F_{\nu_2,12}^{(\mu),1}(\text{ch}R_1, \text{ch}\rho).$$

Цим функція Коші $E_2^*(p, r, \rho)$ визначена й внаслідок симетрії відносно діагоналі $r = \rho$ має структуру:

$$E_2^* = -\frac{B_{(\mu)}(q_2)}{Z_{v_2;12}^{(\mu);12}} \begin{cases} L_{v_2}^{(\mu)}(\text{ch}\rho)F_{v_2;12}^{(\mu),1}(\text{ch}R_1, \text{ch}r), & R_1 < r < \rho < \infty, \\ L_{v_2}^{(\mu)}(\text{ch}r)F_{v_2;12}^{(\mu),1}(\text{ch}R_1, \text{ch}\rho), & R_1 < \rho < r < \infty. \end{cases} \quad (18)$$

У рівностях (17), (18) беруть участь функції

$$Z_{v_2;j2}^{(\mu);11}(\text{ch}R_1) = \alpha_{j2}^1 \text{sh}R_1 P_{v_2}^{(\mu)'}(\text{ch}R_1) + \beta_{j2}^1 P_{v_2}^{(\mu)}(\text{ch}R_1),$$

$$Z_{v_2;j2}^{(\mu);12}(\text{ch}R_1) = \alpha_{j2}^1 \text{sh}R_1 L_{v_2}^{(\mu)'}(\text{ch}R_1) + \beta_{j2}^1 L_{v_2}^{(\mu)}(\text{ch}R_1),$$

$$F_{v_2;j2}^{(\mu),1}(\text{ch}R_1, \text{ch}r) = Z_{v_2;j2}^{(\mu);11}(\text{ch}R_1) L_{v_2}^{(\mu)}(\text{ch}r) - Z_{v_2;j2}^{(\mu);12}(\text{ch}R_1) P_{v_2}^{(\mu)}(\text{ch}r),$$

$$B_{(\mu)}(q_2) = \frac{\pi}{2} \frac{2^{\mu_1}}{2^{\mu_2}} \frac{\Gamma(1/2 + v_2 - 2^{-1}(\mu_1 + \mu_2))}{\Gamma(1/2 + v_2 + 2^{-1}(\mu_1 + \mu_2))} \cdot \frac{\Gamma(1/2 + v_2 - 2^{-1}(\mu_1 - \mu_2))}{\Gamma(1/2 + v_2 + 2^{-1}(\mu_1 - \mu_2))}.$$

Повернемось до формул (11). Умови спряження (10) для визначення величин A_1 , A_2 дають неоднорідну алгебраїчну систему з двох рівнянь:

$$Z_{\alpha;11}^{12}(q_1, R_1)A_1 - Z_{v_2;12}^{(\mu);12}(\text{ch}R_1)A_2 = 0,$$

$$Z_{\alpha;21}^{12}(q_1, R_1)A_1 - Z_{v_2;22}^{(\mu);12}(\text{ch}R_1)A_2 = G_{12}^*. \quad (19)$$

Тут бере участь функція

$$G_{12}^* = \frac{c_{11}}{R_1^{2\alpha+1}} \int_0^{R_1} \frac{\rho^{-\alpha+q_1}}{Z_{\alpha;11}^{12}(q_1, R_1)} \bar{g}_1(\rho) \rho^{2\alpha-1} d\rho + \frac{c_{21}}{\text{sh}R_1} \int_{R_1}^{\infty} \frac{L_{v_2}^{(\mu)}(\text{ch}\rho)}{Z_{v_2;12}^{(\mu);12}(\text{ch}R_1)} \bar{g}_2(\rho) \text{sh}\rho d\rho.$$

Припустимо, що виконана умова однозначної розв'язності даної параболічної задачі: для $p = \sigma + i s$ з $\text{Re } p = \sigma > \sigma_0$, де σ_0 – абсциса збіжності інтегралу Лапласа та $\text{Im } p = s \in (-\infty, \infty)$ визначник алгебраїчної системи (19)

$$\Delta_{\alpha,(\mu)}(p) \equiv Z_{\alpha;21}^{12}(q_1, R_1)Z_{v_2;12}^{(\mu);12}(\text{ch}R_1) - Z_{\alpha;11}^{12}(q_1, R_1)Z_{v_2;22}^{(\mu);12}(\text{ch}R_1) \neq 0. \quad (20)$$

