

УДК 539.3

В. Божидарнік, докт. техн. наук; О. Максимович, докт. техн. наук

Луцький національний технічний університет

НАПРУЖЕНИЙ СТАН БІЛЯ ЗБЛИЖЕНИХ ОТВОРІВ У АНІЗОТРОПНИХ ПЛАСТИНКАХ

Резюме. Наведено алгоритм дослідження напруженого стану анізотропних пластинок, послаблених близько розміщеними отворами. Алгоритм ґрунтується на сумісному використанні методу інтегральних рівнянь та асимптотичних методів. На прикладах показано ефективність алгоритму.

Ключові слова: анізотропна пластинка, зближені отвори, концентрація напружень.

V. Bozhidarnik, O. Maksimovich

THE STATE IS TENSE NEAR CLOSELY LOCATED HOLES IN ANISOTROPIC PLATES

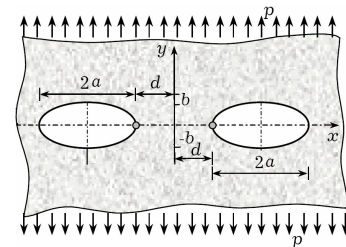
The summary. The algorithm of research of the tense state of anisotropic plates, weakened the close placed holes is resulted in the article. Algorithm are obtained on the compatible use of method of integral equalizations and asymptotic methods. On examples efficiency of algorithm is shown.

Key words: anisotropic plate, close placed holes, stress concentration.

Вступ. Для дослідження високолокалізованого напруженого стану біля отворів в ізотропних пластинках розроблені нові ефективні методи, в яких метод граничних інтегральних рівнянь (МГІР) використовується сумісно з асимптотичними методами. В статті розглянуто такі задачі для анізотропних пластинок.

При розгляді близько розміщених отворів коефіцієнти концентрації напружень (ККН) зростають і можуть стати нескінченними. Тому прямі числові методи дослідження напружень для таких отворів є малоефективними. Для двох кругових отворів Ю.А. Устинов [1] встановив асимптотичні формули для ККН при близьких до нуля відстанях між ними. Ґрунтуючись на цьому, В.В. Панасюк і М.П. Саврук [2] та в [3] запропонували комбінований підхід. У ньому попередньо встановлюють структуру формули для визначення ККН при малих відстанях, що містить невідомі сталі, в яких враховується попередньо встановлена асимптотика для напружень. Ці сталі визначають на основі розрахованих ККН за допомогою МГІР для вибраних відстаней з наступним використанням методу найменших квадратів. При цьому отримано прості співвідношення для визначення ККН, які виявилися практично точними для широкого діапазону відстаней між отворами – як нескінченно малих, так і сумірних з радіусом отвору. В [2] показано, що структура розв'язку зберігається і для отворів іншої форми, зокрема й еліптичної. Слід очікувати, що запропонований підхід буде ефективним і для анізотропних пластинок.

Розглянемо анізотропну пластинку з двома однаковими еліптичними отворами з півосями a, b , центри яких розміщені в точках $(-a-d, 0)$, $(a+d, 0)$ за розтягу пластинки в напрямку осі Ox зусиллями p . При близьких відстанях між отворами швидко зростає концентрація напружень в околі точок $(\pm d, 0)$, а тому для розрахунків із контрольованою точністю необхідно збільшувати кількість вузлових точок. З метою ілюстрації труднощів, які виникають при безпосередньому застосуванні МГІР, виконано дослідження впливу кількості вузлових точок N у квадратурному методі на



точність розрахунків максимальних напружень на контурі при малих відстанях між отворами. Розрахунок напруженого стану проводили на основі інтегрального зображення [6], в якому враховували симетрію задачі відносно осі Oy й інтегральні рівняння записували тільки на межі правого отвору.

В таблиці 1 наведено значення віднесених до p максимальних напружень $\sigma_{\max} = \sigma_{\theta_{\max}} / p$ для випадку кругових отворів у ізотропних пластинках при різних значеннях безрозмірної відстані $D = d / a$.

