Окрепкий Б. Тиск циліндричного кругового штампа на пружний шар з урахуванням неідеального теплового контакту / Окрепкий Б., Шелестовська М. // Вісник ТНТУ. — 2011. — Том 17. — № 2. — С.42-52. — (механіка та матеріалознавство).

УДК 539.3

Б. Окрепкий, канд. фіз.-мат. наук; М. Шелестовська, канд. техн. наук

Тернопільський національний економічний університет

ТИСК ЦИЛІНДРИЧНОГО КРУГОВОГО ШТАМПА НА ПРУЖНИЙ ШАР З УРАХУВАННЯМ НЕІДЕАЛЬНОГО ТЕПЛОВОГО КОНТАКТУ

Резюме. *Побудовано розв'язок осесиметричної контактної задачі термопружності про тиск гарячого циліндричного кругового ізотропного штампа на пружний ізотропний шар з урахуванням неідеального теплового контакту між штампом і шаром. Отримано формули для визначення температурного поля і нормального напруження. Досліджено вплив контактної провідності на розподіл температурних полів і нормального напруження у зоні контакту.*

Ключові слова: *напруження, ізотропні матеріали, шар, циліндричний штамп, неідеальний тепловий контакт.*

B. Okrepkiy; M. Shelestovska

CYLINDER CIRCULAR PUNCH STRESS ON THE ELASTIC LAYER TAKING INTO ACCOUNT NON-IDEAL HEAT CONTACT

The summary*. Solution of the axis-symmetric contact task of thermo-elasticity of the hot cylinder circular punch stress on the elastic isotropic layer taking into account a non-ideal heat contact between punch and layer is built. Formulas for determination of the temperature field and normal stress in the contact area are obtained. The effect of the contact elasticity on the temperature and normal stress distribution is investigated. Investigation was made on the influence of the contact conductivity on distributing of the temperature fields and normal stress in the area of contact of two bodies.*

Key words: *srtess, isotropic materials, cylinder punch, layer, punch, non-ideal contact.*

Постановка проблеми. Визначення контактних деформацій і напружень з урахуванням температурних полів є необхідним для дослідження міцності деталей машин і елементів конструкцій у місцях їхньої взаємодії, при розрахунку конструкцій на пружній основі з метою раціонального використання матеріалу конструкції і несучої здатності основи.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. У працях [1–5] досліджується вплив температурних факторів на характер контактної взаємодії тіл. Зокрема, в роботах [4, 6] розв'язані осесиметричні контактні задачі термопружності про тиск циліндричного кругового штампа з плоскою основою на пружний півпростір при неідеальному тепловому контакті для ізотропних і трансверсально-ізотропних матеріалів. Проте недостатньо вивченим є вплив умов неідеального теплового контакту на величину і характер температурних полів, а також контактного нормального напруження в системі тіл циліндр–шар.

Мета роботи. Побудувати розв'язок осесиметричної контактної задачі термопружності про тиск циліндричного кругового штампа з плоскою основою на пружний шар з урахуванням неідеального теплового контакту. Необхідно знайти формули для визначення температури в циліндрі й шарі, а також нормальних напружень у зоні контакту, та дослідити вплив контактної провідності на розподіл температури і нормальних напружень.

Постановка задачі. Нехай циліндричний круговий штамп радіусом R і довжиною L, з плоскою основою втискується силою P в ізотропний пружний шар скінченної товщини H. Поверхня шару зовні площадки контакту вільна від зовнішніх зусиль. На площадці контакту дотичні напруження $\tau_{rz} = 0$. На вільному торці циліндра задана постійна температура T_0. Бічна поверхня циліндра теплоізольована. Тепловий контакт між тілами припускається неідеальним. На вільних поверхнях шару відбувається теплообмін із зовнішнім середовищем за законом Ньютона. При зроблених припущеннях необхідно визначити температурні поля і контактні нормальні напруження.

Введемо циліндричну систему координат r, θ, z, центр якої лежить на поверхні шару, а вісь Oz спрямована вздовж циліндра. Всі величини, які позначені індексом “1”, відносяться до шару, без індексів – до циліндра.

Граничні умови для температури, напружень і переміщень матимуть такий вигляд:

$$T = T_0, \qquad \left(0 \le r \le R,\ z = L\right). \tag{1}$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0, \qquad \left(r = R,\ 0 \le z \le L\right). \tag{2}$$

$$\lambda_z^1 \frac{\partial T^1}{\partial z} = \lambda_z \frac{\partial T}{\partial z}, \quad \lambda_z^1 \frac{\partial T^1}{\partial z} = h_0\left(T - T^1\right), \qquad \left(0 \le r \le R,\ z = 0\right). \tag{3}$$

$$\frac{\partial T^1}{\partial z} + H_2^1 T^1 = 0, \qquad \left(R \le r < \infty,\ z = 0\right). \tag{4}$$

$$\frac{\partial T^1}{\partial z} - H_1^1 T^1 = 0, \qquad \left(0 \le r < \infty,\ z = -H\right). \tag{5}$$

$$u_z^1 = -\varepsilon, \quad \left(0 \le r \le R,\ z = 0\right); \quad \sigma_z^1 = 0, \quad \left(R < r < \infty,\ z = 0\right). \tag{6}$$

$$\tau_{rz}^1 = 0, \quad \left(0 \le r < \infty,\ z = 0\right); \quad u_z^1 = 0; \ \tau_{rz}^1 = 0, \quad \left(0 \le r < \infty,\ z = -H\right). \tag{7}$$

Тут $H_i^1\left(i = 1,2\right)$, λ_z, λ_z^1 – коефіцієнти теплообміну і теплопровідності; h_0 – контактна провідність; ε – величина вертикального переміщення штампа.

