

УДК 531

В. Ловеїкін¹, докт. техн. наук; Ю. Човнюк^{1,2}, канд. техн. наук;
М. Діктерук², канд. техн. наук; К. Почка², канд. техн. наук

¹ Національний університет біоресурсів і природокористування України

² Київський національний університет будівництва і архітектури

НОВИЙ МЕТОД АНАЛІЗУ НЕСТАЦІОНАРНИХ КОЛИВНИХ ПРОЦЕСІВ МАШИНОБУДІВНИХ КОНСТРУКЦІЙ

Резюме. Запропоновано новий метод аналізу нестационарних коливних процесів машинобудівних конструкцій, у якому використані підходи якісного аналізу диференціальних рівнянь і, зокрема, фазові портрети системи вищого порядку.

Ключові слова: вимушені коливання, нестационарні коливання, лінійні процеси, механічні системи.

V. Loveikin; Yu. Chovnyuk; M. Dikteruk; K. Pochka

NEW METHOD OF ANALYSIS OF NONSTATIONARY OSCILLATIVE PROCESSES OF MACHINE CONSTRUCTIONS

The summary. New method of analysis of nonstationary oscillative processes of machine constructions is offered. The approaches of qualitative analysis of differential equations and, in particular, phase portraits of the system of higher order are proposed.

Key words: forced oscillation, stationary oscillation, linear processes, mechanical systems.

Постановка проблеми. Вивчення нестационарних коливних процесів у механічних деформівних системах представляє великий інтерес для сучасної техніки у зв'язку зі значним збільшенням потужностей та швидкостей руху машин, а також навантажень на машинобудівні конструкції.

Нестационарні коливання елементів турбін, двигунів внутрішнього згорання та інших машин виникають при неусталених режимах роботи, пуску й гальмуванні, зупинці, балансуванні та ін.

Найповніше вивчені нестационарні коливання при переході через резонанс лінійних систем. Проте вичерпного розв'язку, доведеного до практичних застосувань, для багатьох лінійних задач не було знайдено.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Вимушені коливання лінійних систем з одним ступенем вільності руху при проходженні через резонанс вивчались у роботах [1–4] та ін. При цьому вказані автори у своїх дослідженнях (в основному – аналітичних) робили наголос на класичних підходах щодо аналізу подібних систем і, зокрема, стійкість процесів їх руху вивчалась за допомогою класичних фазових портретів. Проте сучасні вимоги до машин, їх окремих елементів, конструкцій вимагають оптимізації параметрів (кінематичних та динамічних) системи за пришвидшеннями високих порядків (третього, четвертого і т.д.), особливо під час перехідних режимів роботи машин (пуск, гальмування), коли тривалість таких процесів менше 1ϵ , а навантаження, які виникають у машині, її елементах, конструкціях можуть призвести до руйнувань, аварій тощо. Використання отриманих у цитованих вище роботах аналітичних результатів не завжди доцільне, оскільки призводить до необхідності звернення інженерів-проектувальників машин до громіздких таблиць (наприклад, інтеграла ймовірності від комплексного аргументу – [1]). Крім того, проектувальникам і тим, хто безпосередньо експлуатує машини, конче необхідно знати й оцінювати можливості

“перекачування” кінетичної енергії (класичний варіант), пов’язаної зі швидкістю руху машини, в енергії пришвидшень системи вищого порядку, швидко аналізувати всі можливі режими руху машин (при їх пуску/гальмуванні) за певних вихідних їх параметрів та початкових умов, а також стійкість руху машин до стаціонарного (усталеного) стану (за якого параметри машини – кінематичні/динамічні – стабілізуються). Слід зазначити, що у сучасних швидкоплинних процесах, притаманних механічним системам, завдяки потужному розвитку методів математичного моделювання були виявлені нові властивості та режими руху – хаотичні, що можуть виникати у таких ситуаціях (особливо за наявності у механізмах, елементах машини нелінійних властивостей). Для встановлення факту наявності таких режимів руху, областей їх стійкого існування, за глибоким переконанням авторів даної роботи, необхідні нові підходи, у тому числі у царині якісної теорії диференціальних рівнянь.