Введемо до розгляду породжені неоднорідністю системи (9) функції впливу:

$$\mathcal{H}_{\alpha,(\mu);11}^*(p, r, \rho) = \frac{1}{2q_1 \Delta_{\alpha,(\mu)}(p)} \begin{cases} r^{-\alpha+q_1} [Z_{v_2;12}^{(\mu);12}(\text{ch}R_1) \Psi_{\alpha;21}^{1*}(q_1, \rho) - Z_{v_2;22}^{(\mu);12}(\text{ch}R_1) \Psi_{\alpha;11}^{1*}(q_1, \rho)], & 0 < r < \rho < R_1, \\ \rho^{-\alpha+q_1} [Z_{v_2;12}^{(\mu);12}(\text{ch}R_1) \Psi_{\alpha;21}^{1*}(q_1, r) - Z_{v_2;22}^{(\mu);12}(\text{ch}R_1) \Psi_{\alpha;11}^{1*}(q_1, r)], & 0 < \rho < r < R_1, \end{cases}$$

$$\mathcal{H}_{\alpha,(\mu);12}^*(p, r, \rho) = \frac{c_{21}}{\text{sh}R_1} \frac{1}{\Delta_{\alpha,(\mu)}(p)} r^{-\alpha+q_1} L_{v_2}^{(\mu)}(\text{ch}\rho),$$

$$\mathcal{H}_{\alpha,(\mu);21}^*(p, r, \rho) = \frac{c_{11}}{R_1^{2\alpha+1}} \frac{1}{\Delta_{\alpha,(\mu)}(p)} \rho^{-\alpha+q_1} L_{v_2}^{(\mu)}(\text{ch}r), \quad (21)$$

$$\mathcal{H}_{\alpha,(\mu);22}^*(p, r, \rho) = \frac{B_{(\mu)}(q_2)}{\Delta_{\alpha,(\mu)}(p)} \begin{cases} L_{v_2}^{(\mu)}(\text{ch}\rho) [Z_{\alpha;11}^{12} F_{v_2;22}^{(\mu),1}(\text{ch}R_1, \text{ch}r) - Z_{\alpha;21}^{12} F_{v_2;12}^{(\mu),1}(\text{ch}R_1, \text{ch}r)], & R_1 < r < \rho < \infty, \\ L_{v_2}^{(\mu)}(\text{ch}r) [Z_{\alpha;11}^{12} F_{v_2;22}^{(\mu),1}(\text{ch}R_1, \text{ch}\rho) - Z_{\alpha;21}^{12} F_{v_2;12}^{(\mu),1}(\text{ch}R_1, \text{ch}\rho)], & R_1 < \rho < r < \infty. \end{cases}$$

У результаті однозначної розв'язності алгебраїчної системи (19) й підстановки одержаних значень A_1 , A_2 у формули (11) маємо єдиний розв'язок крайової задачі (9), (10):

$$u_j^*(p, r) = \int_0^{R_1} \mathcal{H}_{\alpha,(\mu);j1}^*(p, r, \rho) \bar{g}_1(\rho) \rho^{2\alpha-1} d\rho + \int_{R_1}^{\infty} \mathcal{H}_{\alpha,(\mu);j2}^*(p, r, \rho) \bar{g}_2(\rho) \text{sh}\rho d\rho, \quad j = 1, 2. \quad (22)$$

Повертаючись у рівностях (22) до оригіналу, маємо єдиний розв'язок параболічної задачі (6) – (8):

$$u_j(t, r) = \int_0^{R_1} \mathcal{H}_{\alpha,(\mu);j1}(t, r, \rho) \bar{g}_1(\rho) \rho^{2\alpha-1} d\rho + \int_{R_1}^{\infty} \mathcal{H}_{\alpha,(\mu);j2}(t, r, \rho) \bar{g}_2(\rho) \text{sh}\rho d\rho, \quad j = 1, 2. \quad (23)$$

Тут, за означенням [5],

$$\mathcal{H}_{\alpha,(\mu);jk}(t,r,\rho) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_0-i\infty}^{\sigma_0+i\infty} \mathcal{H}_{\alpha,(\mu);jk}^*(p,r,\rho) e^{pt} dp; j, k = 1, 2. \quad (24)$$

Особливими точками функцій впливу $\mathcal{H}_{\alpha,(\mu);j2}^*(p,r,\rho)$ є точки розгалуження $p = -\gamma_j^2$ ($j=1,2$) та $p = \infty$ [5]. Покладемо $q_j = ib_j$, де $b_j \equiv a_j^{-1}(\beta^2 + \gamma^2 - \gamma_j^2)^{1/2} = a_j^{-1}(\beta^2 + k_j^2)^{1/2}$, $\gamma^2 = \max\{\gamma_1^2, \gamma_2^2\}$. Тоді будемо мати: $p \equiv a_j^{-1} \times (\beta^2 + \gamma^2) \exp(\pi i)$, $dp = -2\beta d\beta$.

