

Міністерство освіти і науки України
Тернопільський національний технічний університет
імені Івана Пулюя

ЛІТЕРАТУРА

*Кафедра технічної механіки
і сільськогосподарського
машинобудування*



ВАРІАНТИ ЗАДАЧ і приклади їх розв'язку

для виконання розрахунково-графічних робіт з курсу

«Опір матеріалів»

для студентів напрямків підготовки
“Інженерна механіка”, “Машинобудування”

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНА

Тернопіль – 2010

Розділ 1. Задачі для виконання розрахунково-графічних робіт

Задача №1. Побудова епюр осьових зусиль

Для заданого сталюого ступінчастого стержня (рис. 1.1, табл. 1.1) побудувати епюри осьових зусиль N з урахуванням власної ваги стержня, якщо $l = 40\text{м}$; $F_2 = 2F_1 = 40\text{сМ}^2$; питома вага – $\gamma = 77\text{кН/м}^3$.

План розв'язання задачі:

1. Побудувати розрахункову схему із дотриманням пропорцій.
2. Написати рівняння $N(x)$ для кожної ділянки; написати границі, в яких це рівняння придатне.
3. Побудувати епюру осьових зусиль.

Таблиця 1.1

№ п/п	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$P_1, \text{кН}$	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
$P_2, \text{кН}$	5	3	4	2	1	5	4	3	2	1
$P_3, \text{кН}$	3	2	1	5	4	3	2	1	5	4
a	0,8l	0,6l	0,4l	0,8l	0,6l	0,4l	0,8l	0,6l	0,4l	0,8l
b	0,6l	0,4l	0,2l	0,6l	0,4l	0,2l	0,6l	0,4l	0,2l	0,6l

Задача №2. Розрахунок на міцність і визначення переміщень при розтягу і стиску

Для заданого ступінчастого стержня (рис. 1.2, табл. 1.2) визначити розміри поперечного перетину на всіх ділянках за умови, що форма перетину коло, побудувати епюри нормальних напружень і поздовжніх переміщень стержня, якщо $l = 8\text{м}$; $a = kl$; $b = ml$.

План розв'язання задачі:

1. Побудувати розрахункову схему.
2. Побудувати епюру осьових сил.
3. Задавшись запасом міцності, визначити діаметри стержня на всіх ділянках (округлюючи отримані величини до розміру кратного 2 або 5), виходячи з умови міцності. Побудувати ескіз стержня.
4. Визначити абсолютну деформацію окремих ступенів і всього стержня, побудувати епюру розподілу переміщень на його довжині.
5. Обчислити на кожній ділянці нормальне напруження σ і побудувати епюру напружень.

Таблиця 1.2

№ п/п	$P_1, \text{кН}$	$P_2, \text{кН}$	$P_3, \text{кН}$	k	m	матеріал
0	5	30	50	0,2	0,5	Ст.1
1	10	40	20	0,4	0,7	Ст.2
2	20	10	60	0,1	0,4	Ст.3
3	15	20	40	0,3	0,6	Ст.4
4	30	25	10	0,25	0,65	Ст.0
5	25	50	25	0,35	0,75	Ст.1
6	40	15	30	0,45	0,8	Ст.2
7	20	30	50	0,15	0,6	Ст.3
8	50	20	40	0,2	0,2	Ст.4
9	60	10	20	0,4	0,8	Ст.0

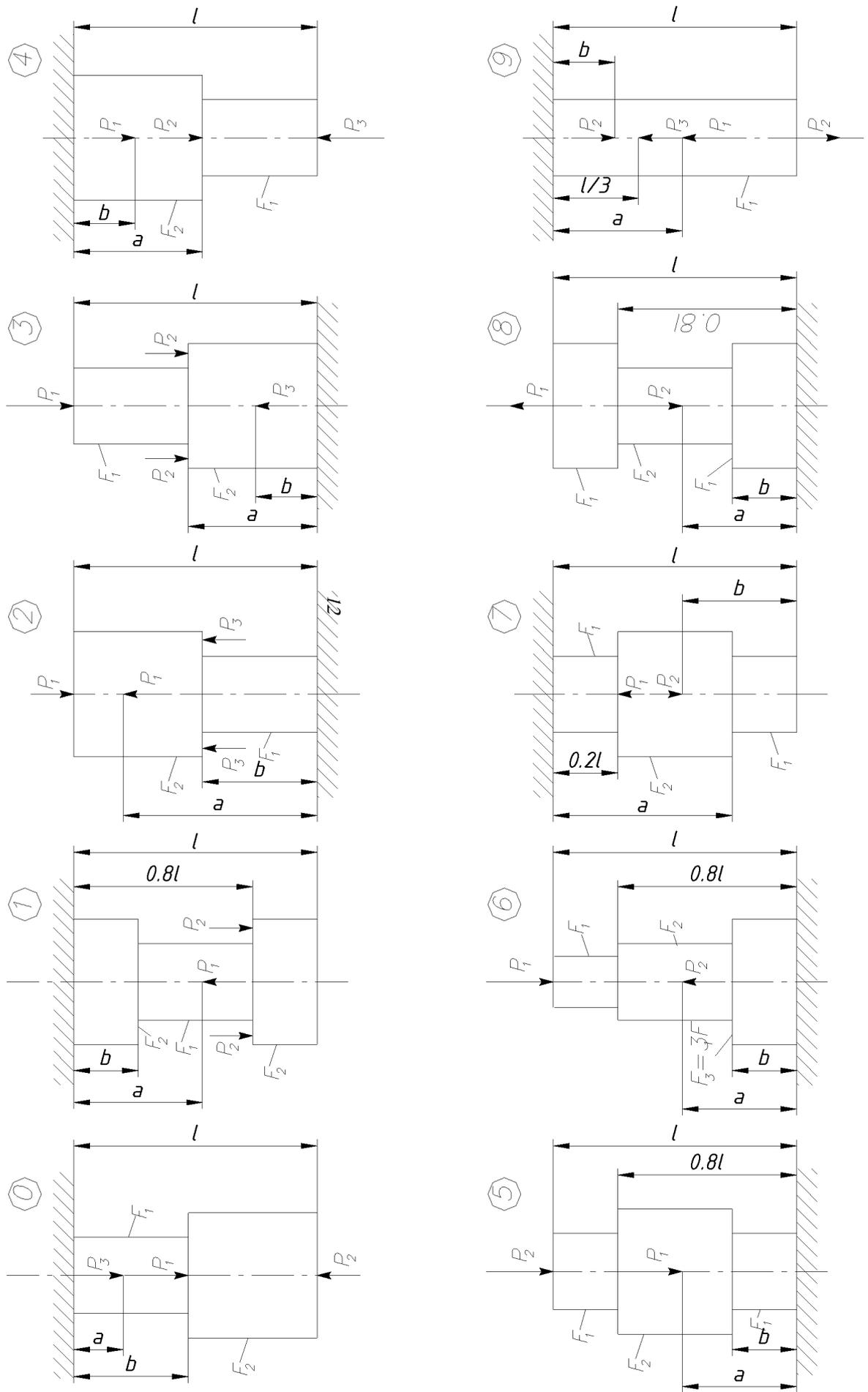


Рис.1.1

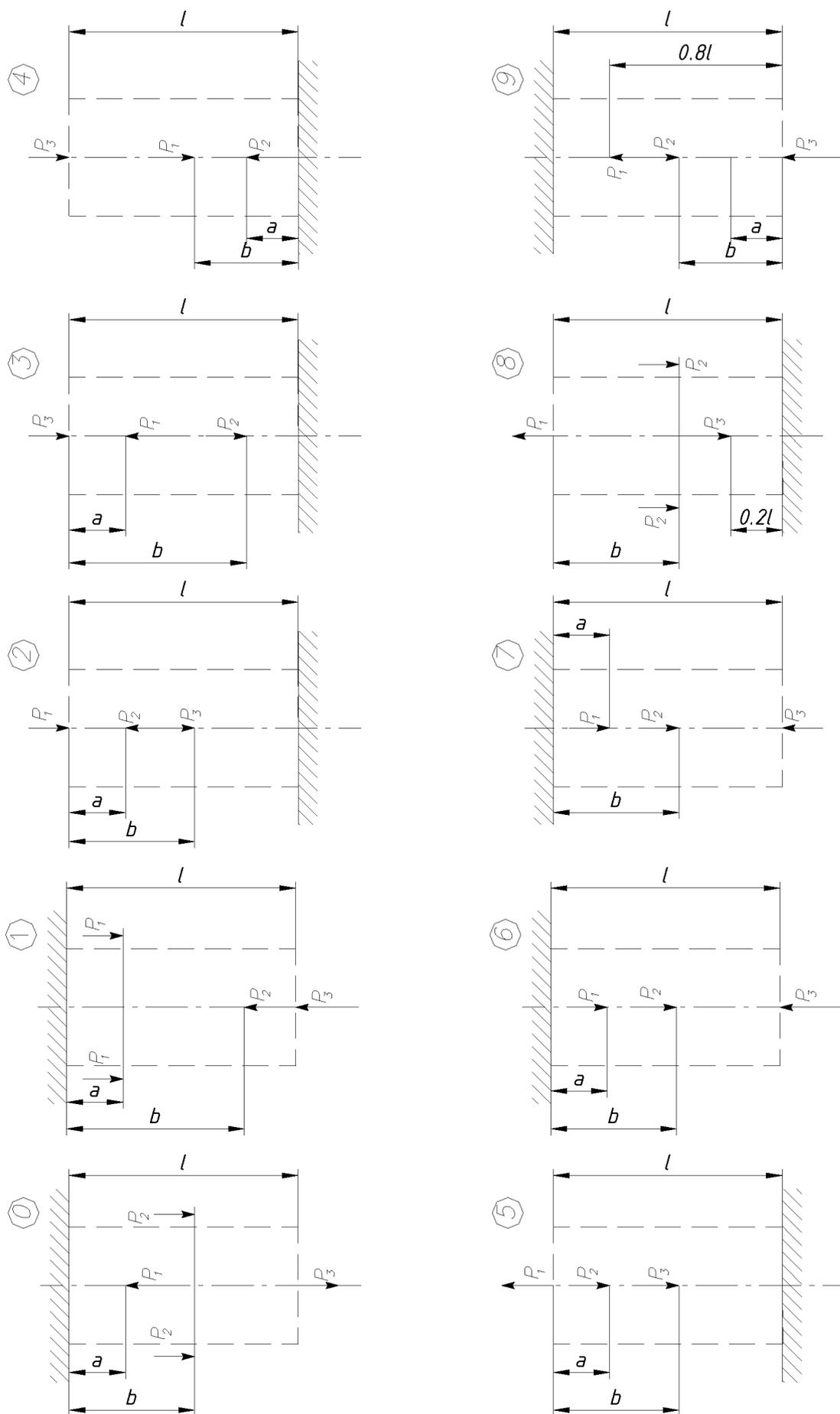


Рис. 1.2

Задача №3. Розрахунок статично невизначеної стержневої системи

Для заданої стержневої системи, до якої прикладена сила $P = 50kH$ (рис. 1.3), визначити діаметри стержнів DE і КН, якщо відоме відношення їх площ $\frac{F_{DE}}{F_{KH}} = \alpha$. Матеріал стержнів – сталь 3, $[\sigma] = 160MH/m^2$; $a = 1m$. Брус АС вважати абсолютно жорстким.

План розв'язання задачі:

1. Накреслити схему стержневої системи у масштабі.
2. Встановити ступінь статичної невизначеності системи.
3. Скласти додаткові рівняння, розглянувши деформацію системи.
4. Визначити зусилля у стержнях.
5. Підібрати перетини стержнів.

Задача №4. Аналіз напруженого стану

Для заданого елемента (рис. 1.4, табл. 1.4) визначити: положення головних площин (графічно і аналітично), величину і напрям головних напружень, лінійні деформації у напрямі всіх головних напружень і відносну зміну об'єму. Перевірити елемент на міцність за відповідними для заданих матеріалів теоріями міцності.

План розв'язання задачі:

1. Користуючись табл. 1.4 і рис. 1.4 визначити величини і напрями σ_α , σ_β , τ_α , τ_β (індекси «в» і «г» на рис. 4 означають «вертикальний» і «горизонтальний», замінити їх на α і β згідно з величиною і знаком σ), зобразити заданий елемент.
2. Визначити графічно величину і напрям головних напружень. Всередині заданого елемента зобразити «головний елемент», обмежений головними площинами.
3. Визначити величину τ_{\max} і на тому ж самому рисунку показати положення площини, на якій τ_{\max} діє.
4. Перевірити отримані результати аналітично.
5. Визначити відносні деформації у напрямках всіх трьох головних напружень (значення E і μ взяти з таблиці).
6. Визначити відносну зміну об'єму.
7. Знайти розрахункове напруження за однією з відповідних заданому матеріалу теорій міцності (за вибором студента) і порівняти його з допустимим, приймаючи запас міцності $k_T = 1,5$; $k_B = 2,5$

Таблиця 1.4

№ п/п	$\sigma_b, \frac{MH}{M^2}$	$\sigma_z, \frac{MH}{M^2}$	$\tau, \frac{MH}{M^2}$	Матеріал	
				Чавун	Сталь
0	100	50	10	СЧ12-28	Ст. 1
1	0	60	20	СЧ15-32	Ст. 2
2	20	0	30	СЧ18-36	Ст. 3
3	30	80	40	СЧ21-40	Ст. 4
4	40	90	50	СЧ24-44	Ст. 5
5	50	0	25	СЧ28-48	Ст. 6
6	60	10	15	СЧ32-52	Ст. 1
7	0	20	45	СЧ35-56	Ст. 2
8	80	30	35	СЧ38-60	Ст. 3
9	90	40	10	СЧ18-36	Ст. 4

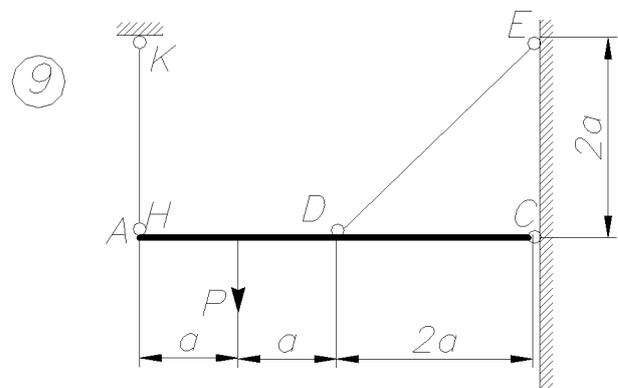
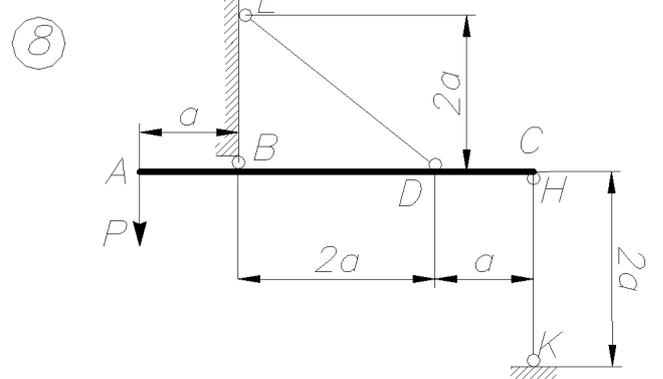
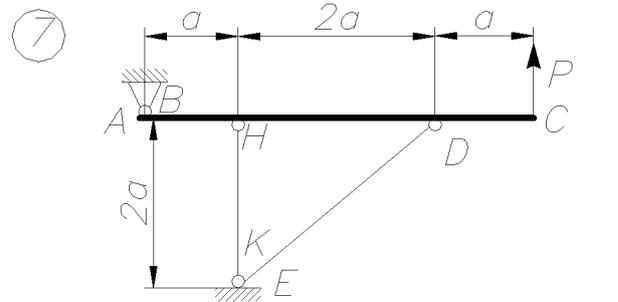
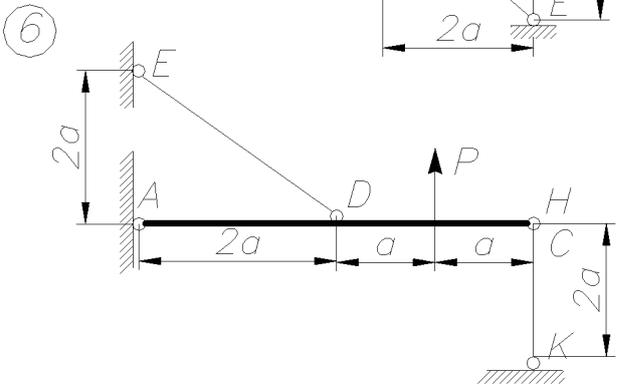
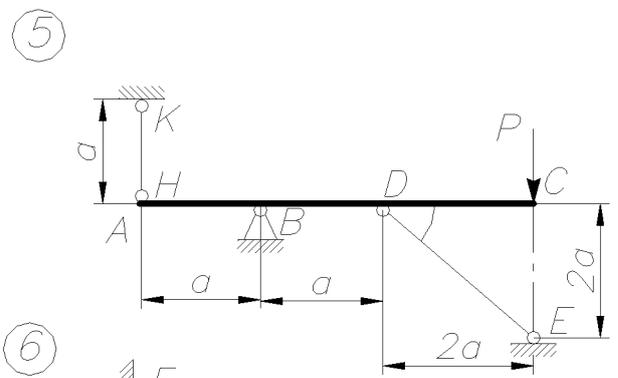
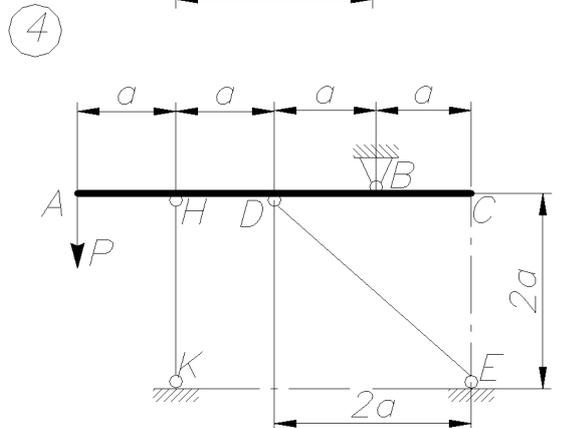
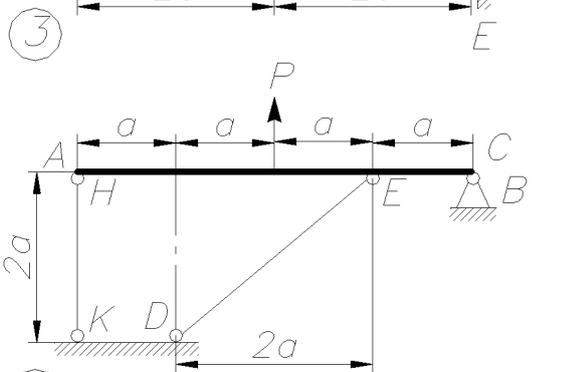
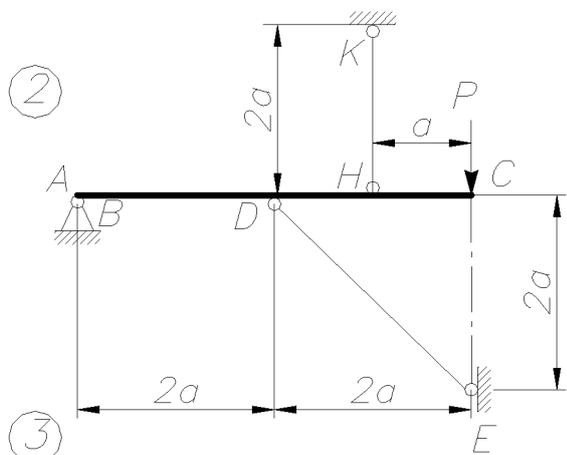
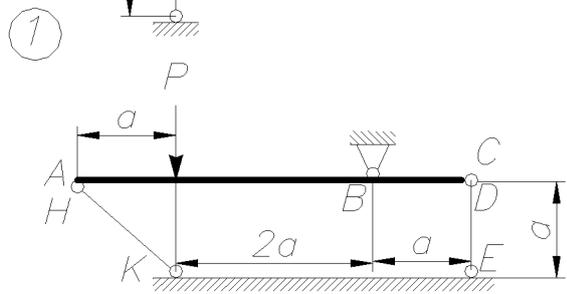
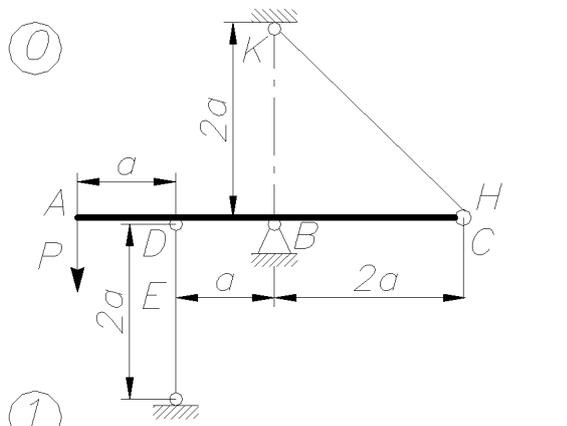


Рис. 1.3

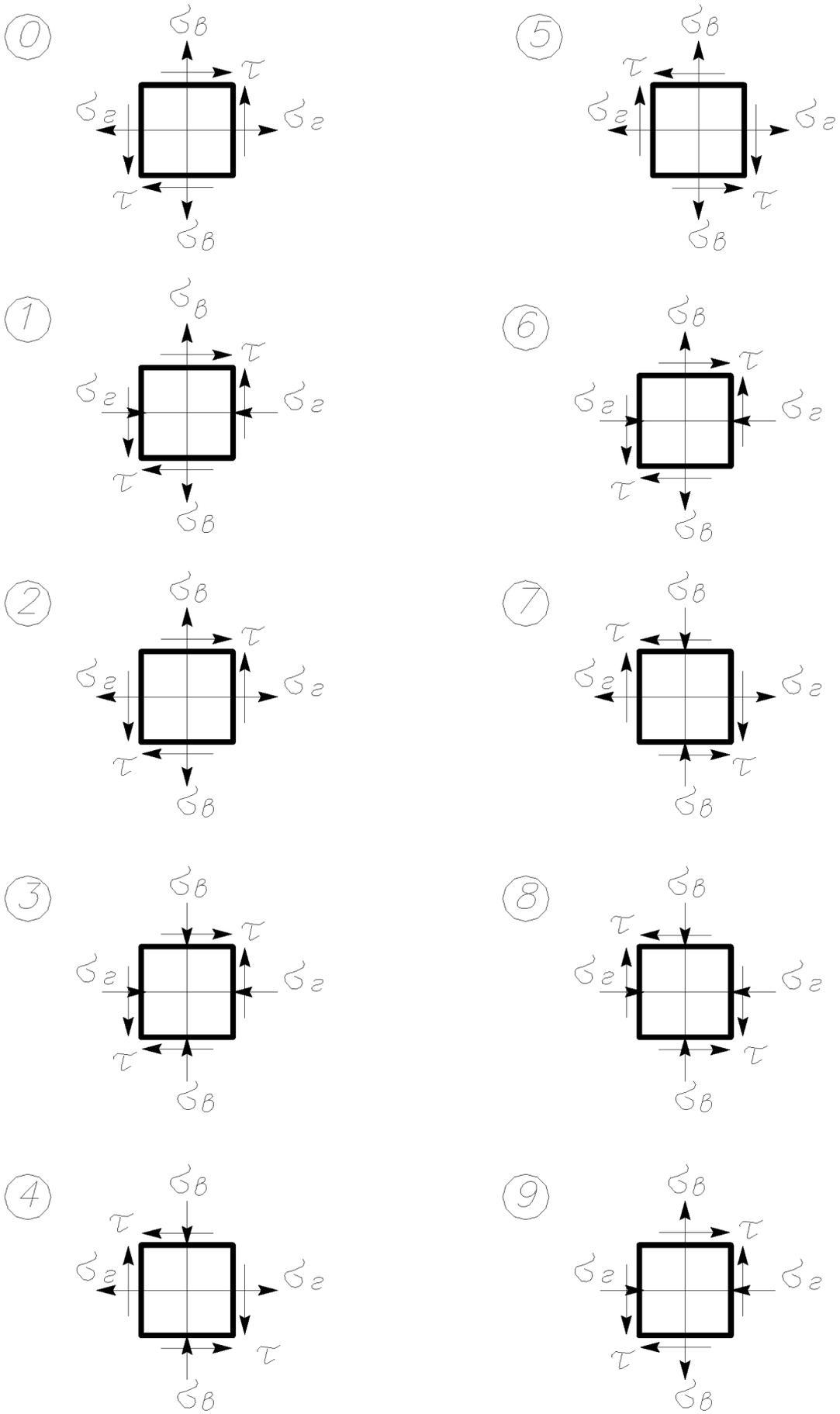


Рис.1.4

Задача № 5.1. Визначення осьових моментів інерції плоских перетинів

Для заданого складного перетину (рис. 1.5.1, табл. 1.5.1) визначити: положення головних центральних осей інерції, осьові моменти інерції, осьові моменти опору відносно головних центральних осей.

План розв'язання задачі:

1. Виписати необхідні для розв'язання задачі дані з таблиць сортаменту. Визначити геометричні характеристики полоси.
2. Накреслити перетин у масштабі 1:1 або 1:2. Всі розміри, використані у розрахунку, позначити на рисунку.
3. Вибрати найбільш раціональне розміщення допоміжних координатних осей.
4. Визначити положення центра ваги складного поперечного перетину.
5. Провести паралельно допоміжним осям центральні осі і визначити відносно них величину осьових моментів інерції.
6. Визначити осьові моменти опору відносно центральних осей.

Таблиця 1.5.1

№ п/п	Розміри швелера (двотавра)	№ п/п	Розміри швелера (двотавра)
0	10	5	20
1	12	6	22
2	14	7	24
3	16	8	27
4	18	9	30

Задача № 5.2. Визначення моментів інерції плоских перетинів

Для заданого складного перетину (рис. 1.5.2, табл. 1.5.2) визначити: положення головних центральних осей інерції, осьові моменти інерції, осьові моменти опору відносно головних центральних осей.

План розв'язання задачі:

1. Виписати необхідні для розв'язання задачі дані з таблиць сортаменту.
2. Накреслити перетин у масштабі 1:1 або 1:2. Всі розміри, використані у розрахунку, позначити на рисунку.
3. Вибрати найбільш раціональне розміщення допоміжних координатних осей.
4. Визначити положення центра ваги.
5. Провести паралельно допоміжним осям центральні осі і визначити відносно них величину осьових і відцентрового моментів інерції.
6. Знайти величину головних центральних моментів інерції і положення головних центральних осей.
7. Визначити осьові моменти опору відносно однієї з головних центральних осей (за вибором студента).

