УДК 539.3

Бабій Н. – ст. гр. КТ-11

Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

ЗАДАЧА ПРО ПОПЕРЕЧНІ КОЛИВАННЯ СТРУНИ, ЗАКРІПЛЕНОЇ НА ОДНОМУ КІНЦІ

Науковий керівник: к.ф.-м.н., доцент Самборська О.М.

Струна закріплена на кінці $x = 0$, а на кінці $x = l$ на неї діє сила, яка викликає зміщення, що дорівнює $A\sin\omega t$. Визначити закон коливання струни.

Позначимо через $u(x,t)$ відхилення від положення рівноваги точки струни з абсцисою x в довільний момент часу t. Функція $u(x,t)$ задовольняє рівняння в частинних похідних другого порядку: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. (1)

Запропонована задача зводиться до знаходження розв'язку рівняння (1), який задовольняє початкові умови $u(x,0) = 0$, $\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0$ (2)

і крайові умови $u(0,t) = 0$, $u(l,t) = A\sin\omega t$. (3)

Розв'язок цієї задачі потрібно шукати у вигляді суми $u(x,t) = w(x,t) + v(x,t)$, де $w(x,t)$- розв'язок рівняння (1), який задовольняє крайові умови (3), а $v(x,t)$ - розв'язок рівняння (1), який задовольняє крайові умови $v(0,t) = 0$, $v(l,t) = 0$ (4)

та початкові умови $v(x,0) = -w(x,0)$, $\frac{\partial v(x,0)}{\partial t} = -\frac{\partial w(x,0)}{\partial t}$ (5)

Розв'язок $w(x,t)$ будемо шукати у вигляді $w(x,t) = \tilde{X}(x)\sin\omega t$ і одержимо:

$$w(x,t) = A\sin\frac{\omega}{a}x\sin\omega t \Big/ \sin\frac{\omega}{a}l \qquad (6)$$

Задачу (1), (4), (5) будемо розв'язувати методом Фур'є: $v(x,t) = X(x)\cdot T(t)$ (7)

Для функції $X(x)$ отримаємо рівняння $X'' + \lambda X = 0$ (8)

та крайові умови $X(0) = X(l) = 0$, (9)

а для функції $T(t)$ - рівняння $T'' + a^2\lambda T = 0$ (10)

Розв'яжемо задачу (8), (9) та рівняння (10) і підставимо отримані розв'язки у формулу (7): $v_n(x,t) = \left(C_n\cos\frac{n\pi at}{l} + D_n\sin\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}$, $(n = 1,2,3,...)$ (11)

Розв'язок задачі (1), (4), (5) будемо шукати у вигляді ряду:

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x,t) \qquad (12)$$

З початкових умов (5) знайдемо невідомі коефіцієнт C_n та D_n:

$$v(x,t) = 2A\omega al\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\Big/\left(\omega^2 l^2 - (n\pi a)^2\right)\sin\frac{n\pi at}{l}\sin\frac{n\pi x}{l} \qquad (13)$$

Додавши функції $w(x,t)$ та $v(x,t)$, отримаємо розв'язок $u(x,t)$ поставленої задачі.