

УДК 517.9

Воробель С. – ст. гр. КА-21

Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

## РОЗВ'ЯЗОК КРАЄВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКУ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

Науковий керівник: к.ф.-м.н., доцент Шелестовський Б.Г.

Побудуємо розв'язок диференціального рівняння, що описує прогин пластинки

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{1}{D} q(x, y) \quad (1)$$

в області  $0 \leq x \leq a$ ;  $0 \leq y \leq a$ , з граничними умовами

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad x = 0 \text{ та } x = a; \quad (2)$$

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad y = 0 \text{ та } y = b. \quad (3)$$

$w(x, y)$  - прогин прямокутної пластинки під дією навантаження  $q(x, y)$ .

Зобразимо  $q(x, y)$  у вигляді подвійного тригонометричного ряду

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n} \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (4)$$

а функцію  $w(x, y)$  шукаємо у вигляді

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_{m,n} \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (5)$$

Граничні умови (2), (3) будуть задовольнятися.

Підставивши (4) і (5) у рівняння (1), отримаємо

$$c_{m,n} = \frac{1}{\pi^4} \frac{a_{m,n}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2},$$

тобто

$$w = \frac{1}{\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{m,n}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (6)$$

У випадку  $q = q_0 = const$  знаходимо

$$w = \frac{16q_0}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b}}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2},$$

де  $m = 1, 3, 5, \dots$  та  $n = 1, 3, 5, \dots$