Таблиця 1.5.2

№ п/п	Розміри кутника	Розміри швелера (двотавра)	№ п/п	Розміри кутника	Розміри швелера (двотавра)
0	45×45×5	10	5	75×75×9	20
1	50×50×5	12	6	80×80×8	22
2	56×56×5	14	7	90×90×9	24
3	63×63×5	16	8	100×100×8	27
4	70×70×7	18	9	110×110×8	30

Задача № 6. Розрахунок вала на кручення

Для заданого сталюого вала (рис. 1.6, табл. 1.6) визначити діаметри окремих його ділянок і величину кутів закручування на окремих ділянках, порівнявши їх з величиною допустимого кута закручування, якщо $[\theta] = 2 \text{ град/м}$; $a = 0,4 \text{ м}$. Решту даних взяти з табл. 1.6.

План розв'язання задачі:

1. Визначити, нехтуючи тертям у підшипниках, потужність на шківі N_0 .
2. Знайти скручувальні моменти, що передаються кожним шківом.
3. Побудувати епюру крутних моментів.
4. Визначити $[\tau]$ і з умови міцності знайти діаметри вала на різних його ділянках, округлюючи отримані величини до розміру кратного 5. Подати ескіз ступінчастого вала (з позначенням діаметрів і довжин окремих ділянок).
5. Визначити величину кутів закручування на окремих ділянках і побудувати епюру кутів закручування для всього вала, приймаючи за нерухомий перетин один з кінців вала або перетин, де діє N_0 .

Таблиця 1.6

№ п/п	$N_1, \text{кВт}$	$N_2, \text{кВт}$	$N_3, \text{кВт}$	$N_4, \text{кВт}$	$\omega, \text{рад/сек}$	матеріал
0	1	2	3	4	10	Ст.1
1	2	3	4	1	20	Ст.2
2	3	4	1	2	30	Ст.3
3	4	3	2	1	40	Ст.1
4	1	2	3	4	50	Ст.2
5	2	3	4	1	60	Ст.3
6	3	4	1	2	70	Ст.1
7	4	1	2	3	80	Ст.2
8	6	7	3	5	90	Ст.3
9	5	6	4	3	100	Ст.1

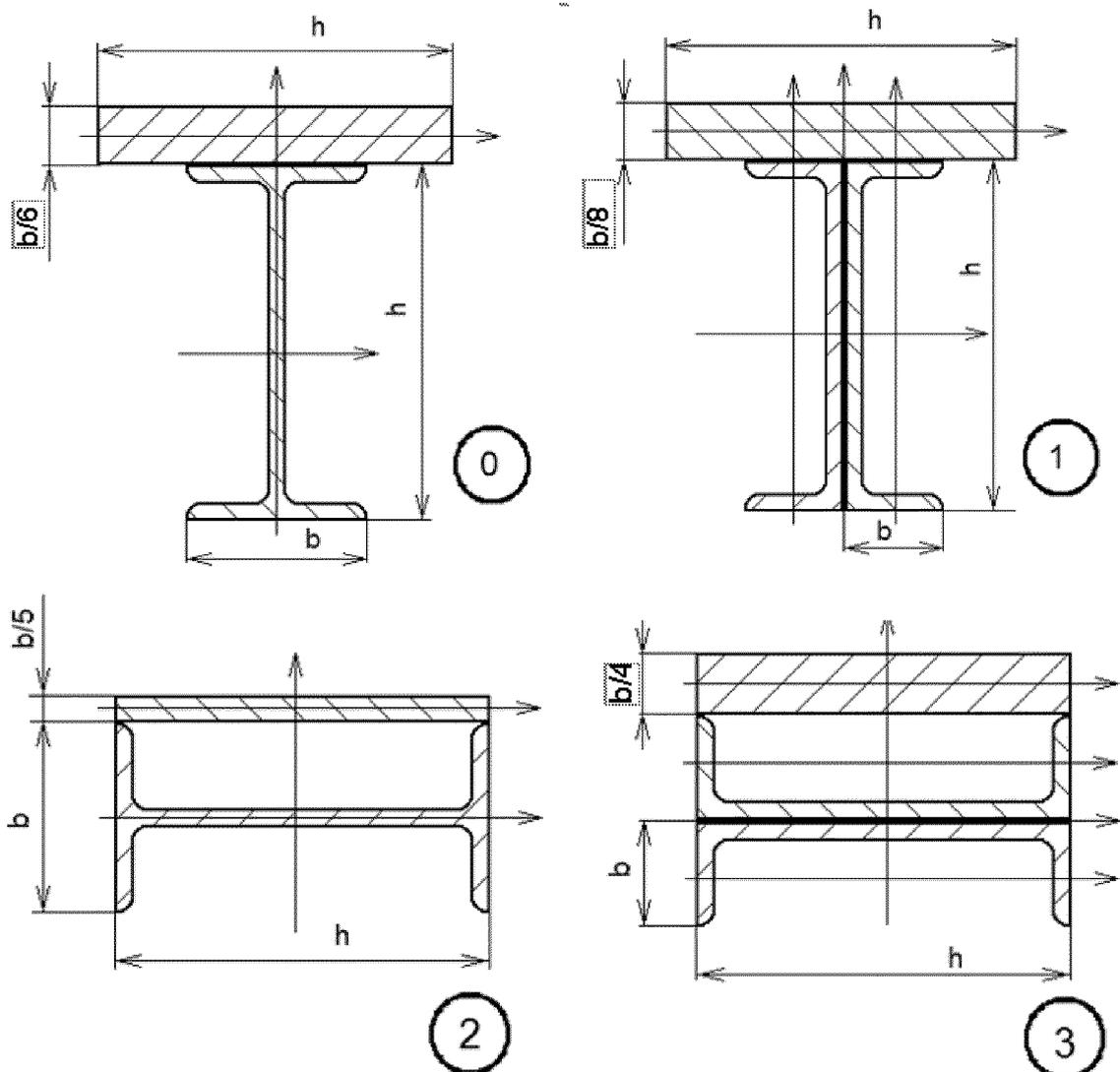
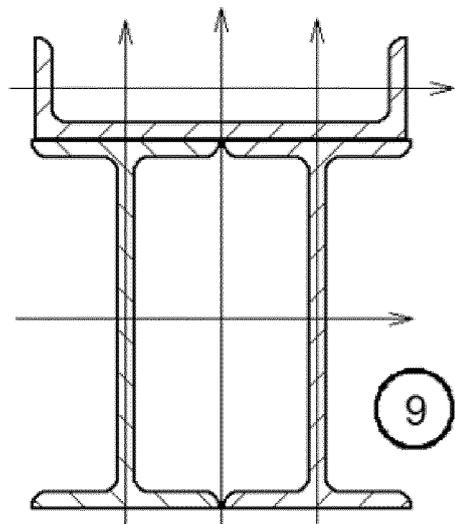
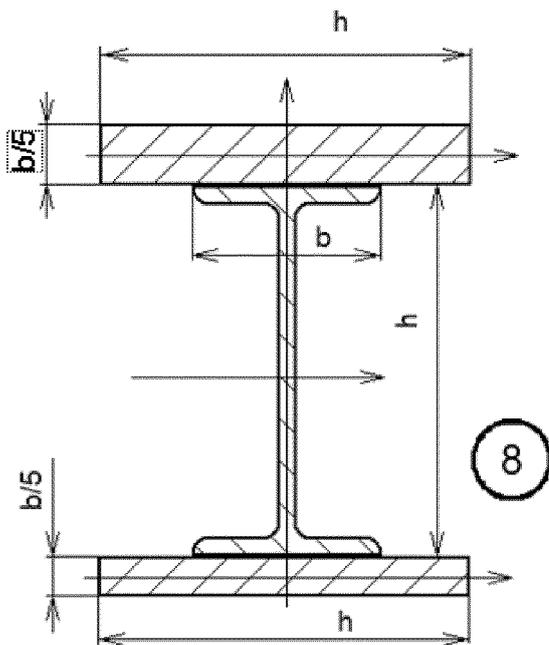
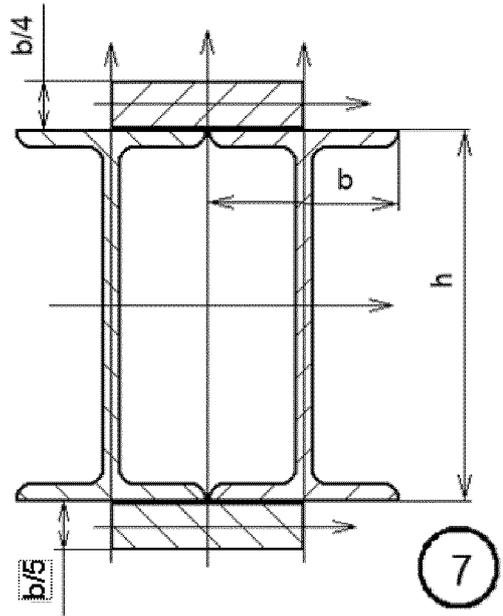
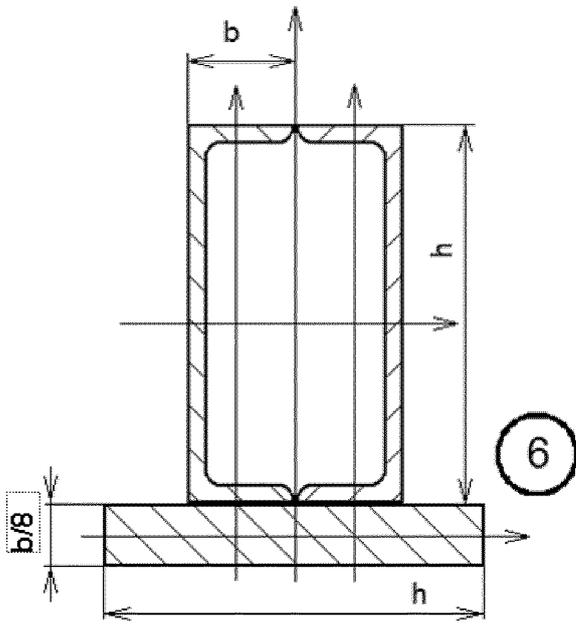
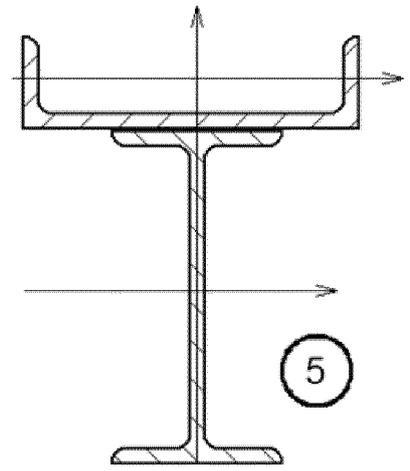
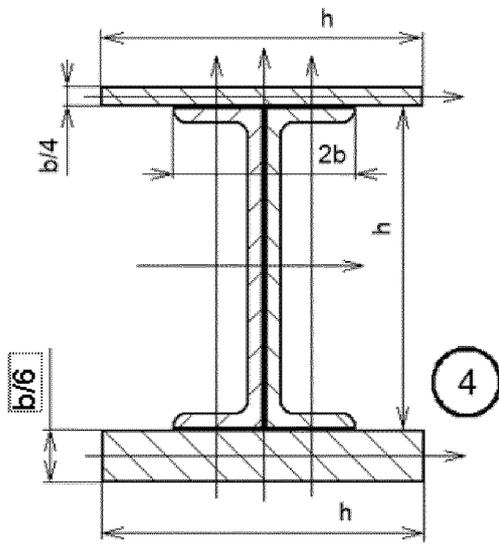


Рис.1.5.1.



Продовження Рис. 1.5.1.

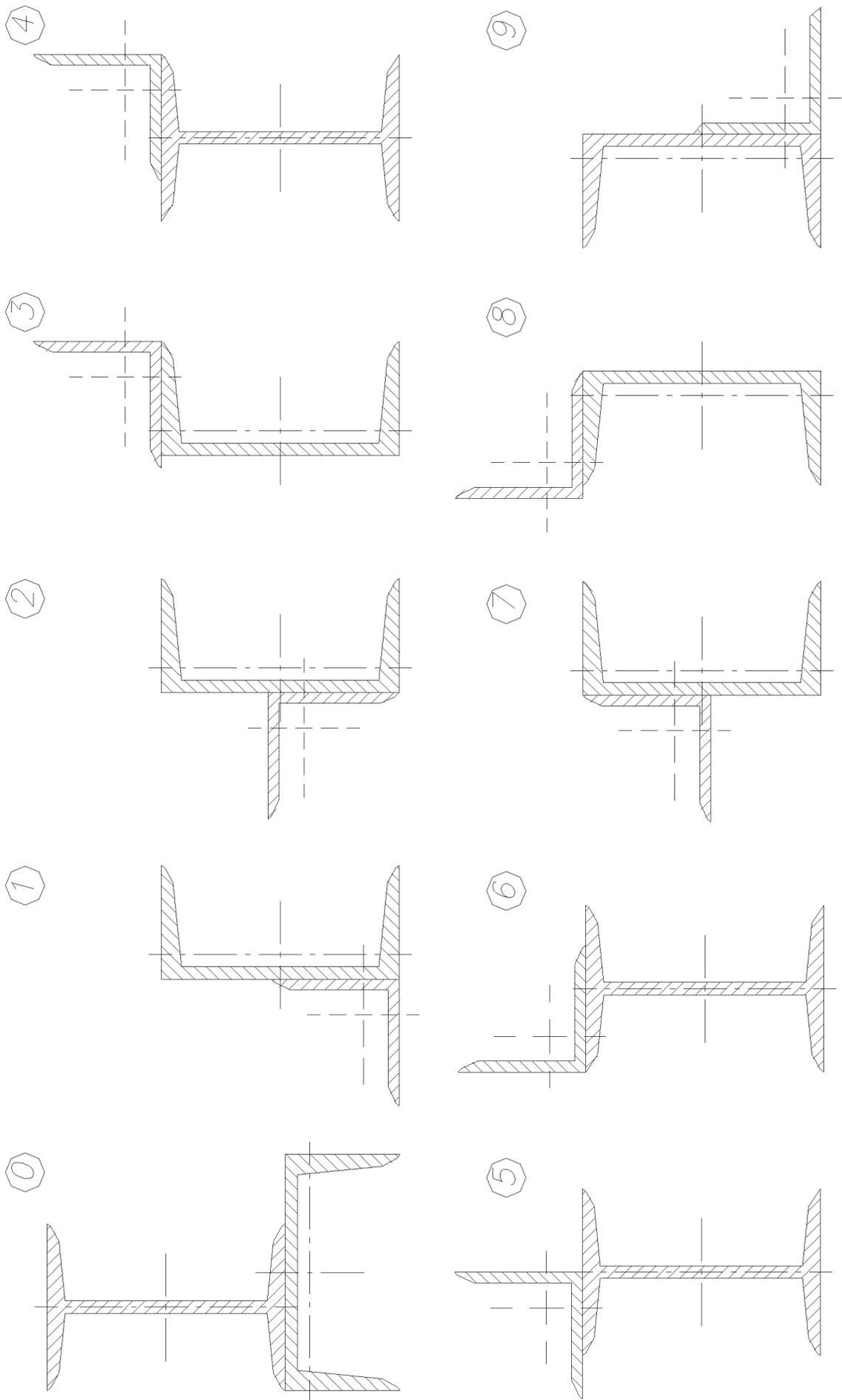


Рис.1.5.2.

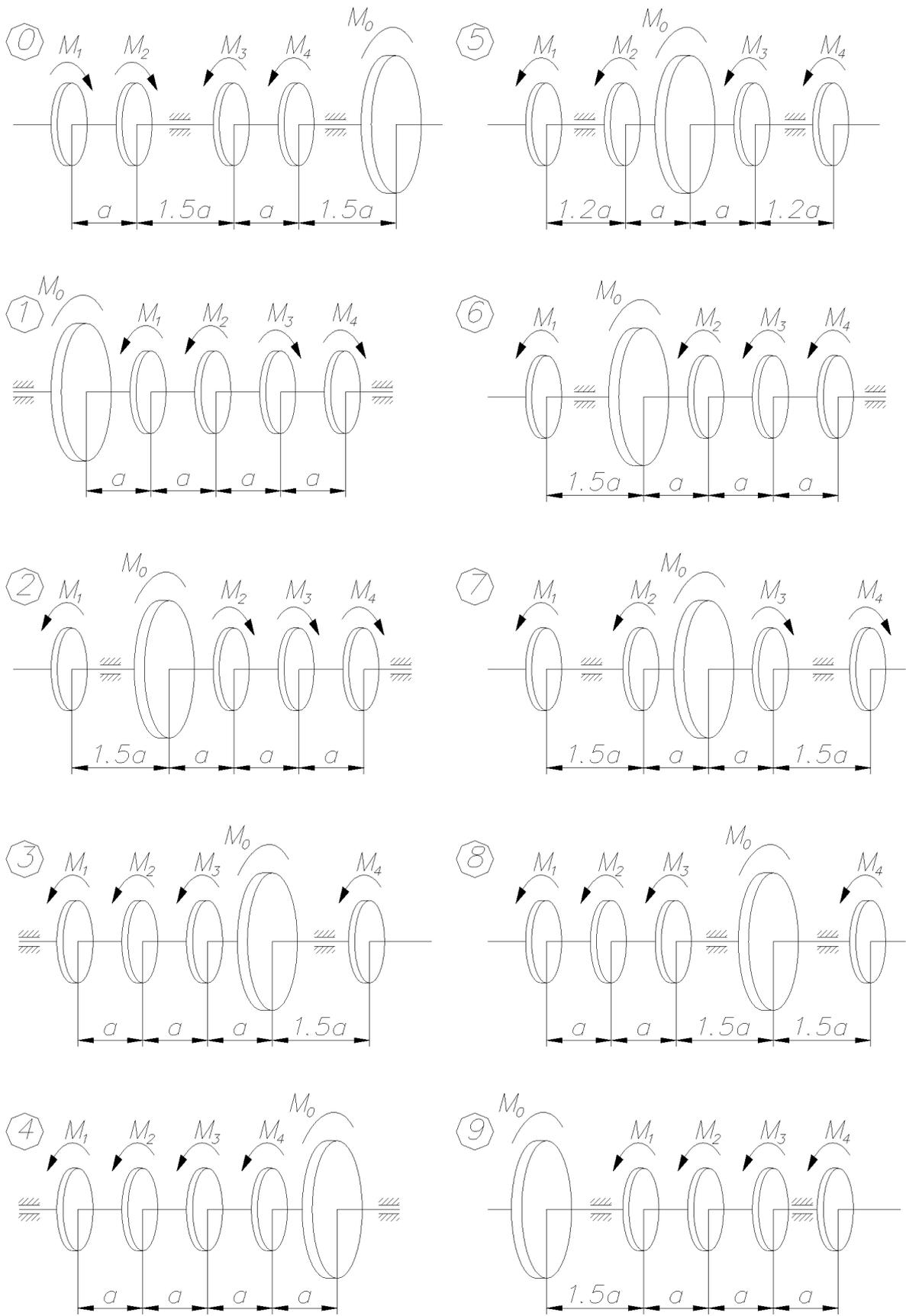


Рис. 1.6

Задача № 7. Розрахунок гвинтової пружини з малим кроком

Для заданої статично невизначеної системи пружин (рис. 1.7, табл. 1.7) визначити переміщення зазначеної у таблиці точки (А, Б або С, які розміщені на середині довжини відповідної пружини), вказати найбільш напружену пружину і величину τ_{\max} у ній, якщо відомі середні діаметри пружин ($D_1 = 5\text{см}$; $D_2 = 10\text{см}$; $D_3 = 15\text{см}$) і діаметри дроту кожної з пружин ($d_1 = 4\text{мм}$; $d_2 = 8\text{мм}$; $d_3 = 12\text{мм}$). Матеріал всіх пружин – сталь. Кількість витків n_1 , n_2 , n_3 і величину навантаження P задано у табл. 1.7.

План розв'язання задачі:

1. Скласти рівняння рівноваги і визначити ступінь статичної невизначеності системи пружин.
2. Скласти рівняння сумісності деформацій.
3. Визначити зусилля у пружинах.
4. Визначити напруження у пружинах.
5. Знайти переміщення заданої точки за величиною і напрямом, вважаючи, що точка міститься на середньому витку відповідної пружини.

Таблиця 1.7

№ п/п	P , кН	n_1	n_2	n_3	Точка, переміщення якої визначається
0	1	100	80	60	А
1	2	10	8	6	В
2	0,5	20	16	12	С
3	3	30	20	10	А
4	1,5	40	40	20	В
5	1	50	40	30	С
6	4	60	40	40	А
7	5	70	60	40	В
8	2	80	70	60	С
9	4	90	70	50	А

Задача № 8. Побудова епюр поперечних сил і згинальних моментів для консолі

Для заданої консольної балки (рис. 1.8, табл. 1.8) побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів, якщо $a = 3\text{м}$.

Таблиця 1.8

№ п/п	q , кН/м	P , кН	M , кНм	b , м	c , м
0	2	$1,5qa$	$0,5qa^2$	$\frac{2}{3}a$	$\frac{1}{3}a$
1	3	qa	qa^2	$\frac{1}{3}a$	$\frac{2}{3}a$
2	6	$0,5qa$	$1,2qa^2$	$\frac{1}{3}a$	$\frac{1}{3}a$
3	2	qa	qa^2	$\frac{2}{3}a$	$\frac{2}{3}a$
4	4	$2qa$	$1,5qa^2$	$\frac{2}{3}a$	$\frac{1}{3}a$
5	6	qa	qa^2	$\frac{1}{3}a$	$\frac{2}{3}a$
6	2	$0,5qa$	$1,5qa^2$	$\frac{1}{3}a$	$\frac{1}{3}a$
7	5	$1,5qa$	qa^2	$\frac{2}{3}a$	$\frac{2}{3}a$
8	6	qa	qa^2	$\frac{2}{3}a$	$\frac{1}{3}a$
9	3	$2qa$	$0,2qa^2$	$\frac{1}{3}a$	$\frac{2}{3}a$

План розв'язання задачі:

1. Записати вирази поперечних сил і згинальних моментів на ділянках консолі.
2. Побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів.

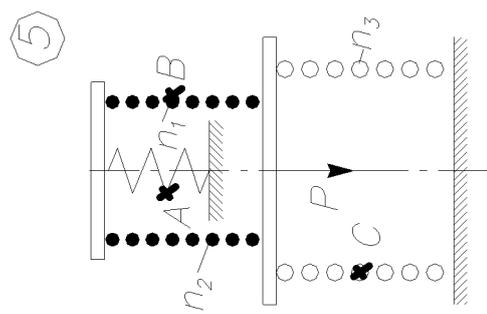
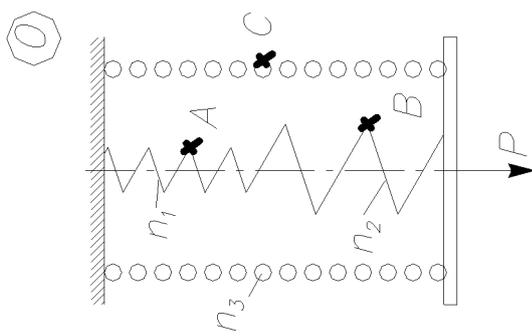
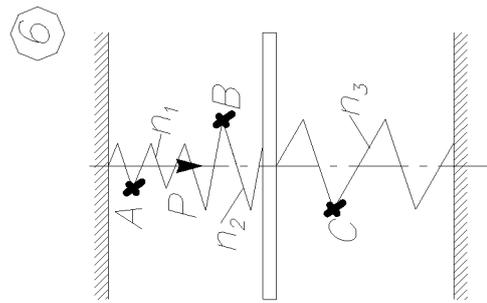
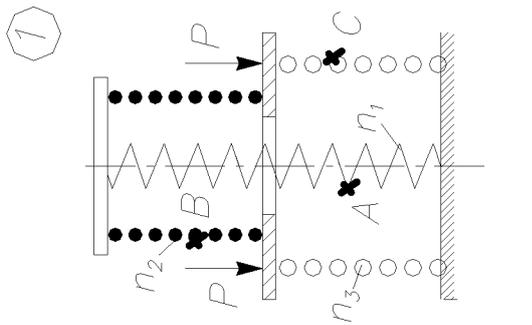
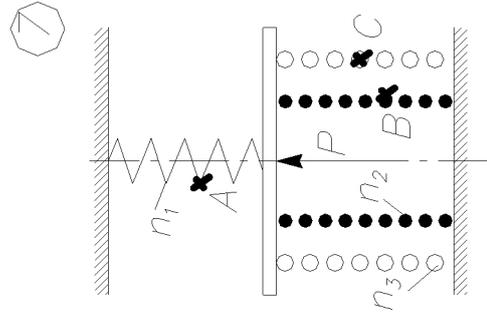
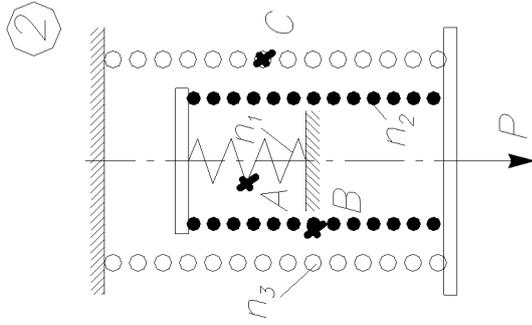
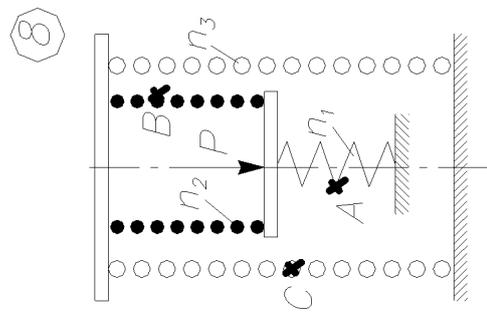
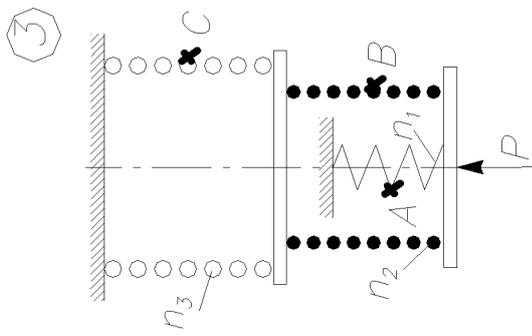
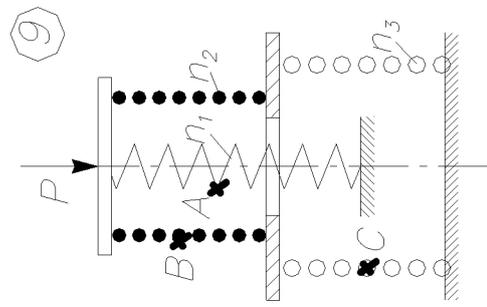
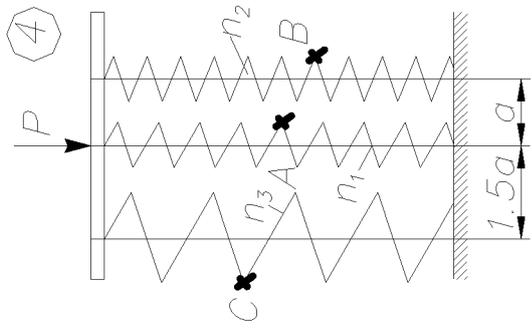


