УДК 517. 944

Вербовський С. – ст.гр. МІ-23

Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

ПОСЛІДОВНОСТІ ФІБОНАЧЧІ І ГІПЕРБОЛІЧНІ ФУНКЦІЇ

Науковий керівник: к.ф.-м.н., доцент Демчишин О.І.

Узагальненням послідовності Фібоначчі 1, 1, 2, 3, 5, 8,…, для якої справедливими є рекурентні співвідношення: $F_0 = 1$, $F_1 = 1$, $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$, відношення яких при нескінченному зростанні n визначає число Фібоначчі $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n} = \Phi$, ($\Phi \approx 1{,}618...$) із характерними властивостями: $\Phi + \left(-\frac{1}{\Phi}\right) = 1$ і $\Phi \cdot \left(-\frac{1}{\Phi}\right) = -1$ (число $\Phi^{-1} = \varphi \approx 0{,}618...$ називають числом Фідія), є послідовності Фібоначчі порядку m. Такі послідовності задаються рекурентними формулами: $F_{m0} = 0$, $F_{m1} = 1$, $F_{m(n+2)} = F_{mn} + mF_{m(n+1)}$, де m – задане додатне дійсне число. При заданому m «затравне» число послідовності Φ_m і $\varphi_m = \frac{-1}{\Phi_m}$ визначаються коренями рівняння $\Phi_m^2 - m\Phi_m - 1 = 0$: $\Phi_m = \frac{\sqrt{4+m^2}+m}{2}$, $\varphi_m = \frac{\sqrt{4+m^2}-m}{2}$, звідки

$$m = \Phi_m - \frac{1}{\Phi_m} = \Phi_m + \varphi_m,\ \Phi_m + \frac{1}{\Phi_m} = \Phi_m - \varphi_m = \sqrt{4+m^2}.$$

Визначимо члени послідовності через затравне число.

$$F_{m2} = F_{m0} + mF_{m1} = \Phi_m + \varphi_m = \frac{(\Phi_m - \varphi_m)(\Phi_m + \varphi_m)}{\Phi_m - \varphi_m} = \frac{\Phi_m^2 - \varphi_m^2}{\Phi_m - \varphi_m},$$

$$F_{m3} = F_{m1} + mF_{m2} = (\Phi_m + \varphi_m)\frac{\Phi_m^2 - \varphi_m^2}{\Phi_m - \varphi_m} = 1 + \frac{(\Phi_m^2 - \varphi_m^2)(\Phi_m + \varphi_m)}{\Phi_m - \varphi_m} = .$$

$$= \frac{\Phi_m - \varphi_m + \Phi_m^2 - \varphi_m^2 + \Phi_m\varphi_m(\Phi_m - \varphi_m)}{\Phi_m - \varphi_m} = \frac{(\Phi_m - \varphi_m)(1 + \Phi_m\varphi_m) + \Phi_m^3 - \varphi_m^3}{\Phi_m - \varphi_m} = \frac{\Phi_m^3 - \varphi_m^3}{\Phi_m - \varphi_m}.$$

Методом математичної індукції доводиться, що $F_{mn} = \frac{\Phi_m^n - \varphi_m^n}{\Phi_m - \varphi_m}$.

Якщо тепер зробити порядок послідовності, число m дуже малим, то величина m^2 стане надзвичайно малою, і в результаті цього $\Phi_m \approx 1 + 0{,}5m$, $\Phi_m^{-1} \approx 1 - 0{,}5m$. В цьому випадку члени послідовності Фібоначчі порядку m отримають співвідношення:

- для парних значень n: $\Phi_m^n = \left(1 + \frac{m}{2}\right)^n \approx e^{\frac{mn}{2}}$, $(\Phi_m^{-1})^n = \left(1 - \frac{m}{2}\right)^n \approx e^{-\frac{mn}{2}}$. Тому, для парних значень n: $F_{mn} = \frac{e^{\frac{mn}{2}} - e^{-\frac{mn}{2}}}{2} = \mathrm{sh}\frac{\mathrm{mn}}{2}$.

- для непарних значень n: $F_{mn} = \frac{e^{\frac{mn}{2}} + e^{-\frac{mn}{2}}}{2} = \mathrm{ch}\frac{\mathrm{mn}}{2}$.