Метод контурного інтегралу в поєднанні з лемою Жордана й теоремою Коші [5] переводить формули (24) в „робочі формули”:

$$\mathcal{H}_{\alpha,(\mu);jk}(t,r,\rho) = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \text{Im} \{ \mathcal{H}_{\alpha,(\mu);jk}(e^{\pi i}(\beta^2 + \gamma^2), r, \rho) e^{-(\beta^2 + \gamma^2)t} \} \beta d\beta, j, k = 1, 2, \quad (25)$$

Введемо до розгляду функції:

$$\begin{aligned} Y_{\alpha,m1}^{11}(b_1, R_1) &= [(\beta_{m1}^1 - \alpha_{m1}^1 R_1^{-1} \alpha) \cos(b_1 \ln R_1) - b_1 R_1^{-1} \alpha_{m1}^1 \sin(b_1 \ln R_1)] R_1^{-\alpha}, \\ Y_{\alpha,m1}^{12}(b_1, R_1) &= [(\beta_{m1}^1 - \alpha_{m1}^1 R_1^{-1} \alpha) \sin(b_1 \ln R_1) + b_1 R_1^{-1} \alpha_{m1}^1 \cos(b_1 \ln R_1)] R_1^{-\alpha}, \\ Y_{v_2,m2}^{(\mu),11}(\text{ch} R_1) &= \alpha_{m2}^1 \text{sh} R_1 A_{v_2^*}^{(\mu)'}(\text{ch} R_1) + \beta_{m2}^1 A_{v_2^*}^{(\mu)}(\text{ch} R_1), \quad v_2^* = -1/2 + ib_2, \\ Y_{v_2,m2}^{(\mu),12}(\text{ch} R_1) &= \alpha_{m2}^1 \text{sh} R_1 B_{v_2^*}^{(\mu)'}(\text{ch} R_1) + \beta_{m2}^1 B_{v_2^*}^{(\mu)}(\text{ch} R_1), \quad b_2 = a_2^{-1}(\beta^2 + k_2^2)^{1/2}, \\ e_{\alpha,(\mu);jk}(\beta) &= Y_{\alpha;11}^{1j}(b_1, R_1) Y_{v_2,22}^{(\mu),1k}(\text{ch} R_1) - Y_{\alpha;21}^{1j}(b_1, R_1) Y_{v_2,12}^{(\mu),1k}(\text{ch} R_1), j, k = 1, 2; \\ \omega_{\alpha,(\mu);1}(\beta) &= e_{\alpha,(\mu);11}(\beta) + \gamma_{(\mu)}(\beta) e_{\alpha,(\mu);22}(\beta), \\ \omega_{\alpha,(\mu);2}(\beta) &= e_{\alpha,(\mu);21}(\beta) - \gamma_{(\mu)}(\beta) e_{\alpha,(\mu);12}(\beta), \\ A_{v_2^*}^{(\mu)}(\text{chr}) &= \frac{1}{Z_{(\mu)}(b_2)} [\cos \mu_1 \pi L_{v_2^*}^{(\mu)}(\text{chr}) + i \gamma_{(\mu)}(b_2) P_{v_2^*}^{(\mu)}(\text{chr})], \\ B_{v_2^*}^{(\mu)}(\text{chr}) &= \frac{1}{Z_{(\mu)}(b_2)} [P_{v_2^*}^{(\mu)}(\text{chr}) - \sin \mu_1 \pi L_{v_2^*}^{(\mu)}(\text{chr})], \quad Z_{(\mu)} = \cos \mu_1 \pi + i \gamma_{(\mu)} \sin \mu_1 \pi, \\ \gamma_{(\mu)}(\beta) &= \cos \mu_1 \pi \cdot \text{sh} 2\pi b_2 (\cos \mu_2 \pi + \cos \mu_1 \pi \text{ch} 2\pi b_2)^{-1}, \\ v_1(r) &= r^{-\alpha} \cos(b_1 \ln r), \quad v_2(r) = r^{-\alpha} \sin(b_1 \ln r), \quad [\omega_{\alpha,(\mu)}(\beta)]^2 = [\omega_{\alpha,(\mu);1}(\beta)]^2 + [\omega_{\alpha,(\mu);2}(\beta)]^2. \end{aligned}$$

У результаті виконання зазначених у рівностях (25) операцій одержимо:

$$\begin{aligned} H_{\alpha,(\mu);11}(t,r,\rho) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty [f_{\alpha,(\mu);11}(\beta) v_1(r) v_1(\rho) + f_{\alpha,(\mu);12}(\beta) v_2(r) v_2(\rho) - \\ &\quad - f_{\alpha,(\mu);13}(\beta) (v_1(r) v_2(\rho) + v_1(\rho) v_2(r)) \frac{c_{21} R_1^{2\alpha+1}}{c_{11} \text{sh} R_1} \Omega_{\alpha,(\mu)}(\beta) \exp[-(\beta^2 + \gamma^2)t] d\beta a_1^2 \sigma_1, \\ H_{\alpha,(\mu);12}(t,r,\rho) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \{ [\omega_{\alpha,(\mu);1}(\beta) A_{v_2^*}^{(\mu)}(\text{ch} \rho) - \gamma_{(\mu)}(\beta) \omega_{\alpha,(\mu);2}(\beta) B_{v_2^*}^{(\mu)}(\text{ch} \rho)] v_2(r) - \\ &\quad - [\omega_{\alpha,(\mu);2}(\beta) A_{v_2^*}^{(\mu)}(\text{ch} \rho) + \gamma_{(\mu)}(\beta) \omega_{\alpha,(\mu);1}(\beta) B_{v_2^*}^{(\mu)}(\text{ch} \rho)] v_1(r) \} \frac{b_1 c_{21}}{\text{sh} R_1} \times \\ &\quad \times \Omega_{\alpha,(\mu)}(\beta) \exp[-(\beta^2 + \gamma^2)t] d\beta \sigma_2 a_2^2, \\ H_{\alpha,(\mu);21}(t,r,\rho) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \{ [\omega_{\alpha,(\mu);1}(\beta) A_{v_2^*}^{(\mu)}(\text{chr}) - \gamma_{(\mu)}(\beta) \omega_{\alpha,(\mu);2}(\beta) B_{v_2^*}^{(\mu)}(\text{chr})] v_2(\rho) - \\ &\quad - [\omega_{\alpha,(\mu);2}(\beta) A_{v_2^*}^{(\mu)}(\text{chr}) + \gamma_{(\mu)}(\beta) \omega_{\alpha,(\mu);1}(\beta) B_{v_2^*}^{(\mu)}(\text{chr})] v_1(\rho) \} \frac{b_1 c_{21}}{\text{sh} R_1} \times \\ &\quad \times \Omega_{\alpha,(\mu)}(\beta) \exp[-(\beta^2 + \gamma^2)t] d\beta a_1^2 \sigma_1, \end{aligned} \quad (26)$$

$$H_{\alpha, (\mu); 22}(t, r, \rho) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty [f_{\alpha, (\mu); 21}(\beta) B_{\nu_2^*}^{(\mu)}(\text{chr}) B_{\nu_2^*}^{(\mu)}(\text{ch}\rho) \gamma_{(\mu)}(\beta) + f_{\alpha, (\mu); 22}(\beta) A_{\nu_2^*}^{(\mu)}(\text{chr}) \times \\ \times A_{\nu_2^*}^{(\mu)}(\text{ch}\rho) - \gamma_{(\mu)}(\beta) f_{\alpha, 23}(\beta) (A_{\nu_2^*}^{(\mu)}(\text{ch}\rho) B_{\nu_2^*}^{(\mu)}(\text{chr}) + A_{\nu_2^*}^{(\mu)}(\text{chr}) B_{\nu_2^*}^{(\mu)}(\text{ch}\rho))] \times \\ \times b_1 S_{(\mu)}(b_2) \Omega_{\alpha, (\mu)}(\beta) \exp[-(\beta^2 + \gamma^2)t] d\beta \sigma_2 a_2^2, \\ S_{(\mu)}(b_2) = \frac{2^{\mu_1 - \mu_2} \pi^3 \gamma_{(\mu)}(b_2)}{(\text{sh} 2\pi b)^2 |\Gamma(1/2 + ib_2 + 1/2(\mu_1 + \mu_2))|^2 |\Gamma(1/2 + ib_2 + 1/2(\mu_1 - \mu_2))|^2}.$$

Тут беруть участь функції:

$$f_{\alpha, (\mu); 11}(\beta) = [e_{\alpha, (\mu); 21}(\beta)]^2 + [\gamma_{(\mu)}(\beta) e_{\alpha, (\mu); 22}(\beta)]^2 + \gamma_{(\mu)}(\beta) q_{\alpha, (\mu)}(\beta) \equiv e_{21}\omega_2 + \gamma e_{22}\omega_1, \\ f_{\alpha, (\mu); 12}(\beta) = [e_{\alpha, (\mu); 11}(\beta)]^2 + [\gamma_{(\mu)}(\beta) e_{\alpha, (\mu); 12}(\beta)]^2 + \gamma_{(\mu)}(\beta) q_{\alpha, (\mu)}(\beta) \equiv e_{11}\omega_1 - \gamma e_{12}\omega_2, \\ f_{\alpha, (\mu); 13}(\beta) = e_{\alpha, (\mu); 11}(\beta) e_{\alpha, (\mu); 21}(\beta) + \gamma_{(\mu)}^2 e_{\alpha, (\mu); 12}(\beta) e_{\alpha, (\mu); 22}(\beta) \equiv e_{11}\omega_1 + \gamma e_{12}\omega_1 = e_{21}\omega_1 - \gamma e_{22}\omega_2, \\ f_{\alpha, (\mu); 21}(\beta) = [e_{\alpha, (\mu); 11}(\beta)]^2 + [e_{\alpha, (\mu); 21}(\beta)]^2 + \gamma_{(\mu)}(\beta) q_{\alpha, (\mu)}(\beta) \equiv e_{11}\omega_1 + e_{21}\omega_2, \\ f_{\alpha, (\mu); 22}(\beta) = \gamma_{(\mu)}(\beta) [(e_{\alpha, (\mu); 12}(\beta))^2 + (e_{\alpha, (\mu); 22}(\beta))^2] + q_{\alpha, (\mu)}(\beta) \equiv e_{22}\omega_1 - e_{12}\omega_2, \\ f_{\alpha, (\mu); 23}(\beta) = e_{\alpha, (\mu); 11}(\beta) e_{\alpha, (\mu); 12}(\beta) + e_{\alpha, (\mu); 21}(\beta) e_{\alpha, (\mu); 22}(\beta) \equiv e_{12}\omega_1 + e_{22}\omega_2 \equiv \\ \equiv \gamma_{(\mu)}^{-1} (e_{21}\omega_1 - e_{11}\omega_2), q_{\alpha, (\mu)}(\beta) = \frac{c_{11} b_1}{R_1^{2\alpha+1}} \frac{c_{21}}{S_{(\mu)}(b_2) \text{sh} R_1},$$

$$\Omega_{\alpha, (\mu)}(\beta) = \beta [b_1(\beta)]^{-1} [\omega_{\alpha, (\mu); 1}(\beta)]^2 + [\omega_{\alpha, (\mu); 2}(\beta)]^2)^{-1}.$$

Будемо вимагати виконання рівностей:

$$H_{\alpha, (\mu); jk}(t, r, \rho) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-(\beta + \gamma^2)t} \text{Re}[V_{\alpha, (\mu); j}(r, \beta) \overline{V_{\alpha, (\mu); k}(\rho, \beta)}] \Omega_{\alpha, (\mu)}(\beta) d\beta \sigma_k a_k^2. \quad (27)$$

Для визначення коефіцієнтів A_j , B_j , C_j та D_j ($j = 1, 2$) одержуємо таку алгебраїчну систему рівнянь другого степеня:

$$A_1^2 + C_1^2 = q_1 f_{\alpha, (\mu); 11}(\beta), q_1 = c_{21} R_1^{2\alpha+1} : c_{11} \text{sh} R_1, \\ B_1^2 + D_1^2 = q_1 f_{\alpha, (\mu); 12}(\beta), A_1 B_1 + C_1 D_1 = -q_1 f_{\alpha, (\mu); 13}(\beta), \quad (28)$$

$$A_1 A_2 + C_1 C_2 = -q_2 \omega_{\alpha, (\mu); 2}(\beta), q_2 = b_1 c_{21} (\text{sh} R_1)^{-1}, \\ A_1 B_2 + C_1 D_2 = -q_2 \gamma_{(\mu)} \omega_{\alpha, (\mu); 1}(\beta), \quad (29) \\ B_1 A_2 + D_1 C_2 = q_2 \omega_{\alpha, (\mu); 1}(\beta), \\ B_1 B_2 + D_1 D_2 = -q_2 \gamma_{(\mu)} \omega_{\alpha, (\mu); 2}(\beta), \\ A_2^2 + C_2^2 = b_1 S_{(\mu)}(b_2) f_{\alpha, (\mu); 2}(\beta) \\ B_2^2 + D_2^2 = \gamma_{(\mu)}(\beta) b_1 S_{(\mu)}(b_2) f_{\alpha, (\mu); 21}(\beta), \\ A_2 B_2 + C_2 D_2 = -b_1 \gamma_{(\mu)}(\beta) S_{(\mu)}(b_2) f_{\alpha, (\mu); 23}(\beta).$$