Таблиця 1. Точність розрахунку напружень в ізотропній пластинці

D	0,001		0,01		0,1
	σ_{\max}	$\bar{\sigma}_{\max}$	σ_{\max}	$\bar{\sigma}_{\max}$	σ_{\max}
100	143.043	100.39	20.733	20.463	6.106
200	1 6.519	76.387	19.658	20.363	6.106
300	114.989	69.825	20.131	20.363	–
400	103.956	68.249	20.312	20.363	–
500	96.082	67.808	20.353	20.363	–

Виконані розрахунки показали, що високі напруження виникають тільки в околі півосей еліпса, що лежать на осі Ox . Для покращення ефективності МГП у таких випадках модифікують параметричне задавання контуру. Нехай параметричне задання контуру вибрано у вигляді $x = \varphi(\theta), y = \psi(\theta)$, де $0 < \theta \leq 2\pi$. Зокрема, при розгляді еліптичних отворів використовують задавання $\varphi = a \cos \theta, \psi = b \sin \theta$. Модифіковані подання записують у вигляді $x = \varphi(g(\tau)) = \bar{\varphi}(\tau), y = \psi(g(\tau)) = \bar{\psi}(\tau), 0 < \tau \leq 2\pi$. Функцію $\theta = g(\tau)$ вибирають так, щоб вона була монотонно зростаючою та похідна від неї в областях із максимальною концентрацією напружень була малою. За такого вибору в цих областях буде згущення вузлових точок, що призводить до підвищення точності розрахунків. Розраховані таким чином відносні напруження при [2] $g(\tau) = \tau - c \sin 2\tau$, $c = 0,475$ наведено в таблиці 1 і позначено через $\bar{\sigma}_{\max}$.

Аналогічні результати для анізотропної пластинки, що виготовлена з матеріалу CF1 за розтягу в напрямку більшої та меншої жорсткості матеріалу, зображені в таблицях 2 і 3 відповідно.

Таблиця 2. Точність розрахунку напружень у пластинці з матеріалу CF1

D	0,001		0,01		0,1
	σ_{\max}	σ_{\max}	σ_{\max}	σ_{\max}	σ_{\max}
100	262.941	226.578	55.201	55.352	20,996
200	232.226	225.046	55.189	55.313	20,996
300	226.869	224.424	55.256	55.312	–
500	224.778	224.104	55.305	55.312	–

Таблиця 3. Точність розрахунку напружень у пластинці з матеріалу CF1₉₀

D	0,001		0,01		0,1	
	σ_{\max}	σ_{\max}	σ_{\max}	σ_{\max}	σ_{\max}	σ_{\max}
100	132.853	65.374	18.401	19.203	5.928	6.004
200	106.956	64.602	17.963	19.365	6.001	6.017

300	84.388	63.882	18.247	19.479	6.015	6.018
500	64.463	63.743	18.736	19.563	6.018	6.018

Із наведених у таблицях даних бачимо, що для забезпечення контрольованої точності розрахунків при використанні методу механічних квадратур необхідно вибирати велику кількість вузлових точок. Зокрема, при відносних відстанях $d/R \sim 0,01$ за використання прямого методу МГПР необхідно вибирати до 500 вузлових точок, а при $d/R \sim 0,001$ необхідно розв'язувати системи $\sim 1000-4000$ рівнянь. Нелінійні перетворення параметра істотно підвищують точність обчислень.

Складність дослідження концентрації напружень полягає в тому, що при нульовій відстані між отворами напруження нескінченні. В [2, 4] встановлено, що максимальні напруження при $d \rightarrow 0$ для ізотропних пластинок мають порядок $\sigma_{\max} \sim C/\sqrt{D}$, де C – стала. Прийmemo, що для анізотропних пластинок $\sigma_{\max} \sim C/D^m$, де m – стала, яку необхідно визначити.

Введемо далі в розгляд відносні напруження $\sigma = \sigma_{\theta_{\max}} / \sigma_0$, де σ_0 – максимальні напруження на поодинокому отворі для пластинки із заданого матеріалу при вибраному навантаженні. При малих відстанях відносні напруження будемо шукати у вигляді $\sigma = f(\delta)$ [2], де

$$f(\delta) = \frac{a_1}{\delta^m} + a_2 + a_3 \delta^m, \quad (1)$$

де $\delta = \frac{D}{1+D}$, m, a_j – сталі, $j = 1, 2, 3$.