Розв’язування крайових задач для рівнянь теплопровідності і термопружності. Відомо [3], що в осесиметричному випадку термопружний потенціал і температурне поле для ізотропного тіла знаходять із рівнянь

$$\nabla^2 \varphi = \alpha_T \frac{1+\sigma}{1-\sigma} T, \quad \nabla^2 T = 0, \tag{8}$$

а температурні напруження і переміщення визначають за формулами

$$u_z^{(T)} = \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad \sigma_z^{(T)} = -2\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}\right), \quad \tau_{rz}^{(T)} = 2\mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r\, \partial z}, \tag{9}$$

де α_T – коефіцієнт лінійного температурного розширення; μ, σ – модуль зсуву і коефіцієнт Пуассона.

Для визначення температурного поля в шарі введемо трансформанту Ганкеля функції $T^1\left(\xi, z\right)$ нульового порядку

$$\overline{T^1}\left(\xi, z\right) = \int_0^\infty r\, T^1\left(r, z\right) J_0\left(\xi r\right) dr, \tag{10}$$

за допомогою якої, із другого рівняння (8), знаходимо вироз для $T^1\left(\rho, \zeta\right)$ через дві довільні функції $\varphi_1\left(\eta\right)$ і $\varphi_2\left(\eta\right)$.

$$T^1(\rho,\zeta)=\int_0^\infty\left[\varphi_1(\eta)e^{\eta\zeta}+\varphi_2(\eta)e^{-\eta\zeta}\right]J_0(\eta\rho)d\eta, \tag{11}$$

де $J_0(\eta\rho)$ – функція Бесселя першого роду дійсного аргументу, $\rho=r/R;\ \zeta=z/R;\ \eta=\xi R.$

Температурне поле в циліндрі знаходимо методом Фур'є. Загальний розв'язок має вигляд

$$T(r,z)=A_0z+B_0+D_0\left(r^2-2z^2\right)+\sum_{k=1}^{\infty}J_0(\beta_k r)\left(A_k sh\beta_k z+B_k ch\beta_k z\right)+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}I_0(\gamma_k r)\left(C_k\sin\gamma_k z+D_k\cos\gamma_k z\right), \tag{12}$$

де A_k, B_k, C_k, D_k – довільні постійні; $I_0(\gamma_k r)$ – функція Бесселя першого роду уявного аргументу; β_k, γ_k – власні значення, які знаходять із граничних умов.

Термопружний потенціал φ визначаємо з першого рівняння (8) у вигляді

$$\varphi(\rho,\zeta)=\frac{1}{2}\frac{1+\sigma^1}{1-\sigma^1}\alpha_{T^1}\zeta\int_0^\infty\frac{1}{\eta}\left[\varphi_1(\eta)e^{\eta\zeta}+\varphi_2(\eta)e^{-\eta\zeta}\right]J_0(\eta\rho)d\eta. \tag{13}$$

Компоненти температурних напружень і переміщень обчислюємо за формулами (9). Маючи формули для температурних напружень і переміщень, можна знайти компоненти напружень та переміщень при контактній взаємодії циліндра і шару. Для цього необхідно до величин, обчислених за формулами (9), додати компоненти напружень і переміщень від бігармонічного потенціалу [1].

Таким чином, для визначення переміщень і напружень в ізотропному шарі маємо такі співвідношення:

$$u_z^1=-\int_0^\infty\frac{1}{\eta}\left\{\left[\frac{1}{b_1^1R}\eta F_1(\eta)+\left(2+\frac{1}{b_1^1R}\eta\zeta\right)F_2(\eta)\right]e^{-\eta\zeta}+\left[\frac{1}{b_1^1R}\eta F_3(\eta)+\left(-2+\frac{1}{b_1^1R}\eta\zeta\right)F_4(\eta)\right]\cdot\right.$$

$$\left.\cdot e^{\eta\zeta}\right\}J_0(\eta\rho)d\eta+\frac{1}{2}\frac{1+\sigma^1}{1-\sigma^1}\alpha_{T^1}R\int_0^\infty\frac{1}{\eta}\left[\varphi_1(\eta)(1+\eta\zeta)e^{\eta\zeta}-\varphi_2(\eta)(1-\eta\zeta)e^{-\eta\zeta}\right]J_0(\eta\rho)d\eta;$$

$$\sigma_z^1=\frac{2b_3^1}{R}\int_0^\infty\left\{\left[\frac{\eta}{R}F_1(\eta)+\left(b_1^1+\eta\zeta\right)F_2(\eta)\right]e^{-\eta\zeta}+\left[-\frac{\eta}{R}F_3(\eta)+\left(b_1^1-\eta\zeta\right)F_4(\eta)\right]e^{\eta\zeta}\right\}$$

$$J_0(\eta\rho)\cdot d\eta+\mu^1\frac{1+\sigma^1}{1-\sigma^1}\alpha_{T^1}\zeta\int_0^\infty\eta\left[\varphi_1(\eta)e^{\eta\zeta}-\varphi_2(\eta)e^{-\eta\zeta}\right]J_0(\eta\rho)d\eta; \tag{14}$$

$$\tau_{rz}^1=2b_3^1\int_0^\infty\left\{\left[\frac{\eta}{R}F_1(\eta)+\left(-b_1^1+\eta\zeta\right)F_2(\eta)\right]e^{-\eta\zeta}+\left[\frac{\eta}{R}F_3(\eta)+\left(b_2^1+\eta\zeta\right)F_4(\eta)\right]e^{\eta\zeta}\right\}J_1(\eta\rho)d\eta-$$

$$-\mu^1\frac{1+\sigma^1}{1-\sigma^1}\alpha_{T^1}\int_0^\infty\left[\varphi_1(\eta)(1+\eta\zeta)e^{\eta\zeta}-\varphi_2(\eta)(1-\eta\zeta)e^{-\eta\zeta}\right]J_1(\eta\rho)d\eta,$$

$$b_1^1=\frac{\mu^1}{\lambda^1+\mu^1},\quad b_2^1=\frac{\lambda^1}{\lambda^1+\mu^1},\quad b_3^1=\lambda^1+\mu^1.$$

Тут u_z^1, σ_z^1, τ_{rz}^1 – компоненти переміщення і напружень у пружному шарі; $F_i(\eta)\left(i=\overline{1,4}\right)$ – довільні функції; λ^1, μ^1 – коефіцієнти Ламе.