Мета даної роботи полягає у встановленні основних характеристик (кінематичних) вимушених коливань лінійних систем з одним ступенем вільності руху при їх проходженні через резонанс. При цьому для досягнення мети роботи використовується принципово новий підхід, а саме: модельні (типові) задачі розв’язуються чисельно й результати їх розв’язку інтегруються не тільки у часі (t), але й на фазовій площині. Зрозуміло, що при такому підході відтворюються всі особливості класичного фазового портрета механічної системи. Але, крім цього, будуються фазові портрети вищого порядку, які описують складні процеси обміну енергії у механічній системі.

Виклад основного матеріалу. Дослідження нестационарних процесів у лінійних системах з одним ступенем вільності руху здійснюється у припущенні, що джерело енергії має досить велику потужність, зводиться до інтегрування диференціального рівняння [1]

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \mu \cdot \frac{d\varphi}{dt} + \omega^2 \cdot \varphi = P(t) \cdot \cos\{\theta(t)\}, \quad (1)$$

у якому $\varphi(t)$ можна розглядати як лінійне переміщення; μ – коефіцієнт, що характеризує затухання; ω – частота (кругова) вільних коливань; $P(t)$ – амплітуда вимушеної сили, віднесена до m – одиниці маси системи. При цьому частота зовнішньої сили $\nu = \frac{d\theta}{dt}$ є деякою функцією часу t ; у найпростішому випадку – це лінійна функція

$$\nu(t) = \varepsilon \cdot t, \quad (2)$$

де ε – швидкість зміни частоти $\nu(t)$. (У даній роботі прийняті позначення [1]).

З подальшого побачимо, що $\nu(t)$ може змінюватись як завгодно швидко у порівнянні з “природною одиницею часу” (період власних коливань) розглядуваної лінійної системи. (У випадку ж нелінійної системи частоту ν вважають повільно змінною величиною у вказаному вище сенсі).

Для чисельного інтегрування (1) доцільно подати його у безрозмірній формі

$$\tilde{\varphi}_{\tau\tau} = -\frac{\mu \cdot k}{\varepsilon} \cdot \tilde{\varphi}_{\tau} - \frac{\omega^2 \cdot k^2}{\varepsilon^2} \cdot \tilde{\varphi} + \cos\left(\frac{k^2}{2 \cdot \varepsilon^2} \cdot \tau^2\right), \quad (3)$$

де $\tilde{\varphi} = \frac{\varphi}{\left(\frac{k^2 \cdot P_0}{\varepsilon^2 \cdot m}\right)}$; $\tau = \frac{\varepsilon \cdot t}{k}$ й вважаємо, що амплітуда $P(t) = P_0 = const$, $k = \sqrt{\omega^2 - \frac{\mu^2}{4}}$.

Якщо задані параметри (ω , μ , ε), тоді можна знайти λ_0 та h :

$$\lambda_0 = \frac{k}{\mu} = \frac{\sqrt{\omega^2 - \frac{\mu^2}{4}}}{\mu}; \quad h = \frac{\mu}{\sqrt{\varepsilon}}. \quad (4)$$

Використовуючи позначення (4), рівняння (3) можна записати у вигляді

$$\tilde{\varphi}_{\tau\tau} = -4 \cdot \lambda_0 \cdot h^2 \cdot \tilde{\varphi}_{\tau} - 16 \cdot \lambda_0^2 \cdot h^4 \cdot \left(\lambda_0^2 + \frac{1}{4} \right) \cdot \tilde{\varphi} + \cos(2 \cdot \lambda_0^2 \cdot h^2 \cdot \tau^2). \quad (5)$$

Для похідних $\tilde{\varphi}$ по τ вищого порядку можна легко отримати такі вирази:

$$\tilde{\varphi}_{3\tau} = -4 \cdot \lambda_0 \cdot h^2 \cdot \tilde{\varphi}_{2\tau} - 16 \cdot \lambda_0^2 \cdot h^4 \cdot \left(\lambda_0^2 + \frac{1}{4} \right) \cdot \tilde{\varphi}_{\tau} - 4 \cdot \lambda_0^2 \cdot h^2 \cdot \tau \cdot \sin(2 \cdot \lambda_0^2 \cdot h^2 \cdot \tau^2); \quad (6)$$