Рис. 1.7

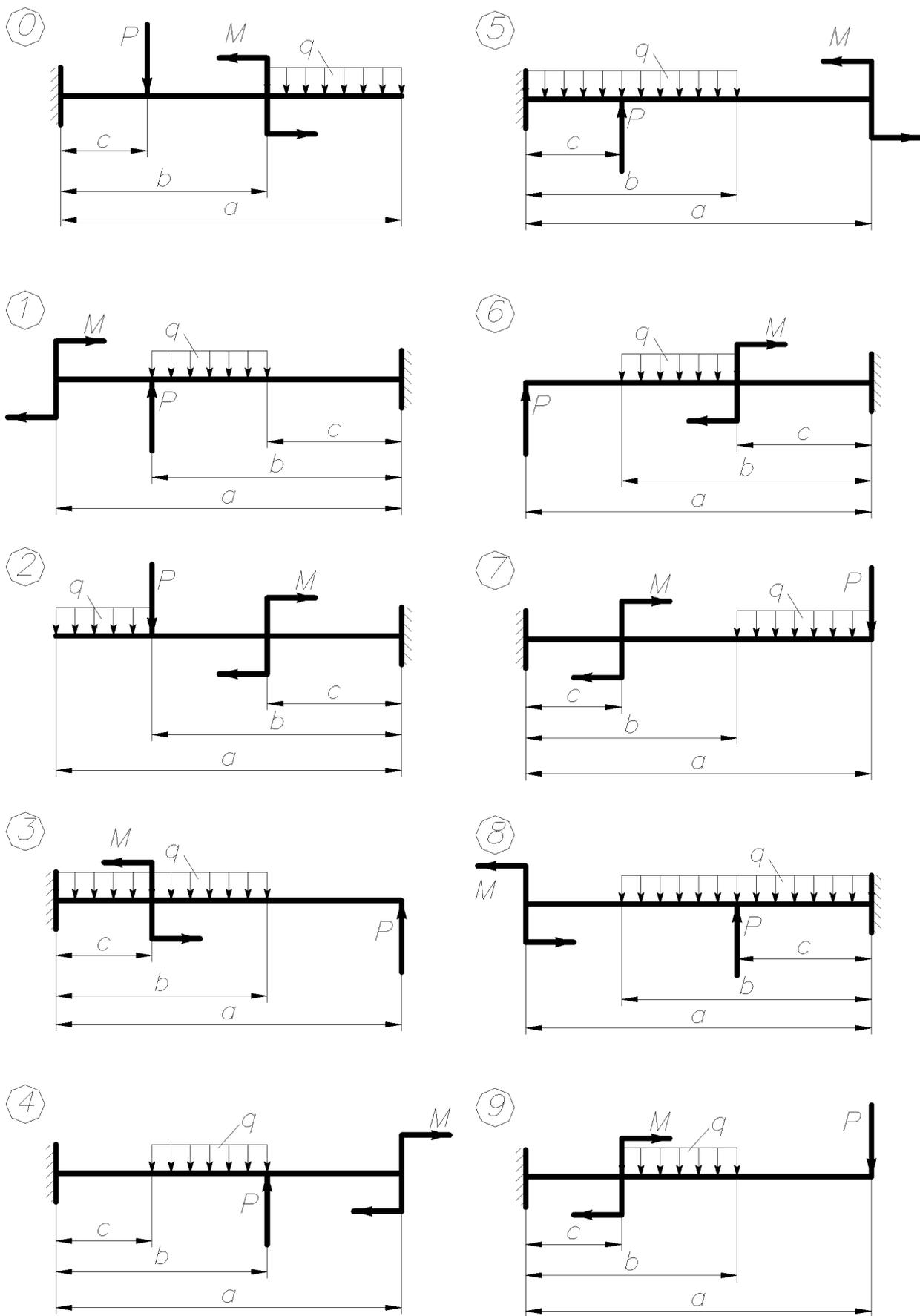


Рис. 1.8

Задача № 9. Побудова епюр поперечних сил і згинальних моментів для балки на двох опорах

Для заданої балки (рис. 1.9, табл. 1.9) побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів.

Таблиця 1.9

№ п/п	$q, \text{кН/м}$	$P, \text{кН}$	$M, \text{кНм}$	$a, \text{м}$	№ п/п	$q, \text{кН/м}$	$P, \text{кН}$	$M, \text{кНм}$	$a, \text{м}$
0	4	6	8	3	5	3	3	7	3
1	5	7	9	2	6	2	2	4	5
2	3	3	5	4	7	3	4	5	4
3	2	4	6	5	8	5	8	7	3
4	3	5	4	4	9	4	9	8	2

План розв'язання задачі:

1. Визначити опорні реакції, записати вирази поперечних сил і згинальних моментів на ділянках балки.
2. Побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів.

Задача №10. Побудова епюр силових факторів для рам

Для заданої рами (рис. 1.10, табл. 1.10) побудувати епюри згинальних моментів, поперечних і осьових сил, якщо $a = 3\text{м}$.

План розв'язання задачі:

1. Визначити опорні реакції, записати вирази поперечних сил і згинальних моментів на ділянках рами.
2. Побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів.

Таблиця 1.10

№ п/п	$q, \text{кН/м}$	$P, \text{кН}$	$M, \text{кНм}$	№ п/п	$q, \text{кН/м}$	$P, \text{кН}$	$M, \text{кНм}$
0	30	qa	$0,1qa^2$	5	20	qa	$0,1qa^2$
1	40	qa	$0,2qa^2$	6	40	qa	$0,2qa^2$
2	20	qa	$0,3qa^2$	7	30	qa	$0,3qa^2$
3	20	qa	$0,4qa^2$	8	20	qa	$0,4qa^2$
4	30	qa	$0,5qa^2$	9	30	qa	$0,5qa^2$

Задача №11. Розрахунок на міцність при згині балок

Для заданої балки (рис. 1.11, табл. 1.11) підібрати двотавровий, круглий і прямокутний перетини (поклавши для прямокутного перетину відношення висоти до ширини $\frac{h}{b} = 2$) і порівняти вагу одного метра довжини кожного профілю. Матеріал балок – сталь 3; $[\sigma] = 160\text{МПа}$.

План розв'язання задачі:

1. Побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів, визначити перетин, в якому діє максимальний згинальний момент.
2. Підібрати розміри перетинів, виходячи з умови міцності за нормальними напруженнями.
3. Порівняти вагу балок, прийнявши вагу двотаврової балки за 100%.
4. Визначити перетин, в якому виникають найбільші головні напруження, і провести повну перевірку міцності двотаврової балки у небезпечній точці цього перетину.

Таблиця 1.11

№ п/п	$q, \text{кН/м}$	$P, \text{кН}$	$M, \text{кНм}$	$a, \text{м}$	№ п/п	$q, \text{кН/м}$	$P, \text{кН}$	$M, \text{кНм}$	$a, \text{м}$
0	2	3	9	2	5	2	3,5	5,5	5
1	3	4	5	3	6	3	4,5	7,5	3
2	4	5	8	4	7	2	2,5	4,5	4
3	1	2	4	5	8	5	6,5	9,5	3
4	4	6	7	2	9	4	5,5	8,5	2

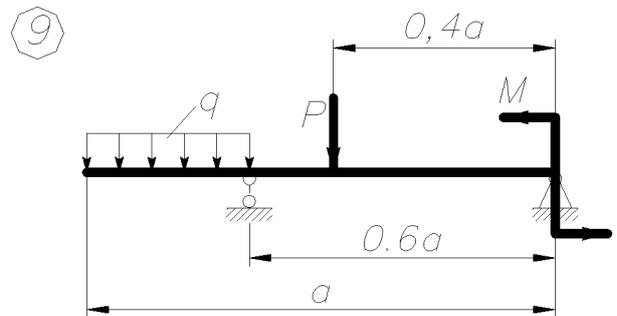
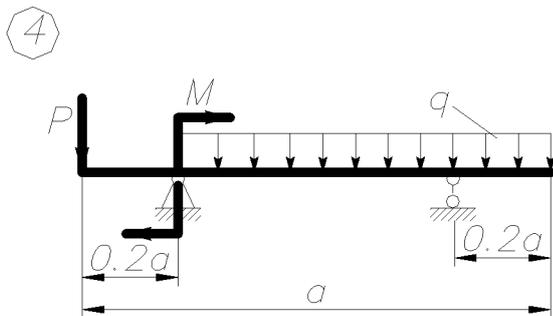
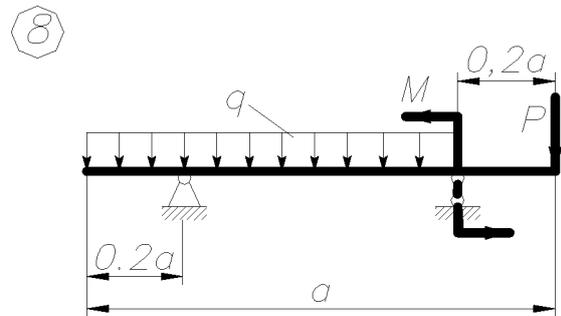
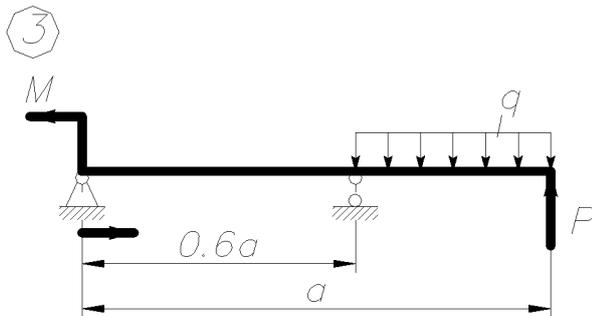
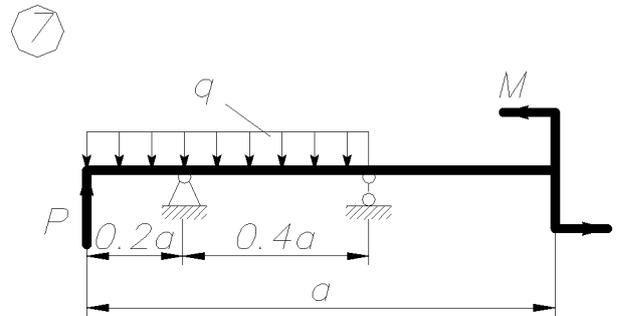
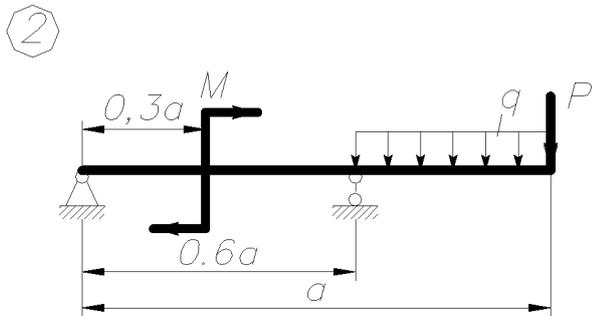
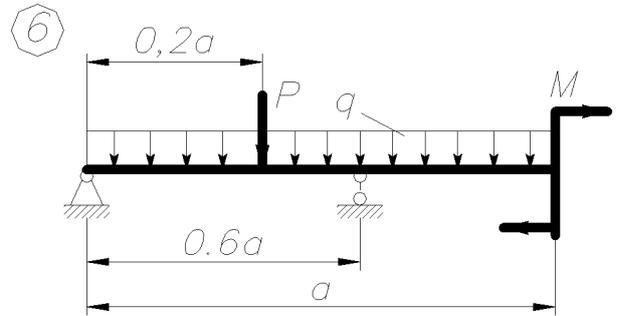
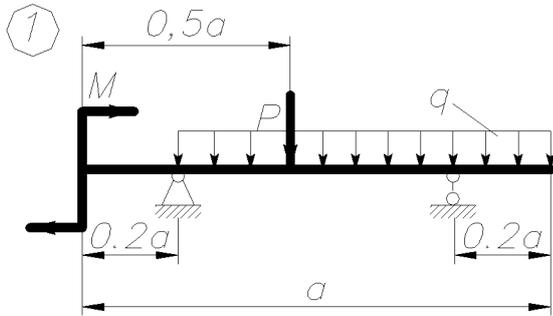
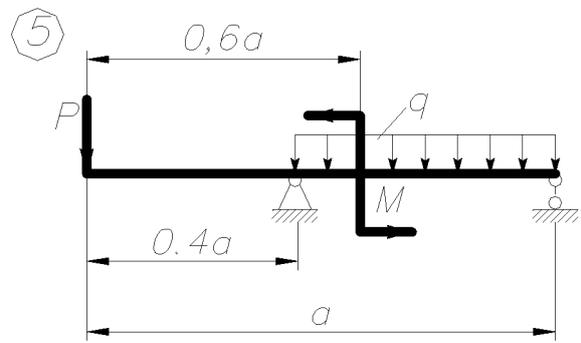
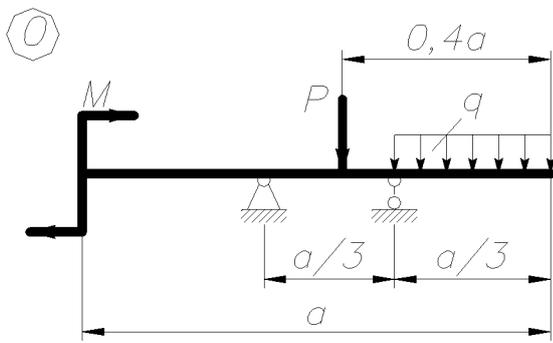


Рис. 1.9

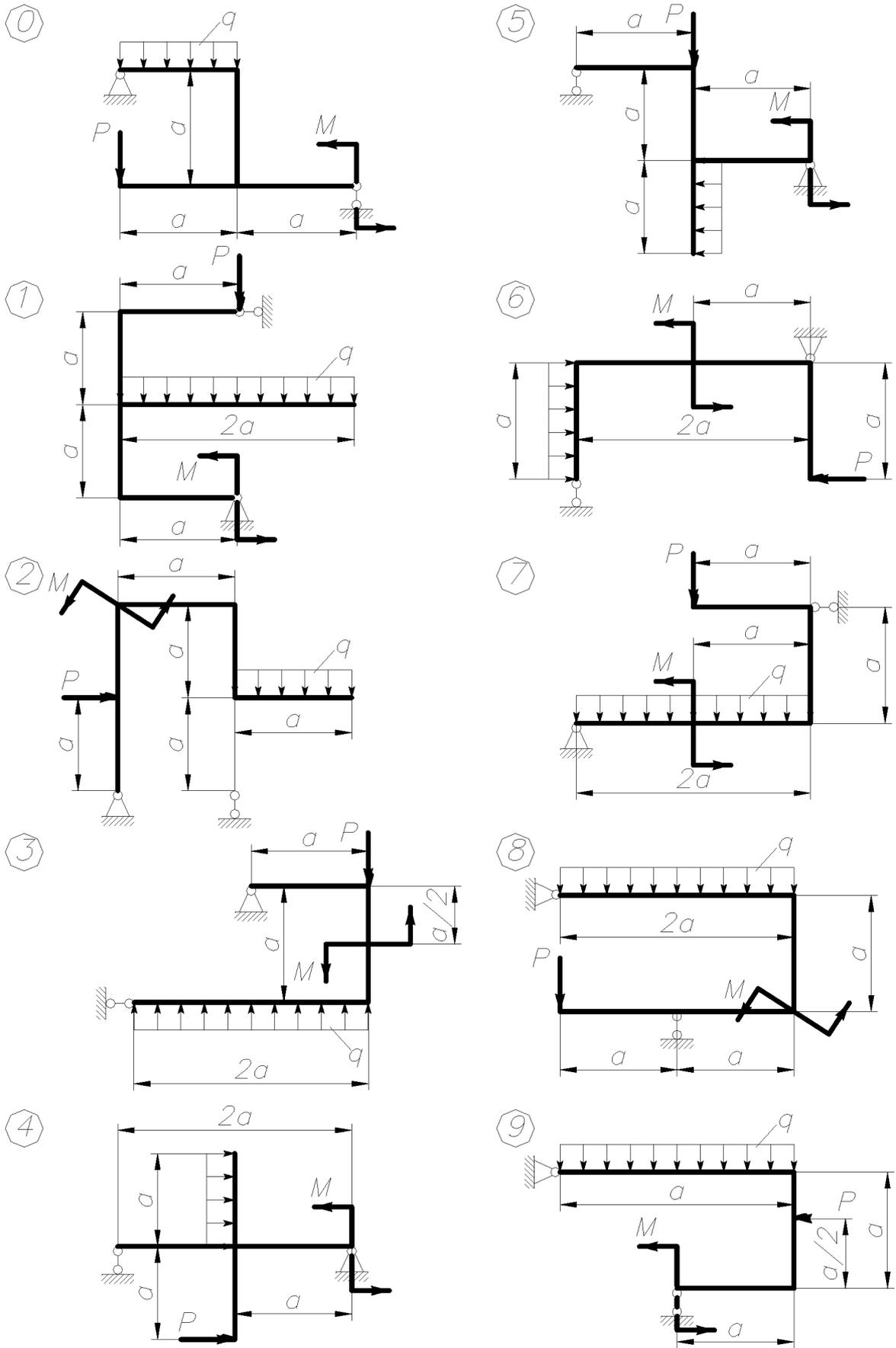


Рис. 1.10

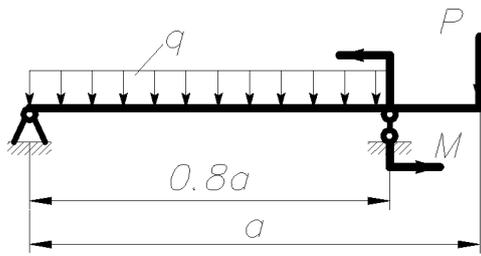
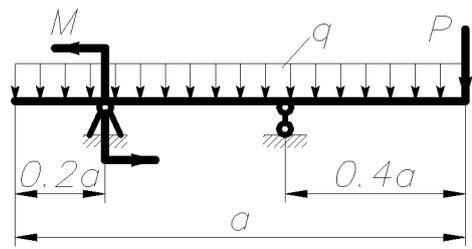
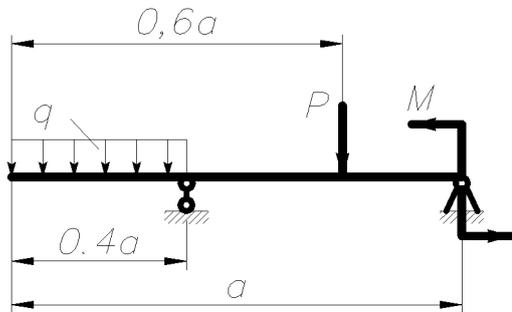
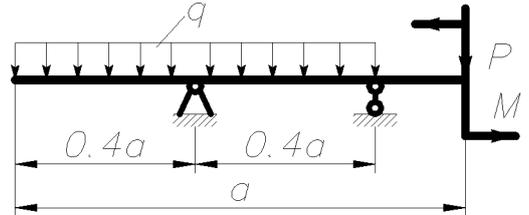
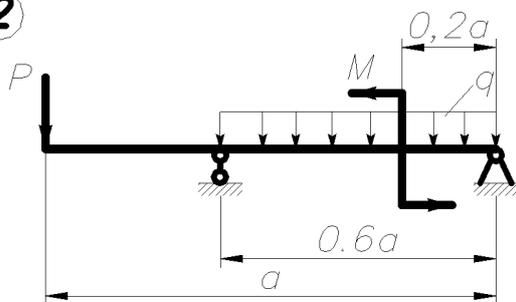
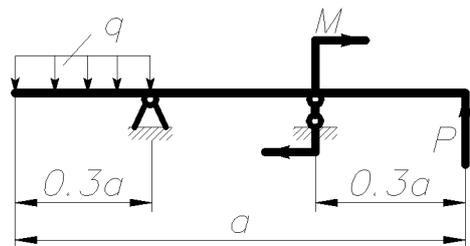
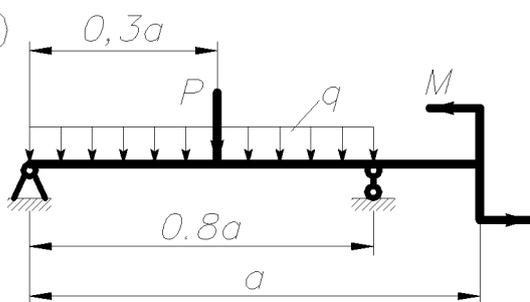
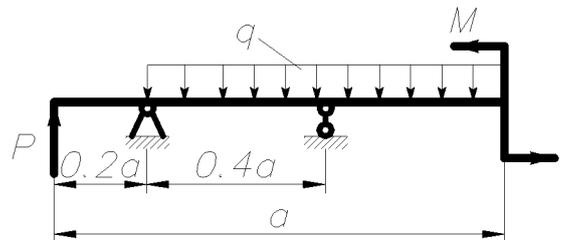
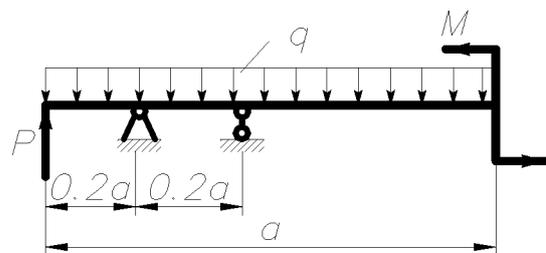
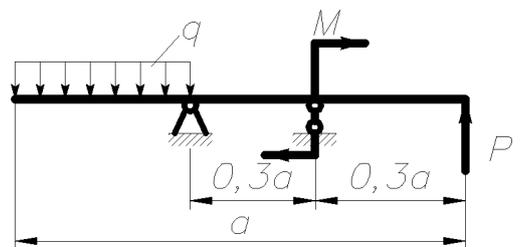
0**5****1****6****2****7****3****8****4****9**

Рис. 1.11

2.Методичні вказівки до розв'язку задач

2.1. ЦЕНТРАЛЬНИЙ РОЗТЯГ-СТИСК

Розтяг (стиск) – це такий вид деформації, при якому в поперечних перетинах бруса виникає тільки нормальна сила – N .

Нормальна сила додатня, якщо розтягує матеріал бруса; від'ємна – стискає. Брус, що працює на розтяг (стиск) називається стержнем.

Для оцінки навантаженості бруса слід будувати епюри. **Епюра – це графік, який показує розподіл внутрішніх силових факторів або переміщень по осі бруса. Епюри штрихують лініями перпендикулярними до осі.**

При побудові епюр використовуємо метод перетинів.

Приклад: Побудувати епюру нормальних сил для заданого бруса показаного на рис. 1.1а (власною вагою нехтуємо).

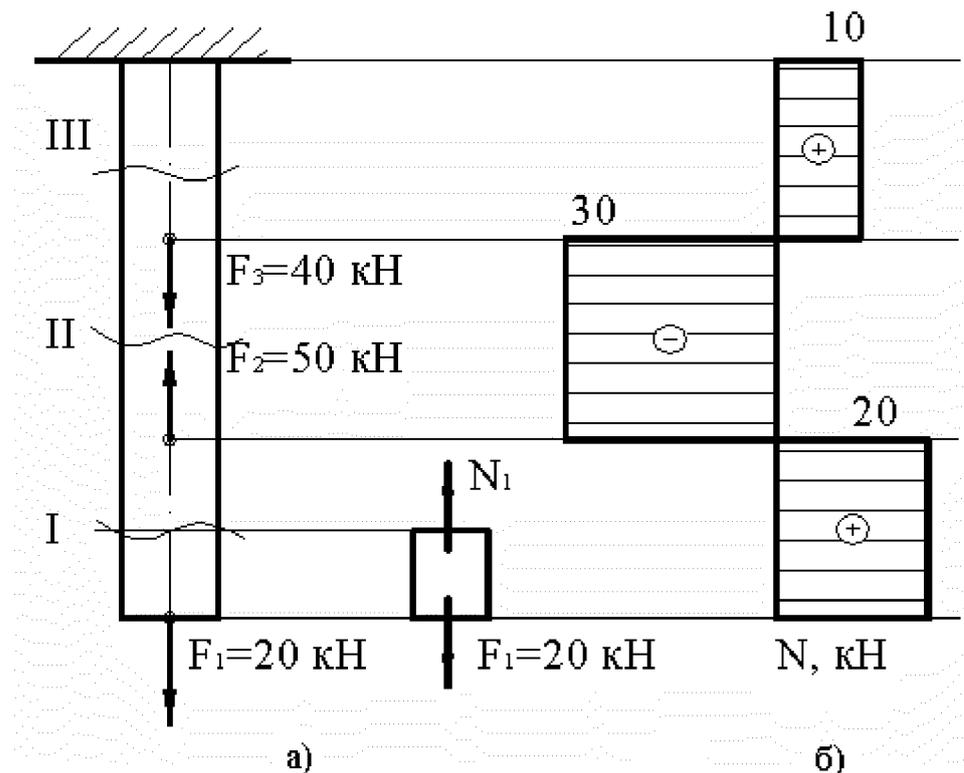


Рис.1.1

Розв'язок

Розбиваємо брус на ділянки.

Використовуючи метод перетинів визначаємо значення нормальних сил на кожній ділянці, починаючи від вільного кінця.

Нормальна сила – це алгебраїчна сума всіх зовнішніх сил, що знаходяться по одну зі сторін перетину. Запишемо їх значення:

$$N_1 = F_1 = 20 \text{ кН};$$

$$N_2 = F_1 - F_2 = 20 - 50 = -30 \text{ кН};$$

$$N_3 = F_1 - F_2 + F_3 = -30 + 40 = 10 \text{ кН}.$$

За отриманими результатами будуємо епюру нормальних сил N , (рис. 1.1б).

Між нормальною силою N і нормальним напруженням σ існує залежність $N = \sigma \cdot A$, вважаємо $\sigma = const$, тоді нормальні напруження при розтягу-стиску $\sigma = N/A$, рис.1.2.

