УДК 517. 944

Грушицький О. – ст.гр. МІ-23

Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

ІТЕРАЦІЙНИЙ ПРОЦЕС ПРИ ЗАТУХАЮЧИХ КОЛИВАННЯХ

Науковий керівник: к.ф.-м.н., доцент Демчишин О.І.

Введемо у розгляд фундаментальну матрицю:

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi + b\sin\varphi & -c\sin\varphi \\ a\sin\varphi & \cos\varphi - b\sin\varphi \end{pmatrix}, \text{ де } b = \sqrt{ac-1}.$$

Методом математичної індукції легко довести, що

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi + b\sin\varphi & -c\sin\varphi \\ a\sin\varphi & \cos\varphi - b\sin\varphi \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos n\varphi + b\sin\varphi & -c\sin n\varphi \\ a\sin n\varphi & \cos n\varphi - b\sin n\varphi \end{pmatrix},$$

тому з матричного рівняння $\begin{pmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi + b\sin\varphi & -c\sin\varphi \\ a\sin\varphi & \cos\varphi - b\sin\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$ маємо ітераційну формулу $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos n\varphi + b\sin n\varphi & -c\sin n\varphi \\ a\sin n\varphi & \cos n\varphi - b\sin n\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$. Фундаментальну матрицю запишемо у вигляді $\cos\varphi\begin{pmatrix} 1 + btg\varphi & -ctg\varphi \\ atg\varphi & 1 - btg\varphi \end{pmatrix}$. Ввівши у розгляд дійсні додатні числа γ, λ, ρ, ω: $a = \dfrac{\lambda}{\omega}$, $b = \dfrac{\rho}{\omega}$, $c = \dfrac{\gamma}{\omega}$, $\omega = \sqrt{\gamma\lambda - \rho^2}$ і ввівши «елементарний приріст часу» τ, такий, що $tg\varphi = \dfrac{\omega\tau}{1-\rho\tau}$, запишемо: $1 + btg\varphi = \dfrac{1}{1-\rho\tau}$, $1 - btg\varphi = \dfrac{1-2\rho\tau}{1-\rho\tau}$ і отримаємо матрицю $\dfrac{\cos\varphi}{1-\rho\tau}\begin{pmatrix} 1 & \gamma\tau \\ \lambda\tau & 1-2\rho\tau \end{pmatrix}$ га ітераційну формулу

$$\begin{pmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{pmatrix} = \left(\frac{1-\rho\tau}{\cos\varphi}\right)^n \begin{pmatrix} \cos n\varphi + \dfrac{\rho}{\omega}\sin n\varphi & -\dfrac{\gamma}{\omega}\sin n\varphi \\ \dfrac{\lambda}{\omega}\sin n\varphi & \cos n\varphi - \dfrac{\rho}{\omega}\sin n\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}, \text{ де } \varphi = arctg\frac{\omega\tau}{1-\rho\tau}.$$

Враховуючи це, що при малих значеннях τ справедливими є рівності $(1-\rho\tau)^n \approx e^{-\rho n\tau}$, $\cos\varphi = 1$ і $\varphi = tg\varphi = \omega\tau$, записуємо ітераційне рівняння у вигляді:

$$\begin{pmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{pmatrix} = e^{-\rho n\tau} \begin{pmatrix} \cos n\varphi + \dfrac{\rho}{\omega}\sin n\varphi & -\dfrac{\gamma}{\omega}\sin n\varphi \\ \dfrac{\lambda}{\omega}\sin n\varphi & \cos n\varphi - \dfrac{\rho}{\omega}\sin n\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}.$$

Поклавши $t = n\tau$ і позначивши буквами x і y неперервні змінні отримаємо залежності цих змінних віл часу t:

$$x = e^{-\rho t}\left(x_0\cos\omega t + \frac{\rho x_0 - \gamma y_0}{\omega}\sin\omega t\right), \; y = e^{-\rho t}\left(y_0\cos\omega t + \frac{\lambda x_0 - \rho y_0}{\omega}\sin\omega t\right).$$

У фазовій просторі Oxy графіком такого затухаючого процесу буде спіраль, яка називається фазовим малюнком спостережуваного процесу.