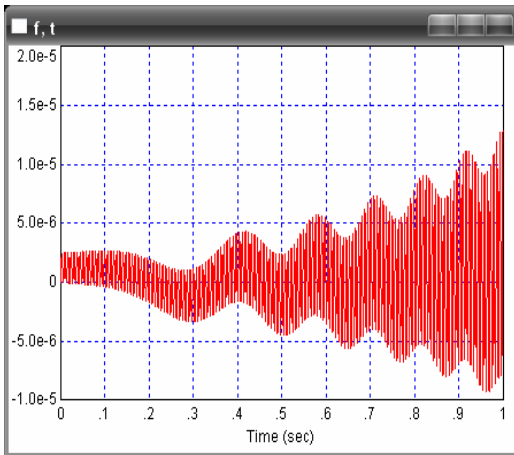
$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_{4\tau} = & -4 \cdot \lambda_0 \cdot h^2 \cdot \tilde{\varphi}_{3\tau} - 16 \cdot \lambda_0^2 \cdot h^4 \cdot \left(\lambda_0^2 + \frac{1}{4} \right) \cdot \tilde{\varphi}_{2\tau} - 4 \cdot \lambda_0^2 \cdot h^2 \cdot \sin(2 \cdot \lambda_0^2 \cdot h^2 \cdot \tau^2) - \\ & - (4 \cdot \lambda_0^2 \cdot h^2 \cdot \tau)^2 \cdot \cos(2 \cdot \lambda_0^2 \cdot h^2 \cdot \tau^2). \end{aligned} \quad (7)$$

Чисельні розрахунки $\tilde{\varphi}(\tau)$, $\tilde{\varphi}_{\tau}(\tau)$, $\tilde{\varphi}_{2\tau}(\tau)$, $\tilde{\varphi}_{3\tau}(\tau)$, $\tilde{\varphi}_{4\tau}(\tau)$, а також фазових портретів (рис. 1-3) $(\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}_{\tau})$, $(\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}_{2\tau})$, $(\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}_{3\tau})$, $(\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}_{4\tau})$, $(\tilde{\varphi}_{\tau}, \tilde{\varphi}_{2\tau})$, $(\tilde{\varphi}_{\tau}, \tilde{\varphi}_{3\tau})$, $(\tilde{\varphi}_{\tau}, \tilde{\varphi}_{4\tau})$, $(\tilde{\varphi}_{2\tau}, \tilde{\varphi}_{3\tau})$, $(\tilde{\varphi}_{2\tau}, \tilde{\varphi}_{4\tau})$, $(\tilde{\varphi}_{3\tau}, \tilde{\varphi}_{4\tau})$ були проведені для шести варіантів значень вихідних параметрів механічної системи:

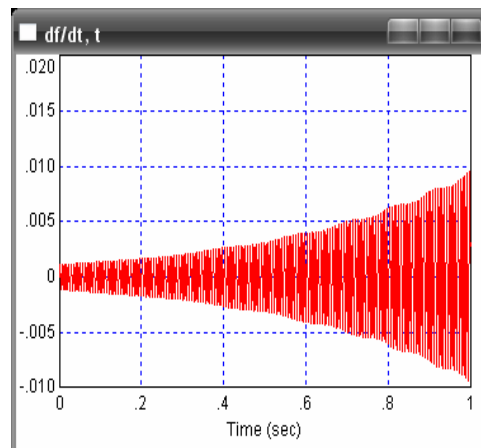
- 1) $\lambda_0 = 108,8$; $h = 0,482$; $\varepsilon = 74,9c^{-2}$; 2) $\lambda_0 = 43,65$; $h = 1,202$; $\varepsilon = 74,9c^{-2}$;
- 3) $\lambda_0 = 108,8$; $h = 0,1415$; $\varepsilon = 74,9c^{-2}$; 4) $\lambda_0 = 40$; $h = 0,1795$; $\varepsilon = 111,46c^{-2}$;
- 5) $\lambda_0 = 40$; $h = 0,0708$; $\varepsilon = 64,6c^{-2}$; 6) $\lambda_0 = 108,8$; $h = 1,202$; $\varepsilon = 111,46c^{-2}$.