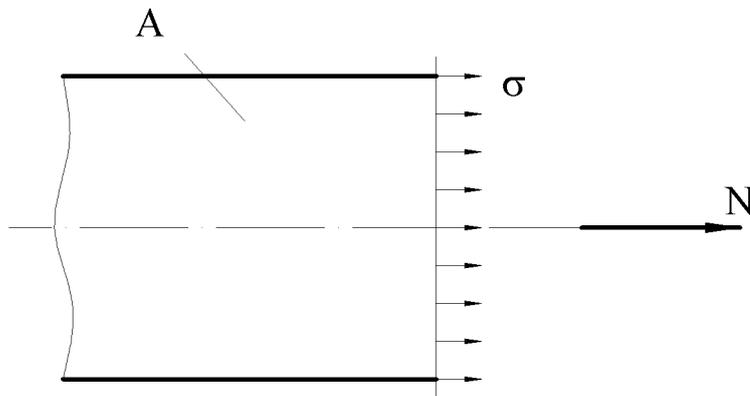


Рис. 1.2

Розглянемо деформацію стержня навантаженого осьювою силою F (рис. 1.3):

Δl - повне видовження стержня (абсолютна деформація);

$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ - відносна поздовжня деформація;

Δb - абсолютна поперечна деформація;

$\varepsilon' = \frac{\Delta b}{b}$ - відносна поперечна деформація.

Дослідним шляхом встановлено:

$$\sigma = \varepsilon \cdot E, \Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A}, \text{ (закон Гука)}$$

де E - модуль пружності (МПа).

$$\mu = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} - \text{коефіцієнт Пуасона.}$$

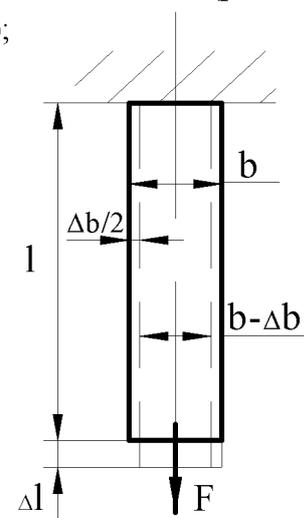


Рис. 1.3

E, μ - механічні характеристики матеріалу, характеризують пружні властивості матеріалу.

В машинобудування найбільш широко використовують чорні метали – сталі і чавуни. Сталі це пластичні матеріали, які однаково сприймають розтягуючі та стискуючі навантаження. Чавуни – крихкі матеріали, добре сприймають стискуючі навантаження, погано – розтягуючі.

Граничними напруженнями для пластичних матеріалів, тобто, напруженнями, яких може досягати матеріал не втрачаючи своїх механічних характеристик, є границя текучості σ_m .

Для цієї групи матеріалів граничними напруженнями є $\sigma_{в.с.}$ - границя міцності на стиск та $\sigma_{в.р.}$ - границя міцності на розтяг.

Для забезпечення міцності деталей необхідно, щоб напруження, які виникли у процесі їх експлуатації, були меншими за граничні, тобто для:

а) пластичних матеріалів

$$[\sigma] = \frac{\sigma_m}{n};$$

де $[\sigma]$ - допустимі напруження;

n - коефіцієнт запасу міцності;

б) крихких матеріалів

$$[\sigma]_p = \frac{\sigma_{в.р.}}{n}; \quad [\sigma]_c = \frac{\sigma_{в.с.}}{n};$$

де $[\sigma]_p$ - допустимі напруження на розтяг;

$[\sigma]_c$ - допустимі напруження на стиск.

Коефіцієнт запасу міцності для пластичних матеріалів $n = 1,2 \div 2,5$, для крихких матеріалів $n = 2 - 5$.

Умова міцності при розтягу-стиску

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma]$$

При розрахунках деталей на міцність основними є три види задач.

Проектний розрахунок - це розрахунок, за яким визначають розміри поперечного перетину

$$A \geq \frac{N}{[\sigma]}$$

Перевірочний розрахунок - це розрахунок, за яким визначають робочі напруження і порівнюють з допустимим

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma]$$

Розрахунок, при якому визначається допустиме навантаження

$$[N] \leq [\sigma] \cdot A$$

Приклад розв'язання задачі №1

1.1. Побудова епюр нормальних сил із врахуванням власної ваги стержня

Для заданого ступінчатого стержня (рис.1.1а) побудувати епюру нормальних сил із врахуванням власної ваги стержня, якщо $F_2 = 2F_1 = 40 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$; $\gamma = 77 \frac{\text{кН}}{\text{м}^3}$.

Розв'язок

Викреслюємо розрахункову схему стержня в масштабі (рис. 1.1а). Розбиваємо його на ділянки, починаючи від незакріпленого кінця. Межами ділянок є перерізи, де прикладені зовнішні сили або змінюються розміри поперечного перерізу.

Для визначення нормальних сил, що діють на кожній ділянці стержня, використовуємо **метод перерізів**.

Нормальна сила вважається:

- **додатною**, якщо вона викликає розтяг;
- **від'ємною**, якщо викликає стиск.

Нормальна сила $N(x)$ рівна сумі проєкцій всіх зовнішніх сил та сил ваги стержня, що діють нижче перерізу, який розглядається, на вісь x , направлену вздовж осі стержня.

Вибираємо точку відліку на початку вільного кінця стержня. Умовно перерізаємо стержень в межах кожної ділянки, записуючи межі її зміни, а також загальний вираз для функції нормальної сили $N(x)$ (рис. 1.1а):

ділянка I, $0 \leq x \leq 12\text{м}$.

Значення нормальної сили на межах ділянки рівне:

$$N(x) = -P_1 + \gamma \cdot F_1 \cdot x = -2 + 77 \cdot 20 \cdot 10^{-4} \cdot x = -2 + 0,154 \cdot x;$$

$$N(0) = -2 + 0,154 \cdot 0 = -2 \text{ кН};$$

$$N(12) = -2 + 0,154 \cdot 12 = -0,152 \text{ кН}.$$

ділянка II, $12\text{ м} \leq x \leq 18\text{ м}$

$$\begin{aligned} N(x) &= -P_1 + \gamma \cdot F_1 \cdot 12 + \gamma \cdot F_2 \cdot (x - 12) = -0,152 + 77 \cdot 40 \cdot 10^{-4} (x - 12) = \\ &= -0,152 + 0,308(x - 12); \end{aligned}$$

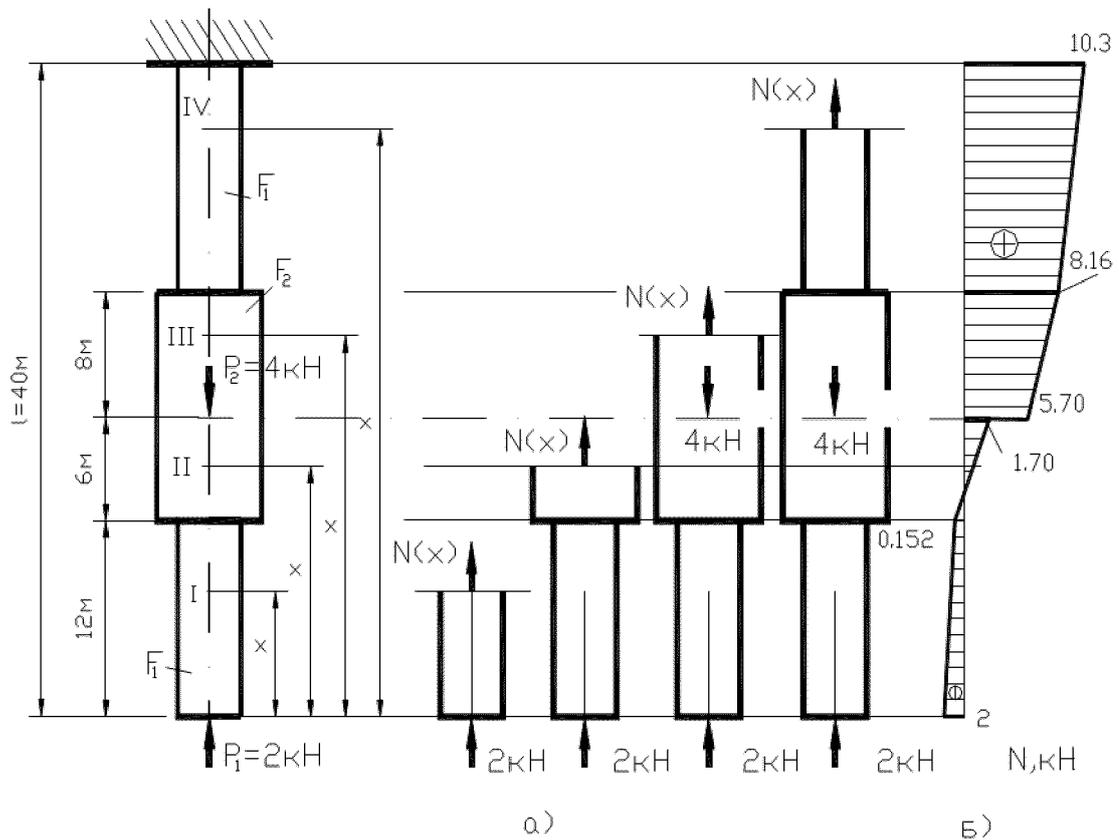


Рис. 1.1

$$N(12) = -0,152 + 0,308 \cdot 0 = -0,152 \text{кН};$$

$$N(18) = -0,152 + 0,308(18 - 12) = 1,70 \text{кН}.$$

ділянка II, $18 \text{м} \leq x \leq 26 \text{м}$

$$N(x) = -P_1 + \gamma \cdot F_1 \cdot 12 + \gamma \cdot F_2 \cdot 6 + P_2 + \gamma \cdot F_2 (x - 18) =$$

$$= 1,70 + 4 + 0,308(x - 18) = 5,70 + 0,308(x - 18);$$

$$N(18) = 5,70 + 0,308 \cdot 0 = 5,70 \text{кН};$$

$$N(26) = 5,70 + 0,308(26 - 18) = 8,16 \text{кН}.$$

ділянка IV, $26 \text{м} \leq x \leq 40 \text{м}$,

$$N(x) = -P_1 + \gamma \cdot F_1 \cdot 12 + \gamma \cdot F_2 \cdot 6 + P_2 +$$

$$+ \gamma \cdot F_2 \cdot 8 + \gamma \cdot F_1 (x - 26) = 8,16 + 0,154(x - 26);$$

$$N(26) = 8,16 + 0,154 \cdot 0 = 8,16 \text{кН};$$

$$N(40) = 8,16 + 0,154(40 - 26) = 10,3 \text{кН}.$$

Будуємо епюри нормальних сил N (рис. 1.1б).

Приклад розв'язання задачі №2

РОЗРАХУНОК НА МІЦНІСТЬ І ВИЗНАЧЕННЯ ПЕРЕМІЩЕНЬ ПРИ РОЗТЯГУ(СТИСКУ)

Для заданого ступінчатого стержня (рис. 1.4а) визначити розміри поперечного перетину на всіх його ділянках, виходячи з умови, що форма перетину круг; намалювати ескіз стержня; побудувати епюри дійсних нормальних напружень і поздовжніх переміщень, якщо $[\sigma] = 160 \text{МПа}$, $E = 2 \cdot 10^5 \text{МПа}$.

Розв'язок

Розбиваємо стержень на три ділянки I, II, III. Для кожної з ділянок визначаємо значення поздовжніх сил і будуємо епюру N (рис. 1.4а,б):

$$N_1 = F_1 = 10 \text{ кН};$$

$$N_2 = F_1 + F_3 = 10 + 20 = 30 \text{ кН};$$

$$N_3 = F_1 + F_3 - 2F_2 = 10 + 20 - 2 \cdot 40 = -50 \text{ кН}.$$

З умови міцності на розтяг-стиск $\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma]$ визначаємо необхідні площі поперечних перетинів стержня на кожній ділянці:

$$A_1 \geq \frac{|N_1|}{[\sigma]} = \frac{10 \cdot 10^{-3}}{160} = 0,625 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2;$$

$$A_2 \geq \frac{|N_2|}{[\sigma]} = \frac{30 \cdot 10^{-3}}{160} = 1,875 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2;$$

$$A_3 \geq \frac{|N_3|}{[\sigma]} = \frac{50 \cdot 10^{-3}}{160} = 3,125 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Діаметри стержня визначаємо за формулою:

$$A_i = \frac{\pi d_i^2}{4};$$

звідки

$$d_i \geq \sqrt{\frac{4A_i}{\pi}}.$$

Тоді

$$d_1 \geq \sqrt{\frac{4 \cdot 62,5}{\pi}} = 8,92 \text{ мм};$$

$$d_2 \geq \sqrt{\frac{4 \cdot 187,5}{\pi}} = 15,45 \text{ мм};$$

$$d_3 \geq \sqrt{\frac{4 \cdot 312,5}{\pi}} = 19,95 \text{ мм}.$$

Отримані результати заокруглюємо: $d_{1\partial} = 9 \text{ мм}$, $d_{2\partial} = 16 \text{ мм}$, $d_{3\partial} = 20 \text{ мм}$.

На основі отриманих розмірів викреслюємо ескіз стержня (рис. 1.4в).

Визначаємо дійсні площі поперечних перетинів стержня на кожній ділянці з врахуванням заокруглення їх діаметрів:

$$A_{i\partial} = \frac{\pi d_{i\partial}^2}{4}; \quad A_{1\partial} = \frac{\pi \cdot 9^2}{4} = 64 \text{ мм}^2;$$

$$A_{3\partial} = \frac{\pi \cdot 20^2}{4} = 314 \text{ мм}^2. \quad A_{2\partial} = \frac{\pi \cdot 16^2}{4} = 201 \text{ мм}^2;$$

Дійсні нормальні напруження рівні:

$$\sigma_{i\partial} = \frac{|N_i|}{A_{i\partial}};$$

$$\sigma_{1\partial} = \frac{10 \cdot 10^{-3}}{64 \cdot 10^{-3}} = 157 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{2\partial} = \frac{30 \cdot 10^{-3}}{201 \cdot 10^{-6}} = 149 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{3\partial} = \frac{50 \cdot 10^{-3}}{314 \cdot 10^{-6}} = 159 \text{ МПа}.$$

Використовуючи отримані значення, будемо епюру нормальних напружень σ (рис. 1.4г).
Визначаємо повздовжні деформації кожної ділянки стержня:

$$\Delta l_i = \frac{N_i L_i}{EA_{i0}};$$

$$\Delta l_1 = \frac{10 \cdot 2,4}{2 \cdot 10^8 \cdot 64 \cdot 10^{-6}} = 1,88 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 1,88 \text{ мм};$$

$$\Delta l_2 = \frac{30 \cdot 2,4}{2 \cdot 10^8 \cdot 201 \cdot 10^{-6}} = 1,79 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 1,79 \text{ мм};$$

$$\Delta l_3 = \frac{-50 \cdot 3,2}{2 \cdot 10^8 \cdot 314 \cdot 10^{-6}} = -2,54 \cdot 10^{-3} \text{ м} = -2,54 \text{ мм}.$$

За отриманими результатами будемо епюру лінійних переміщень (рис. 1.4д).

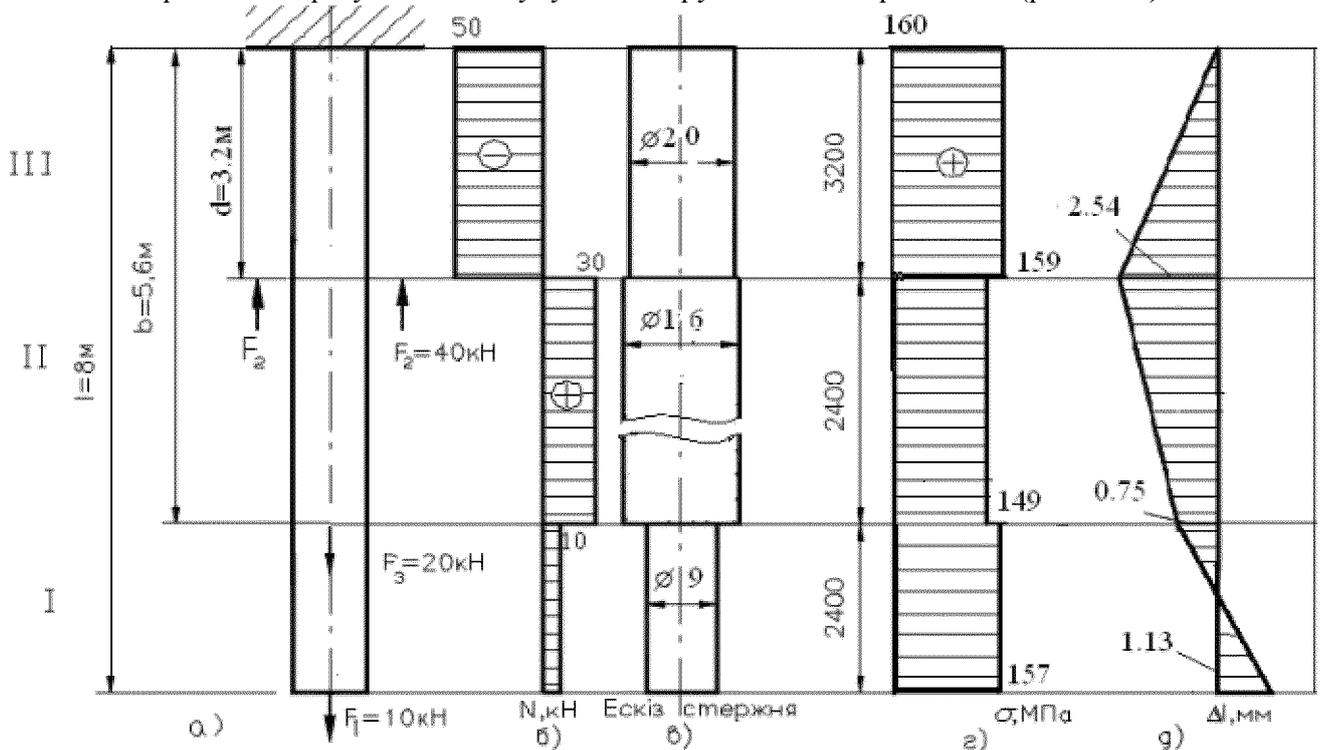


Рис 1.4.

Приклад розв'язання задачі №3

Розрахунок статично невизначних систем

Для заданої стержневої системи (рис.1.3а) визначити площі поперечних перерізів стержнів DE і КН, якщо відоме їхнє співвідношення $F_{DE}=3F_{KH}$, а також $P=50$ кН; $[\sigma] = 160$ МПа. Брус АК вважати абсолютно жорстким.

Розв'язок

При навантаженні системи силою P у стержнях DE і КН виникають осьові зусилля, в даному випадку – стискаючі. Площі поперечних перерізів стержня при стиску визначаємо з умови міцності із допустимих напружень:

$$\sigma = \frac{N}{F} \leq [\sigma], \text{ звідки } F \geq \frac{N}{[\sigma]}.$$

Для визначення зусиль в стержнях складаємо рівняння рівноваги бруса АК (рис. 1.3б):

$$\sum X = 0; -N_{DE} \cdot \cos \alpha + B_x = 0; \tag{1.1}$$

$$\sum Y = 0; -P + N_{DE} \cdot \sin \alpha + B_y - N_{KH} = 0; \tag{1.2}$$

$$\sum M_B = 0; 3P \cdot a - 2N_{DE} \cdot a \sin \alpha - N_{KH} \cdot a = 0. \tag{1.3}$$

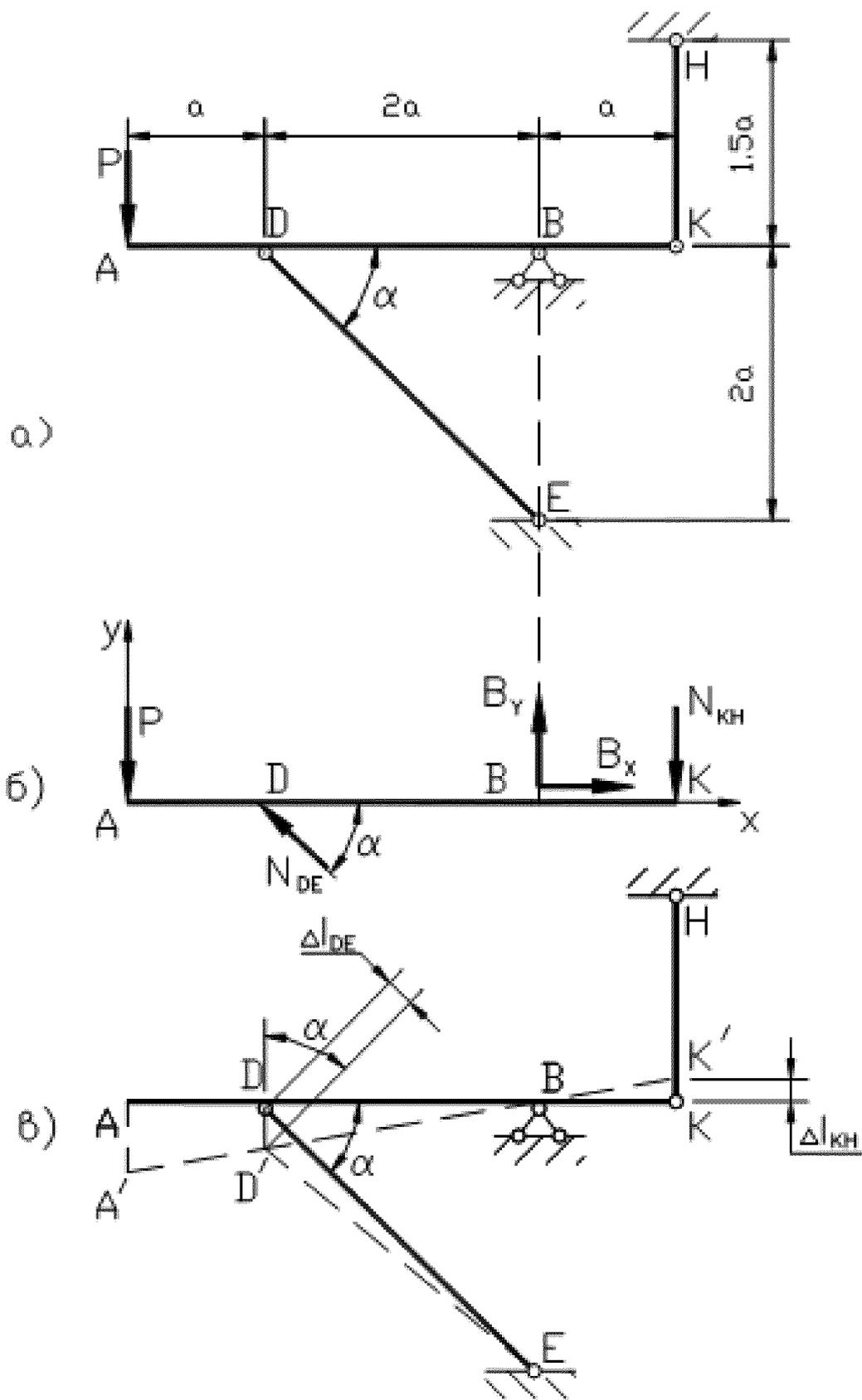


рис. 1.3

У системі є чотири невідомі зусилля та реакції (N_{DE} , N_{KH} , V_y , V_x), а рівнянь рівноваги три, отже система 4-3=1 раз статично невизначна.

Складаємо додаткове рівняння – рівняння сумісності переміщень.

Після прикладання сили P стержні DE і KH деформуються, і система займе положення, яке показано на рис. 1.3в. З подібності трикутників $DD'B$ і $KK'B$ випливає, що

$$\frac{DD'}{KK'} = \frac{DB}{KB} = \frac{2a}{a} = 2. \quad (1.4)$$

У даному випадку $KK' = \Delta L_{KH}$;

$$DD' = \frac{\Delta L_{DE}}{\sin \alpha}, \quad (1.5)$$

де $\Delta L_{KH}, \Delta L_{DE}$ – абсолютні деформації стержнів KH і DE .

Деформації стержнів виразимо за законом Гука у вигляді:

$$\Delta L_{KH} = \frac{N_{KH} \cdot 1,5a}{EF_{KH}};$$

$$\Delta L_{DE} = \frac{N_{DE} \cdot 2a}{EF_{DE} \cdot \sin \alpha}$$

Підставивши значення ΔL_{KH} і ΔL_{DE} у вирази (1.5) і (1.4), отримаємо:

$$\frac{N_{DE} \cdot 2a \cdot EF_{KH}}{N_{KH} \cdot 1,5a \cdot EF_{DE} \cdot \sin^2 \alpha} = 2.$$

Підставивши $F_{DE}=3F_{KH}$ і відповідно перетворивши, отримаємо:

$$N_{DE} = 4,5N_{KH} \cdot \sin^2 \alpha.$$

У нашому випадку $\alpha=45^\circ$ (рис. 1.3а), тоді

$$N_{DE} = 4,5N_{KH} \cdot \sin^2 45^\circ = 2,25N_{KH}.$$

Розв'язуючи рівняння (1.3) і (1.6), визначаємо невідомі зусилля в стержнях:

$$\begin{cases} 3P - 2N_{DE} \cdot \sin 45^\circ - N_{KH} = 0; \\ N_{DE} = 2,25N_{KH}; \end{cases}$$

$$N_{KH} = \frac{3P}{4,5 \sin 45^\circ + 1} = \frac{3 \cdot 50}{4,5 \cdot 0,7 + 1} = 35,9 \text{ кН};$$

$$N_{DE} = 2,25 \cdot 35,9 = 80,8 \text{ кН}.$$

Надалі рівняння (1.1) і (1.2) при розв'язуванні задачі не використовуються, так як невідомі зусилля в стержнях визначені, а за умовою задачі непотрібно визначати реакції в опорі B .

Площу поперечного перерізу стержня KH визначаємо з умови міцності:

$$F_{KH} \geq \frac{N_{KH}}{[\sigma]} = \frac{35,9 \cdot 10^{-3}}{160} = 2,24 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2;$$

а площу поперечного перерізу стержня DE – з даного співвідношення:

$$F_{DE} = 3F_{KH} = 3 \cdot 2,24 \cdot 10^{-4} = 6,72 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Перевіряємо стержень DE на міцність:

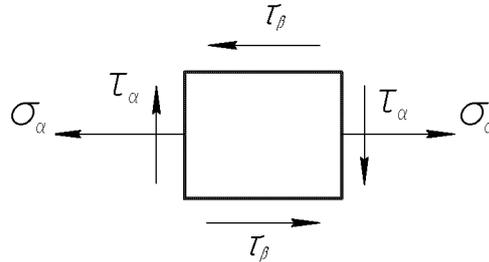
$$\sigma_{DE} = \frac{N_{DE}}{F_{DE}} = \frac{80,8 \cdot 10^{-3}}{6,72 \cdot 10^{-4}} = 120 \text{ МПа} \leq [\sigma] = 160 \text{ МПа}.$$

Умова міцності забезпечена. В іншому випадку площу поперечного перерізу стержня DE необхідно було б визначити з умови міцності, а стержня KH – із співвідношення.

2.2. СКЛАДНИЙ НАПРУЖЕНИЙ СТАН

Через будь-яку точку навантаженого тіла можна провести безліч по-різному орієнтованих площадок. Сукупність напружень, що виникають на цих площадках, характеризують напружений стан даної точки.

