УДК 517.936

Стасюк О. – ст. гр. ЕМ-11
Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

РІВНЯННЯ ПФАФФА

Науковий керівник: к.т.н., доц. Романюк Л. А.

Рівнянням Пфаффа називають рівняння вигляду

$$P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = 0 \qquad (1)$$

У рівняння (1) змінні x, y, z входять симетрично, а отже, будь-яку з них можна прийняти за шукану функцію. Припустимо, що функції P, Q, R визначені та неперервні разом з частинними похідними першого порядку в околі початкової точки (x_0, y_0, z_0) і не перетворюються у цій точці одночасно в нуль. Нехай, наприклад, $R(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Тоді рівняння (1) можна записати у вигляді $dz = -\frac{P}{R}dx - \frac{Q}{R}dy$.

Знайдемо умову, за якої рівняння Пфаффа має сім’ю розв’язків (інтегральних поверхонь), залежну від однієї довільної сталої. Оскільки на кожній інтегральній поверхні $z = z(x,y)$ справджується співвідношення $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$, то $\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = -\frac{P}{R}dx - \frac{Q}{R}dy$.

Звідси, враховуючи незалежність диференціалів dx і dy, одержуємо, що шукані інтегральні поверхні повинні задовольняти систему рівнянь

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{P}{R},\ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{Q}{R}. \qquad (2)$$

Таким чином, рівняння Пфаффа (1) рівносильне системі (2) і, отже, необхідно з’ясувати умови повної інтегровності цієї системи.

Записуючи необхідну умову сумісності для системи (2), маємо:

$$-\frac{1}{R}\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{P}{R^2}\frac{\partial R}{\partial y} + \left(-\frac{1}{R}\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{P}{R^2}\frac{\partial R}{\partial z}\right)\left(-\frac{Q}{R}\right) = -\frac{1}{R}\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{Q}{R^2}\frac{\partial R}{\partial x} + \left(-\frac{1}{R}\frac{\partial Q}{\partial z} + \frac{Q}{R^2}\frac{\partial R}{\partial z}\right)\left(-\frac{P}{R}\right).$$

Домножуючи обидві частини на R^2 і згрупувавши доданки відносно P, Q і R, одержуємо: $P\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + Q\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + R\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = 0.$ (3)

Для зручності запам’ятовування умову (3) можна записати у вигляді умовної рівності

$$\begin{vmatrix} P & Q & R \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = 0,$$

якщо визначник умовно розкласти за елементами першого рядка.

Якщо умова (3) виконується тотожно, то її називають умовою повної інтегровності рівняння Пфаффа. За виконання цієї умови інтегрування рівняння Пфаффа зводиться до інтегрування системи (2). При цьому існує сім’я розв’язків, яка містить одну довільну сталу.