При цьому за заданих λ_0 , h , ε легко можна знайти (μ, ω, k) , користуючись такими співвідношеннями:

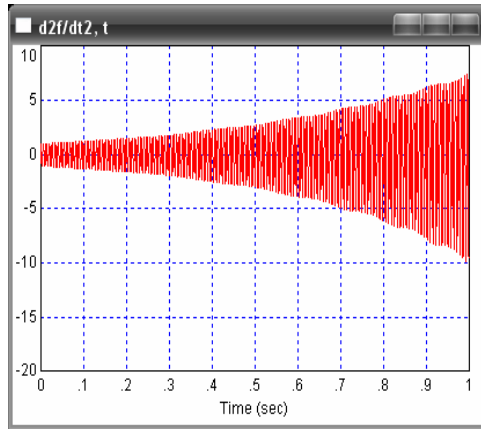
$$\mu = 2 \cdot \sqrt{\varepsilon} \cdot h; \quad \omega = \sqrt{\varepsilon \cdot h^2 \cdot (4 \cdot \lambda_0^2 + 1)}; \quad k = \lambda_0 \cdot 2 \cdot \sqrt{\varepsilon} \cdot h. \quad (8)$$



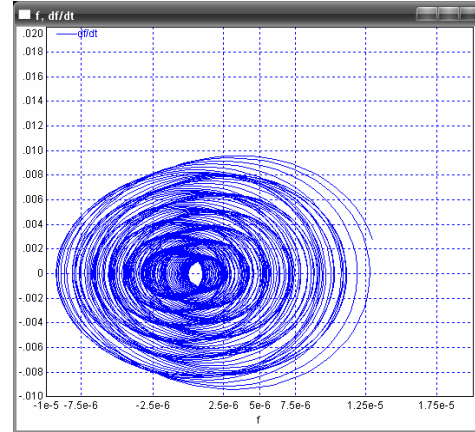
а



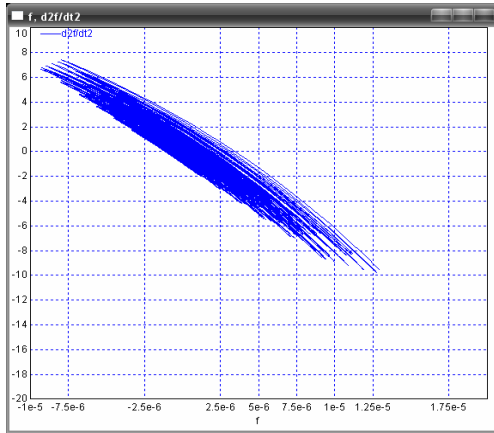
б



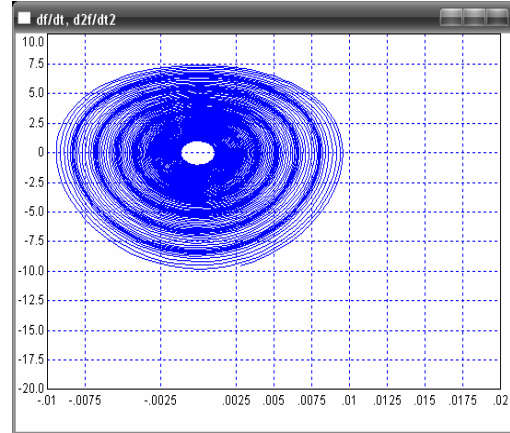
б



г

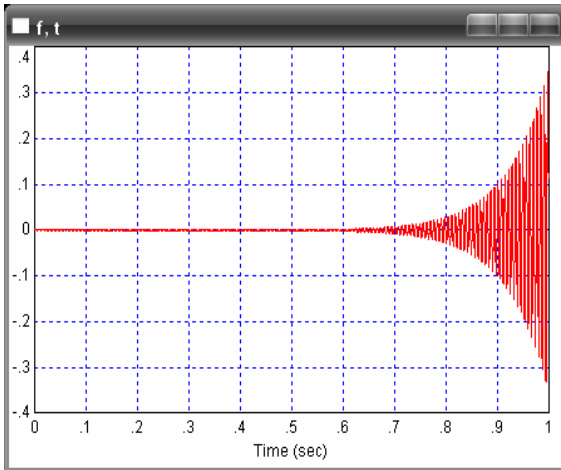


