

УДК 539.3

Я. Пастернак<sup>1</sup>, канд. фіз.-мат. наук; Г. Сулим<sup>2</sup>, докт. фіз.-мат. наук;  
Р. Пастернак<sup>1</sup>, канд. фіз.-мат. наук

<sup>1</sup>Луцький національний технічний університет

<sup>2</sup>Львівський національний університет імені Івана Франка

## УМОВИ ЗАРОДЖЕННЯ КРИХКОГО РУЙНУВАННЯ В ТІЛАХ ІЗ ТОНКИМИ ПРУЖНИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ

**Резюме.** Досліджено три основні механізми зародження руйнування в тілах із тонкими концентраторами напружень: безпосередньо в тілі, на межі поділу матеріалів та у самому включенні. При дослідженні руйнування тіла поблизу включення проаналізовано застосування критеріїв на основі силових функцій,  $J$ -інтеграла, густини енергії деформації. Також побудовано співвідношення, що оцінюють сумарну енергію деформації в зоні інтенсивності напружень поблизу вістря дефекту. При дослідженні руйнування межі включення–тіло побудовано залежності, що пов'язують узагальнені коефіцієнти інтенсивності напружень із максимальними значеннями контактних напружень у вершині заокругленого тонкого дефекту. Руйнування включення пов'язане із досягненням напруженнями чи деформаціями у ньому своїх критичних значень. Усі випадки проілюстровано числовими розрахунками конкретних прикладів.

**Ключові слова:** тонке пружне включення, узагальнені коефіцієнти інтенсивності напружень, критерії крихкого руйнування, концентрація напружень.

Ia. Pasternak, H. Sulym, R. Pasternak

## CONDITIONS OF BRITTLE FRACTURE INITIATION IN SOLIDS CONTAINING THIN ELASTIC INCLUSIONS

**The summary.** This paper studies three main fracture initiation mechanisms in solids with thin stress concentrators: directly in the solid; on the solid-inclusion interface and inside the inclusion. For studying of fracture of solid near inclusion it provides the analysis of fracture criteria based on the force functions,  $J$ -integral, strain energy density. Also the equation, which accounts the total strain energy in the stress intensity zone near the defect's tip, is received. For studying of fracture of inclusion-matrix interface the relations of stress concentration and generalized stress intensity factors are obtained. Inclusion's fracture is related with the critical values of its internal strain or stress. The numerical analysis of certain problems is provided.

**Key words:** thin elastic inclusion, generalized stress intensity factors, brittle fracture criteria, stress concentration.

### Умовні позначення

$E$  – енергія деформації, зосереджена в зоні інтенсивності напружень;

$K_{ij}$  – узагальнені коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН);

$K_I$ ,  $K_{II}$ ,  $K_{III}$  – класичні КІН теорії тріщин;

$K_{Ic}$  – тріщиновитримність (тріщиностійкість) матеріалу;

$S$  – коефіцієнт густини енергії деформації;

$W$  – густина енергії деформації матеріалу.

**Вступ.** Тонкі включення, як і всі структурні неоднорідності матеріалу, породжують поблизу своїх вершин значну концентрацію напружень, що може спричинити механічне руйнування конструкції. Можливість ефективно розв'язувати широкий клас задач теорії тонких включень і тріщин дали моделі тонких неоднорідностей, що виходять із принципу спряження континуумів різної вимірності, за яким тонкий елемент реальної товщини заступається розрізом із заданим на його

берегах розривом фізико-механічних полів. Доведено [1], що поле напружень біля вершини такого дефекту в однорідному ізотропному чи анізотропному пружному середовищі можна описати за допомогою 6 незалежних величин – узагальнених коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН)  $K_{ij}$  ( $i=1,2,3; j=1,2$ ), які у випадку неоднорідності нульової жорсткості (тріщини) відповідно дорівнюють  $K_{11}=K_I$ ,  $K_{21}=K_{II}$ ,  $K_{31}=K_{III}$ ,  $K_{i2}=0$ , де  $K_I$ ,  $K_{II}$ ,  $K_{III}$  – класичні КІН теорії тріщин. Проте на відміну від тріщин, де критерії руйнування глибоко вивчені [2, 3], умови граничної рівноваги тіл із тонкими включеннями досі мало досліджені, хоча мають як науковий, так і значний прикладний інтерес.

Однією з основних проблем у дослідженні граничної рівноваги тіл із тонкими неоднорідностями є три можливі головні сценарії руйнування, пов'язані з місцем його зародження [1]: 1) у тілі поблизу вершини дефекту; 2) на спільній межі з основним матеріалом; 3) усередині включення. Не виключено, що процес руйнування може виникати також і на невеликій відстані від включення, або охоплювати одночасно кілька сценаріїв.