Для задоволення граничної умови (2) у формулі (12) необхідно покласти $D_0=0$,

$C_k = 0$, $D_k = 0$ $\left(k = \overline{1, \infty}\right)$; $\beta_k = \mu_k / R$, де μ_k – корені рівняння $J_1\left(\mu_k\right) = 0$.

Гранична умова (1), з урахуванням ортогональності функцій Бесселя, призводить до співвідношень між постійними A_n і B_n $\left(n = \overline{0, \infty}\right)$

$$B_0 = T_0 - A_0 lR, \qquad B_n = -th\mu_n l A_n, \qquad l = \frac{L}{R}. \tag{15}$$

Задовольнивши граничні умови (3, 4, 5), з урахуванням (15), отримаємо систему інтегральних рівнянь, які зв'язують функції $\varphi_1(\eta)$ і $\varphi_2(\eta)$ з коефіцієнтами A_k $\left(k = \overline{0, \infty}\right)$:

$$\begin{gathered}\int_0^\infty \left[\left(h_0^1 + \eta\right)\varphi_1\left(\eta\right) + \left(h_0^1 - \eta\right)\varphi_2\left(\eta\right)\right] J_0\left(\eta\rho\right) d\eta = \\ = h_0^1\left[T_0 - A_0 lR - \sum_{k=1}^\infty th\mu_{kl} J_0\left(\mu_k \rho\right) A_k\right], \quad \left(\rho < 1\right);\end{gathered} \tag{16}$$

$$\frac{\lambda_{z^1}}{R}\int_0^\infty \eta\left[\varphi_1\left(\eta\right) - \varphi_2\left(\eta\right)\right] J_0\left(\eta\rho\right) d\eta = \frac{\lambda_z}{R}\left(A_0 R + \sum_{k=1}^\infty \mu_k J_0\left(\mu_k\rho\right) A_k\right), \quad \left(\rho < 1\right); \tag{17}$$

$$\int_0^\infty \left[\left(K_2^1 + \eta\right)\varphi_1\left(\eta\right) + \left(K_2^1 - \eta\right)\varphi_2\left(\eta\right)\right] J_0\left(\eta\rho\right) d\eta = 0, \quad \left(\rho > 1\right); \tag{18}$$

$$\int_0^\infty \left[\left(\eta - K_1^1\right) e^{-\eta h}\varphi_1\left(\eta\right) - \left(\eta + K_1^1\right) e^{\eta h}\varphi_2\left(\eta\right)\right] J_0\left(\eta\rho\right) d\eta = 0, \quad \left(0 \le \rho < \infty\right); \tag{19}$$

$$h = H / R; \quad K_1^1 = H_1^1 R; \quad K_2^1 = H_2^1 R, \quad h_0^1 = h_0 R / \lambda_z^1.$$

Застосувавши формулу обернення інтегрального перетворення Ганкеля [7] до рівняння (19) і ввівши позначення $\varphi(\eta) = \left(K_2^1 + \eta\right)\varphi_1\left(\eta\right) + \left(K_2^1 - \eta\right)\varphi_2\left(\eta\right)$, отримаємо систему рівнянь відносно $\varphi_1\left(\eta\right)$ і $\varphi_2\left(\eta\right)$, розв'язок якої має вигляд

$$\varphi_1\left(\eta\right) = \frac{1}{2}\left(\eta + K_1^1\right) e^{\eta h}\varphi\left(\eta\right) / Q\left(\eta\right); \quad \varphi_2\left(\eta\right) = \frac{1}{2}\left(\eta - K_1^1\right) e^{-\eta h}\varphi\left(\eta\right) / Q\left(\eta\right), \tag{20}$$

$$Q\left(\eta\right) = \left(\eta^2 + K_1^1 K_2^1\right) sh\eta h + \eta\left(K_1^1 + K_2^1\right) ch\eta h.$$

Підставивши функції $\varphi_1\left(\eta\right)$ і $\varphi_2\left(\eta\right)$ із (20) у рівняння (18), отримаємо:

$$\int_0^\infty \varphi\left(\eta\right) J_0\left(\eta\rho\right) d\eta = 0, \quad \left(\rho > 1\right). \tag{21}$$