Із алгебраїчної системи (29) при $C_2 = 0$ знаходимо, що

$$A_2 = \sqrt{b_1 S_{(\mu)}(b_2) f_{\alpha, (\mu); 22}}, B_2 = -\sqrt{b_1 S_{(\mu)}(b_2) f_{\alpha, (\mu); 22}^{-1} \gamma_{(\mu)}(\beta) f_{\alpha, (\mu); 23}(\beta)}, \\ D_2 = [b_1 S_{(\mu)} \gamma_{(\mu)} f_{\alpha, (\mu); 22}^{-1} (f_{\alpha, (\mu); 21} f_{\alpha, (\mu); 22} - \gamma_{(\mu)} f_{\alpha, (\mu); 23}^2)]^{1/2} = \\ = \sqrt{b_1 S_{(\mu)} \gamma_{(\mu)} f_{\alpha, (\mu); 22}^{-1}} \sqrt{q_{\alpha, (\mu)} (\omega_{\alpha, (\mu); 1}^2 + \omega_{\alpha, (\mu); 2}^2)}; \\ A_1 = -q_2 \omega_{\alpha, (\mu); 2}(\beta) A_2^{-1}, B_1 = q_2 \omega_{\alpha, (\mu); 1}(\beta) A_2^{-1}, \\ C_1 = -\frac{q_2 e_{\alpha, (\mu); 22} [\gamma_{(\mu)} (\omega_{\alpha, (\mu); 1}^2 + \omega_{\alpha, (\mu); 2}^2)]^{1/2}}{[b_1 S_{(\mu)} f_{\alpha, (\mu); 22} q_{\alpha, (\mu)}]^{1/2}}, \\ D_1 = \frac{q_2 e_{\alpha, (\mu); 12} \sqrt{\gamma_{(\mu)} (\omega_{\alpha, (\mu); 1}^2 + \omega_{\alpha, (\mu); 2}^2)}}{[b_1 S_{(\mu)} f_{\alpha, (\mu); 22} q_{\alpha, (\mu)}]^{1/2}}.$$

Покажемо, що при такому виборі величин A_j , B_j , C_j та D_j ($j = 1, 2$) алгебраїчні рівняння системи (28) стають тотожностями.

Безпосередньо маємо, опускаючи в індексах $(\alpha, (\mu))$ та (μ) :

$$\begin{aligned}
A_1^2 + C_1^2 &= \frac{q_2^2 \omega_2^2}{b_1 S f_{22}} + \frac{q_2^2 \gamma^2 (\omega_1 f_{22} + \omega_2 f_{23})^2}{b_1 S f_{22} (f_{21} f_{22} - \gamma f_{23}^2)} = \frac{q_2^2}{b_1 S f_{22} (f_{21} f_{22} - \gamma f_{23}^2)} \times \\
&\times [f_{21} f_{22} \omega_2^2 - \gamma \omega_2^2 f_{23}^2 + \gamma \omega_1^2 f_{22}^2 + 2 \gamma \omega_1 \omega_2 f_{22} f_{23} + \gamma \omega_2^2 f_{23}^2] = \frac{q_2^2 f_{22}}{b_1 S f_{22} q_{\alpha,(\mu)} (\omega_1^2 + \omega_2^2)} \times \\
&\times [f_{21} \omega_2^2 + \omega_1 \omega_2 \gamma f_{23} + \gamma (\omega_1^2 f_{22} + \omega_1 \omega_2 f_{23})] = \frac{q_2^2 (\omega_1^2 + \omega_2^2) f_{11}}{b_1 S q_{\alpha,(\mu)} (\omega_1^2 + \omega_2^2)} = \frac{b_1^2 c_{21} R_1^{2\alpha+1} \operatorname{sh} R_1}{\operatorname{sh}^2 R_1 b_1 c_{11} b_1 c_{21}} f_{11} \equiv q_1 f_{\alpha,(\mu); 11}(\beta); \\
B_1^2 + D_1^2 &= \frac{q_2^2 \omega_1^2}{b_1 S f_{22}} + \frac{q_2^2 \gamma^2 (\omega_1 f_{23} - \omega_2 f_{22})^2}{b_1 S f_{22} (f_{21} f_{22} - \gamma f_{23}^2)} = \frac{q_2^2}{b_1 S q_{\alpha,(\mu)} (\omega_1^2 + \omega_2^2)} [\omega_1 (\omega_1 f_{21} - \gamma \omega_2 f_{23}) + \\
&+ \gamma \omega_2 (\omega_2 f_{22} - \omega_1 f_{23})] = \frac{q_2^2 (\omega_1^2 + \omega_2^2) f_{11}}{b_1 S q_{\alpha,(\mu)} (\omega_1^2 + \omega_2^2)} (e_{11} \omega_1 - \gamma e_{12} \omega_2) \equiv q_1 f_{\alpha,(\mu); 12}(\beta); \\
A_1 B_1 + C_1 D_1 &= -\frac{q_2^2}{b_1 S f_{22}} \{ \omega_1 \omega_2 (f_{21} f_{22} - \gamma f_{23}^2) + \gamma (\omega_1 f_{22} + \omega_2 f_{23}) (\omega_1 f_{23} - \omega_2 f_{22}) \} \times \\
&\times \frac{1}{q_{\alpha,(\mu)} (\omega_1^2 + \omega_2^2)} = \frac{q_2^2}{b_1 S q_{\alpha,(\mu)} (\omega_1^2 + \omega_2^2)} (\omega_1 e_{21} - \gamma \omega_2 e_{22}) \equiv -q_1 f_{\alpha,(\mu); 13}(\beta).
\end{aligned}$$