У літературі найбільше уваги приділено вивченню руйнування, що зароджується в тілі поблизу вершини дефекту. Тут слід відзначити роботи Л.Т. Бережницького, Р.С. Гром'яка, В.В. Панасюка та І.І. Труша [4, 5], в яких руйнування поблизу жорстких гострокінцевих включень пов'язане з радіальною складовою тензора напружень в околі вістря дефекту; Е.Е. Gdoutos [6, 7], де започатковано і розвинено ідею застосування при вивченні граничного стану тіл із жорсткими тонкими чи гострокінцевими включеннями критерію стаціонарності густини енергії деформації G.C. Sih [8]; С.Ю. Попіни та Г.Т. Сулима [9], в якій у критеріальному співвідношенні для тонких пружних включень враховано як кільцеву, так і радіальну складові тензора напружень; М.М. Кундрата [10], де комплексно розглянуто механізми руйнування, спричинені відшаруванням і розривом включення та ін. Експериментального дослідження тонких жорстких включень, а також теоретичного вивчення включень у попередньо напружених матеріалах стосуються праці F. Dal Corso, D. Bigoni, M. Gei [11, 12], де руйнування пов'язано з радіальною складовою тензора напружень. У роботах М.М. Стадника та О.Є. Андрейківа [13] і В.П. Силованюка та Р.Я. Юхима [14] опрацьовано теорію руйнування тонких податних включень на основі вінклерової моделі. Повний огляд досліджень, що стосуються руйнування тіл із тонкими чи гострокінцевими жорсткими і пружними включеннями, можна знайти у монографії [1] та працях [9, 10].

**Метою цієї роботи** є аналіз і порівняння умов граничної рівноваги тіл із тонкими пружними включеннями за окресленими трьома найважливішими місцями зародження руйнування, кожен із яких розглянуто окремо.

**1. Руйнування тіла поблизу вершини тонкого включення.** Відповідно до [1] поле напружень в околі вершини тонкого пружного включення описується такими асимптотичними залежностями:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{yy} \\ \sigma_{xx} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi r}} \left\{ K_{11} \begin{pmatrix} 5\cos\theta_1 - \cos\theta_5 \\ 3\cos\theta_1 + \cos\theta_5 \\ -\sin\theta_1 + \sin\theta_5 \end{pmatrix} + K_{21} \begin{pmatrix} -\sin\theta_1 + \sin\theta_5 \\ -7\sin\theta_1 - \sin\theta_5 \\ 3\cos\theta_1 + \cos\theta_5 \end{pmatrix} + \right. \\ \left. + \kappa_* \left[ K_{12} \begin{pmatrix} (2\kappa-3)\cos\theta_1 + \cos\theta_5 \\ -(2\kappa+5)\cos\theta_1 - \cos\theta_5 \\ -(2\kappa+1)\sin\theta_1 - \sin\theta_5 \end{pmatrix} + K_{22} \begin{pmatrix} (2\kappa+3)\sin\theta_1 - \sin\theta_5 \\ -(2\kappa-5)\sin\theta_1 + \sin\theta_5 \\ (2\kappa-1)\cos\theta_1 - \cos\theta_5 \end{pmatrix} \right] \right\} + O(1), \quad (1)$$

де  $r$  – відстань до вершини включення;  $K_{ij}$  – узагальнені КІН;  $\kappa$  – стала Колосова – Мусхелішвілі, яка для плоского напруженого стану дорівнює  $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ , а для плоскої деформації –  $\kappa = 3 - 4\nu$ ;  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона;  $\kappa_* = 2/(\kappa - 1)$ ;  $\theta_j = j\theta/2$ ;  $\theta$  – полярний кут;  $Oxy$  – прямокутна система координат, вісь  $Ox$  якої спрямована уздовж дотичної до серединної лінії включення у його вершині.

Асимптотичний розподіл напружень (1) справджується лише в певній кільцевій області, що оточує вершину дефекту – зоні інтенсивності напружень [1, 15]. На основі теорії внутрішніх та зовнішніх асимптотичних розвинень її внутрішній радіус оцінений на рівні  $\rho/2$  [15], де  $\rho$  – радіус заокруглення вершини дефекту. Тому розподіл напружень (1), а значить і узагальнені КІН, є параметрами, за якими можна оцінити зародження руйнування матеріалу тіла поблизу вершини тонкого дефекту.