д

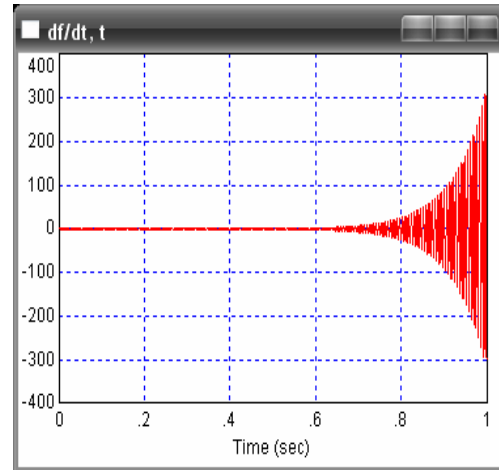


е

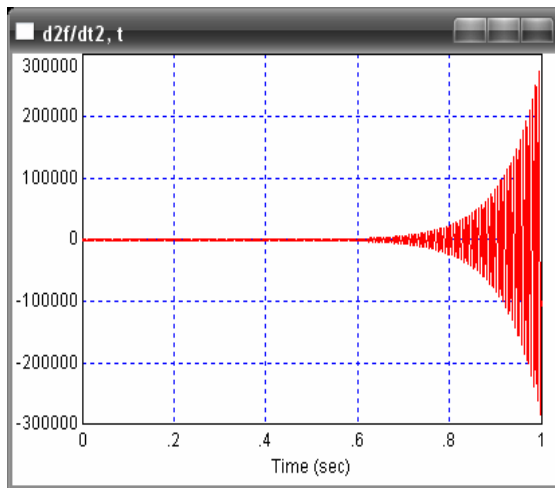
Рис. 1. Чисельні розрахунки вихідних параметрів механічної системи при нелінійному антив'язкому терті: $\tilde{\varphi}(\tau)$ – а; $\tilde{\varphi}_\tau(\tau)$ – б; $\tilde{\varphi}_{2\tau}(\tau)$ – в; $(\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}_\tau)$ – г; $(\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}_{2\tau})$ – д; $(\tilde{\varphi}_\tau, \tilde{\varphi}_{2\tau})$ – е