Задовольнивши граничні умови (7), з урахуванням (20), для напруження $\sigma_z^1\left(\rho, 0\right)$ і переміщення $u_z^1\left(\rho, 0\right)$ на поверхні шару знайдемо такі формули:

$$u_z^1\left(\rho, 0\right) = \frac{1 + b_1^1}{b_1^1} R\int_0^\infty \left[1 - G\left(2\eta h\right)\right]\Phi\left(\eta\right) J_0\left(\eta\,\rho\right) d\eta + \alpha_{T^1} R\delta\int_0^\infty \frac{1}{\eta}\frac{Q_2\left(\eta\right)\varphi\left(\eta\right)}{Q\left(\eta\right) Q_1\left(\eta\right)} J_0\left(\eta\rho\right) d\eta, \tag{22}$$

$$\sigma_z^1\left(\rho, 0\right) = \frac{2b_3^1}{R}\int_0^\infty \eta\,\Phi\left(\eta\right) J_0\left(\eta\,\rho\right) d\eta,$$

$$R\eta\Phi\left(\eta\right) = \eta R^{-1} F_1\left(\eta\right) + b_1^1 F_2\left(\eta\right) - \eta R^{-1} F_3\left(\eta\right) + b_1^1 F_4\left(\eta\right),$$

$$Q_1\left(\eta\right) = sh^2\eta h + 2\eta h, \quad Q_2\left(\eta\right) = \left(\eta sh\eta h\, ch\eta h + K_1^1 sh^2\eta h + \eta^2 h\right) sh\eta h,$$

$$G(2\eta h)=\frac{1+2\eta h-e^{-2\eta h}}{Q_1(\eta)},\quad \delta=\frac{1+\sigma^1}{1-\sigma^1}\left(1+b_1^1\right)$$

Задовольнивши граничні умови (6), доходимо до системи інтегральних рівнянь відносно функцій $\Phi(\eta)$ і $\varphi(\eta)$

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \Phi(\eta)J_0(\eta\rho)\,d\eta=-\frac{\varepsilon}{R}+\int_0^\infty G(2\eta h)\Phi(\eta)J_0(\eta\rho)\,d\eta+\\ +\alpha_{T^1}\delta\int_0^\infty \frac{1}{\eta}\frac{Q_2(\eta)\varphi(\eta)}{Q(\eta)Q_1(\eta)}J_0(\eta\rho)\,d\eta,\quad (0\le\rho\le 1).\end{aligned} \tag{23}$$

$$\int_0^\infty \eta\Phi(\eta)J_0(\eta\rho)\,d\eta=0,\quad (\rho>1). \tag{24}$$

Якщо ввести функцію $f(t)$ співвідношенням

$$\Phi(\eta)=\frac{b_1^1}{1+b_1^1}\int_0^1 f(t)\cos\eta t\,dt, \tag{25}$$

то рівняння (24) задовольняється тотожно, а рівняння (23) зводиться до інтегрального рівняння Абеля

$$\int_0^\rho \frac{f(t)\,dt}{\sqrt{\rho^2-t^2}}=g(\rho), \tag{26}$$

розв'язок якого згідно з [8] визначаємо за формулою

$$f(t)=\frac{2}{\pi}\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{\rho\, g(\rho)\,d\rho}{\sqrt{t^2-\rho^2}}, \tag{27}$$

де

$$g(\rho)=-\frac{\varepsilon}{R}+\int_0^\infty G(2\eta h)\Phi(\eta)J_0(\eta\rho)\,d\eta+\alpha_{T^1}\delta\int_0^\infty \frac{1}{\eta}\frac{Q_2(\eta)\varphi(\eta)}{Q(\eta)Q_1(\eta)}J_0(\eta\rho)\,d\eta. \tag{28}$$

Підставивши вираз (28) у формулу (27), з урахуванням при цьому (25), отримаємо інтегральне рівняння Фредгольма другого роду відносно функції $f(t)$

$$\begin{aligned}f(t)=-\frac{2}{\pi}\frac{\varepsilon}{R}+\frac{2}{\pi}\int_0^1 f(x)\,dx\int_0^\infty G(2\eta h)\cos\eta x\cos\eta t\,d\eta+\\ +\frac{2\delta}{\pi}\alpha_{T^1}\int_0^\infty \frac{1}{\eta}\frac{Q_2(\eta)\varphi(\eta)}{Q(\eta)Q_1(\eta)}\cos\eta t\,d\eta,\qquad (0\le t\le 1).\end{aligned} \tag{29}$$

Контактні напруження під штампом $\sigma_z^1(\rho,0)$, з використанням (25), визначаємо за формулою

$$\sigma_z^1(\rho,0)=æ_0\left[\frac{f(1)}{\sqrt{1-\rho^2}}-\int_\rho^1 \frac{f'(t)\,dt}{\sqrt{t^2-\rho^2}}\right],\qquad æ_0=\frac{2b_1^1b_3^1}{1+b_1^1}. \tag{30}$$

Використовуючи умову рівноваги штампа $p=-2\pi R^2\int_0^1 \rho\,\sigma_z^1(\rho)\,d\rho$ і формулу (30), інтегральне рівняння (29) зводиться до вигляду

$$f(t)-\frac{2}{\pi}\int_0^1 f(x)dx\int_0^\infty G(2\eta h)\cos\eta x\left(\cos\eta t-\frac{\sin\eta}{\eta}\right)d\eta-$$

$$-\frac{2\delta}{\pi}\alpha_{T^1}\int_0^\infty \frac{1}{\eta}\frac{Q_2(\eta)\varphi(\eta)}{Q(\eta)Q_1(\eta)}\left(\cos\eta t-\frac{\sin\eta}{\eta}\right)d\eta=-\frac{p}{2\pi R^2æ_0},\ \left(0\le t\le 1\right). \tag{31}$$

Для визначення функції $\varphi(\eta)$ продовжимо рівняння (21) на весь інтервал $\left(0\le\rho<\infty\right)$

$$\int_0^\infty \varphi(\eta)J_0(\eta\rho)d\eta=U(1-\rho)X(\rho) \qquad \left(0\le\rho<\infty\right) \tag{32}$$

Тут $U(x)$ -– функція Гевісайда; $X(\rho)$ – невідома функція, яку запишемо співвідношенням

$$X(\rho)=T_0\left\{a_0+\sum_{k=1}^{N_1}a_kJ_0\left(\mu_{k\rho}\right)\right\}, \qquad \left(0<\rho<1\right), \tag{33}$$

де $a_k\left(k=0,N_1\right)$ – невідомі коефіцієнти, які необхідно визначити; значення N_1 вибираємо з умови забезпечення необхідної точності розв’язку.