Якщо виходити із добре обґрунтованого уявлення [3], що у багатьох випадках руйнування тіла з тріщиною ініціюється не безпосередньо у вістрі тріщини, а розвивається за схемою руйнування перемички із мікрodefектом структури матеріалу, який розташований на певній невеликій відстані від вістря (це може бути і згадана вище зона інтенсивності напружень), то в цілому розвиток руйнування біля тонкого включення мав би бути цілком аналогічним, а тому й критерії руйнування тіл із тріщинами за таким механізмом можна переносити на тіла з тонкими включеннями. З іншого боку, оскільки узагальнені КІН пов'язані з об'єднаними в одне ціле двома типами деформування окремо поблизу тріщин та окремо біля жорстких включень, то природно вважати, що й граничному стану відповідають їхні взаємопов'язані комплекси критичних значень  $K_{jc}$ , які можна визначити з відповідно поставлених експериментів.

Для визначення граничного навантаження на тіло з тонким включенням у роботах [1, 9] запропоновано використовувати критеріальну функцію  $\Phi_3 = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{r} (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta})$  (вираз у дужках пропорційний до середнього напруження, а відтак і до об'ємної деформації), з якої випливає умова руйнування

$$(K_{11} - \kappa_* K_{12})^2 + (K_{21} - \kappa_* K_{22})^2 = K_{lc}^2, \quad (2)$$

а початковий кут поширення останнього визначаємо за залежністю

$$\theta_* = \begin{cases} 2 \arctg[(K_{21} - \kappa_* K_{22})/(\kappa_* K_{12} - K_{11})] & (K_{11} \neq \kappa_* K_{12}), \\ \pm \pi & (K_{11} = \kappa_* K_{12}). \end{cases} \quad (3)$$

Тут  $K_{lc}$  – критичне значення КІН моди І руйнування, що є визнаною характеристикою матеріалу.

В основу іншого можливого критерію руйнування, за аналогією із теорією поширення тріщин, покладене використання критичного значення швидкості звільнення енергії при підростанні (або зменшенні) дефекту. Для лінійно пружного матеріалу швидкість звільнення енергії при зростанні дефекту дорівнює  $J$ -інтегралу, що пов'язаний з узагальненими КІН так [16]:

$$J = J_1 + J_2; \quad J_i = \frac{\kappa + 1}{8\mu} [K_{i1}^2 + 2K_{i1}K_{i2} - \kappa \cdot \kappa_*^2 K_{i2}^2] \quad (i = 1, 2). \quad (4)$$

Зважаючи на те, що для тріщин критичне значення  $J$ -інтегралу дорівнює [3]

$$J_c = \frac{\kappa + 1}{8\mu} K_{lc}^2,$$

за критерієм швидкості звільнення енергії отримаємо таку умову руйнування:

$$|K_{11}^2 + K_{21}^2 + 2K_{11}K_{12} + 2K_{21}K_{22} - \kappa \cdot \kappa_*^2 K_{12}^2 - \kappa \cdot \kappa_*^2 K_{22}^2| = K_{lc}^2. \quad (5)$$

Для пружних включень критеріальне співвідношення (5) слід застосовувати з обережністю, адже за великої жорсткості неоднорідності значення  $J$ -інтегралу для неї може бути і від'ємним [16], що свідчить про енергетичну вигідність зменшення розмірів включення. Тобто без урахування фізичних процесів, які можуть зумовити це зменшення (скажімо, внаслідок відшарування чи зміни механічних властивостей включення), вираз (5) може виявитися лише грубою оцінкою. Крім того, при обчисленні швидкості звільнення енергії припускають пряmlinійне зростання дефекту, що за складного навантаження не відповідає дійсності навіть для тріщин [8].

Позбавленим цих недоліків видається енергетичний критерій руйнування G.C. Sih [8], застосований E.E. Gdoutos [6, 7] для жорстких лінійних та гострокінцевих включень. Перенесемо його й на тіла з тонкими пружними включеннями.

Відповідно до (1), густина енергії деформації  $W = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$  в околі вершини дефекту змінюється як  $W = S/r + O(r^{-1/2})$ , причому коефіцієнт  $S$  густини енергії деформації (КГЕД) є функцією лише полярного кута та узагальнених КІН:  $S = S(\theta, K_{ij})$ . Отже, як і для тріщин, для тонких включень можна припустити, що:

- руйнування зароджується в тілі біля вершини тонкого включення при полярному куті  $\theta_*$ , за якого КГЕД  $S$  набуває мінімального значення (потенціальна енергія протилежна за знаком до силової функції, тому максимум силової функції відповідає мінімуму потенціальної енергії)

$$\left. \frac{\partial S}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta_*} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 S}{\partial \theta^2} \right|_{\theta=\theta_*} > 0; \quad (6)$$

- граничним навантаженням для тіла з тонким включенням є таке, для якого КГЕД  $S$  набуває критичного стаціонарного значення

$$S(\theta_*) = S_c. \quad (7)$$

Величина  $S_c$  пов'язана з  $K_{lc}$  так [8]:

$$S_c = \frac{(\kappa - 1) K_{lc}^2}{8\pi\mu}. \quad (8)$$

Вважатимемо цю сталу універсальною, тобто такою, що мало залежить від типу (матеріалу) тонкого дефекту.