Нормальні напруження σ вважаємо додатними якщо вони розтягують матеріал елемента. Дотичні напруження додатні коли утворюють пару сил відносно центру елемента, яка хоче повернути його за годинниковою стрілкою.



На даному рисунку $\sigma_\alpha > 0$, $\tau_\alpha = -\tau_\beta > 0$.

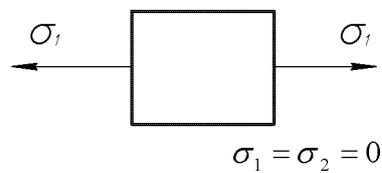
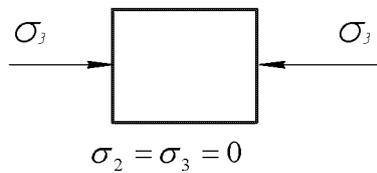
Дотичні напруження на 2-х взаємно-перпендикулярних площадках рівні між собою але протилежні за знаком. (Закон парності дотичних напружень).

Через кожену точку тіла можна провести три взаємно-перпендикулярні площадки, на яких дотичні напруження дорівнюють нулю. Такі площадки називаються головними площадками, а напруження, що діють на них – головними напруженнями, які позначаються $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ і $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$.

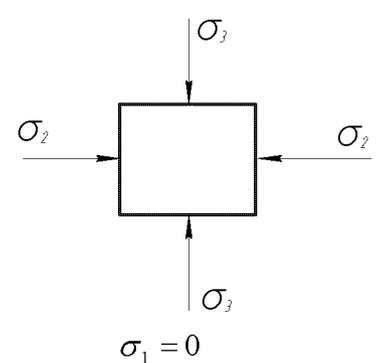
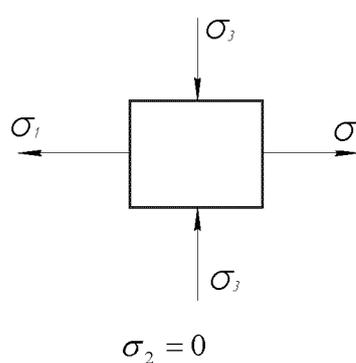
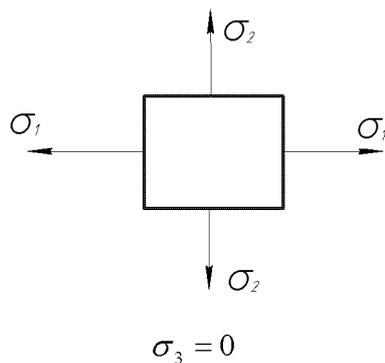
Головні напруження в даній точці досягають екстремальних значень.

Існує три види напруженого стану:

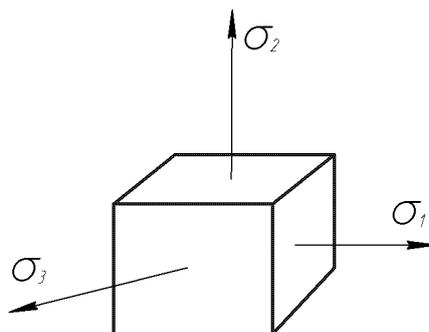
1. Лінійний



2. Плоский

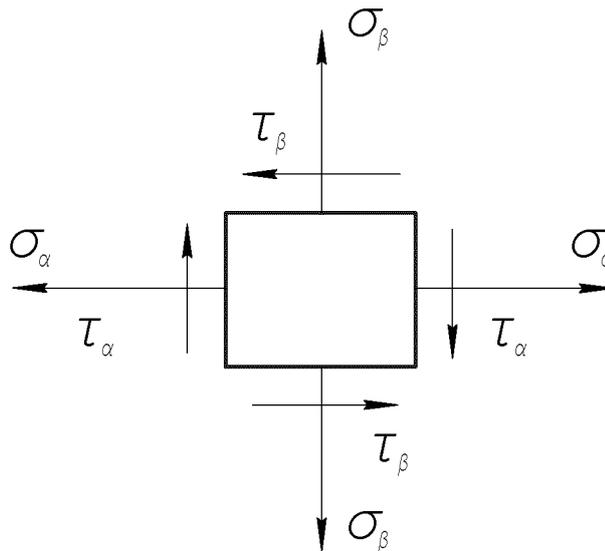


3. Об'ємний



В подальшому розглядаємо лінійний та плоский напружений стан.

В загальному для плоского напруженого стану відомі нормальні та дотичні напруження σ_α , σ_β , $\tau_\alpha = -\tau_\beta$ що діють на взаємно перпендикулярних площадках



Величину та напрямок головних напружень емпірично визначаємо за формулами

$$\sigma_{\max/\min} = \frac{1}{2} \left[\sigma_\alpha + \sigma_\beta \pm \sqrt{(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)^2 + 4\tau_\alpha^2} \right]$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2\tau_\alpha}{\sigma_\alpha - \sigma_\beta},$$

де α – кут на який необхідно повернути вектор σ_α щоб визначити напрямок більшого головного напруження (додатній кут слід повертати проти ходу стрілки годинника).

Графічне визначення головних напружень та їх напрямок можна визначити графічно з допомогою кола Мора. Цей метод описаний в прикладі розв'язку задачі.

Приклад розв'язку задачі №4. Аналіз плоского напруженого стану.

Для заданого елемента (рис. 2.1а) визначити:

- 1) величину і напрямок головних напружень (графічно та аналітично);
- 2) величину τ_{\max} і положення площадки, де воно діє (графічно та аналітично);
- 3) відносні деформації в напрямку трьох головних напружень;
- 4) відносну зміну об'єму;
- 5) питому потенціальну енергію деформації;
- 6) розрахункові напруження, якщо матеріал елемента сталь Ст.3, чавун СЧ18-36 і порівняти їх з допустимими напруженнями, прийнявши $n_T=1,5$, $n_B=2,5$.

Розв'язок

Викреслюємо прямокутну систему координат $\sigma\tau$, вісь σ проводимо паралельно більшому нормальному напруженню σ_α (рис. 2.1б). У даній системі координат визначаємо точки, які відповідають напруженням на площадках α і β , точки D_α і D_β . Так як ці точки зображають напруження, які діють на двох перпендикулярних площадках, то довжина $D_\alpha D_\beta$ є діаметром кола напружень. Точка перетину цього діаметра з віссю σ дає центр C кола. Точки A і B , де коло перетинає вісь σ , визначають величину головних напружень:

$$\sigma_1 = \overline{OA} = 135 \text{ МПа}; \quad \sigma_3 = \overline{OB} = 75 \text{ МПа}.$$

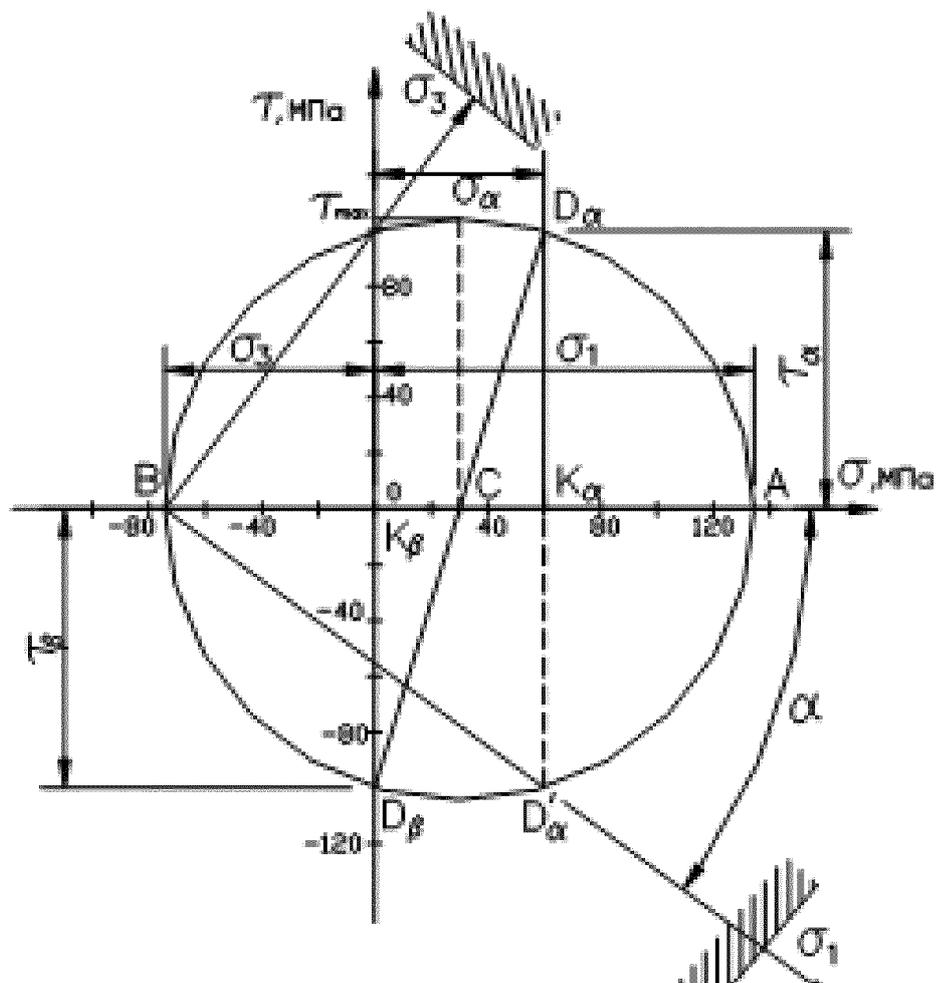
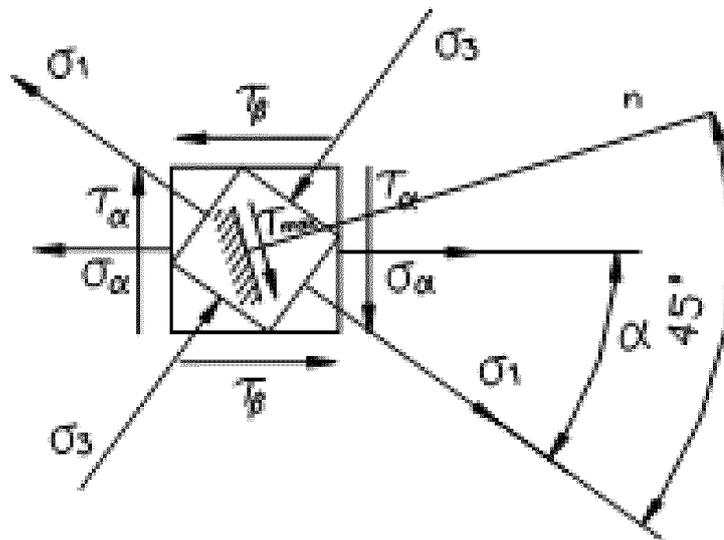
Напрямок напруження σ_1 визначається вектором BD'_α .

Кут між нормальними напруженнями σ_α і σ_1 становить $\alpha = -37^\circ$.

Знак мінус вказує на те, що він відкладається від осі σ за годинниковою стрілкою.

Максимальне дотичне напруження τ_{\max} рівне радіусу кола Мора: $\tau_{\max} = CT = 105 \text{ МПа}$.

$$\sigma_{\alpha} = 60 \text{ МПа} \quad T_{\alpha} = 100 \text{ МПа}$$



Тут $\sigma_{\beta} = 0$; $\sigma_2 = 0$.

Кут між напруженням σ_{α} і більшим головним напруження визначаємо за формулою:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2\tau_{\alpha}}{\sigma_{\alpha} - \sigma_{\beta}} = -\frac{2 \cdot 100}{60 - 0} = -3,33,$$

$$\alpha = -\frac{1}{2} \operatorname{arctg}(3,33) = -37^{\circ}.$$

Максимальне дотичне напруження рівне:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{135 - (-75)}{2} = 105 \text{ МПа}.$$

Напрями векторів напружень σ_1 , σ_3 , τ_{\max} і площадки, на яких вони діють, зображуємо на рис. 2.1а.

Відносні деформації в напрямку головних напружень для сталюого елемента визначаємо за формулами:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] = \frac{1}{2 \cdot 10^5} \cdot [135 - 0,3 \cdot (-75)] = 78,8 \cdot 10^{-5};$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)] = \frac{1}{2 \cdot 10^5} \cdot [0 - 0,3 \cdot (135 - 75)] = -9,00 \cdot 10^{-5}; \quad \text{Відносна зміна об'єму}$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)] = \frac{1}{2 \cdot 10^5} \cdot [-75 - 0,3 \cdot 135] = -57,8 \cdot 10^{-5}.$$

рівна:

$\theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = (78,8 - 9,00 - 57,8) \cdot 10^{-5} = 12 \cdot 10^{-5}$. Визначаємо питому потенціальну енергію деформації:

$$U = \frac{1}{2} (\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3) = \frac{1}{2} (78,8 \cdot 135 + 0 + 57,8 \cdot 75) \cdot 10^{-5} = 74,9 \cdot 10^{-3} \frac{\text{МНм}}{\text{м}^3}.$$

Допустимі напруження рівні:

а) для сталі Ст.3:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n_T} = \frac{220}{1,5} = 147 \text{ МПа},$$

де $\sigma_T = 220 \text{ МПа}$ - границя текучості;

б) для чавуна СЧ18-36:

$$[\sigma_p] = \frac{\sigma_{ep}}{n_e} = \frac{180}{2,5} = 72 \text{ МПа},$$

$$[\sigma_c] = \frac{\sigma_{ec}}{n_e} = \frac{700}{2,5} = 280 \text{ МПа},$$

де $\sigma_{ep} = 180 \text{ МПа}$, $\sigma_{ec} = 700 \text{ МПа}$ - тимчасовий опір матеріалів відповідно при розтягу і стиску.

Для сталі Ст.3, яка є пластичним матеріалом, перевірку на міцність можна проводити за третьою або четвертою теорією міцності. За третьою теорією міцності маємо:

$$\sigma_{p3} = \sigma_1 - \sigma_3 = 135 - (-75) = 210 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{p3} = 210 \text{ МПа} > [\sigma] = 147 \text{ МПа}.$$

Умову міцності не забезпечено.

Для чавуна СЧ18-36, який є крихким матеріалом, застосовуємо теорію міцності Мора, оскільки досліджуваній напружений стан матеріалу знаходиться між простим розтягом і простим стиском

$$\sigma_p = \sigma_1 - \nu \sigma_3 = 135 - 0,257 \cdot (-75) = 154 \text{ МПа},$$

$$\sigma_p = 154 \text{ МПа} > [\sigma_p] = 72 \text{ МПа},$$

де

$$\nu = \frac{[\sigma_p]}{[\sigma_c]} = \frac{72}{280} = 0,257.$$

Умову міцності для чавуна теж не забезпечено.

2.3. ГЕОМЕТРИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ ПЕРЕТИНІВ

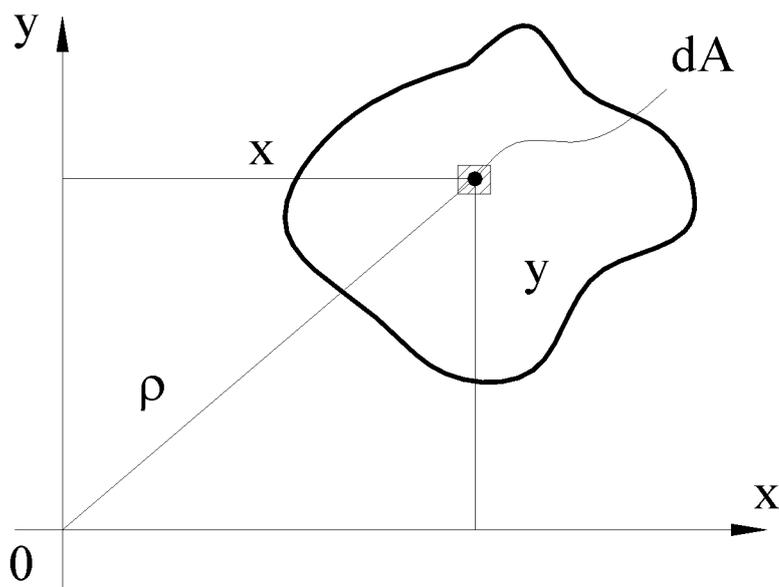


Рис. 2.1

Статичні моменти площі визначають за формулами:

$$S_y = \int_A x dA$$

$$S_x = \int_A y dA$$

або

$$S_x = y_c \cdot A; \quad S_y = x_c \cdot A;$$

де y_c, x_c – координати центра ваги перетину;

A – площа перетину.

Дана властивість використовується для визначення центра ваги складних поперечних перетинів:

$$x_c = \frac{\sum S_y}{\sum A}, \quad y_c = \frac{\sum S_x}{\sum A},$$

де $\sum S_y, \sum S_x$ – сума статичних моментів елементарних площ;

$\sum A$ – сума елементарних площ.

Осі, що проходять через центр ваги перетину називаються центральними осями. Статистичний момент площі відносно центральної осі дорівнює нулю.

Полярний момент інерції поперечного перетину визначають за інтегралом

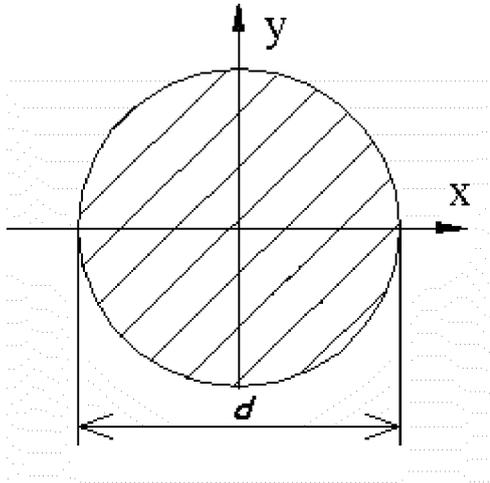
$$I_p = \int_A \rho^2 dA$$

Полярний момент опору поперечного перетину відповідно $W_p = \frac{I_p}{\rho_{\max}}$,

де ρ_{\max} – координата точки перетину максимально віддаленої точки від полюса.

Знайдемо ці характеристики для перетинів:

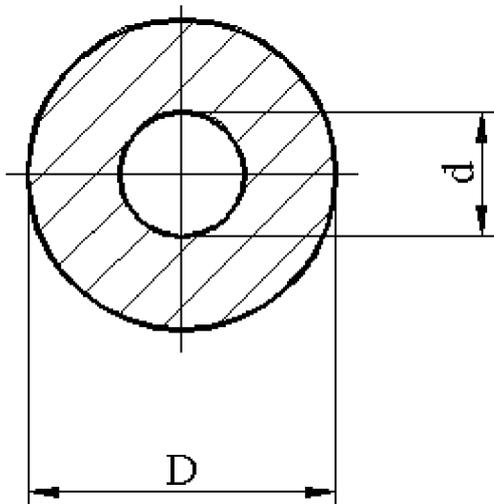
коло:



$$W_p = \frac{\pi d^3}{16};$$

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32};$$

кільце:



$$I_p = \frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4); \quad \text{де } \alpha = \frac{d}{D};$$

$$W_p = \frac{\pi D^3}{16} (1 - \alpha^4).$$

Осьові моменти інерції поперечних перетинів визначають за інтегралами:

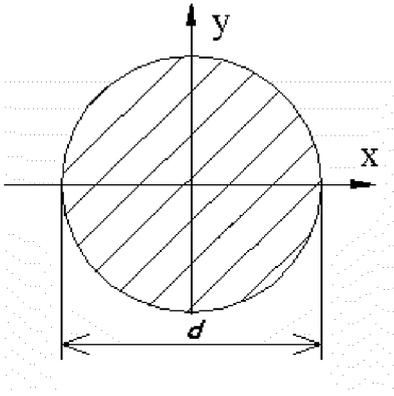
$$I_x = \int_A y^2 dA; \quad I_y = \int_A x^2 dA.$$

Осьові моменти опору поперечних перетинів визначають за формулами:

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}}, \quad W_y = \frac{I_y}{x_{\max}}.$$

де y_{\max} , x_{\max} - координати точок перетину максимально віддалених від осей X та Y.

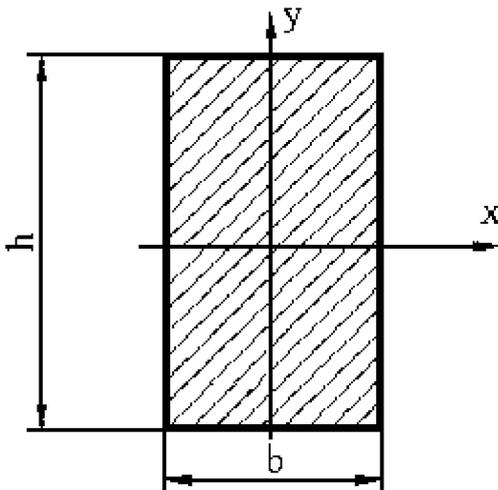
Коло



$$I_x = I_y = I_0 = \frac{\pi d^4}{64};$$

$$W_x = W_y = W_0 = \frac{\pi D^3}{32};$$

прямокутник



$$I_x = \frac{bh^3}{12};$$

$$I_y = \frac{hb^3}{12};$$

$$W_x = \frac{bh^2}{6};$$

$$W_y = \frac{hb^2}{6}.$$

Залежність між моментами інерції при паралельному переносі осей

$$I_{X_1} = I_X + A \cdot a^2.$$

Осьовий момент інерції відносно будь-якої осі X_1 дорівнює осьовому моменту інерції відносно центральної осі X , яка паралельна осі X_1 , плюс добуток площі на квадрат відстані між осями.

При розрахунках балок складних геометричних перетинів на згин, для досягнення максимального завантаження, згинальні моменти слід орієнтувати відносно однієї з головних центральних осей відносно якої $I_0 = I_{\max}$. Головні центральні осі – це осі відносно яких

$$S_X = 0; \quad S_y = 0; \quad I_{xy} = 0$$

Геометричні перетини, які мають хоча б одну вісь симетрії обов'язково є головними тому, що відцентровий момент інерції поперечного перетину відносно них дорівнює нулю ($I_{xy} = 0$).

Для несиметричних геометричних перетинів необхідно визначити положення головних центральних осей за формулою.

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y},$$

де I_{xy} - відцентровий момент інерції поперечного перетину відносно центральних осей;

I_x, I_y - осьові моменти інерції поперечного перетину відповідно центральних осей.

Положення головних центральних осей поперечного перетину отримують шляхом повороту центральних осей на кут α (при додатному значенні α поворот здійснюється проти стрілки годинника і навпаки).

Значення головних центральних моментів інерції поперечного перетину визначають за формулою.

$$I_{\frac{\max}{\min}} = \frac{1}{2} \left[I_x + I_y \pm \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2} \right].$$

Осьові моменти інерції відносно них досягають своїх експериментальних значень, тобто максимальних і мінімальних для заданого поперечного перетину.

Приклад розв'язку задачі 5.1.

ВИЗНАЧЕННЯ МОМЕНТІВ ІНЕРЦІЇ ПЛОСКИХ ПЕРЕТИНІВ

Для заданої плоскої фігури (рис. 2.2) визначити положення головних центральних осей інерції, величини осьових моментів інерцій та осьових моментів опору відносно них, якщо двотавр №33.

Розв'язок

Вписуємо геометричні характеристики вказаного прокатного профілю, двотавра № 33; позначаємо їх індексом 1.

Двотавр №33, ГОСТ 8239-72.

$h_1 = 330\text{мм}$; $b_1 = 140\text{мм}$;

$d_1 = 7,0\text{мм}$; $t_1 = 11,2\text{мм}$; $A_1 = 53,8\text{см}^2$; $I_{x1} = 419\text{см}^4$; $I_{y1} = 9840\text{см}^4$.

Визначаємо геометричні характеристики полоси.

Розміри полоси, (позначимо індексом 2):

$$b_2 = \frac{h}{4} = \frac{33}{4} = 8,25\text{мм};$$

$$a_2 = h = 330\text{мм}.$$

Площа поперечного перетину полоси

$$A_2 = b_2 \cdot a_2 = 8,25 \cdot 33 = 272\text{см}^2.$$

Осьові моменти інерцій полоси:

$$I_{x2} = \frac{a \cdot b_2^3}{12} = \frac{33 \cdot 8,25^3}{12} = 1544\text{см}^4;$$

$$I_{y2} = \frac{b_2 \cdot a^3}{12} = \frac{8,5 \cdot 33^3}{12} = 24706\text{см}^4.$$

Викреслюємо розрахункову схему в масштабі (рис. 2.2).

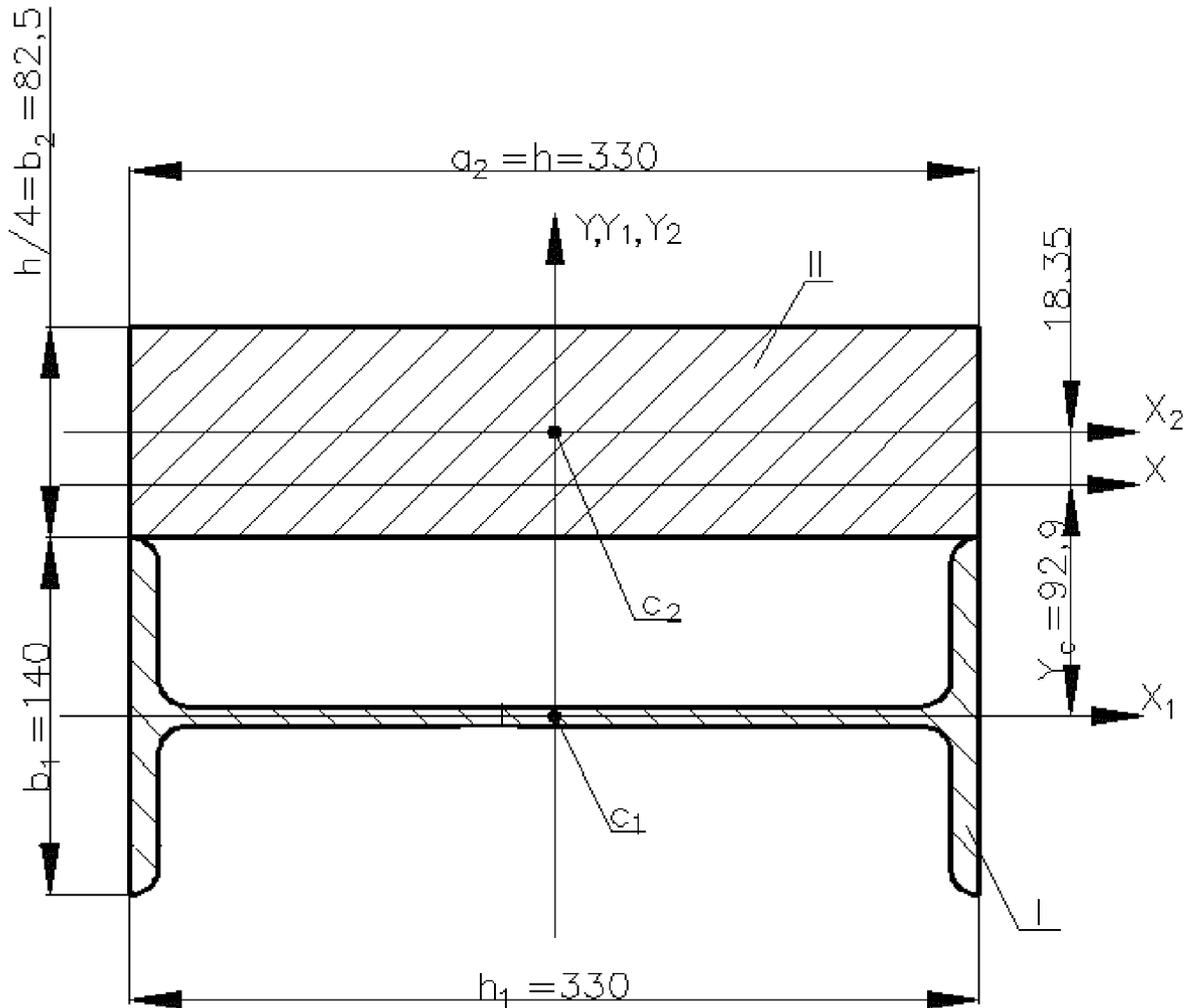


Рис. 2.2

Визначаємо координати центра ваги складного поперечного перетину в системі координат $Y_1 X_1$.

$$X=0;$$

$$Y_c = \frac{\sum Sx_1}{\sum A} = \frac{A_1 \cdot Y_{c1} + A_2 \cdot Y_{c2}}{A_1 + A_2};$$

де Y_{c1} – відстань від центра ваги площі першої фігури (двотавра) до осі X_1 ;

$$Y_{c1}=0;$$

Y_{c2} – відстань від центра ваги площі другої фігури (полоси);

$$Y_{c2} = \frac{140}{2} + \frac{82,5}{2} = 111,25 \text{ мм}.$$

$$\text{Підставимо значення і одержимо } Y_c = \frac{0 + 272 \cdot 111,25}{53,8 + 272} = 92,9 \text{ мм}.$$

Проводимо центральні осі YX .