Застосувавши до обох частин рівняння (32) формулу обертання інтегрального перетворення Ганкеля, знайдемо функцію $\varphi(\eta)$ через невідомі коефіцієнти a_k

$$\varphi(\eta)=T_0\left\{a_0J_1(\eta)+\eta^2J_1(\eta)\sum_{k=1}^{N}\frac{a_kJ_0\left(\mu_k\right)}{\eta^2-\mu_k^2}\right\}. \tag{34}$$

Підставивши функцію $\varphi(\eta)$ (34) в інтегральні рівняння (16), (17), (31), з врахуванням (20), дійдемо до співвідношень, які зв’язують між собою функцію $f(t)$ і коефіцієнти $A_k\left(k=\overline{0,\infty}\right)$, $a_k\left(k=\overline{0,N}\right)$,

$$T_0\sum_{k=0}^{N}a_k\alpha_k^{(1)}(\rho)+\frac{A_0R}{\varepsilon_0}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\mu_k\rho\right)}{\varepsilon_k}A_k=h_0^1T_0,\quad \left(\rho<1\right). \tag{35}$$

$$\frac{\lambda_z^1}{\lambda_z}T_0\sum_{k=0}^{N}a_k\alpha_k^{(2)}(\rho)-A_0R-\sum_{k=1}^{\infty}\mu_kJ_0\left(\mu_k\rho\right)A_k=0,\quad \left(\rho<1\right). \tag{36}$$

$$\begin{gathered}f(t)-\frac{2}{\pi}\int_0^1 f(x)dx\int_0^\infty G(2\eta h)\cos\eta x\left(\cos\eta t-\frac{\sin\eta}{\eta}\right)d\eta-\\ -\frac{2\delta}{\pi}\alpha_{T^1}T_0\sum_{k=0}^{N_1}\delta_k(t)a_k=-\frac{P}{2\pi R^2æ_0}, \qquad \left(0\le t\le 1\right),\end{gathered} \tag{37}$$

де $\varepsilon_0=\dfrac{1}{lh_0^1}$, $\varepsilon_k=\dfrac{1}{h_0^1th\mu_kl}$,

$$\alpha_0^{(j)}(\rho)=\int_0^\infty\frac{P_j(\eta)J_1(\eta)J_0(\eta\rho)}{Q(\eta)}d\eta,\quad \alpha_k^{(j)}(\rho)=J_0\left(\mu_k\right)\int_0^\infty\frac{\eta^2P_j(\eta)J_1(\eta)J_0(\eta\rho)}{Q(\eta)\left(\eta^2-\mu_k^2\right)}d\eta, \tag{38}$$

$$P_1(\eta)=\left(\eta^2+k_1^1h_0^1\right)sh\eta h+\left(k_1^1+h_0^1\right)\eta\, ch\eta h; \qquad P_2(\eta)=\eta\left(\eta\, sh\eta h+k_1^1ch\eta h\right);$$

$$\delta_0(t)=\int_0^\infty \frac{J_1(\eta)Q_2(\eta)}{\eta Q(\eta)Q_1(\eta)}\left(\cos\eta t-\frac{\sin\eta}{\eta}\right)d\eta,$$

$$\delta_k(t)=J_0(\mu_k)\int_0^\infty \frac{\eta J_1(\eta)Q_2(\eta)}{\left(\eta^2-\mu_{k^2}\right)Q(\eta)Q_1(\eta)}\left(\cos\eta t-\frac{\sin\eta}{\eta}\right)d\eta.$$

Помноживши обидві частини рівностей (35), (36) на ρ, $\rho J_0(\mu_{n\rho})$ і проінтегрувавши їх по ρ у межах від 0 до 1, з урахуванням умов ортогональності функцій Бесселя, дійдемо до співвідношень

$$A_0R=2\frac{\lambda_z}{\lambda_z^1}T_0\sum_{k=0}^N\alpha_{0,k}^{(2)}a_k,\qquad A_n=2\frac{\lambda_z}{\lambda_z^1}\frac{T}{\mu_nJ_0^2(\mu_n)_0}\sum_{k=0}^N\alpha_{n,k}^{(2)}a_k. \tag{39}$$

Системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих $a_k\left(k=\overline{0,N}\right)$

$$\sum_{k=0}^N\alpha_{n,k}a_k=\gamma_n\qquad\left(n=\overline{0,N}\right), \tag{40}$$

де

$\alpha_{0,k}=\dfrac{\alpha_{0,k}^{(1)}}{h_0^1}+\dfrac{\lambda_z}{\lambda_z^1}l\alpha_{0,k}^{(2)}$, $\quad\alpha_{n,k}=\dfrac{\alpha_{n,k}^{(1)}}{h_0^1}+\dfrac{\lambda_z}{\lambda_z^1}\dfrac{th\mu_nl}{\mu_n}\alpha_{n,k}^{(2)}$, $\gamma_0=1$; $\gamma_n=0$ $\left(n=\overline{1,N}\right)$. Обчисливши невласні інтеграли (38), згідно з [9], отримаємо

$$\alpha_{0,0}^{(j)}=\int_0^1\rho\alpha_0^{(j)}(\rho)d\rho=\varepsilon_{0,0}^{(j)}+2\sum_{m=1}^\infty\frac{P_j^*(y_m)K_1(y_m)I_1(y_m)}{y_mQ'(iy_m)},\quad(j=1,2);$$