Критерій Sih для включень (7) можна значно спростити, вважаючи, що зона інтенсивності напружень, в якій справджуються асимптотичні залежності (1), може сприйняти лише обмежену кількість енергії пружної деформації. Після перевищення цього рівня в матеріалі відбуватимуться незворотні процеси, які зумовлюватимуть крихке чи квазікрихке руйнування. Вважаючи, що густина енергії деформації в зоні інтенсивності напружень визначається лише сингулярним членом  $W = S(\theta)/r$ , а сама зона є кільцем, для енергії її деформації отримаємо вираз

$$E \approx \int_{r_1}^{r_2} \int_{-\pi}^{\pi} W r d\theta dr = \int_{r_1}^{r_2} \int_{-\pi}^{\pi} S(\theta) d\theta dr = (r_2 - r_1) \int_{-\pi}^{\pi} S(\theta) d\theta. \quad (9)$$

Критичне значення зосередженої в зоні інтенсивності напружень енергії деформації  $E_c$ , з огляду на постульовану універсальність критерію, можна отримати з (9), підставивши, наприклад, критичне значення (8) КГЕД  $S_c$  для тріщини нормального відриву. Таким чином, умова руйнування  $E = E_c$  з урахуванням (9) та (1) при нормуванні узагальнених КІН їхніми критичними значеннями  $K_{ijc}$  набуде вигляду

$$\left(\frac{K_{11}}{K_{11c}}\right)^2 + \left(\frac{K_{21}}{K_{21c}}\right)^2 + \left(\frac{K_{12}}{K_{12c}}\right)^2 + \left(\frac{K_{22}}{K_{22c}}\right)^2 + \frac{2\alpha K_{11}K_{12}}{K_{11c}K_{12c}} + \frac{2\beta K_{21}K_{22}}{K_{21c}K_{22c}} = 1, \quad (10)$$

де

$$K_{11c} = K_{Ic}, \quad K_{21c} = K_{Ic} \sqrt{\frac{2\kappa-1}{2\kappa+3}}, \quad K_{12c} = \frac{K_{Ic}}{\kappa_*} \sqrt{\frac{2\kappa-1}{2\kappa^2+4\kappa-1}}, \quad K_{22c} = \frac{K_{Ic}}{\kappa_*} \sqrt{\frac{2\kappa-1}{2\kappa^2-1}},$$

$$\alpha = \frac{2-\kappa}{\sqrt{(2\kappa^2+4\kappa-1)(2\kappa-1)}}, \quad \beta = \frac{\kappa}{\sqrt{(2\kappa^2-1)(2\kappa+3)}}.$$

Для прикладу, порівняємо обчислені за критеріями (2), (5), (7) та (10) нормовані критичні навантаження  $p_c^* = p_c \sqrt{\pi a} / K_{Ic}$ , отримані з використанням методу дослідження тонких пружних включень [17] для всебічного розтягу безмежного тіла з неоднорідністю завдовжки  $2a$  і з півтовщиною  $h = 0,01a$  та відносною жорсткістю  $k = E^i / E$ , де  $E^i$ ,  $E$  – модулі пружності включення та тіла відповідно. Сталі Колосова – Мусхелішвілі обох матеріалів вважаються однаковими і дорівнюють  $\kappa = 1,8$  (коефіцієнт Пуассона для плоскої деформації відповідно дорівнює 0,3). На рис. 1 зображено схему задачі та залежність нормованого фактора ризику  $\psi = 1/p_c^*$  від відносної жорсткості  $k$  включення та обраного критерію оцінювання граничного навантаження  $p_c^*$ . Нормований фактор ризику  $\psi$  означимо як відношення граничного навантаження тріщини нормального відриву до граничного навантаження тіла з тонким включенням.

