

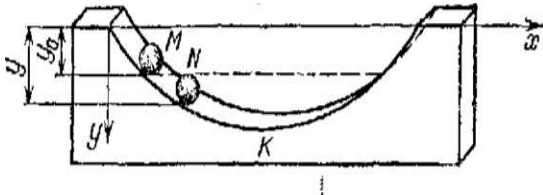
УДК 534.1

Свідерська О. – ст. гр. ЕМ-21

Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

ЗАДАЧА ПРО ТАУТОХРОННУ КРИВУ

Науковий керівник: к.ф.-м.н. Габрусев Г. В.



Покажемо, що циклоїда володіє властивістю таутохронності, тобто час, необхідний для спуску по ній матеріальної точки, що знаходиться в початковий момент часу в стані спокою, не залежить від вихідного положення точки на ній.

Розглянемо жолоб, вирізаний у формі перевернутої циклоїди

$$x = r(\theta - \sin \theta), \quad y = r(1 - \cos \theta).$$

Не враховуючи тертя, спробуємо визначити час, протягом якого металева кулька скотиться із точки M до вершини циклоїди K . Нехай x_0, y_0 – координати точки M , а θ_0 – відповідне їй значення параметра. Коли кулька скотиться із точки M до деякої точки N , то вона знизиться по вертикалі на величину h , при чому очевидно, що

$$h = y - y_0 = r(1 - \cos \theta) - r(1 - \cos \theta_0) = r(\cos \theta_0 - \cos \theta).$$

Оскільки швидкість – це похідна від шляху s за часом t та швидкість падаючого тіла знаходиться за формулою $v = \sqrt{2gh}$, де g – прискорення вільного падіння, то остання формула прийме вигляд $\frac{ds}{dt} = \sqrt{2gr(\cos \theta_0 - \cos \theta)}$. Оскільки для циклоїди виконується $ds = 2r \sin \frac{\theta}{2} d\theta$, то останнє співвідношення еквівалентне наступному:

$$dt = \frac{2r \sin \frac{\theta}{2} d\theta}{\sqrt{2gr(\cos \theta_0 - \cos \theta)}}.$$

Інтегруючи це рівняння у межах від 0 до π , отримуємо:

$$t = \int_0^\pi \frac{2r \sin \frac{\theta}{2} d\theta}{\sqrt{2gr(\cos \theta_0 - \cos \theta)}} = -2\sqrt{\frac{r}{g}} \int_0^\pi \frac{d \cos \frac{\theta}{2}}{\sqrt{\cos^2 \theta_0 - \cos^2 \theta}} = \pi \sqrt{\frac{r}{g}}$$

Таким чином, час t , протягом якого кулька скотиться із точки M до точки K , визначається за формулою $t = \pi \sqrt{\frac{r}{g}}$.

Оскільки тертя не враховується, то кулька, що скотилась в точку K , за інерцією буде продовжувати рух, і через вказаний останньою формулою проміжок часу підніметься до точки M_1 , яка знаходиться на одній висоті з точкою M . Проробивши потім зворотний шлях, кулька здійснюватиме рух так званого циклоїдального маятника з періодом коливань $T = 4\pi \sqrt{\frac{r}{g}}$.

Останнє співвідношення показує, що період T не залежить від початкового значення параметра θ_0 , тобто період не залежить від початкового положення кульки, і тому очевидно, що дві кульки, які почали одночасно котитися по жолобу з точок M та N , опиняться у вершині циклоїди K в один і той же момент часу.