Сталі знаходили методом найменших квадратів із умови, що величина

$$I = \sum_{j=1}^M [f(\delta_j) - \sigma_j]^2 \quad (2)$$

є мінімальною. Тут δ_j – послідовність значень параметра δ , які вибирали на відрізьку $\delta_{\min} < \delta < \delta_{\max}$; σ_j – значення відносних напружень при відносній відстані δ_j . Для ізотропних пластинок встановлено $m = 0,5$ [2]. Для анізотропних пластинок цю сталу знаходили способом послідовних наближень у методі найменших квадратів. Виконані розрахунки показали, що на основі критерію (2) достатньо точно визначають сталі m, a_1 . Інші сталі точніше знаходять на основі мінімізації величини

$$I_* = \sum_{j=1}^M \delta_j^{2m} [f(\delta_j) - \sigma_j]^2, \quad (3)$$

де під знаком суми є обмежені величини.

Наведемо значення напружень у точках границі $A(a, 0), B(0, b)$ поодинокого еліптичного отвору за розтягу ортотропної пластинки на нескінченності, через які визначається величина σ_0 [5],

$$\sigma_{\theta}(A) / p = 1 + \left(\frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2} \right) \frac{a}{b}, \quad \sigma_{\theta}(B) / p = \beta_1 \beta_2, \quad (4)$$

за розтягу вздовж осі Oy зусиллями p ;

$$\sigma_{\theta}(B)/q = 1 + (\beta_1 + \beta_2) \frac{a}{b}, \quad \sigma_{\theta}(A)/q = \frac{1}{\beta_1 \beta_2}, \quad (5)$$

за розтягу зусиллями q у напрямку осі Ox . Тут $\beta_{1,2} = \text{Im}(s_{1,2})$, $s_{1,2}$ – корені характеристичного рівняння [5].

При розрахунках приймали $\delta_{\min} = 0,0004$, $\delta_{\max} = 0,5$. За мінімальних відстаней при розрахунках вибирали до 2000 вузлових точок. Розраховані значення величини

$$F = \delta^m \sigma_{\theta_{\max}} / \sigma_0$$

для ізотропної пластинки з відношенням півосей $b/a = 1$ (круговий отвір) і $b/a = 1/2$ залежно від змінної $\ln \delta$ зображено на рис. 1. Кружечками тут зображено розраховані методом інтегральних рівнянь відносні напруження, кривими – знайдені за формулою (1) – після використання методу найменших квадратів для знаходження коефіцієнтів a_1, a_2, a_3 .

Зазначимо, що при $0 < \delta < \delta_{\min}$ криві екстраполюють розподіл напружень, причому застосування тут безпосередньо МГПР є малоефективним. Знайдені методом найменших квадратів коефіцієнти a_1, a_2, a_3

наведено наверху на рис. 1. Отримані в [2] значення цих коефіцієнтів при $b/a = 1$ будуть (тут враховано різницю в множниках у [2] біля коефіцієнтів): $a_1 = 0,7330$, $a_2 = -0.6497$, $a_3 = 0.8127$.

Бачимо, що перший коефіцієнт практично збігається зі знайденим значенням 0,7338. При $b/a = 0,5$ знайдений в [2] перший коефіцієнт дорівнює $a_1 = 0,786$, який також є близьким до знайденого нами 0,7831. Наведені на рис. 1 криві близькі до знайденого розподілу напружень в [2] іншим методом.

Аналогічні результати отримані для анізотропних матеріалів. Для пластинки із матеріалу CF1 знайдений степеневий коефіцієнт дорівнює $m = 0,6338$. Результати розрахунків відносних напружень зображено на рис. 2. Стала m та коефіцієнти a_1, a_2, a_3 формули (1) наведено на рис. 2 вгорі.

Розглянуто випадок, коли напрямок із більшою жорсткістю матеріалу CF1 паралельний осі Ox . Результати розрахунків наведено на рис. 3.