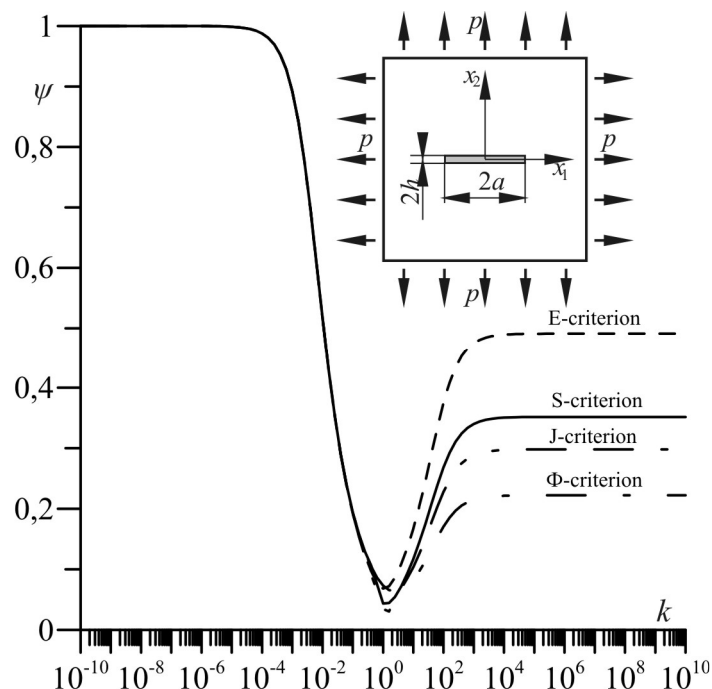


Рисунок 1. Залежність нормованого фактора ризику  $\psi = 1/p_c^*$  від відносної жорсткості включення для чотирьох критеріїв оцінювання граничного навантаження  $p_c^*$

Із рис. 1 бачимо, що обчислені за обраними критеріями фактори ризику  $\psi$  для податних включень ( $k < 1$ ) практично збігаються. Це природно, адже за розглянутого навантаження на вістрі неоднорідності реалізується схема нормального розриву, тобто для податних включень домінуючим є узагальнений КІН  $K_{I1} \sim K_I$ , а співвідношення (2),

(5), (7) та (10) для визначення критичного навантаження використовують тріщиновитримність (тріщиностійкість)  $K_{Ic}$ . Для жорстких пружних включень ( $k > 1$ ) найбільші значення фактору ризику  $\psi$  (найменше граничне навантаження) дає  $E$ -критерій (10), який інтегрально оцінює енергію деформації у зоні інтенсивності напружень. Імовірно, що для точнішого оцінювання критичного навантаження при урахуванні взаємовпливу механізмів руйнування, ініційованих нормальними та дотичними напруженнями, необхідно окремо враховувати енергії пружної зміни об'єму та форми, як це зроблено для тріщин в [18, 19], поєднати їх із певними ваговими множниками або вважати, що  $E$ -критерій апіорно закладає прийнятний конструкційний запас міцності.

Для дуже жорстких включень  $S$ -критерій дає приблизно в 1,4 раза менші значення фактора ризику  $\psi$  порівняно з  $E$ -критерієм. При цьому за обраного значення коефіцієнта  $\kappa$  для абсолютно жорсткої неоднорідності отримано величину кута  $\theta_*$  початкового поширення руйнування близьку до  $95^\circ$ , що добре узгоджується з експериментальними даними [12], де при розтягу тіла зусиллями, паралельними до осі тонкого жорсткого включення, тріщина починала поширюватися приблизно під прямим кутом до останньої, причому єдиним ненульовим узагальненим КІН у цьому випадку, так само як у випадку всебічного розтягу, був  $K_{12}$ , тобто обчислені на основі  $S$ -критерію значення  $\theta_*$  в обох випадках є однакові.

Критерії (5) на основі  $J$ -інтеграла та (2) із використанням функції  $\Phi_3$  для жорстких включень дають ще менші значення факторів ризику  $\psi$ . При цьому обчислений за формулою (3) кут  $\theta_*$  зародження руйнування, внаслідок відсутності узагальнених КІН  $K_{21}$  та  $K_{22}$  (що зумовлено нульовим стрибком переміщень ( $K_{21} = 0$ ) та повертанням включення як жорсткого цілого ( $K_{22} = 0$ )), дорівнює нулю за довільного однорідного навантаження на безмежності, а це суперечить експериментальним даним [12].

Отже,  $S$ -критерій Sih (7) можна використовувати не тільки для тріщин [8] чи абсолютно жорстких включень [6, 7], а й для тонких пружних неоднорідностей. З другого боку, простота  $E$ -критерію, прозорий фізичний зміст і запас міцності, який він гарантує, робить формулу (10) особливо привабливою для інженерних застосувань.

**2. Руйнування межі включення–тіло.** Пов'яжемо руйнування межі між включенням і тілом із досягненням контактними напруженнями певного критичного значення. Оскільки найвищого рівня контактних напружень можна сподіватися на кінцевих ділянках включення (торці та прилеглій бічній поверхні), поблизу яких поле напружень описуємо виразами (1), то отримаємо саме їхній зв'язок із узагальненими КІН. Для цього розглянемо тонке пружне включення, що за принципом спряження континуумів різної вимірності моделюється поверхнею (лінією) із заданим на ній розривом параметрів фізико-механічних полів (для пружного тіла – напружень та переміщень). Дослідимо рівновагу кінцевої ділянки включення за припущення, що торець включення заокруглений. Систему координат виберемо так, як зображено на рис. 2.