$$\alpha_{0,k}^{(j)}=\int_0^1\rho\alpha_k^{(j)}(\rho)d\rho=2J_0(\mu_k)\sum_{m=1}^\infty\frac{y_mP_j^*(y_m)I_1(y_m)K_1(y_m)}{\left(y_m^2+\mu_k^2\right)Q'(iy_m)},\quad\alpha_{n,0}^{(j)}=\alpha_{0,n}^{(j)},\quad(j=1,2);$$

$$\alpha_{n,k}^{(j)}=\begin{cases}\beta_{n,k}^{(j)}, & k\neq n\\ \beta_{n,k}^{(j)}+\dfrac{1}{2}\dfrac{P_j(\mu_n)}{Q(\mu_n)}J_0^2(\mu_n), & k=n;\end{cases}$$

$$\beta_{n,k}^{(j)}=\int_0^1\rho J_0(\mu_n\rho)\alpha_k^{(j)}(\rho)d\rho=2J_0(\mu_k)J_0(\mu_n)\sum_{m=1}^\infty\frac{y_m^3P_j^*(y_m)I_1(y_m)K_1(y_m)}{\left(y_m^2+\mu_k^2\right)\left(y_m^2+\mu_n^2\right)Q'(iy_m)};$$

$$\varepsilon_{0,0}^{(1)}=\frac{1}{2}r_1,\qquad\varepsilon_{0,0}^{(2)}=\frac{1}{2}K_1^1r_2, \tag{41}$$

$$r_1=\left(K_1^1h+1\right)r_{2,}\qquad r_2=\left(K_1^1K_2^1h+K_1^1+K_2^1\right)^{-1};$$

$y_m\left(m=\overline{1,\infty}\right)$ – корені рівняння $Q(iy_m)=0$;

$$P_1^*(y_m)=\left(h_0^1K_1^1-y_m^2\right)\sin y_mh+\left(K_1^1+h_0^1\right)y_m\cos y_mh,\ \ P_2^*(y_m)=y_m\left(K_1^1\cos y_mh-y_mh\sin y_mh\right),$$

$$Q'(iy_m)=\left[\left(K_1^1K_2^1-y_m^2\right)h+K_1^1+K_2^1\right]\cos y_mh-y_m\left[2+\left(K_1^1+K_2^1\right)h\right]\sin y_mh.$$

Представимо функцію $f(t)$ у вигляді

$$f(t)=-\frac{P}{2\pi R^2æ_0}\sum_{k=0}^{N_1}(2k+1)P_k\left(1-2t^2\right)X_k+\alpha_{T^1}T_0\sum_{k=0}^{N_1}P_k\left(1-2t^2\right)(2k+1)Y_k, \tag{42}$$

де X_k, Y_k – невідомі коефіцієнти; $P_k\left(1-2t^2\right)$ – функції Лежандра. Тоді рівняння (37), з урахуванням ортогональності функцій Лежандра $P_k\left(1-2t^2\right)$ на інтервалі (0, 1), зводиться до знаходження постійних x_n, y_n із системи таких лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\sum_{k=0}^{N_1} A_{n,k} X_k = P_n, \quad \left(n=\overline{0,\ N_1}\right). \tag{43}$$

$$\sum_{k=0}^{N_1} A_{n,k} Y_k = t_n, \quad \left(n=\overline{0,\ N_1}\right), \tag{44}$$

де $P_0 = 1$; $P_n = 0$ $\left(n=\overline{1,N}\right)$; $t_n = \dfrac{4\delta}{\pi}\sum_{k=0}^{N} a_k$; $i_{n,k}$ $\left(n=\overline{0,N_1}\right)$,

$$A_{0,0} = 1-\frac{4}{\pi}\int_0^\infty G(2\eta h)\tau_0(\eta)\frac{\sin\eta}{\eta}d\eta,$$

$$A_{0,k} = 2(-1)^{k+1}(2k+1)\int_0^\infty G(2\eta h)\tau_0(\eta) J_{k+\frac{1}{2}}\left(\frac{\eta}{2}\right) J_{-k-\frac{1}{2}}\left(\frac{\eta}{2}\right)d\eta,$$

$$A_{n,0} = -\frac{4}{\pi}\int_0^\infty G(2\eta h)\tau_n(\eta)\frac{\sin\eta}{\eta}d\eta, \tag{45}$$

$$A_{n,k}^{(1)} = 2(-1)^{k+1}\int_0^\infty G(2\eta h)\tau_n(\eta) J_{k+\frac{1}{2}}\left(\frac{\eta}{2}\right) J_{-k-\frac{1}{2}}\left(\frac{\eta}{2}\right)d\eta, \qquad A_{n,k} = \begin{cases} A_{n,k}^{(1)}, & k\neq n \\ 1+A_{n,k}^{(1)}, & k=n; \end{cases}$$

$$i_{n,0} = \int_0^\infty \frac{J_1(\eta)Q_2(\eta)\tau_n(\eta)}{\eta Q(\eta)Q_1(\eta)}d\eta,\ i_{n,k} = J_0(\mu_k)\int_0^\infty \frac{\eta J_1(\eta)Q_2(\eta)\tau_n(\eta)}{\left(\eta^2-\mu_k^2\right)Q(\eta)Q_1(\eta)}d\eta,\ \left(n=\overline{0,N_1};\ k=\overline{0,N_0}\right);$$

$$\tau_0(\eta) = \frac{1}{\eta}\left(\frac{\cos\eta}{\eta}-\frac{1}{\eta}+\frac{1}{2}\sin\eta\right),$$

$$\tau_n(\eta) = \frac{1}{4}\eta\gamma_n\left(\frac{\eta}{2}\right)\left[\gamma_{n-1}\left(\frac{\eta}{2}\right)-\gamma_{n+1}\left(\frac{\eta}{2}\right)\right]-\frac{(-1)^n\sin\eta}{2\Gamma(1+n)\Gamma(1-n)\eta},$$

$\gamma_n(\eta)$ – сферичні функції.