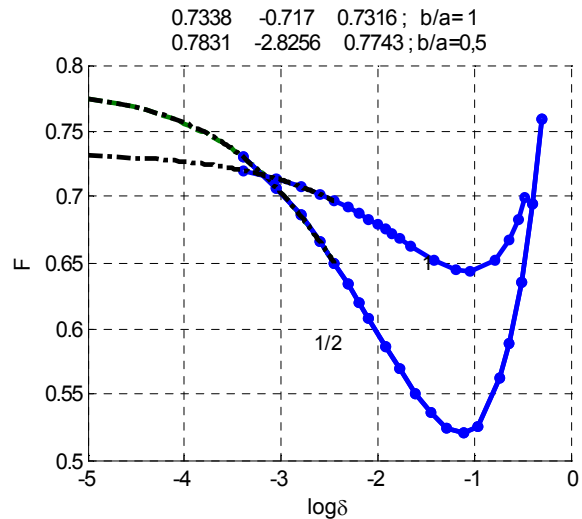


Рис. 1 – Відносні максимальні напруження для ізотропної пластинки.

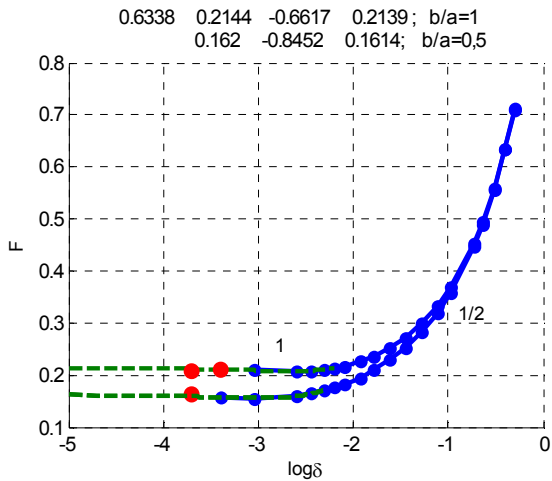


Рисунок 2. Відносні максимальні напруження для пластинки із матеріалу CF1

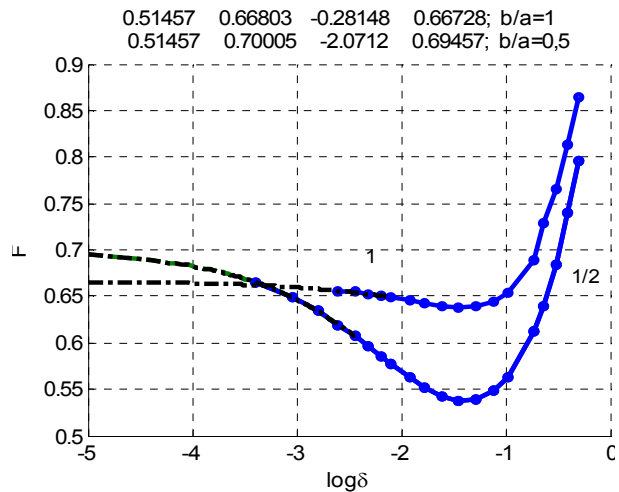


Рисунок 3. Відносні максимальні напруження для пластинки із матеріалу CF1₉₀

Розраховані відносні напруження та коефіцієнти екстраполяційної формули для матеріалу EF наведено на рис. 4–6 для випадків, коли напрямок із більшою жорсткістю матеріалу EF паралельний осям Oy , Ox та паралельний прямій, що нахилена під кутом 45° . Результати розрахунків для ізотропної пластинки та матеріалів CF1 і EF для витягнутих еліпсів, коли $b/a=2$, наведено на рис. 7