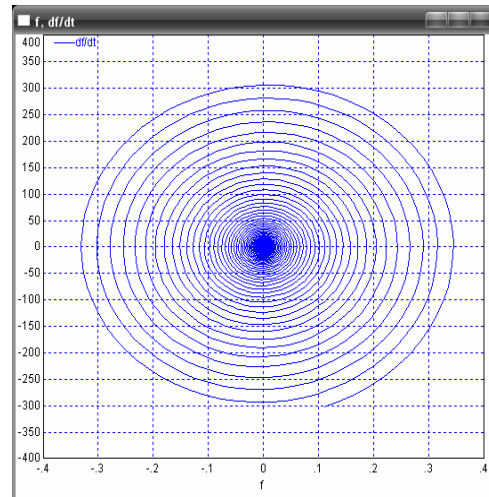
а



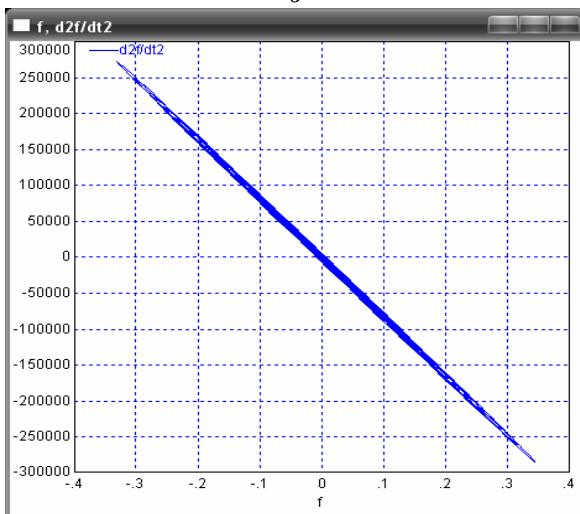
б



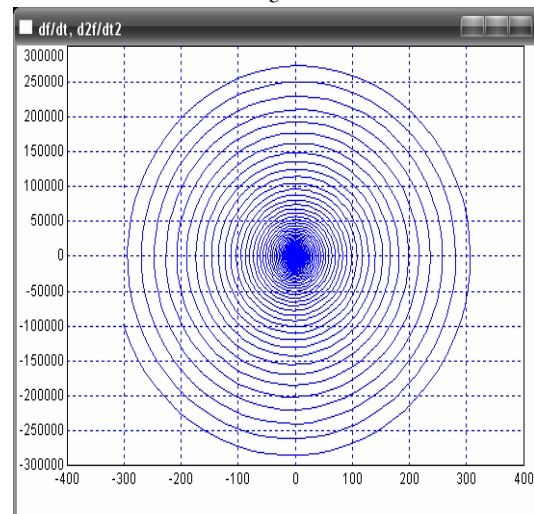
б



в



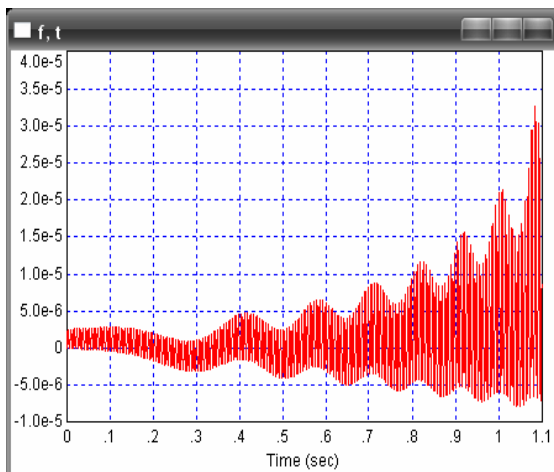
г



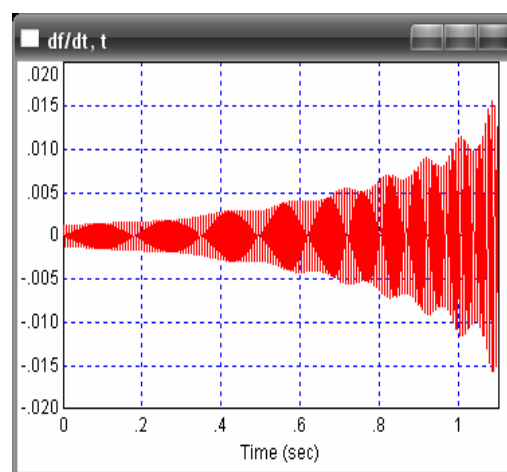
д

Рис. 2. Чисельні розрахунки вихідних параметрів механічної системи при антив'язкому терті: $\tilde{\varphi}(\tau)$ – а;

$\tilde{\varphi}_\tau(\tau)$ – б; $\tilde{\varphi}_{2\tau}(\tau)$ – в; $(\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}_\tau)$ – г; $(\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}_{2\tau})$ – д; $(\tilde{\varphi}_\tau, \tilde{\varphi}_{2\tau})$ – е