Визначаємо осьові моменти інерції відносно головних центральних осей:

$$I_y = I_{y1} + I_{y2} = 9840 + 24706 \approx 34600 \text{ см}^4;$$

$$I_x = I_{x1} + A_1 \cdot (9,29)^2 + I_{x2} + A_2 \cdot (1,835)^2 = 419 + 53,8 \cdot 9,29^2 + 1544 + 272 \cdot 1,835^2 \approx 5980 \text{ см}^4.$$

Визначаємо осьові моменти опору відносно центральних осей:

$$W_x = \frac{I_x}{Y_{\max}} = \frac{5980}{16,29} = 367 \text{ см}^3;$$

$$W_y = \frac{I_y}{X_{\max}} = \frac{34600}{16,5} = 2097 \text{ см}^3;$$

де X_{\max} , Y_{\max} – координати точок поперечного перетину максимально віддалені від осей X та Y (рис. 2.3):

$$Y_{\max} = 9,29 + 7 = 16,29 \text{ см};$$

$$X_{\max} = 16,5 \text{ см}.$$

Приклад розв'язку задачі 5.2.

Визначення положення головних центральних осей інерції та величин головних центральних моментів інерції складного перерізу

Для заданої плоскої фігури (рис. 3.1а) визначити положення головних центральних осей інерції та величини головних центральних моментів інерції.

Розв'язок

Випикуємо з таблиць сортаменту необхідні дані для розв'язання задачі:

а) для швелера №20 (ГОСТ 8240-56):

$$F_1 = 23,4 \text{ см}^2, I_{z_1} = 1520 \text{ см}^4, I_{y_1} = 113 \text{ см}^4, z_{01} = 2,07 \text{ см};$$

б) для кутика 80x50x5 (ГОСТ 8510-57):

$$F_2 = 6,36 \text{ см}^2, I_{z_2} = 12,7 \text{ см}^4, I_{y_2} = 41,6 \text{ см}^4, I_{\min} = 7,58 \text{ см}^4,$$

$$z_{02} = 2,6 \text{ см}, y_{02} = 1,13 \text{ см}, \text{tg} \alpha = 0,387.$$

Координати центра ваги складного перерізу в системі координат $Z_1 Y_1$ (вибираємо довільно) визначаємо за формулами:

$$Z_c = \frac{S_{y_1}}{F} = \frac{F_1 Z_1 + F_2 Z_2}{F_1 + F_2} \tag{3.1}$$

$$Y_c = \frac{S_{z_1}}{F} = \frac{F_1 Y_1 + F_2 Y_2}{F_1 + F_2}$$

де S_{y_1} , S_{z_1} – статичні моменти площі F перерізу відносно осей Y_1 , Z_1 ; $Z_1=0$, $Y_1=0$ – координати центра ваги швелера у прийнятій системі координат $Z_1 Y_1$; $z_2 = -(2,07+2,60) = -4,67$ см, $y_2 = 4,00+1,13 = 5,13$ см – координати центра ваги кутика.

Підставивши значення у формули (3.1), отримаємо:

$$z_c = \frac{23,4 \cdot 0 + 6,36 \cdot (-4,67)}{23,4 + 6,36} = -1,00 \text{ см};$$

$$y_c = \frac{23,4 \cdot 0 + 6,36 \cdot 5,13}{23,4 + 6,36} = 1,10 \text{ см}.$$

Наносимо точку центра ваги перерізу на рис. 3.1а і проводимо центральні осі Z_c, Y_c , паралельні осям Z_1, Y_1 .

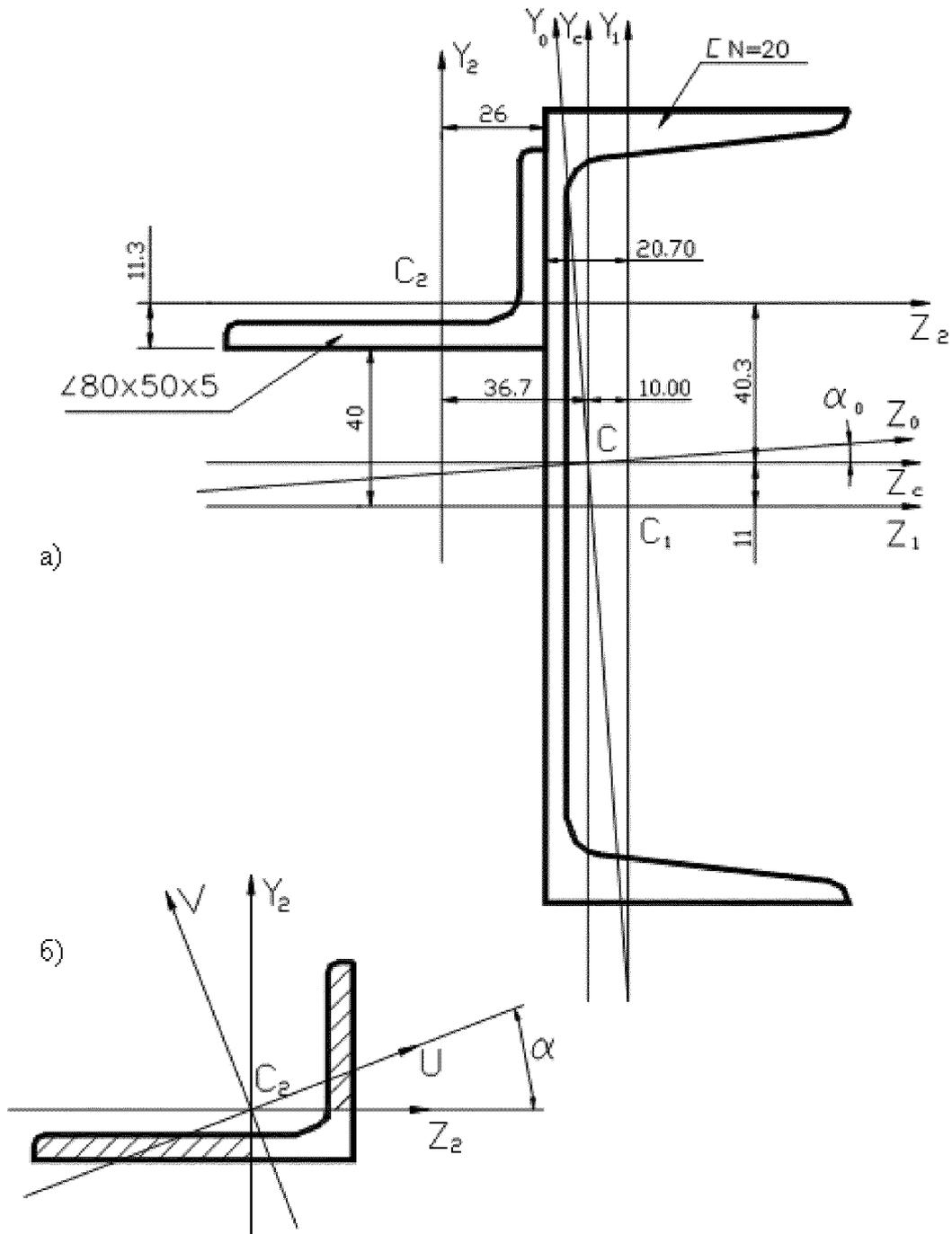


РИС.3.1

Осьові та відцентрові моменти інерції перерізу визначаємо, використовуючи формули зміни моментів інерції при паралельному переносі осей:

$$I_{z_c} = I_{z_1} + a_1^2 F + I_{z_2} + a_2^2 F_2;$$

$$I_{y_c} = I_{y_1} + b_1^2 F_1 + I_{y_2} + b_2^2 F_2; \quad (3.2)$$

$$I_{z_c y_c} = I_{z_1 y_1} + a_1 b_1 F_1 + I_{z_2 y_2} + a_2 b_2 F_2,$$

де $a_1 = -1,10$ см, $b_1 = 1,00$ см, $a_2 = 4,00 + 1,13 - 1,10 = 4,03$ см, $b_2 = -(2,60 + 2,07 - 1,00) = -3,67$ см - координати центрів ваги швелера та кутника в системі координат $z_{c y_c}$; $I_{y_1 z_1} = 0$ - відцентровий момент інерції швелера (його значення рівне нулю в зв'язку з тим, що вісь Z_1 є віссю симетрії швелера). Відцентровий момент інерції кутника визначається за формулою:

$$I_{z_2 y_2} = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{2} \cdot \sin 2\alpha,$$

де

$$I_{\min} = I_u = 7,58 \text{ см}^4,$$

$$I_{\max} = I_v = I_{z_2} + I_{y_2} - I_{\min} = 12,7 + 41,6 - 7,58 = 46,72 \text{ см}^4,$$

$$\sin 2\alpha = 0,67 \text{ (оскільки } \operatorname{tg} \alpha = 0,387, \alpha = 21^\circ 10').$$

Зазначимо, що відцентровий момент інерції може бути додатнім і від'ємним, в залежності від знаку кута α (рис. 3.1б). Знак кута α визначається на основі загальноприйнятого правила, але в практичних розрахунках можна використати більш наглядний спосіб визначення знаку величини $I_{z_2 y_2}$:

- відцентровий момент інерції кутника **додатній**, якщо заштрихована (більша) частина його знаходиться у першому і третьому квадрантах;
- **від'ємний**, якщо – у другому і четвертому квадрантах.

Підставивши значення у формули (3.2), отримаємо:

$$I_{z_c} = 1520 + (-1,10)^2 \cdot 23,4 + 12,7 + (4,03)^2 \cdot 6,36 = 1663,90 \text{ см}^4;$$

$$I_{y_c} = 133 + (1,00)^2 \cdot 23,4 + 41,6 + (-3,67)^2 \cdot 6,36 = 263,66 \text{ см}^4;$$

$$I_{z_c y_c} = (-1,10) \cdot 1,00 \cdot 23,4 + \frac{46,72 - 7,58}{2} \cdot 0,67 + 4,03 \cdot (-3,67) \cdot 6,36 = -106,70 \text{ см}^4.$$

Положення головних центральних осей інерції перерізу визначаємо за формулою:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2I_{z_c y_c}}{I_{z_c} - I_{y_c}} = -\frac{-2 \cdot 106,70}{1663,90 - 263,66} = 0,15;$$

$$2\alpha_0 = 8^\circ 30'; \quad \alpha_0 = 4^\circ 15'.$$

На рис.3.1а через точку С проводимо головні центральні осі інерції Z_0, Y_0 перерізу, які повернуті по відношенню до осей Z_c, Y_c на кут

$$\alpha_0 = 4^\circ 15' \text{ проти годинникової стрілки.}$$

Головні центральні моменти інерції перерізу рівні:

$$\begin{aligned} I_{\frac{\max}{\min}} &= \frac{1}{2} [(I_{z_c} + I_{y_c}) \pm \sqrt{(I_{z_c} - I_{y_c})^2 + 4I_{z_c y_c}^2}] = \\ &= \frac{1}{2} [(1663,90 + 263,66) \pm \sqrt{(1663,90 - 263,66)^2 + 4 \cdot (-106,70)^2}] = \\ &= \frac{1}{2} [1927,56 \pm 1416,41]; \end{aligned}$$

$$I_{\max} = I_{z_0} = 1671,99 \text{ см}^4;$$

$$I_{\min} = I_{y_0} = 255,58 \text{ см}^4.$$

$$I_{z_c} + I_{y_c} = I_{\max} + I_{\min};$$

$$1663,90 + 263,66 = 1671,99 + 255,58; \text{ Перевірка:}$$

$$1927,55 \approx 1927,57.$$

Таким чином, перевірка підтверджує правильність розв'язку задачі.

2.4. РОЗРАХУНОК ВАЛА НА КРУЧЕННЯ

Кручення – це вид деформації, при якому у поперечних перетинах діє внутрішній силовий фактор – крутний момент, $M_{кр}$. Брус, що сприймає деформацію кручення в механіці називають валом. У поперечних перетинах вала діють дотичні напруження, які визначають за формулою

$$\tau_{\rho} = \frac{M_{кр}}{I_P} \cdot \rho;$$

де ρ - відстань від полюса до точки, в якій визначаємо дотичні напруження.

Еюра розподілу дотичних напружень по висоті поперечного перетину показана на рис.

3.1.

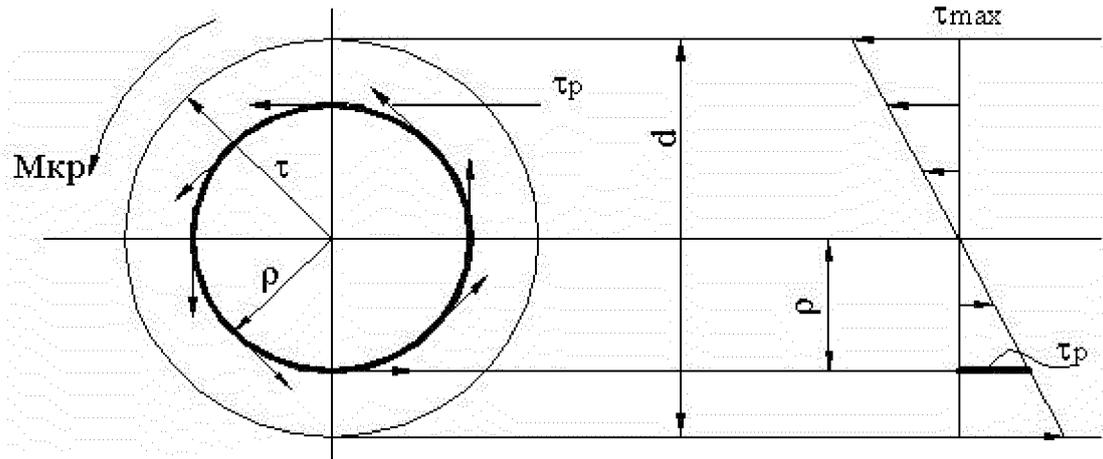


Рис. 3.1

Максимальні дотичні напруження та умова міцності при крученні:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_P} \leq [\tau]$$

де $[\tau] = (0,55 \div 0,6)[\sigma_P]; \quad [\sigma_P] = \frac{\sigma_T}{n};$

$W_P = \frac{I_P}{\rho_{\max}}$ - полярний момент опору поперечного перетину.

Відносний кут закручування визначають за формулами:

$$\theta = \frac{M_{кр}}{GI_P} \left[\frac{\text{рад}}{\text{м}} \right]; \quad \theta = \frac{M_{кр}}{GI_P} \cdot \frac{180}{\pi} \left[\frac{\text{град}}{\text{м}} \right].$$

Повне кутове переміщення вала довжиною l знаходять з виразу

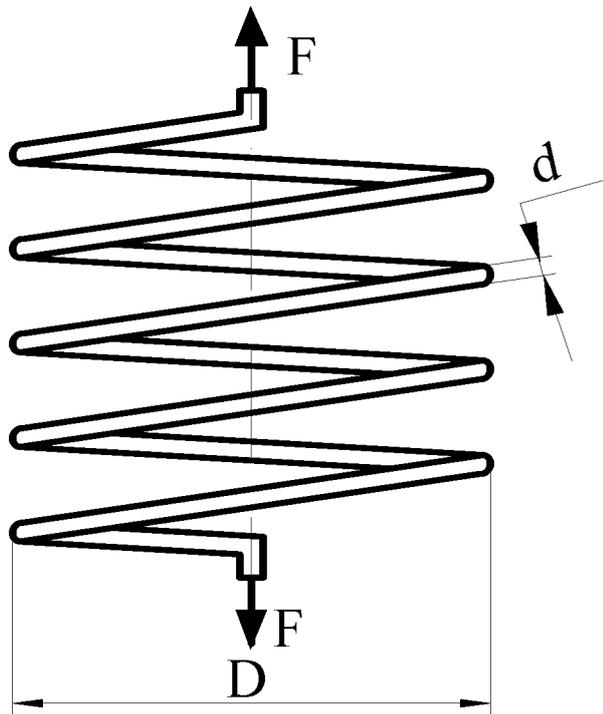
$$\theta = \frac{\Delta\varphi}{l}, \quad \text{тоді } \varphi = \frac{M_{кр} \cdot l}{G \cdot I_P} [\text{рад}].$$

Умова жорсткості вала при крученні

$$\theta = \frac{M_{кр}}{G \cdot I_P} \cdot \frac{180}{\pi} \leq [\theta], \quad \text{де } [\theta] = (0,25 \div 1) \frac{\text{град}}{\text{м}}.$$

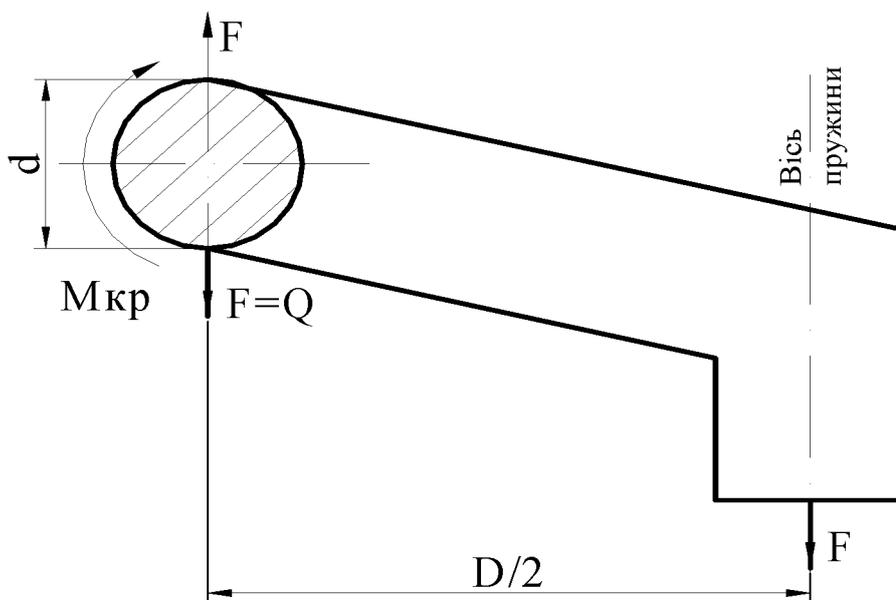
Розрахунок гвинтових пружин

Широке застосування в машинобудуванні отримали циліндричні гвинтові пружини, які сприймають осьові навантаження



Дані пружини використовуються головним чином в якості амортизаторів – для пом'якшення ударів і поштовхів.

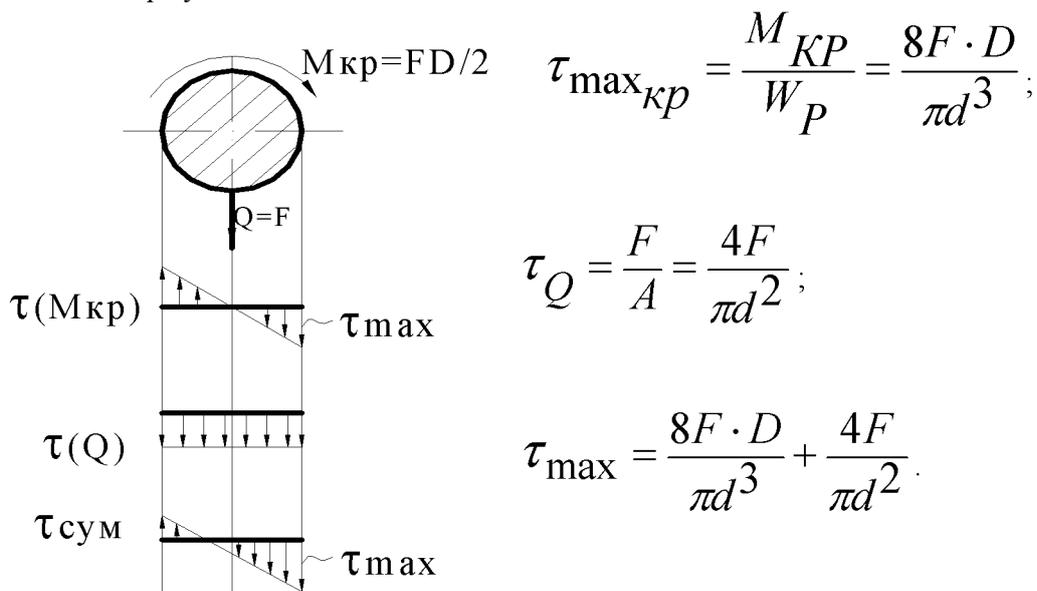
Розглянемо рівновагу частини пружини



В поперечному перетині матеріалу пружини діють:
перерізуючи сила $Q = F$;

крутний момент $M_{KP} = F \cdot \frac{D}{2}$,

тобто в матеріалі пружини виникають дотичні напруження від двох силових факторів, кручення та різну.



Максимальні сумарні напруження виникають на внутрішніх волокнах пружини. В багатьох випадках напруженнями від перерізуючої сили нехтують, тоді

$$\tau_{\max} = \frac{8F \cdot D}{\pi d^3} \leq [\tau]$$

Пружини виготовляють з високоякісних легованих сталей, для яких $[\tau] = 200 \div 800$ МПа.

Для визначення осадки (переміщення) пружини, використаємо рівність роботи зовнішньої сили з потенціальною енергією деформацій від крутного моменту (впливом Q нехтуємо)

Приклад розв'язку задачі 6

РОЗРАХУНОК ВАЛА НА МІЦНІСТЬ І ЖОРСТКІСТЬ

На вал насаджено 5 шківів, які передають потужності $N_1=10$ кВт; $N_2=50$ кВт; $N_3=48$ кВт; $N_4=80$ кВт (рис. 3.2а). Визначити діаметри окремих ділянок вала, виходячи з умови міцності на кручення при $[\tau]=50$ МПа. Провести перевірку вала на жорсткість при допустимому куті закручування $[\theta]=2$ град/м. Частота обертання вала $\omega=40$ с⁻¹, матеріал – сталь Ст.3.

Розв'язок

Значення потужності N_0 визначаємо на основі рівняння балансу потужностей, записаного з врахуванням напрямку дії зосереджених моментів (тертям в опорах нехтуємо)

$$-N_0 + N_1 + N_2 + N_3 - N_4 = 0;$$

звідси $N_0 = N_1 + N_2 + N_3 - N_4 = 10 + 50 + 48 - 80 = 28$ кВт.

Скручуючі моменти M_i ($i=0,1,2,3,4$), які передаються кожним шківом, визначаються за формулою:

$$M_i = \frac{N_i}{\omega}$$

Підставивши значення, отримаємо:

$$M_0 = \frac{28}{40} = 0,7 \text{ кНм}; \quad M_1 = \frac{10}{40} = 0,25 \text{ кНм}; \quad M_2 = \frac{50}{40} = 1,25 \text{ кНм};$$

$$M_3 = \frac{48}{40} = 1,2 \text{ кНм}; \quad M_4 = \frac{80}{40} = 2,0 \text{ кНм}.$$

Крутні моменти $M_{к_i}$ ($i=0,1,2,3,4$) на кожній ділянці вала відповідно рівні (рис. 3.2а):

$$M_{\kappa_1} = -M_0 = -0,7 \text{ кНм};$$

$$M_{\kappa_2} = -M_0 + M_1 = -0,7 + 0,25 = -0,45 \text{ кНм};$$

$$M_{\kappa_3} = M_4 - M_3 = 2,0 - 1,2 = 0,8 \text{ кНм};$$

$$M_{\kappa_4} = M_4 = 2,0 \text{ кНм}.$$

Використовуючи отримані значення, будемо епюру крутних моментів (рис. 3.2б).

З умови міцності на кручення визначаємо діаметр вала

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{M_{\kappa}}{0,2[\tau]}}$$

Підставивши значення крутних моментів для кожної ділянки вала, отримаємо:

$$d_1 \geq \sqrt[3]{\frac{0,7}{0,2 \cdot 51 \cdot 10^3}} = 41,0 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$d_2 \geq \sqrt[3]{\frac{0,45}{0,2 \cdot 51 \cdot 10^3}} = 35,4 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$d_3 \geq \sqrt[3]{\frac{0,8}{0,2 \cdot 51 \cdot 10^3}} = 42,8 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$d_4 \geq \sqrt[3]{\frac{2,0}{0,2 \cdot 51 \cdot 10^3}} = 58,1 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Приймаємо діаметри ділянок вала:

$$d_1 = 42 \text{ мм}; d_2 = 36 \text{ мм}; d_3 = 44 \text{ мм}; d_4 = 58 \text{ мм}.$$

Використовуючи отримані значення, викреслюємо ескіз вала (рис. 3.2в).

Кути закручування окремих ділянок вала знайдемо за формулою

$$\varphi_i = \frac{M_{\kappa_i} \cdot l_i}{G \cdot I_{p_i}}, \quad i=1,2,3,4,$$

де l_i – довжина ділянки вала;

$G = 8,1 \cdot 10^4 \text{ МПа}$ – модуль зсуву;

$I_{p_i} = \frac{\pi d_i^4}{32} \cong 0,1 d_i^4$ – полярний момент інерції поперечного перетину вала.