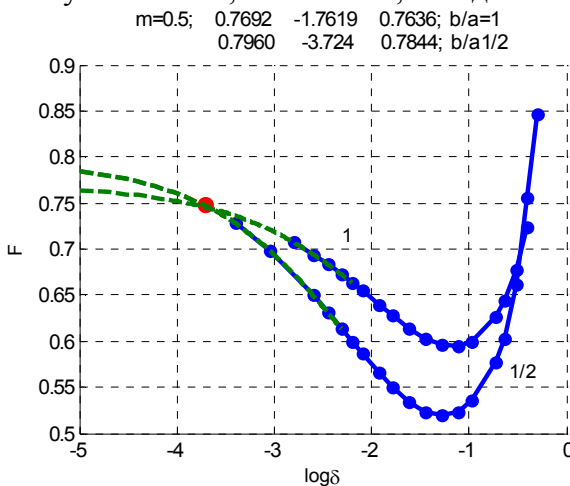


Рисунок 4. Відносні максимальні напруження для пластинки із матеріалу EF

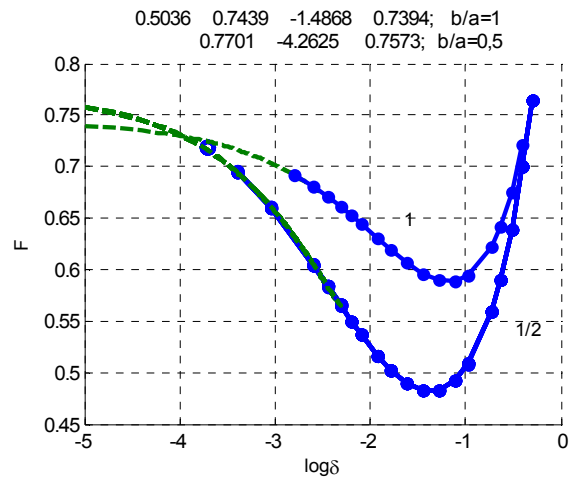


Рисунок 5. Відносні максимальні напруження для пластинки із матеріалу EF₉₀

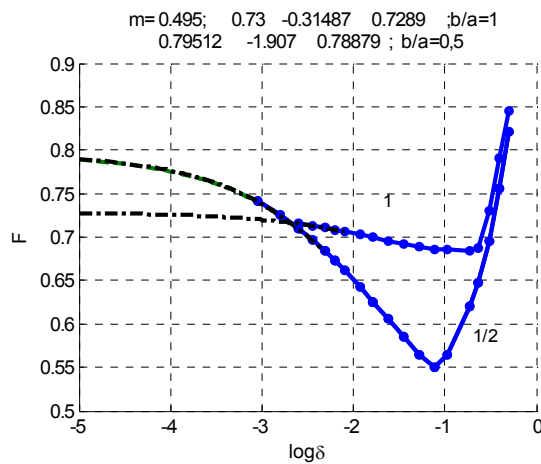


Рисунок 6. Відносні максимальні напруження для пластинки із матеріалу EF₄₅

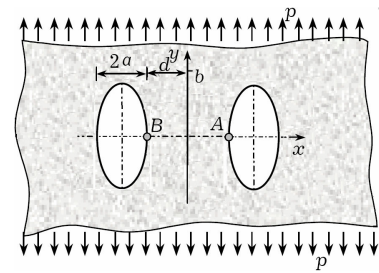
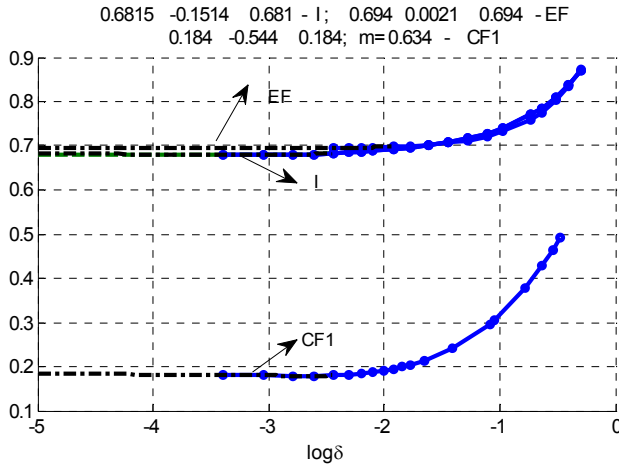
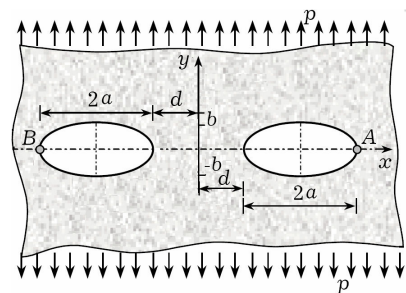


Рисунок 7. Відносні максимальні напруження для пластинки з витягнутими еліптичними отворами при $b/a=2$

Напруження у віддалених точках на межі отворів. Наведемо ще значення віднесених до p напружень у віддалених точках на отворах – точках $(\pm(2a + d), 0)$, які знайдені при відносних відстанях $\delta = 0,0004$ і відповідають випадку практичного дотикання отворів. Розраховані напруження для різних матеріалів при відношеннях півосей b/a , що дорівнює 1, 0,5 і 2 наведено в таблиці 4 над рискою.

