УДК 517.944

Дан Е. – ст. гр. МА-11

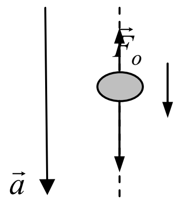
Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

ЗАСТОСУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ

Науковий керівник: к.ф.-м.н., доцент Фурсевич Л.В.

Світ диференціальних рівнянь багатий майже настільки, наскільки різноманітним є реальний світ. Диференціальні рівняння описують різні еволюційні процеси і явища. Вони вирішують завдання загальнотехнічних і прикладних дисциплін і самі виникають при їх вирішенні.

Розглянемо задачу: Тіло масою m падає з деякої висоти зі швидкістю $\vec{v}$. При падінні на тіло діє сила опору повітря $\vec{F}_o$, яка пропорційна квадрату швидкості. Знайти закон руху падаючого тіла.



В момент часу t тіло знаходиться під дією сили тяжіння $\vec{F}_t$ ($|\vec{F}_t| = mg$) і сили опору повітря ($|\vec{F}_o| = kv^2$). Під дією цих сил тіло буде рухатись із прискоренням $\vec{a}$. Запишемо другий закон Ньютона для такого руху: $m\vec{a} = \vec{F}_t + \vec{F}_o$. Спроектовуючи вектори цього рівняння на вісь s та враховуючи, що сила опору повітря спрямована протилежно до напрямку руху тіла, одержимо рівняння: $ma = mg - kv^2$, яке разом із початковими умовами $s|_{t=0} = 0$ і $v|_{t=0} = 0$, визначає задачу Коші для диференціального рівняння другого порядку: $m\dfrac{d^2s}{dt^2} = mg - k\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2$. Враховуючи що $\dfrac{ds}{dt} = v$ і $\dfrac{d^2s}{dt^2} = \dfrac{dv}{ds}\cdot\dfrac{ds}{dt} = v\dfrac{dv}{ds}$ рівняння набуде вигляду: $mv\dfrac{dv}{ds} = mg - kv^2$. Відокремлення змінних приводить до інтеграла $\int \dfrac{mvdv}{mg - kv^2} = \int ds + C_1$, який дорівнює: $-\dfrac{m}{2k}\ln|mg - kv^2| + C_1 = s$. Враховуючи початкові умови одержимо, що $C_1 = \dfrac{m}{2k}\ln mg$. Перетворення приводять до диференціального рівняння першого порядку: $\dfrac{ds}{dt} = p\left(1 - e^{-\frac{2ks}{m}}\right)^{\frac{1}{2}}$, де $p = \sqrt{\dfrac{mg}{k}}$. Після відокремлення змінних, одержимо: $\int\left(1 - e^{-\frac{2ks}{m}}\right)^{-\frac{1}{2}} ds = p\int dt + C_2$. За допомогою підстановки $z = e^{\frac{ks}{m}}$ ми знаходимо розв'язок диференціального рівняння, який з урахуванням початкових умов, матиме вигляд: $\dfrac{m}{k} = \ln\left(e^{\frac{ks}{m}} + \sqrt{e^{-\frac{2ks}{m}}} - 1\right) = \sqrt{\dfrac{mg}{k}}t$. Після перетворень, одержимо шуканий закон руху падаючого тіла: $s(t) = \dfrac{m}{k}\ln\dfrac{e^{\sqrt{\frac{kg}{m}}t} + e^{-\sqrt{\frac{kg}{m}}t}}{2} = \dfrac{m}{k}\ln ch\sqrt{\dfrac{kg}{m}}t$.