Підставивши значення, отримаємо:

$$\varphi_1 = \frac{-0,7 \cdot 0,4}{8,1 \cdot 10^7 \cdot 0,1 \cdot (0,042)^4} = -1,10 \cdot 10^{-2} \text{ рад};$$

$$\varphi_2 = \frac{-0,45 \cdot 0,6}{8,1 \cdot 10^7 \cdot 0,1 \cdot (0,036)^4} = -1,98 \cdot 10^{-2} \text{ рад};$$

$$\varphi_3 = \frac{0,8 \cdot 0,4}{8,1 \cdot 10^7 \cdot 0,1 \cdot (0,044)^4} = 1,10 \cdot 10^{-2} \text{ рад};$$

$$\varphi_4 = \frac{2,0 \cdot 0,5}{8,1 \cdot 10^7 \cdot 0,1 \cdot (0,058)^4} = 1,09 \cdot 10^{-2} \text{ рад}.$$

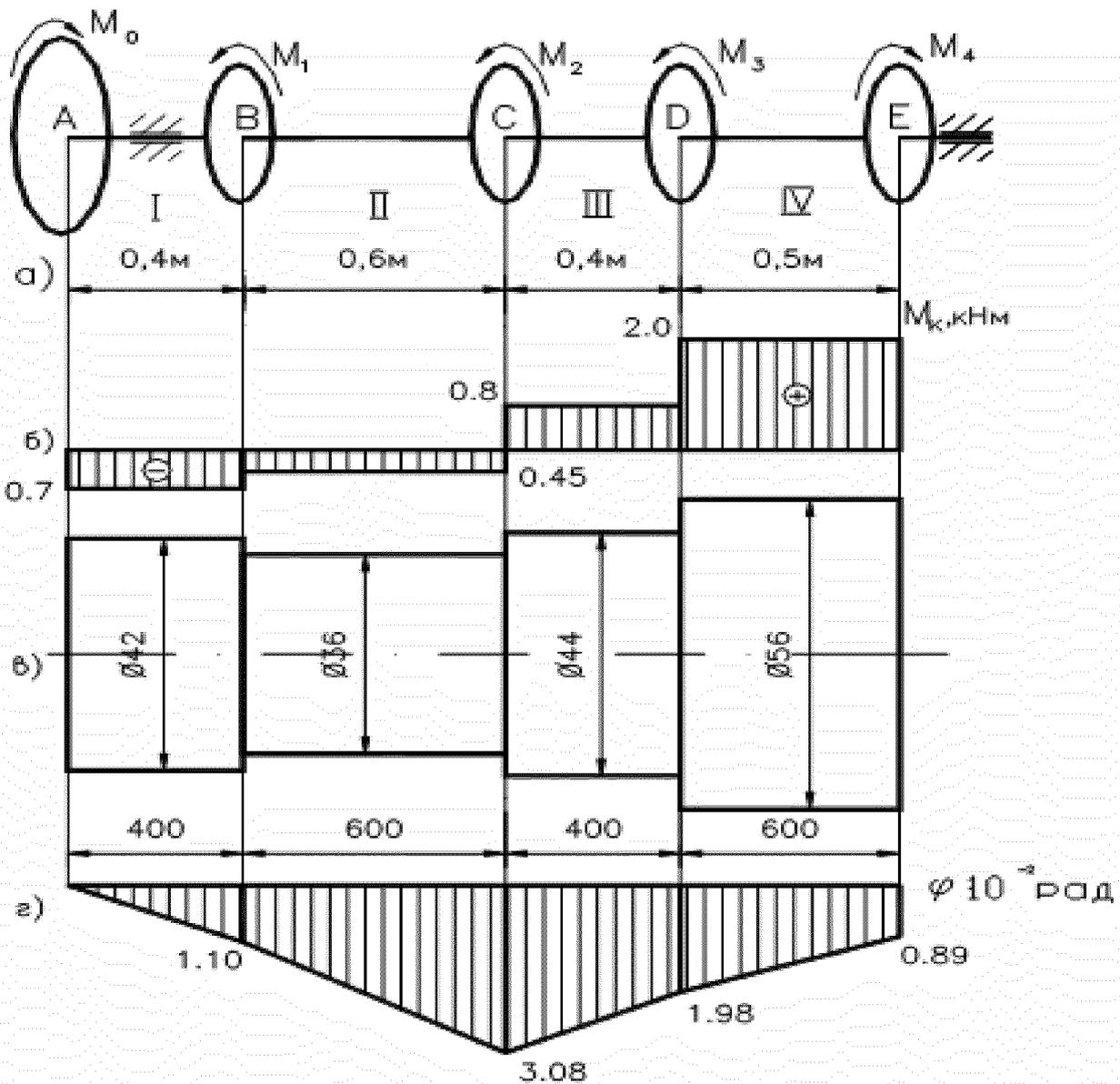


рис.3.2

Використовуючи значення $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$, будемо епюру кутів закручування вала (рис.3.2г), прийнявши за початок відліку перетин А. Значення кутів закручування перетинів В, С, D, Е відносно А відповідно рівні:

$$\varphi_{BA} = \varphi_1 = -1,10 \cdot 10^{-2} \text{ рад};$$

$$\varphi_{CA} = \varphi_{BA} + \varphi_2 = -(1,10 + 1,98) \cdot 10^{-2} = -3,08 \cdot 10^{-2} \text{ рад};$$

$$\varphi_{DA} = \varphi_{CA} + \varphi_3 = (-3,08 + 1,10) \cdot 10^{-2} = -1,98 \cdot 10^{-2} \text{ рад};$$

$$\varphi_{EA} = \varphi_{DA} + \varphi_4 = (-1,98 + 1,09) \cdot 10^{-2} = -0,89 \cdot 10^{-2} \text{ рад}.$$

Перевірку на жорсткість вала проведемо за умовою жорсткості

$$\theta_{\max} \leq [\theta],$$

де θ_{\max} – максимальний кут закручування вала на одиницю його довжини.

Для визначення θ_{\max} підрахуємо значення даної величини на кожній ділянці вала:

$$\theta_1 = \frac{\varphi_1}{l_1} = \frac{1,10 \cdot 10^{-2}}{0,4} = 2,75 \cdot 10^{-2} \frac{\text{рад}}{\text{м}};$$

$$\theta_2 = \frac{\varphi_2}{l_2} = \frac{1,98 \cdot 10^{-2}}{0,6} = 3,30 \cdot 10^{-2} \frac{\text{рад}}{\text{м}};$$

$$\theta_3 = \theta_1 = 2,75 \cdot 10^{-2} \frac{\text{рад}}{\text{м}};$$

$$\theta_4 = \frac{\varphi_4}{l_4} = \frac{1,09 \cdot 10^{-2}}{0,5} = 2,1 \cdot 10^{-2} \frac{\text{рад}}{\text{м}}.$$

Маємо

$$\theta_{\max} = \theta_2 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 3,30 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{180^\circ}{3,14} = 1,89 \frac{\text{град}}{\text{м}} \ll [\theta] = 2 \frac{\text{град}}{\text{м}}.$$

Таким чином, умову жорсткості забезпечено.

Приклад розв'язку задачі 7

Розрахунок гвинтових пружин з малим кроком

Для заданої статично невизначної системи сталевих пружин (рис. 4.3а), навантажених силою $P=200$ Н, визначити найбільші напруження в пружинах і переміщення точки А, яка знаходиться на середині пружини 2, якщо відомі середні діаметри пружин ($D_1=50$ мм, $D_2=100$ мм, $D_3=150$ мм), діаметри дроту ($d_1=4$ мм, $d_2=8$ мм, $d_3=12$ мм), кількість витків ($n_1=50$, $n_2=40$, $n_3=30$).

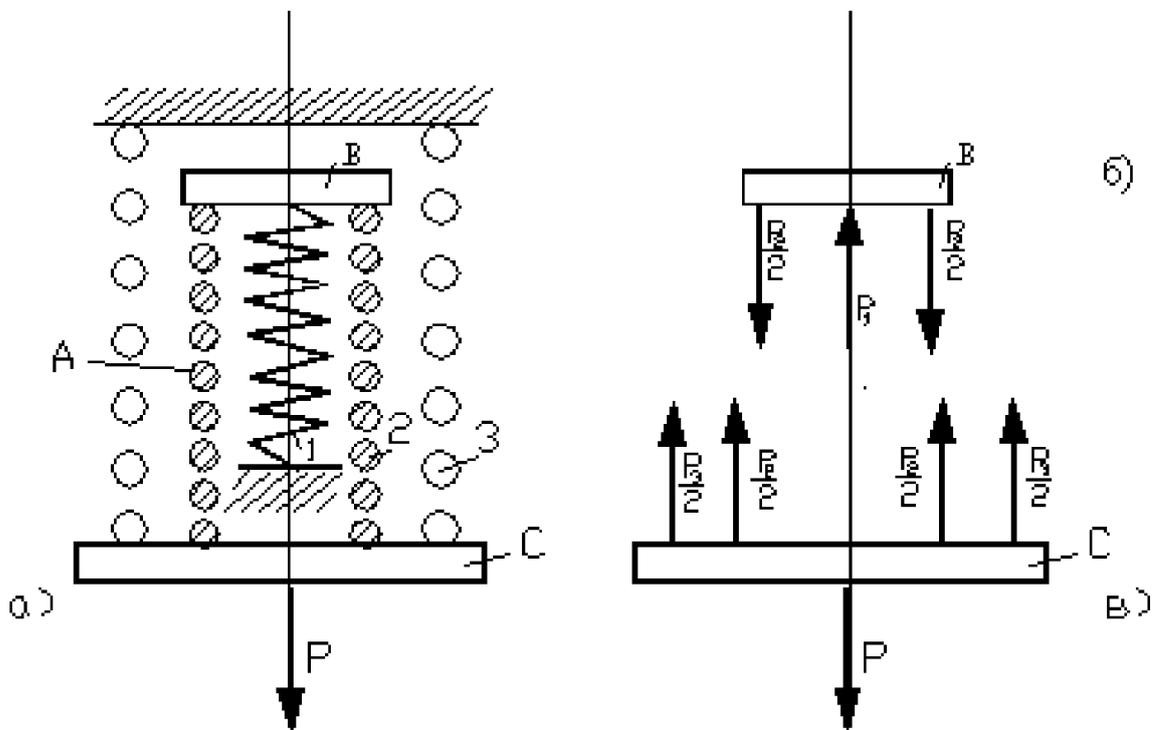


рис.4.3

Розв'язок

Задана статично невизначна система складається з трьох пружин та двох плит В і С. Для розв'язання задачі спочатку необхідно визначити силу P_1 , що стискає пружину 1, і сили P_2 , P_3 , які розтягують пружини 2,3. Усі вказані сили діють вздовж спільної осі, так як система симетрична.

Розглянемо рівновагу плит В і С. Для цього відкинемо всі зв'язки зі сторони пружин і зобразимо діючі на них шукані сили пружин і задану силу P (рис.4.3б,в). З умови рівноваги кожної плити маємо:

$$P_1 - P_2 = 0; \tag{4.1}$$

$$P_2 + P_3 - P = 0. \tag{4.2}$$

Складених двох рівнянь статичної рівноваги недостатньо для визначення трьох невідомих. Тому, дана система один раз статично невизначна і для її розв'язання необхідно скласти ще одне рівняння сумісності переміщень. Останнє складається на основі

співвідношення між переміщеннями системи, що викликані дією зовнішніх сил. У нашому випадку деформація пружини 3 дорівнює сумі деформацій пружин 1 і 2: $\lambda_3 = \lambda_1 + \lambda_2$.

Замінивши деформації пружин відомими виразами, отримаємо:

$$\frac{8P_3 D_3^3 n_3}{G d_3^4} = \frac{8P_1 D_1^3 n_1}{G d_1^4} + \frac{8P_2 D_2^3 n_2}{G d_2^4}, \quad (4.3)$$

Маючи значення $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$, будуємо епюру кутів закручування вала (рис. 4.2г), прийнявши за початок відліку переріз А. Значення кутів закручування перерізів В, С, D, Е відносно А відповідно рівні:

$$\varphi_{BA} = \varphi_1 = -1,10 \cdot 10^{-2} \text{ рад};$$

$$\varphi_{CA} = \varphi_{BA} + \varphi_2 = -(1,10 + 1,98) \cdot 10^{-2} = -3,08 \cdot 10^{-2} \text{ рад};$$

$$\varphi_{DA} = \varphi_{CA} + \varphi_3 = (-3,08 + 1,10) \cdot 10^{-2} = -1,98 \cdot 10^{-2} \text{ рад};$$

$$\varphi_{EA} = \varphi_{DA} + \varphi_4 = (-1,98 + 1,09) \cdot 10^{-2} = -0,89 \cdot 10^{-2} \text{ рад}.$$

Перевірку на жорсткість вала проведемо за умовою жорсткості:

$$\theta_{\max} \leq [\theta],$$

де θ_{\max} – максимальний кут закручування вала на одиницю його довжини.

Для визначення θ_{\max} підрахуємо значення даної величини на кожній ділянці вала:

$$\theta_1 = \frac{\varphi_1}{l_1} = \frac{1,10 \cdot 10^{-2}}{0,4} = 2,75 \cdot 10^{-2} \frac{\text{рад}}{\text{м}};$$

$$\theta_2 = \frac{\varphi_2}{l_2} = \frac{1,98 \cdot 10^{-2}}{0,6} = 3,30 \cdot 10^{-2} \frac{\text{рад}}{\text{м}};$$

$$\theta_3 = \theta_1 = 2,75 \cdot 10^{-2} \frac{\text{рад}}{\text{м}};$$

$$\theta_4 = \frac{\varphi_4}{l_4} = \frac{1,09 \cdot 10^{-2}}{0,5} = 2,1 \cdot 10^{-2} \frac{\text{рад}}{\text{м}}.$$

Маємо:

$$\theta_{\max} = \theta_2 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 3,30 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{180^\circ}{3,14} = 1,89 \frac{\text{град}}{\text{м}} \langle [\theta] = 2 \frac{\text{град}}{\text{м}}.$$

Таким чином, умову жорсткості забезпечено.

2.4.ПРЯМИЙ ПОПЕРЕЧНИЙ ЗГИН

Прямий поперечний згин – це такий вид деформації, при якому у поперечних перетинах бруса діють перерізуюча сила Q та згинальний момент $M_{зг}$, (рис.4.1). Брус, що працює на згин, називають балкою.

Згинальний момент у перетині балки чисельно дорівнює алгебраїчній сумі моментів, відносно центра ваги перетину, від всіх зовнішніх сил, які діють справа чи зліва від перетину, тобто $M_{зг} = \sum M(F_i)$. Перерізуюча сила (поперечна сила) у перетині балки чисельно дорівнює алгебраїчній сумі всіх зовнішніх сил, що діють справа чи зліва від перетину, тобто $Q = \sum F_{iy}$.

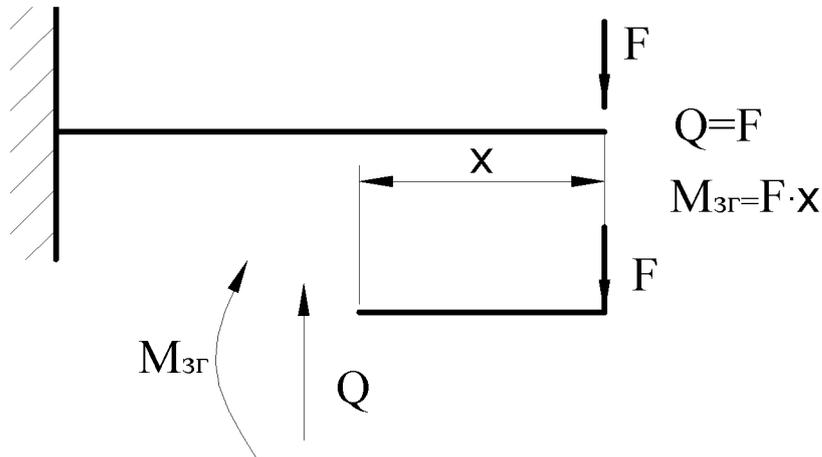


Рис.4.1

Правило знаків перерізуючих сил (рис.4.2), згинальних моментів (рис.4.3).

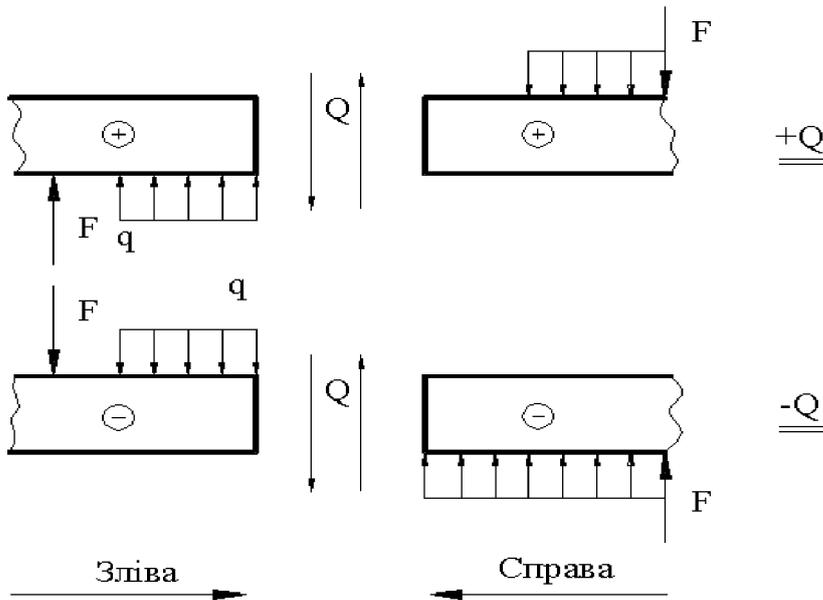


Рис. 4.2

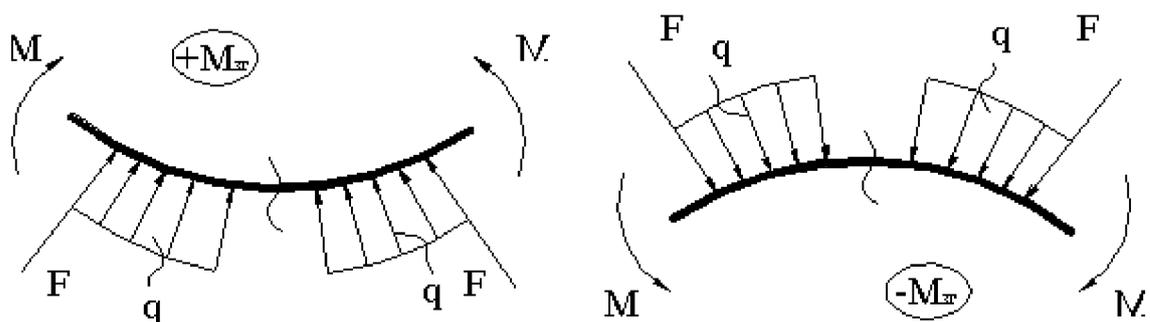


Рис.4.3

Диференціальні залежності між силовими факторами при згині:

$$\frac{dM}{dx} = Q(x); \quad \frac{d^2 M}{dx^2} = \frac{dQ}{dx} = q.$$

Приклади побудови епюр поперечних сил та згинальних моментів

Приклад 1.

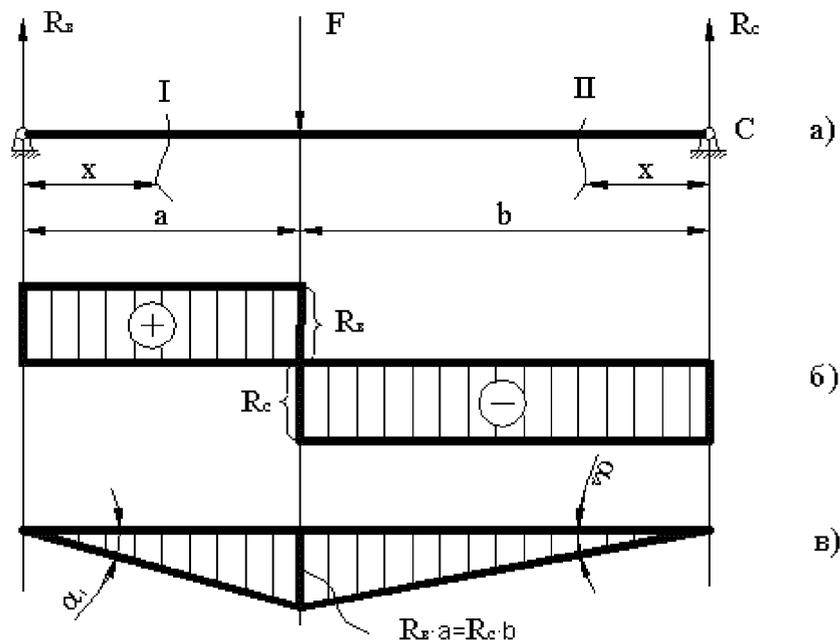


Рис.4.4

Визначаємо опорні реакції (рис. 4.4а):

$$\sum M_C = 0; \quad R_B(a+b) - F \cdot b = 0;$$

звідки
$$R_B = \frac{Fb}{a+b};$$

$$\sum M_B = R_C(a+b) - F \cdot a = 0;$$

звідки
$$R_C = \frac{Fa}{a+b}.$$

Проводимо перевірку

$$\sum Y = R_B - F + R_C = \frac{Fb}{a+b} - F + \frac{Fa}{a+b} = 0,$$

тобто опорні реакції визначено вірно.

Розбиваємо балку на ділянки. Для кожної ділянки записуємо вирази $Q(x)$, $M(x)$, а також границі, в яких ці вирази справедливі (рис.4.4а).

Знайдемо значення Q та M на границях ділянок.

I ділянка, $0 \leq x \leq a$ (зліва)

$$Q(x) = R_B = \frac{Fb}{a+b}; \quad Q(0) = Q(a) = \frac{Fb}{a+b};$$

$$M(x) = R_B x = \frac{Fb}{a+b} \cdot x; \quad M(0) = 0; \quad M(a) = \frac{Fba}{a+b};$$

II ділянка, $0 \leq x \leq b$ (справа):

$$Q(x) = -R_C = -\frac{RQ}{a+b}; \quad Q(0) = Q(b) = -\frac{Fa}{a+b};$$

$$M(x) = R_C \cdot x = \frac{Fa}{a+b} \cdot x; \quad M(0) = 0; \quad M(b) = \frac{Fba}{a+b}.$$

За отриманими результатами будуюмо епюри Q та M (рис.4.4б,в).
Визначасмо перетин, в якому діє максимальний згинальний момент,

$$M_{\max} = \frac{Fba}{a+b}.$$

Приклад 2.

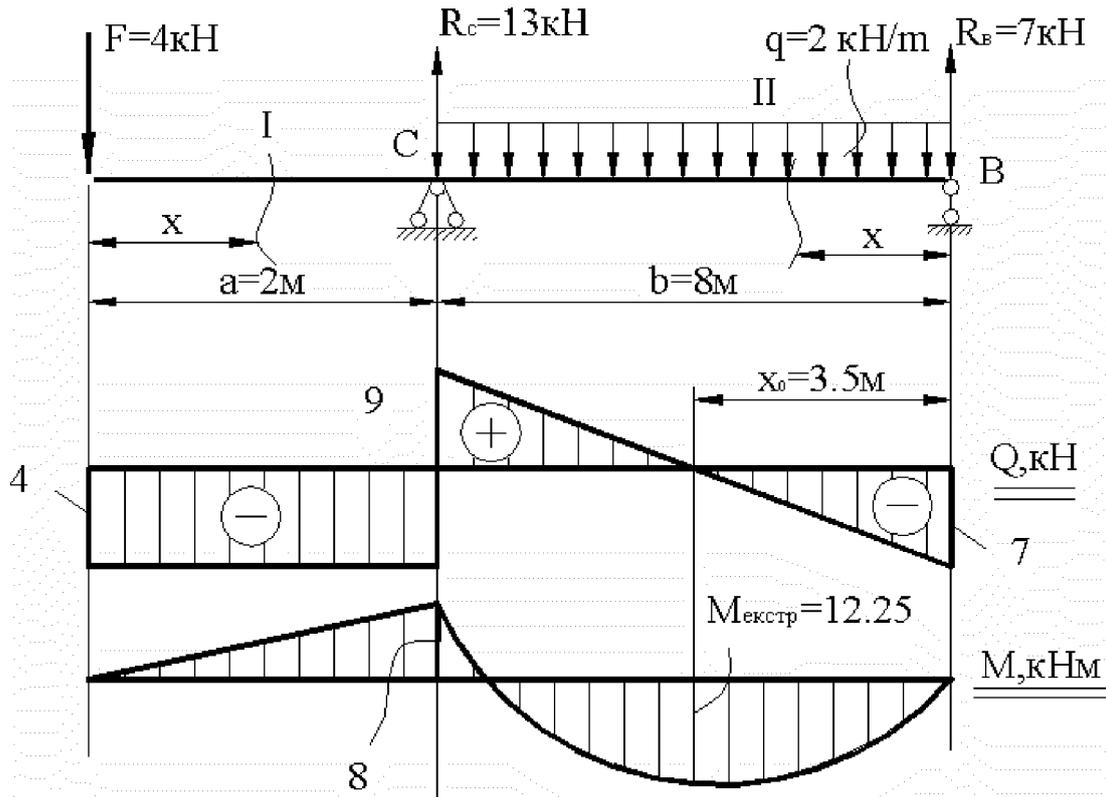


Рис.4.5

Контроль правильності побудови епюр

Для епюр перерізуючих сил:

1. На ділянці балки, навантаженої рівномірно розподіленим навантаженням q , епюра зображається прямою, нахиленою до осі балки.
2. На ділянці балки, вільній від q , епюра зображається прямою, яка паралельна осі балки.
3. Під перетином балки, де прикладена зосереджена сила, в епюрі перерізуючих сил є „стрибок”, рівний величині прикладеної сили.
4. У перетині, де прикладена зосереджена пара сил (зосереджений момент), поперечна сила не змінює свого значення.

Для епюри згинальних моментів:

1. На ділянці балки, навантаженої рівномірно розподіленим навантаженням q , епюра моментів зображається квадратною параболою.
2. На ділянках балки, вільних від q , епюра згинальних моментів зображається прямою лінією, нахиленою до осі балки.

3. Під перетином балки, де прикладена зосереджена пара сил (зосереджений момент), в епюрі згинальних моментів є “стрибок”, рівний величині зосередженого моменту.

4. На ділянках балки, де поперечна сила дорівнює нулю, балка сприймає чистий згин, а епюра згинальних моментів – пряма, паралельна осі балки.

5. Згинальний момент досягає екстремальних значень у перетинах, де поперечні сили дорівнюють нулю.