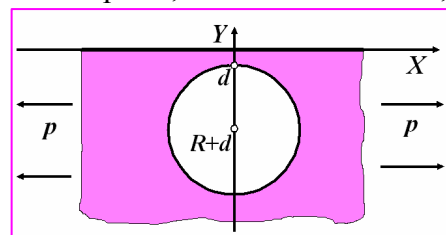


Таблиця 4. Відносні напруження у віддалених точках на отворі

b/a	I	CF1	CF1 ₉₀	EF	EF ₉₀	EF ₄₅
1	<u>3,860</u> 3.829	<u>18.170</u> 18.651	<u>4.029</u> 4.002	<u>4.181</u> 4.167	<u>4.931</u> 4.958	<u>3.265</u> 3.451
0,5	<u>6.619</u> 6.657	<u>35.044</u> 36.303	<u>6,187</u> 6.182	<u>7.337</u> 7.334	<u>8.7102</u> 8.917	<u>5.450</u> 5.993
2	<u>2,407</u> 2.414	9.782 9.826	3.090 2.295	–	–	–

Для ізотропного матеріалу з двома круговими отворами, що дотикаються, отримане точне значення для відносних напружень, яке дорівнює 3,861, добре узгоджується із наведеним у таблиці значенням.

Нехай маємо два близьких еліпси з півосями a , b . Мінімальний радіус кривизни у цих еліпсах дорівнює $\rho = b^2 / a$. Розглянемо еквівалентний еліпс з півосями a_1, b_1 при $a_1 = 2a$. Піввісь b_1 вибираємо так, щоб радіус кривизни в нього також дорівнював ρ . Звідси знаходимо $b_1 = \sqrt{2}b$. Тобто відношення півосей еліпса буде $a_1 / b_1 = \sqrt{2}a / b$. Отримані відносні напруження для еквівалентного еліпса наведено в таблиці під рискою. Бачимо, що як для ізотропного, так і для анізотропних матеріалів напруження у дотичних отворах можна розраховувати на основі розгляду еквівалентного еліпса. Дещо більша розбіжність має місце для випадку несиметричного розміщення отворів відносно осей ортотропії (див. останній стовпчик). Аналогічні до даних табл. 4 отримано для ізотропних пластинок у [2].



Півплощина з круговим отвором. Розглянемо півплощину $y > 0$ з круговим отвором радіуса R , центр якого розміщений у точці $(0, R + d)$ при розтягу в напрямку осі Ox зусиллями p . Алгоритм визначення НДС для такої пластинки наведено в [6]. Розраховані відносні напруження для ізотропної пластинки та пластинки із матеріалу ЕФ залежно від величини $\delta = d / R$ наведено на рис. 8.

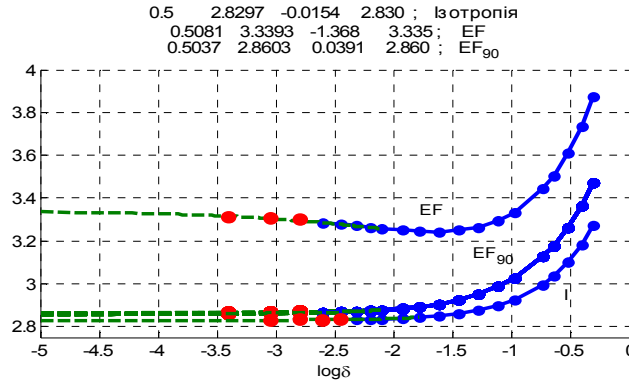


Рисунок 8. Відносні максимальні напруження в півплощині з круговим отвором

Зазначимо, що для ізотропної пластинки при малих відстанях виявилася правильною екстраполяційна формула

$$\sigma_{\theta_{\max}} / p = 2,83(\sqrt{\delta} + 1/\sqrt{\delta}) - 0,0154.$$

Концентрація напружень при віддалених отворах у анізотропних пластинках. Співвідношення (1) достатньо точно описують розподіл напружень при $0 < \delta < 0,01$. При більших значеннях параметра для визначення відносних напружень $\sigma = \sigma_{\theta_{\max}} / \sigma_0$ використана наближена формула $\sigma = S(\delta)$, де

$$S(\delta) = (C_0 + C_1\delta + C_2\delta^2 + C_3\delta^3) / \delta^m. \tag{6}$$

Знайдені методом найменших квадратів коефіцієнти в цій формулі для розглянутих вище випадків наведено в таблиці 5.

