

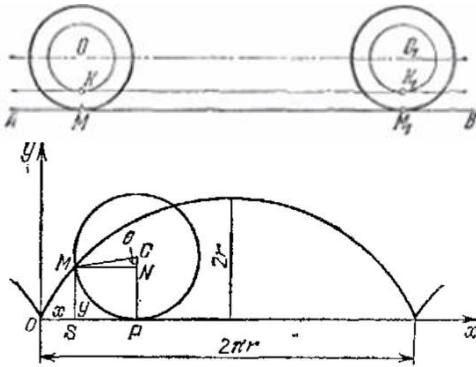
УДК 514

Репета Х. – ст. гр. ЕМ-21

Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ ЦИКЛОЇДИ

Науковий керівник: к.ф.-м.н. Габрусев Г. В.



Циклоїдою називають плоску криву, що кінематично визначається як траєкторія фіксованої точки кола, яке котиться без ковзання по прямій. Першим хто став вивчати циклоїду, та дав назву цій кривій, був Галілео Галілей. Проте рух, що утворює циклоїду, розглядався ще Аристотелем. Це привело до так званого «парадоксу». Коротко сформулюємо його. Нехай маємо два концентричних кола із радіусами $OM > ON$, що спільно котяться по прямій AB .

Після повного обороту точка M перейде у точку M_1 , тому довжина відрізка MM_1 дорівнюватиме довжині кола із радіусом OM . Менше коло також зробить повний оберт і точка K прийде в положення K_1 . При цьому кожній його точці відповідатиме єдина точка відрізка KK_1 і навпаки. Звідси напрошується висновок: довжина малого кола дорівнює довжині відрізка $KK_1 = MM_1$, тобто дорівнює довжині великого кола. Це перша, але не єдина «дивна» властивість циклоїди. Одержимо рівняння цієї кривої. Виберемо систему координат XOY так, щоб твірне коло радіуса r належало б координатній площині, вісь OX співпадає із прямою, по якій котиться коло, а вісь OY проходить через його центр C . Після того як коло повернеться на кут θ точка кола, що містилась у початку координат, займе положення $M(x, y)$: $x = OS = OP - SP$, $y = MS = CP - CN$. Очевидно, що відрізок OP рівний дузі кола $\widehat{MP} = r\theta$. Із прямокутного трикутника MNC катети $MN = r \sin \theta$, $CN = r \cos \theta$. Отже:

$$x = r(\theta - \sin \theta), \quad y = r(1 - \cos \theta) \quad \text{або} \quad x = r \arccos \frac{r-y}{r} - \sqrt{2ry - y^2}.$$

З самого способу утворення циклоїди випливає, що вона складається із конгруентних арок, кожна з яких відповідає повному обороту твірного кола. Окремі арки з'єднуються в точках, що мають спільну вертикальну дотичну. Ці точки, називають точками повернення циклоїди. Найвищі положення точки, що описує циклоїду, називаються вершинами циклоїди. Відрізок ж прямої між двома сусідніми точками повернення, довжина якого $2\pi r$, називається основою арки циклоїди.

Циклоїда володіє багатьма цікавими властивостями, зокрема:

- «перевернута» арка циклоїди є кривою найшвидшого спуску (брахістохроною);
- площа, обмежена аркою циклоїди та її основою, дорівнює потроєній площі твірного кола (теорема Галілея);
- довжина однієї арки циклоїди дорівнює чотирьом діаметрам твірного кола (теорема Рена).

Циклоїда володіє також багатьма іншими властивостями, які мають виняткове значення для фізики і техніки. Зокрема, профілі зубів шестірень, обрис багатьох типів ексцентриків, кулачків і інших деталей машин мають форму саме циклоїди.