Для обчислення температурних полів у циліндрі й шарі, з урахуванням співвідношень (11), (12), (15), (20), (34), (35), матимемо такі формули:

1) циліндрична область $\left(0\le\rho<1,\ 0\le\zeta\le\ell\right)$,

$$T(\rho,\zeta) = T_0\left\{1+2(\zeta-\ell)\frac{\lambda_z}{\lambda_z^1}\sum_{k=0}^{N}\alpha_{0,k}^{(2)}a_k+2\frac{\lambda_z}{\lambda_z^1}\sum_{k=0}^{N}a_k\sum_{m=1}^{\infty}\frac{sh\mu_m(\zeta-\ell)\alpha_{m,k}^{(2)}}{ch\mu_m l J_0^2(\mu_m)\mu_m}\right\}; \tag{46}$$

2) шар $\left(-h\le\zeta\le 0;\ 0\le\rho<\infty\right)$

$$\begin{aligned} T^1(\rho,\zeta) = T_0\Bigg\{&\left[\left(\frac{1+K_1^1(h+\zeta)}{K_1^1K_2^1h+K_1^1+K_2^1}\right)+2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{R_1^*(y_m,\zeta)}{Q'(iy_m)}\begin{pmatrix}K_1(y_m)I_0(y_m\rho)\\ -K_0(y_m\rho)I_1(y_m)\end{pmatrix}\right]a_0+ \\ &+\sum_{k=1}^{N_1}a_kJ_0(\mu_k)\left[\left(\frac{R_1(\mu_k,\zeta)J_0(\mu_k\rho)}{Q(\mu_k)J_0(\mu_k)}\right)+2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{y_m^2R_1^*(y_m,\zeta)}{\left(y_m^2+\mu_k^2\right)Q'(iy_m)}\times\begin{pmatrix}K_1(y_m)I_0(y_m\rho)\\ -K_0(y_m\rho)I_1(y_m)\end{pmatrix}\right]\Bigg\}; \end{aligned} \tag{47}$$

$R_1(x,\zeta) = xchx(h+\zeta)+K_1^1shx(h+\zeta)$, $R_1^*(y_m,\zeta) = y_m\cos y_m(h+\zeta)+K_1^1\sin y_m(h+\zeta)$.

При $0 \le \rho < 1$ множником беремо верхній вираз у круглих дужках, при $\rho > 1$ – нижній.

Для визначення нормальних напружень під штампом, з урахуванням (30), (42), отримаємо такий вираз:

$$\sigma_z^1(\rho,0) = \sigma_z^{(p)}(\rho,0) + \sigma_z^{(T^1)}(\rho,0), \quad (0 \le \rho < 1);$$
$$\sigma_z^{(p)} = -\frac{0,5P}{\pi R^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \left[x_0 + \frac{1}{\rho} \sum_{k=1}^{N_1} (-1)^k (2k+1) x_k T_{2k+1}(\rho) \right]; \tag{48}$$
$$\sigma_z^{(T^1)}(\rho,0) = \alpha_{T^1} T_0 \cdot \frac{æ_0}{\sqrt{1-\rho^2}} \left[Y_0 + \frac{1}{\rho} \sum_{k=1}^{N_1} (-1)^k (2k+1) y_k T_{2k+1}(\rho) \right],$$

де $\sigma_z^{(p)}(\rho,0)$ – силова складова напружень; $\sigma_z^{(T^1)}(\rho,0)$ – температурна складова напружень; $T_{2k+1}(\rho)$ – функція Чебишева.

Якщо товщина шару $h \to \infty$, то отримаємо розв’язок задачі про тиск циліндричного кругового штампа на пружний півпростір з урахуванням неідеального теплового контакту [4].

Розглянуто числовий приклад для знаходження температури $\alpha_1 = T^1 / T_0$ і напружень $\alpha_2 = -\sigma_z^{(p)}(\rho,0)\pi R^2 / p$, $\alpha_3 = \sigma_z^{(T^1)}(\rho,0) / (\alpha_{T^1} T_0)$ при $\delta = 0,3$; $l = 2$; $h = 2$; $K_1^1 = \infty$, $K_2^1 = 0,5$, $\lambda_z / \lambda_{z^1} = 0,1$ і різних значень контактної провідності $h_0^1 = 0,1;\ 1;\ 5;\ \infty$.

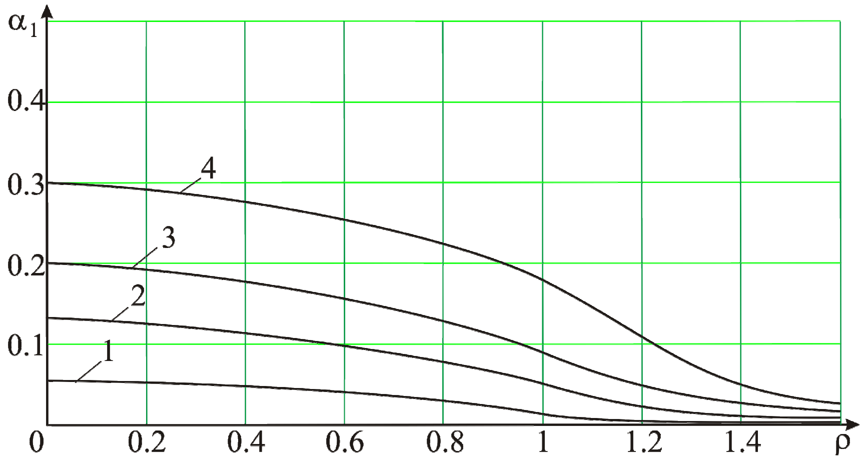

Рисунок 1. Розподіл температури в шарі у зоні контакту при різних значеннях контактної провідності: 1 – $h_0^1 = 0,1$; 2 – $h_0^1 = 1$; 3 – $h_0^1 = 5$; 4 – $h_0^1 = \infty$