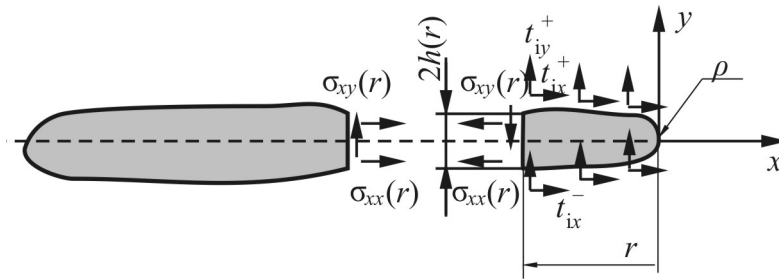


Рисунок 2. Схема задачі про визначення концентрації контактних напружень на тонкому включенні

З урахуванням умов  $\Sigma \mathbf{t} = -\Sigma \mathbf{t}_i$  ідеального механічного контакту включення з середовищем (знак мінус зумовлений тим, що зовнішня нормаль до поверхні включення спрямована у протилежний бік до напрямку зовнішньої нормалі тіла) рівняння статичної рівноваги уявно відсіченої частини включення має вигляд

$$\int_{-h(r)}^{h(r)} \sigma_{x\{x,y\}}(r,y) dy = - \int_0^r \Sigma t_{\{x,y\}}(r) dr. \quad (11)$$

При  $r \rightarrow 0$  півтовщина  $h(r) = \sqrt{r} \sqrt{2\rho} - r + O(r^2)$ , де  $\rho$  – радіус заокруглення вершини включення, тому ліву частину (11) можна записати у вигляді

$$\int_{-h(r)}^{h(r)} \sigma_{x\{x,y\}}(r,y) dy \approx 2h(r) \sigma_{x\{x,y\}}(r). \quad (12)$$

Відповідно до (11) та (12) контактні напруження  $\sigma_{x\{x,y\}} = \sigma_{x\{x,y\}}(r) \Big|_{r=0}$  на торці включення дорівнюють

$$\sigma_{x\{x,y\}} = - \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\int_0^r \Sigma t_{\{x,y\}} dr}{2h(r)} = - \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\int_0^r \Sigma t_{\{x,y\}} dr}{2\sqrt{r} \sqrt{2\rho}} = - \frac{1}{\sqrt{2\rho}} \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{r} \Sigma t_{\{x,y\}}(r). \quad (13)$$

При здійсненні граничного переходу (13) використано правило Лопіталя.

Враховуючи означення узагальнених КІН [1]

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{r} \Sigma t_x(r) = \frac{\sqrt{2}(\kappa+1)}{\sqrt{\pi}(\kappa-1)} K_{12}, \quad \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{r} \Sigma t_y(r) = - \frac{\sqrt{2}(\kappa+1)}{\sqrt{\pi}(\kappa-1)} K_{22}, \quad (14)$$

із (13) матимемо

$$\sigma_{xx} = - \frac{\kappa+1}{\sqrt{\pi\rho}(\kappa-1)} K_{12}, \quad \sigma_{xy} = \frac{\kappa+1}{\sqrt{\pi\rho}(\kappa-1)} K_{22}. \quad (15)$$

Вирази (15) повністю узгоджуються з відповідними залежностями, отриманими у роботі [15] методами рядів для включень із заокругленими вершинами, близькими за формою до гострокінцевих. Викладена тут методика придатна також і для визначення концентрації напружень поблизу включень у пружних анізотропних матеріалах (при цьому необхідно лише належним чином модифікувати вирази (14)).

Очевидно, що критичні значення контактних напружень  $\sigma_{xx}$  та  $\sigma_{xy}$  залежать не тільки від властивостей матеріалів тіла та включення, а й від сил адгезії (зчеплення) між ними, а тому їх слід оцінювати для кожного конкретного випадку механічного контакту тіл.

На рис. 3 зображено залежність нормованого значення контактних напружень  $\sigma_{xx}$  на торці включення від відносної жорсткості останнього. Геометричні та матеріальні характеристики такі ж, як і в попередньому прикладі. Значення напружень обчислені за формулами (15) для двох типів однорідного навантаження на безмежності: паралельно та перпендикулярно до серединної поверхні тонкого включення.