а



б

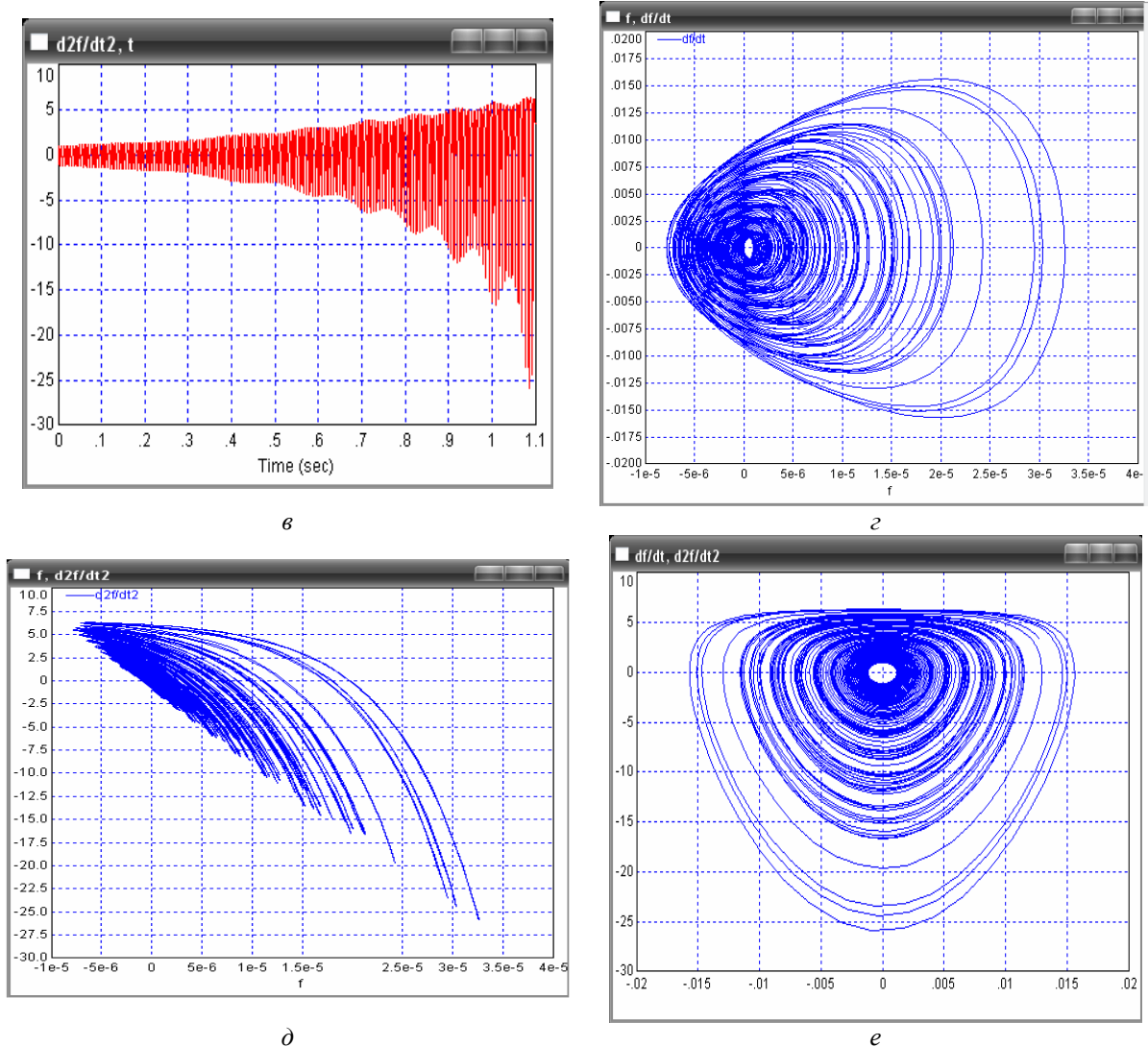


Рис. 3. Чисельні розрахунки вихідних параметрів механічної системи при нелінійному антитерті: $\tilde{\varphi}(\tau)$ – а; $\tilde{\varphi}_\tau(\tau)$ – б; $\tilde{\varphi}_{2\tau}(\tau)$ – в; $(\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}_\tau)$ – г; $(\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}_{2\tau})$ – д; $(\tilde{\varphi}_\tau, \tilde{\varphi}_{2\tau})$ – е

Аналіз графічних зображень фазових портретів вищих порядків на рис. 1-3 свідчить про те, що вони:

- 1) залежать від параметрів $\lambda_0, h, \varepsilon$;
- 2) мають замкнену форму траєкторії, тобто відповідають періодичним (фінітним) рухам;
- 3) не мають елементів стохастичності;
- 4) відрізняються між собою візуально у сенсі того, які похідні фігурують у конкретному фазовому портреті (парні з непарними; непарні з непарними; парні з парними).

Слід зазначити, що повне усвідомлення зв'язку форми фазового портрета з інтенсивністю “перекачування” енергії одного виду пришвидшень до іншого вимагає додаткових досліджень, які будуть проведені у подальшому.

Література

1. Голоскоков, Е.Г. Нестационарные колебания механических систем [Текст] / Е.Г. Голоскоков, А.П. Филиппов. – К.: Наукова думка, 1966. – 336 с.
2. Диментберг, Ф.М. Колебания машин [Текст] / Ф.М. Диментберг, К.Т. Шаталов, А.А. Гусаров. – М.: Машгиз, 1964. – 380 с.

3. Пановко, Я.Г. Основы прикладной теории упругих колебаний [Текст] / Я.Г. Пановко. – М.: Машгиз, 1957. – 284 с.
4. Пановко, Я.Г. Устойчивость и колебания упругих систем [Текст] / Я.Г. Пановко, И.И. Губанова. – М.: Наука, 1987. – 352 с.

Отримано 07.06.2011