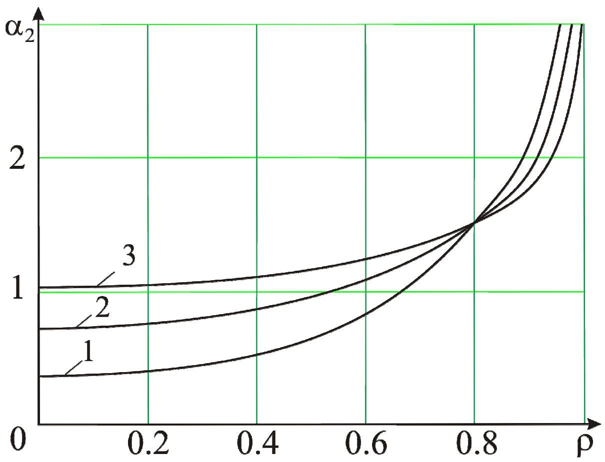

Рисунок 2. Розподіл силової частини контактних напружень для різних значень товщини шару $1 - h = 2$; $2 - h = 4$; $3 - h = \infty$

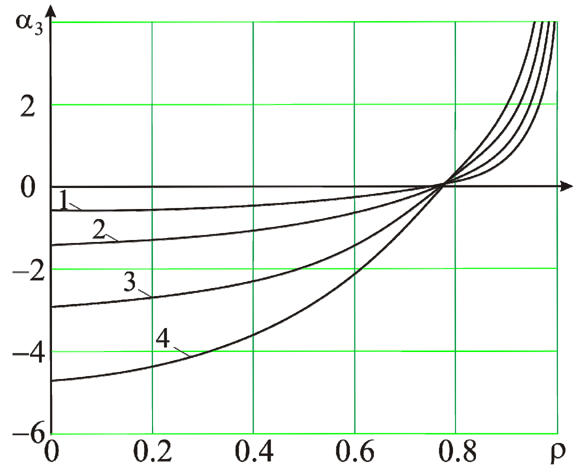

Рисунок 3. Розподіл температурної складової контактних напружень для різних значень контактної провідності: крива 1 – $h_0^1 = 0{,}1$; 2 – $h_0^1 = 1$; 3 – $h_0^1 = 5$; 4 – $h_0^1 = \infty$

Висновок. Розроблено метод розв'язування контактних задач, який грунтується на застосуванні інтегральних перетворень Ганкеля і методу відокремлення змінних Фур'є для розв'язання рівнянь термопружності.

При заданих температурних і силових граничних умовах тримано формули для визначення температурних полів і контактних нормальних напружень. Розв'язок температурної і термопружної задач зводиться до визначення деяких постійних із системи лінійних алгебраїчних рівнянь, через які знаходяться температурні поля в циліндрі і шарі, а також контактні нормальні напруження.

Числові підрахунки й аналіз розв'язку показують, що контактна провідність h_0^1 значно впливає на розподіл температурних полів і нормальних напружень у зоні контакту двох тіл.

Література

1. Грилицкий, Д.В. Осесимметричные контактные задачи упругости и термоупругости [Текст] / Д.В. Грилицкий, Я.М. Кизыма. – Львов: Изд.-во при Львов. ун.-те, 1981. – 135с.
2. Грилицький, Д.В. Термопружні задачі в трибології [Текст] / Д.В. Грилицький. – К.: ІЗМА, 1996. – 204 с.
3. Коваленко, А.Д. Основы термоупругости [Текст] / А.Д. Коваленко. – К.: Наукова думка, 1970. – 304 с.
4. Окрепкий, Б.С. Тиск циліндричного кругового штампа на пружний півпростір з урахуванням неідеального теплового контакту [Текст] / Богдан Окрепкий, Марія Шелестовська // Вісник ТНТУ. – 2006. – №3. – С. 26–33.
5. Окрепкий, Б. Осесиметрична температурна задача для системи тіл циліндр–півпростір при неідеальному тепловому контакті з урахуванням аналізотропії матеріалів [Текст] / Богдан Окрепкий, Федір Мигович // Вісник ТНТУ. – 2009. – №4. – С. 188–192.
6. Окрепкий, Б.С. Тиск циліндричного кругового штампа на трансверсально-ізотропний простір при неідеальному тепловому контакті [Текст] / Богдан Окрепкий, Марія Шелестовська // Вісник ТНТУ. – 2010. – №1. – С. 32–40.
7. Снеддон, И.П. Преобразование Фурье [Текст] / Снеддон И.П. – М., 1955, – 668 с.
8. Уиттекер, Э.Т. Курс современного анализа [Текст] / Э.Т. Уиттекер, Г.М. Ватсон. – М.: Физматгиз, 1963. – 343 с.
9. Мигович, Ф.М. Обчислення групи невласних інтегралів, які містять функції Бесселя І–го роду [Текст] / Федір Мигович, Богдан Окрепкий // Збірник наукових праць академії наук України. – К., 1995. – №8 – С. 133–137.

Отримано 25.02.2011