**3. Руйнування всередині тонкого включення.** При побудові моделі тонкого пружного включення [17] основні співвідношення чітко розділені на дві складові, перша з яких пов'язує поперечні деформації неоднорідності з середнім значенням напружень у ній, а друга – середні осові нормальні напруження із видовженням включення. Тому для оцінювання граничного навантаження, що може зумовити руйнування тонкого включення, використаємо такий комплексний критерій: руйнування тонкого пружного включення зумовлюється досягненням поперечними деформаціями чи поздовжніми напруженнями у включенні критичних значень, тобто

$$\varepsilon = \varepsilon_c \text{ або } \sigma = \sigma_c. \quad (16)$$

З урахуванням моделі тонкого включення [17] на основі принципу спряження континуумів різної вимірності, умови руйнування (16) набудуть вигляду

$$\Delta u_{\max} / (2h) = \varepsilon_c \text{ або } \sigma = \frac{1}{2h} \int_a^{x_{\max}} \Delta \sigma(x) dx = \sigma_c. \quad (17)$$

Тут  $\Delta u_{\max}$  – максимальний стрибок переміщень при переході через середину поверхню дефекту;  $\sigma$  – максимальні напруження у включенні завтовшки  $2h$ . При дослідженні непрямолинійних включень чи тіл із лінійними включеннями за нерівномірного чи складного навантаження у формулах (17) додатково необхідно враховувати ефект згину тонкої неоднорідності, наприклад, за моделлю опору матеріалів [20]

$$\sigma \pm M/W_z = \sigma_c, \quad (18)$$

де  $M$  – згинальний момент у включенні;  $W_z$  – момент опору перерізу включення.

Розглянемо, для прикладу, залежність нормованих значень максимальних деформацій  $\varepsilon$  та напружень  $\sigma$  у тонкому пружному включенні в безмежному ізотропному середовищі від його відносної жорсткості та способу навантаження. Геометричні та матеріальні параметри задачі такі ж, як і в попередньому прикладі. Спосіб навантаження зображено на врізці до рис. 4.

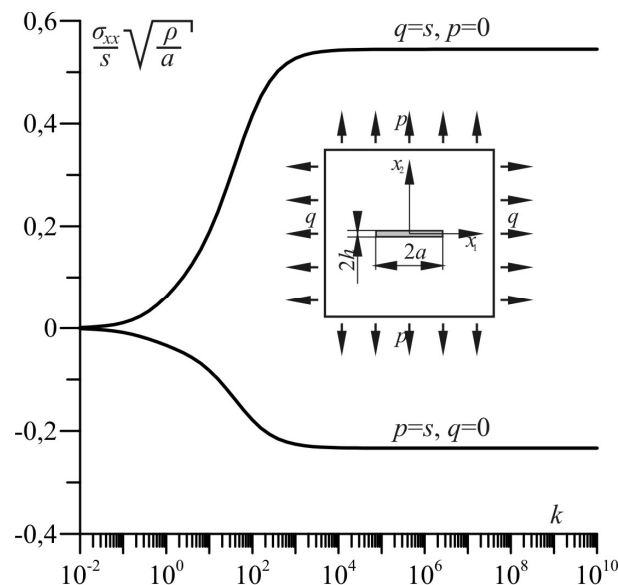


Рисунок 3. Залежність контактних напружень  $\sigma_{xx}$  на торці тонкого включення від його відносної жорсткості  $k$  та орієнтації навантаження тіла на безмежності



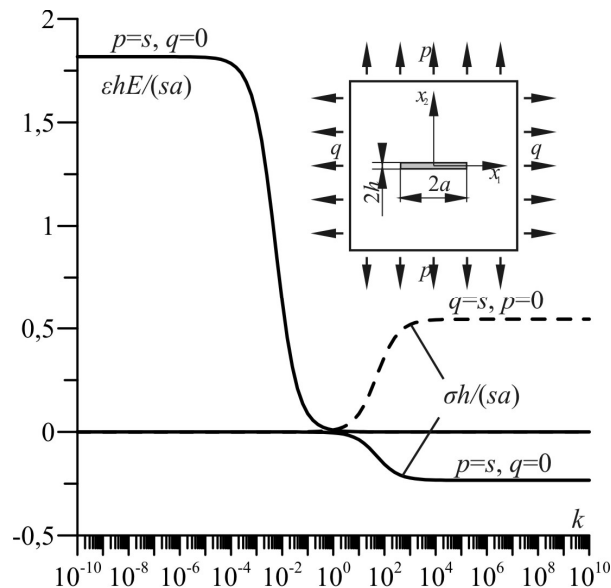


Рисунок 4. Залежність нормованих деформацій та напружень у включенні від його відносної жорсткості та способу навантажування

На рис. 4 бачимо, що для податних включень ( $k < 1$ ) домінуючою характеристикою напружено-деформованого стану неоднорідності є її поперечні деформації. Натомість для жорстких пружних включень ( $k > 1$ ) домінуючими стають поздовжні зусилля. Отже, обрані критеріальні співвідношення (16) або (17) видаються цілком прийнятними, а величини  $\varepsilon_c$  та  $\sigma_c$  є [20] характеристиками міцності матеріалу тонкого включення.