Отже, алгебраїчна система (28), (29) сумісна, і ми одержуємо аналітичні формули структури функцій $V_{\alpha,(\mu);j}(\mathbf{r}, \beta)$:

$$\begin{aligned}
V_{\alpha,(\mu);1}(\mathbf{r}, \beta) &= \frac{q_2}{(b_1 S_{(\mu)} f_{\alpha,(\mu);22})^{1/2}} [\omega_{\alpha,(\mu);1}(\beta) v_2(\mathbf{r}, \beta) - \omega_{\alpha,(\mu);2}(\beta) v_1(\mathbf{r}, \beta)] + \\
&+ i(\gamma_{(\mu)} q_{\alpha,(\mu)}^{-1} (\omega_{\alpha,(\mu);1}^2 + \omega_{\alpha,(\mu);2}^2))^{1/2} (e_{\alpha,(\mu);12}(\beta) v_2(\mathbf{r}, \beta) - e_{\alpha,(\mu);22}(\beta) v_1(\mathbf{r}, \beta)), \\
V_{\alpha,(\mu);2}(\mathbf{r}, \beta) &= (b_1 S_{(\mu)} f_{\alpha,(\mu);22}^{-1}(\beta))^{1/2} [f_{\alpha,(\mu);22}(\beta) A_{-1/2+ib_2}^{(\mu)}(chr) - \gamma_{(\mu)} f_{\alpha,(\mu);23}(\beta) \times \\
&\times B_{-1/2+ib_2}^{(\mu)}(chr)] + i[b_1 \gamma_{(\mu)} S_{(\mu)} q_{\alpha,(\mu)} f_{\alpha,(\mu);22}^{-1}(\beta) (\omega_{\alpha,(\mu);1}^2 + \omega_{\alpha,(\mu);2}^2)] B_{-1/2+ib_2}^{(\mu)}(chr). \quad (30)
\end{aligned}$$

Безпосередньо перевіряється, що функції $V_{\alpha,(\mu);1}(\mathbf{r}, \beta)$ та $V_{\alpha,(\mu);2}(\mathbf{r}, \beta)$ задовольняють однорідні умови спряження.

Формули (23) перепишемо в такому вигляді:

$$\begin{aligned}
u_j(\mathbf{r}, t) &= \int_0^{R_1} \left(\frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-(\beta^2 + \gamma^2)t} \operatorname{Re}[V_{\alpha,(\mu);j}(\mathbf{r}, \beta) \overline{V_{\alpha,(\mu);1}(\rho, \beta)}] \Omega_{\alpha,(\mu)}(\beta) d\beta \right) g_1(\rho) \sigma_1 \rho^{2\alpha-1} d\rho + \\
&+ \int_{R_1}^\infty \left(\frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-(\beta^2 + \gamma^2)t} \operatorname{Re}[V_{\alpha,(\mu);j}(\mathbf{r}, \beta) \overline{V_{\alpha,(\mu);2}(\rho, \beta)}] \Omega_{\alpha,(\mu)}(\beta) d\beta \right) g_2(\rho) \operatorname{sh} \rho d\rho \equiv \\
&\equiv \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-(\beta^2 + \gamma^2)t} \operatorname{Re}[V_{\alpha,(\mu);j}(\mathbf{r}, \beta) \int_0^{R_1} g_1(\rho) \overline{V_{\alpha,(\mu);1}(\rho, \beta)} \sigma_1 \rho^{2\alpha-1} d\rho] \Omega_{\alpha,(\mu)}(\beta) d\beta + \\
&+ \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-(\beta^2 + \gamma^2)t} \operatorname{Re}[V_{\alpha,(\mu);j}(\mathbf{r}, \beta) \int_{R_1}^\infty g_2(\rho) \overline{V_{\alpha,(\mu);2}(\rho, \beta)} \sigma_2 \operatorname{sh} \rho d\rho] \Omega_{\alpha,(\mu)}(\beta) d\beta, \quad j = 1, 2.
\end{aligned} \quad (31)$$

Внаслідок властивостей ядра Коші як дельта-подібної послідовності та в силу початкових умов (7) із рівностей (31) одержуємо інтегральні зображення:

$$\begin{aligned}
g_1(\mathbf{r}) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re}[V_{\alpha,(\mu);1}(\mathbf{r}, \beta) \int_0^{R_1} g_1(\rho) \overline{V_{\alpha,(\mu);1}(\rho, \beta)} \sigma_1 \rho^{2\alpha-1} d\rho] \Omega_{\alpha,(\mu)}(\beta) d\beta, \\
g_2(\mathbf{r}) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re}[V_{\alpha,(\mu);2}(\mathbf{r}, \beta) \int_{R_1}^\infty g_2(\rho) \overline{V_{\alpha,(\mu);2}(\rho, \beta)} \sigma_2 \operatorname{sh} \rho d\rho] \Omega_{\alpha,(\mu)}(\beta) d\beta. \quad (32)
\end{aligned}$$