Перевіряють епюру згинальних моментів, використовуючи залежність

$$\frac{dM}{dx} = Q.$$

1. Якщо похідна функції величина додатня, в даному випадку Q , тоді сама функція (згинальний момент) – зростає.

2. Якщо похідна функції величина від’ємна, тоді величина згинального моменту спадає.

3. Якщо $\frac{dM}{dx} = Q = 0$, тоді згинальний момент досягає максимального значення.

Руйнівним внутрішнім силовим фактором при згині є згинальний момент. Від дії згинального моменту в матеріалі поперечного перетину виникають нормальні напруження, які визначають за формулою

$$\sigma = \frac{M_{зг}}{I_x} \cdot y,$$

де y – відстань від осі X до точки, в якій визначаємо нормальне напруження.

Аналізуючи отриману формулу, отримуємо наступну епюру розподілу нормальних напружень за висотою перетину (рис.4.6).

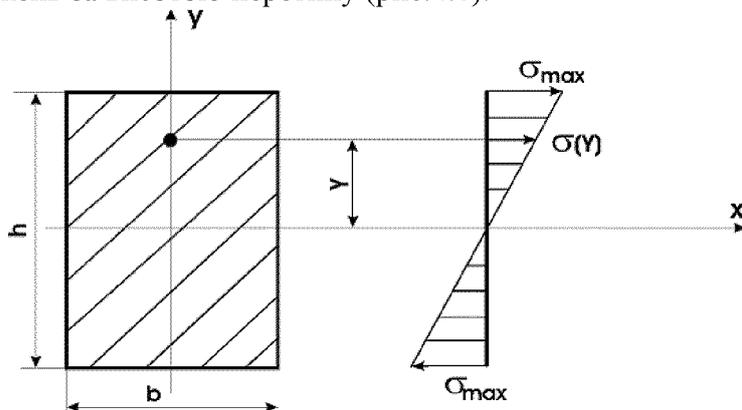


Рис.4.6

Максимальні нормальні напруження та умова міцності при згині за нормальними напруженнями

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{I_x} \cdot y_{\max} = \frac{M}{W_x} \leq [\sigma]$$

У даному випадку

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}} \text{ – осьовий момент опору поперечного перетину;}$$

для прямокутного перетину $W_x = \frac{bh^2}{6}$; для круглого перетину $W_0 = \frac{\pi d^3}{32}$.

Внаслідок дії перерізуючої сили Q , яку визначаємо з епюри, в матеріалі балки визначають дотичні напруження. Характер розподілу цих напружень визначають за формулою Журавського (рис.)

$$\tau_{(y)} = \frac{Q \cdot S_x^{відр}}{b \cdot I_x},$$

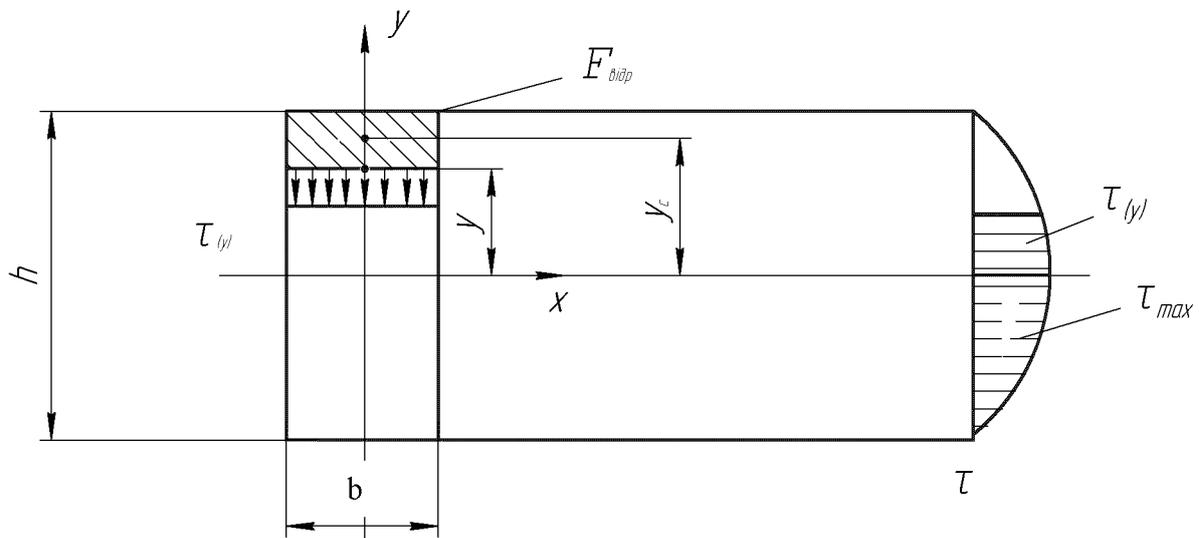


Рис.

де I_x - осьовий момент інерції поперечного перерізу;
 b_0 - довжина відрізка поперечного перетину для якого визначаємо дотичні напруження;

$S_x^{відр}$ - статичний момент площі, яка знаходиться вище координати Y ;

$$S_x^{відр} = F_{відр} \cdot Y_c.$$

Для прямокутного поперечного перетину

$$I_x = \frac{bh^3}{12}; \quad b_0 = b; \quad S_x^{відр} = F_{відр} \cdot Y_c;$$

$$F_{відр} = b \left(\frac{h}{2} - y \right); \quad Y_c = \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} - y \right).$$

Максимальні дотичні напруження виникають на волокнах центральної осі X .

Приклад розв'язку задачі 8

Для заданої консольної балки побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів (рис. 5.1a).

Розв'язок

Розбиваємо балку на три ділянки. Границями ділянок є перерізи, де прикладені зосередженні сили і згинальні моменти, та перерізи, де починаються і закінчуються розподілені навантаження.

При поперечному згині в перерізах мають місце два зусилля (внутрішні силові фактори) – згинальний момент $M(x)$ і поперечна сила $Q(x)$. Для їх визначення використовуємо метод перерізів.

На кожній ділянці балки (для консольної балки розглядаємо ділянки від вільного кінця) робимо умовний розріз, відкидаємо ліву частину балки і розглядаємо рівновагу правої. Сили взаємодії

частин балки замінюємо внутрішніми зусиллями – $Q(x)$ і $M(x)$ (рис.5.1б). Останні визначаємо як функції від x на основі рівнянь рівноваги: $\sum Y=0$; $\sum M_0=0$. При цьому поперечну силу вважаємо додатньою, якщо рівнодійна зовнішніх сил зліва від перерізу направлена знизу вгору, а справа – зверху вниз (рис.5.2а). Згинальний момент вважаємо додатнім, якщо рівнодійний момент зовнішніх пар сил зліва від перерізу направлений за годинниковою стрілкою, а справа – проти (рис.5.2б). В іншому випадку величини $Q(x)$ і $M(x)$ приймаємо від’ємними.

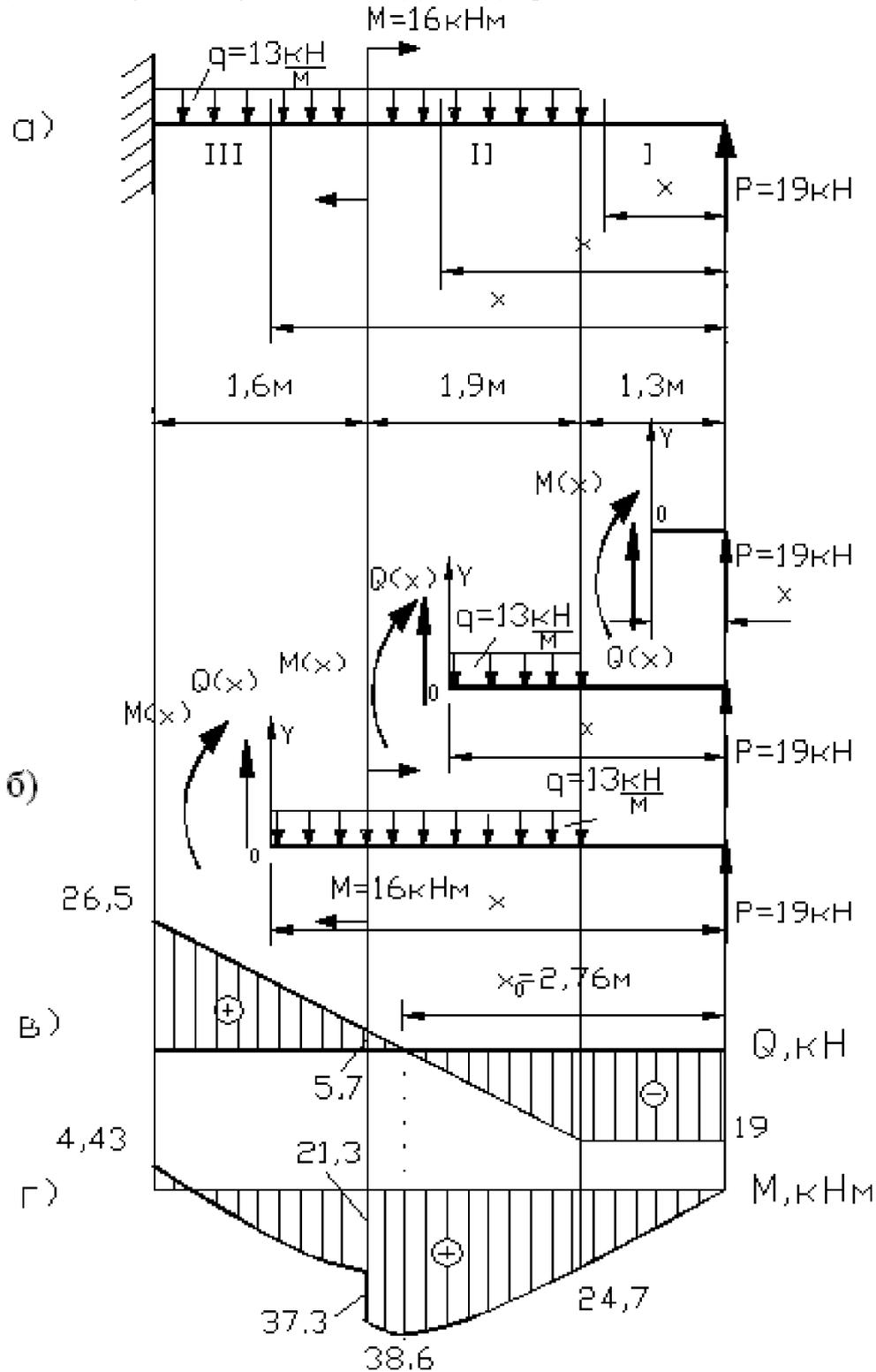


рис.5.1

Визначаємо поперечні сили і згинальні моменти на кожній ділянці балки:

ділянка I, $0 \leq x \leq 1,3 \text{ м}$ (справа),

$$Q(x) = -P = -19 \text{ кН}; \quad M(x) = Px; \quad M(0) = 0; \quad M(1,3) = 19 \cdot 1,3 = 24,7 \text{ кНм};$$

ділянка II, $1,3 \leq x \leq 3,2$ м (справа),

$$Q(x) = -P + q(x-1,3);$$

$$Q(1,3) = -19 \text{ кН}; Q(3,2) = -19 + 13 \cdot (3,2-1,3) = 5,7 \text{ кН};$$

$$M(x) = Px - q \frac{(x-1,3)^2}{2};$$

$$M(1,3) = 19 \cdot 1,3 = 24,7 \text{ кНм};$$

$$M(3,2) = 19 \cdot 3,2 - 13 \cdot \frac{(3,2-1,3)^2}{2} = 37,3 \text{ кНм}.$$

Досліджуємо функцію $M(x)$ на екстремум:

$$\frac{dM(x)}{dx} = Q(x) = P - q(x-1,3) = 0;$$

$$x = \frac{P + 1,3 \cdot q}{q} = \frac{19 + 1,3 \cdot 13}{13} = 2,76 \text{ м};$$

$$M(2,76) = M_{\max} = 19 \cdot 2,76 - 13 \cdot \frac{(2,76-1,3)^2}{2} = 38,6 \text{ кНм}.$$

Зазначимо, що необхідною умовою екстремума функції $M(x)$ на ділянці є нульове значення на цій ділянці $Q(x)$.

ділянка III, $3,2 \text{ м} \leq x \leq 4,8 \text{ м}$ (справа),

$$Q(x) = -P + q(x-1,3);$$

$$Q(3,2) = -19 + 13 \cdot (3,2-1,3) = 5,7 \text{ кН};$$

$$M(x) = Px - q \cdot \frac{(x-1,3)^2}{2} - M; Q(4,8) = -19 + 13 \cdot (4,8-1,3) = 26,5 \text{ кН};$$

$$M(4,8) = 19 \cdot 4,8 - 13 \cdot \frac{(4,8-1,3)^2}{2} - 16 = -4,43 \text{ кНм};$$

$$M(3,2) = 19 \cdot 3,2 - 13 \cdot \frac{(3,2-1,3)^2}{2} - 16 = 21,3 \text{ кНм};$$

На основі отриманих результатів будуємо епюри Q і M (рис. 5.1в,г). Епюру M будуємо зі сторони розтягнутих волокон, тобто додатні значення згинальних моментів відкладаються вниз від осі, а від'ємні – вверх.

Приклад розв'язання задачі №9 (11)

РОЗРАХУНОК БАЛКИ НА МІЦНІСТЬ

Для заданої сталюї балки (рис. 4.7а) необхідно:

- 1) побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів;
- 2) з умови міцності за нормальними напруженнями підбрати двотавровий, круглий і прямокутний ($h/b=2$) перетини балок та порівняти їх вагу. Матеріал вала – сталь 45, $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

Розв'язок

З рівняння статичної рівноваги балки визначаємо вертикальні складові реакцій (рис. 4.7а,б) :

$$\sum M_B = 0; -16 + A_y \cdot 1,5 + 20 \cdot 1,5 \cdot 0,75 - 15 \cdot 2,0 = 0;$$

$$A_y = \frac{16 - 20 \cdot 1,5 \cdot 0,75 + 15 \cdot 2,0}{1,5} = 15,7 \text{ кН};$$

$$\sum M_A = 0; -16 - 20 \cdot 1,5 \cdot 0,75 + B_y \cdot 1,5 - 15 \cdot 3,5 = 0;$$

$$B_y = \frac{16 + 20 \cdot 1,5 \cdot 0,75 + 15 \cdot 3,5}{1,5} = 60,7 \text{ кН}.$$

Перевірка $\Sigma Y = -15,7 - 20 \cdot 1,5 + 60,7 - 15 = 0$.

Висновок - опорні реакції знайдені правильно.

Розбиваємо балку на три ділянки. Для кожної ділянки визначаємо функцію поперечної сили $Q(x)$ і згинального моменту $M(x)$:

ділянка I, $0 \leq x \leq 1,6$ м (зліва),

$$Q(x) = 0;$$

$$M(x) = 16 \text{ кНм};$$

$$M(0) = M(1,6) = 16 \text{ кНм}.$$

ділянка II, $1,6 \text{ м} \leq x \leq 3,1$ м (зліва),

$$Q(x) = -15,7 - 20 \cdot (x - 1,6);$$

$$Q(1,6) = -15,7 \text{ кН};$$

$$Q(3,1) = -15,7 - 20 \cdot (3,1 - 1,6) = -47,5 \text{ кН};$$

$$M(x) = 16 - 15,7 \cdot (x - 1,6) - 20 \cdot \frac{(x - 1,6)^2}{2};$$

$$M(1,6) = 16 \text{ кНм};$$

$$M(3,1) = 16 - 15,7 \cdot (3,1 - 1,6) - 10 \cdot (3,1 - 1,6)^2 = -30 \text{ кНм};$$

ділянка III, $0 \leq x \leq 2,0$ м (справа),

$$Q(x) = 15 \text{ кН};$$

$$Q(0) = Q(2,0) = 15 \text{ кН};$$

$$M(x) = -15 \text{ кНм};$$

$$M(0) = 0;$$

$$M(2,0) = -15 \cdot 2,0 = -30 \text{ кНм}.$$

Будуємо епюри Q і M (рис. 4.7в,г).

З умови міцності при згині за нормальними напруженнями

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_0} \leq [\sigma];$$

визначаємо необхідний осьовий момент опору перетину

$$W_0 \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{30 \cdot 10^{-3}}{160} = 168 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3;$$

де $M_{\max} = 30$ кНм – максимальний згинальний момент, який діє на балку.

Для заданої балки підбираємо вказані поперечні перетини:

а) двотавровий №20а (ГОСТ 8239-56), для якого

$$W_{0\text{дв}} = 203 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3; A_{\text{дв}} = 28,9 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2;$$

б) прямокутний

$$W_{\text{пр}} = \frac{bh^2}{6} = \frac{b(2b)^2}{6} = \frac{2}{3}b^3;$$

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 168 \cdot 10^{-6}}{2}} = 65,6 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

приймаємо $b = 70$ мм, тоді $h = 2 \cdot 70 = 140$ мм,
відповідно $A_{\text{пр}} = bh = 70 \cdot 140 \cdot 10^{-6} = 98 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$;

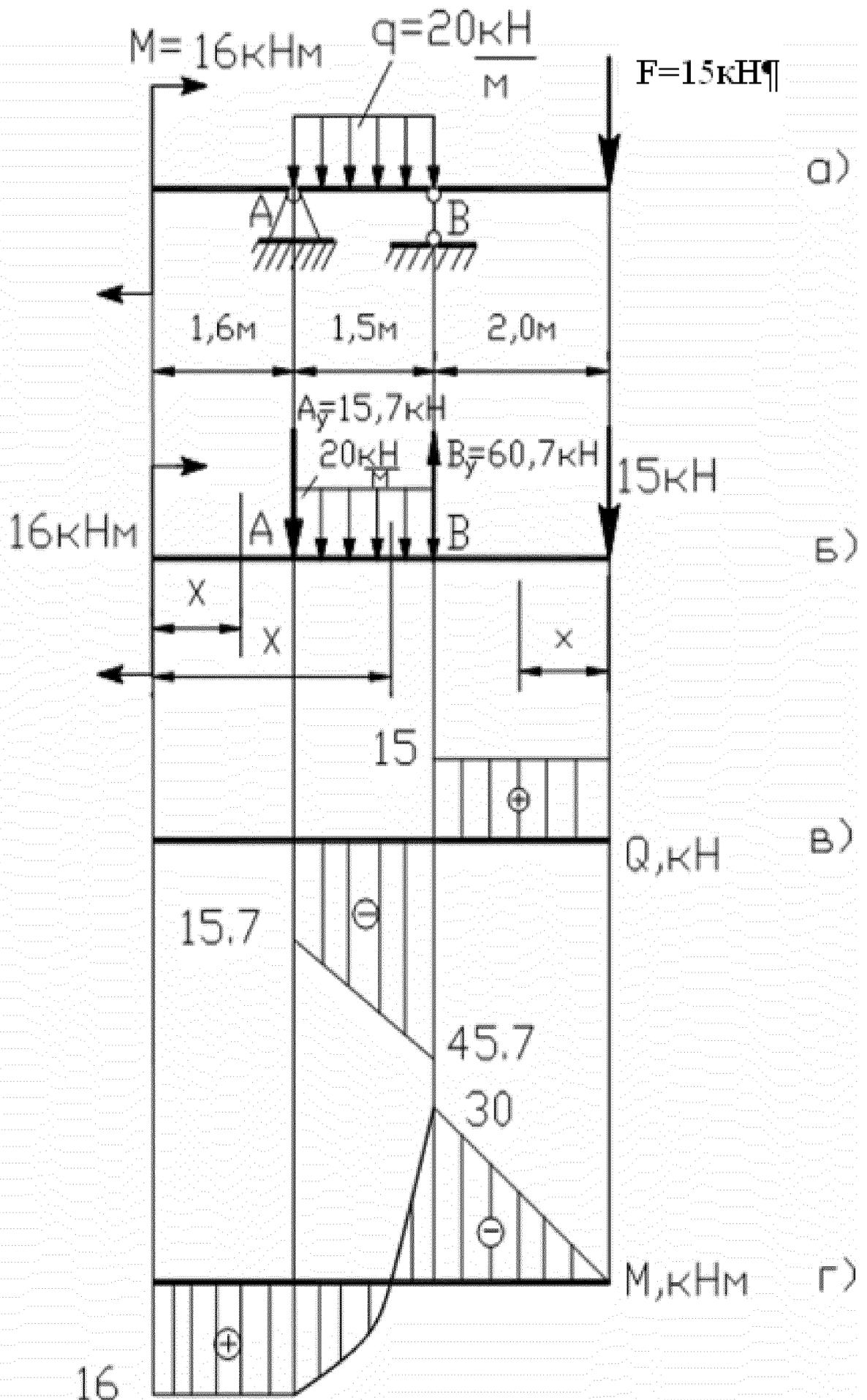


Рис 4.7

в) круглий

$$W_{e\partial} = \frac{\pi d^3}{32}; \quad d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 188 \cdot 10^{-6}}{3,14}} = 124 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

приймаємо $d=125\text{мм}$, тоді

$$A_{кр} = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 125^2 \cdot 10^{-6}}{4} = 123 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Порівняємо вагу балок:

$$Q_{дв} : Q_{пр} : Q_{кр} = A_{дв} : A_{пр} : A_{кр} = 28,9 : 98 : 123 = 1 : 3,39 : 4,26.$$

Проводимо повну перевірку міцності двотаврової балки. Враховуючи те, що розміри поперечного перерізу балки були визначені з умови міцності за нормальними напруженнями, перевірку міцності балки проводитимемо лише за головними та дотичними напруженнями.

Небезпечним перерізом при перевірці за головними напруженнями буде переріз, де згинальний момент і поперечна сила набувають максимальних значень або близькі до них (переріз в точці В, $M=30 \text{ кНм}$, $Q=45,7 \text{ кН}$).

З таблиць сортаменту для двотавра №20а по ГОСТ 8239-56 виписуємо необхідні для розрахунку дані і викреслюємо його спрощений переріз (рис.5.5а):

$$h_{дв}=200\text{мм}; b_{дв}=110\text{мм}; d_{дв}=5,2\text{мм}; t_{дв}=8,6\text{мм};$$

$$I_x=2030 \text{ см}^4; S_x=114 \text{ см}^3.$$

Визначаємо нормальне і дотичне напруження в небезпечному перерізі (точка К, рис.5.5а,б,в):

$$\sigma = \frac{M}{I_x} \cdot \left(\frac{h_{\partial e}}{2} - t_{\partial e} \right) = \frac{30 \cdot 10^{-3}}{2030 \cdot 10^{-8}} \cdot \left(\frac{200}{2} - 8,6 \right) \cdot 10^{-3} = 135 \text{ МПа};$$

$$\tau = \frac{Q \cdot S_x^n}{d_{\partial e} \cdot I_x} = \frac{45,7 \cdot 10^{-3} \cdot 90,5 \cdot 10^{-6}}{5,2 \cdot 10^{-3} \cdot 2030 \cdot 10^{-8}} = 39,2 \text{ МПа},$$

$$\text{де } S_x^n = F_n \cdot \left(\frac{h_{\partial e}}{2} - \frac{t_{\partial e}}{2} \right) = \frac{b_{\partial e} \cdot t_{\partial e} \cdot (h_{\partial e} - t_{\partial e})}{2} = \frac{110 \cdot 8,6 \cdot (200 - 8,6) \cdot 10^{-9}}{2} = 90,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$$

- статичний момент площі перерізу полочки відносно осі Х.

Визначаємо розрахункове напруження за третьою теорією міцності та проводимо перевірку на міцність матеріалу за головним напруженням:

$$\sigma_{pz} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{135^2 + 4 \cdot 39,2^2} = 156 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{pz} = 156 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа}.$$

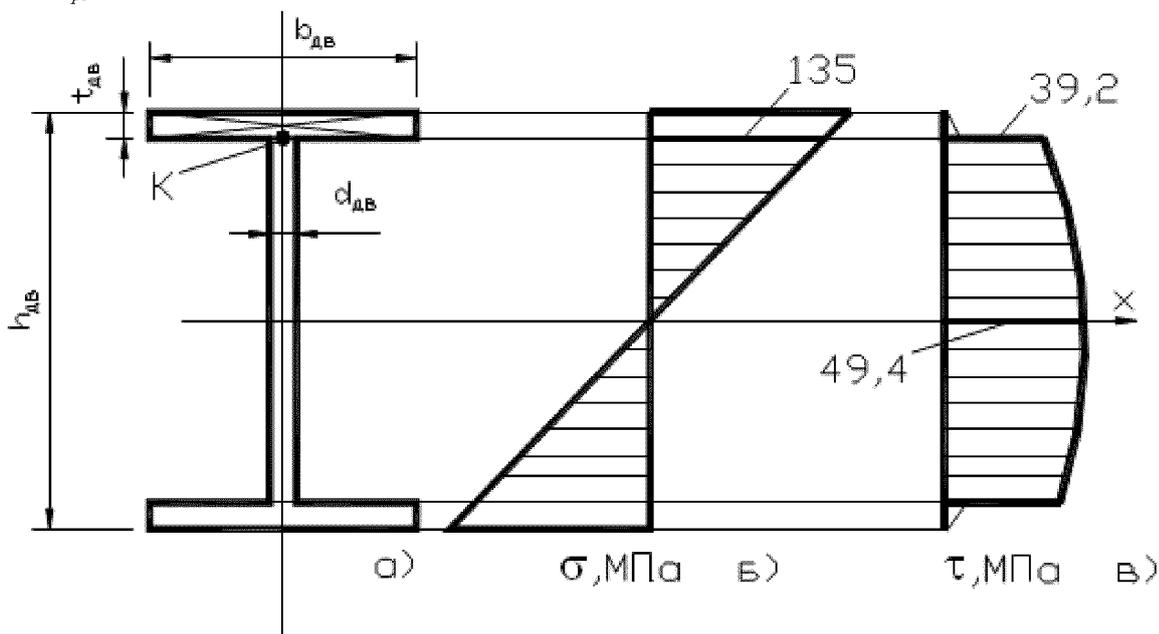


рис.5.5

Небезпечним перерізом при перевірці на міцність за дотичним напруженням буде переріз, де поперечна сила має максимальне значення (переріз в точці В). Найбільші дотичні напруження виникають в точках нейтральної осі (вісь x, рис.5.5). Умова міцності за дотичними напруженнями має вигляд:

$$\tau_{\max} = \frac{Q \cdot S_x}{d_{\text{ад}} \cdot I_x} \leq [\tau],$$

де допустиме дотичне напруження $[\tau]=0,5[\sigma]=0,5 \cdot 160=80$ МПа. Після підстановки значень отримаємо:

$$\tau_{\max} = \frac{45,7 \cdot 10^{-3} \cdot 114 \cdot 10^{-6}}{5,2 \cdot 10^{-3} \cdot 2030 \cdot 10^{-8}} = 49,4 \text{ МПа} < [\tau] = 80 \text{ МПа}.$$

Таким чином, міцність балки за головним і дотичним напруженнями забезпечена.