Таблиця 5. Коефіцієнти формули (6)

Матеріал	b/a	C_0	C_1	C_2	C_3	Діапазон, m
Ізотропія	1	0.686	-0.962	5.759	-8.319	$0,064 < \delta < 0,5$
	0,5	0.599	-1.446	7.743	-8.494	$m=0,5$
CF1	1	0.207	1.823	-3.086	2.927	$0,064 < \delta < 0,5$
	0,5	0.113	1.854	-2.799	2.594	$m = 0,6338$
CF ₉₀	1	0.638	-0.048	2.332	-2.682	$0,064 < \delta < 0,5$
	0,5	0.565	-0.457	4.360	-5.092	$m = 0,51457$
EF	1	0.637	-0.996	6.247	-8.122	$0,012 < \delta < 0,4$ $m = 0,5$
EF ₉₀	1	0.630	-0.91	5.915	-7.687	$0,012 < \delta < 0,5$
	0,5	0.512	-0.49	4.632	-5.319	$m = 0,504$
EF ₄₅	1	1.569	1.956	5.060	-7.285	$0,008 < \delta < 0,5$
	0,5	0.291	1.171	-1.306	0.273	$m = 0,5337$
Izo	2	0.686	0.605	-0.946	0.945	$0,0064 < \delta < 0,5$
CF1	2	0.175	1.790	-4.15	4.906	$0,0064 < \delta < 0,5$
CF ₉₀	2	0.694	0.350	0.009	0.002	$0,0064 < \delta < 0,5$
Півплощина						
Ізотропія	1	2.784	1.153	-0.76	0.754	$0,0064 < \delta < 0,5$
EF	1	3.28	.549	2.927	-3.209	$0,0064 < \delta < 0,5$
EF ₉₀	1	2.866	1.65	-1.595	1.458	$0,0064 < \delta < 0,5$

Перевіriamo точність формули (1) у випадку ізотропної півнескінченної пластинки за розтягу паралельно межі для відносних відстаней отвору від межі $d/R = 0,185; 0,3370; 0,5430$. Наведені в [5] значення відносних напружень для цих відстаней дорівнюють 6.960, 5.387, 4.494. Відносні похибки (в %) розрахованих за формулою (1) напружень для цього випадку буде -0.5814, -0.3736, -0.1109.

Висновки. Запропоновано підхід до побудови простих загальних формул для визначення концентрації напружень у анізотропних пластинках, коли напруження можуть бути нескінченними. Для побудови таких формул використано асимптотичні співвідношення для напружень, метод найменших квадратів і МГПР. Показано, що прості асимптотичні формули не тільки дають можливість встановити якісну функціональну залежність ККН від відстані між отворами, а їх можна також використовувати безпосередньо в інженерних розрахунках.

Література

1. Устинов, Ю.А. Решение некоторых задач для двусвязных областей со сближенными круговыми границами [Текст] / Ю.А. Устинов // Концентрация напряжений. – 1965. – №1. – С. 270–275.
2. Панасюк, В.В. До питання визначення концентрації напружень у розтягнутій пластинці з двома отворами [Текст] / В.В. Панасюк, М.П. Саврук // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – 51. – №2. – С. 112–123.
3. Duan Z.P. An integral equation method and its application to defect mechanics / Z.P. Duan, R. Kienzler, G. Herrmann // J. Mech. Phys. Solids. – 1986. – 34. – No. 6. – P. 539–561.
4. Erdogan F. On the numerical solution of singular integral equations / F. Erdogan, G.D. Gupta / F. Erdogan // II Quart. Appl. Math. – 1972. – 29. – N 4. – P. 525-534.
5. Савин, Г.Н. Распределение напряжений около отверстий [Текст] / Г.Н. Савин. – К.: Наукова думка, 1968. – С. 888.

Отримано 04.03.2011