Інтегральні зображення (32) рівносильні інтегральному зображенню:

$$g(\mathbf{r}) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re}[V_{\alpha,(\mu)}(\mathbf{r}, \beta) \int_0^\infty g(\rho) \overline{V_{\alpha,(\mu)}(\rho, \beta)} \sigma(\rho) d\rho] \Omega_{\alpha,(\mu)}(\beta) d\beta. \quad (33)$$

Інтегральне зображення (33) визначає пряме $H_{\alpha, (\mu)}$ та обернене $H_{\alpha, (\mu)}^{-1}$ гібридне інтегральне перетворення (ГП), породжене на множині I_1^+ ГДО $M_{\alpha, (\mu)}$:

$$H_{\alpha, (\mu); 1}[g(r)] = \int_0^\infty g(r) \overline{V_{\alpha, (\mu)}(r, \beta) \sigma(r)} dr \equiv \bar{g}(\beta). \quad (34)$$

$$H_{\alpha, (\mu); 1}^{-1}[\bar{g}(\beta)] = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re}[\bar{g}(\beta) V_{\alpha, (\mu)}(r, \beta)] \Omega_{\alpha, (\mu)}(\beta) d\beta \equiv g(r). \quad (35)$$

Підсумком викладеного вище є твердження.

Теорема (про інтегральне зображення). Якщо вектор-функція $f(r) = [\theta(r)\theta(R_1 - r)r^{\alpha - 1/2} + \theta(r - R_1) \exp(\frac{1}{2}r)]g(r)$ неперервна, абсолютно сумовна й має обмежену варіацію на множині $(0, \infty)$, то для будь-якого $r \in I_1^+$ справджується інтегральне зображення (33).

Застосування запровадженого формулами (34), (35) ГП базується на основній тотожності ГП ГДО $M_{\alpha, (\mu)}$.

Теорема (про основну тотожність). Якщо вектор-функція $f(r) = \{B_\alpha^*[g_1(r)]; \Lambda_{(\mu)}[g_2(r)]\}$ неперервна на множині I_1^+ , а функції $g_j(r)$ задовольняють умови спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^1 \frac{d}{dr} + \beta_{j1}^1 \right) g_1(r) - \left(\alpha_{j2}^1 \frac{d}{dr} + \beta_{j2}^1 \right) g_2(r) \right] \Big|_{r=R_1} = \omega_{j1}, \quad j = 1, 2 \quad (36)$$

й умови обмеження (3), то має місце основна тотожність інтегрального перетворення ГДО $M_{\alpha, (\mu)}$:

$$\begin{aligned} H_{\alpha, (\mu)}[\mathcal{M}_{\alpha, (\mu)}[g(r)]] = & -\beta^2 \bar{g}(\beta) - k_1^2 \int_0^{R_1} g_1(r) \overline{V_{\alpha, (\mu); 1}(r, \beta) \sigma_1} r^{2\alpha-1} dr - \\ & - k_2^2 \int_{R_1}^\infty g_2(r) \overline{V_{\alpha, (\mu); 2}(r, \beta) \sigma_2} shr dr + \frac{shR_1}{c_{21}} [Z_{\alpha, (\mu); 12}^1(\beta) \omega_{21} - \overline{Z_{\alpha, (\mu); 22}^1(\beta) (\beta) \omega_{11}}], \quad (37) \\ & \overline{Z_{\alpha, (\mu); m2}^1(\beta)} = \left(\alpha_{m2}^1 \frac{d}{dr} + \beta_{m2}^1 \right) \overline{V_{\alpha, (\mu); 2}(r, \beta)} \Big|_{r=R_1}, \quad m = 1, 2. \end{aligned}$$

Доведення рівності (37) одержується, якщо проінтегрувати два рази частинами під знаком інтегралів й скористатися базовою тотожністю, властивостями функцій $V_{\alpha, (\mu); j}(r, \beta)$ та структурою σ_1, σ_2 .

Застосування до розв'язання відповідних сингулярних задач математичної фізики, запровадженого формулами (34), (35) ГП, подамо в іншій роботі.

Висновок. Запроваджене в даній роботі гібридне інтегральне перетворення дає можливість виключити із розгляду гібридний диференціальний оператор $M_{\alpha, (\mu)}$ й одержати інтегральне зображення розвитку достатньо широкого класу задач статистики та динаміки неоднорідних середовищ.

Література

1. Ленюк М.П., Шинкарик М.І. Гібридні інтегральні перетворення (Фур'є, Бесселя, Лежандра). Частина 1. – Тернопіль: Економ. думка, 2004. – 368 с.
2. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1959. – 468 с.
3. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс. – М.: Наука, 1965. – 328 с.
4. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972. – 735 с.
5. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1987. – 688 с.

Одержано 23.08.2008 р.