**Висновки.** Досліджено окремо три основні аспекти руйнування тіл із тонкими включеннями. З'ясовано, що найкращу узгодженість із експериментальними результатами стосовно кута поширення руйнування в матеріалі тіла дає  $S$ -критерій. Отримано також зручну для інженерних використань умову руйнування на основі гіпотези про насичення пружною енергією деформації зони інтенсивності напружень. Порівняно з  $S$ -критерієм остання умова при розрахунках граничного навантаження гарантує певний запас міцності. Отримано зв'язки між контактними напруженнями та узагальненими КІН для оцінювання можливого руйнування межі включення–тіло біля вістря включення. Як критерій можливого руйнування всередині включення запропоновано комплексну умову, що накладається як на напруження, так і на деформації тонкого включення. Усі випадки застосування критеріальних функцій проілюстровано числовими прикладами.

#### Література

1. Сулим, Г.Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями [Текст] / Г.Т. Сулим. – Львів: дослідно-видавничий центр НТШ, 2007. – 716 с.
2. Панасюк, В.В. Механіка квазіхрупкого розрушення матеріалів [Текст] / В.В. Панасюк. – К.: Наук. думка, 1991. – 416 с.
3. Божидарник, В.В. Елементи теорії пластичності та міцності [Текст] / В.В. Божидарник, Г.Т. Сулим. – Львів: Світ, 1999. – 945 с.
4. Бережницький, Л.Т. О построении диаграмм локального разрушения для хрупких тел с остроконечными жесткими включениями [Текст] / Л.Т. Бережницький, Р.С. Громяк, И.И. Труш // Физ.-хим. механика материалов. – 1975. – Т. 11, № 5. – С. 40–47.
5. Бережницький, Л.Т. О локальном разрушении хрупкого тела с остро-конечными жесткими включениями [Текст] / Л.Т. Бережницький, В.В. Панасюк, И.И. Труш // Пробл. прочности. – 1973. – № 10. – С. 8–11.

6. Gdoutos, E.E. Failure of a composite with a rigid fiber inclusion / E.E. Gdoutos // *Acta mech.* – 1981. – 39, No. 3–4. – P. 251–262.
7. Gdoutos, E.E. *Fracture mechanics* / E.E. Gdoutos. – Dordrecht: Springer, 2005. – 369 p.
8. *Mechanics of Fracture* / ed. G.C. Sih. – Leyden: Noordhoff, 1973. – 517 p.
9. Попина, С.Ю. Предельная нагрузка для хрупкого тела с тонкостенным упругим включением [Текст] / С.Ю. Попина, Г.Т. Сулим // *Физ.-хим. механика материалов.* – 1987. – Т. 23, № 2. – С. 115–118.
10. Кундрат, Н.М. Отслоение включения в ортотропной композиции / Н.М. Кундрат // *Прикл. механика.* – 2000. – Т. 36, № 9. – С. 123–128.
11. Dal Corso, F. The stress concentration near a rigid line inclusion in a prestressed, elastic material. Part I Full-field solution and asymptotics / F. Dal Corso, D. Bigoni, M. Gei // *J. Mech. Phys. Sol.* – 2008. – 56. – No. 3. – P. 815–838.
12. Dal Corso, F. The stress concentration near a rigid line inclusion in a prestressed, elastic material. Part II Implications on shear band nucleation, growth and energy release rate / F. Dal Corso, D. Bigoni, M. Gei // *J. Mech. Phys. Sol.* – 2008. – 56. – No. 3. – P. 839–857.
13. Стадник, М.М. Прочность материалов, содержащих системы тонких включений / М.М. Стадник, А.Е. Андрейкив // *Физ.-хим. механика материалов.* – 1986. – Т. 22, № 1. – С. 29–35.
14. Силованюк, В.П. Деформація та руйнування матеріалів біля включень під статичним навантаженням тіла / В.П. Силованюк, Р.Я. Юхим // *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* – 2007. – Т. 43, № 6. – С. 31–35.
15. Бережницький, Л.Т. До теорії концентраторів напружень із заокругленими вершинами [Текст] / Л.Т. Бережницький, П.С. Качур, Л.П. Мазурак // *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* – 1989. – Т. 25, № 5. – С. 28–41.
16. Сулим, Г. Використання енергетичних підходів для дослідження тонких пружних включень [Текст] / Г. Сулим, Я. Пастернак // *Машинознавство.* – 2006. – № 9–10. – С. 13–16.
17. Пастернак, Я.М. Дуальний метод граничних елементів для задач теорії тонких включень [Текст] / Я.М. Пастернак, Г.Т. Сулим // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2010. – Т. 53, № 2. – С. 46–57.
18. Ukadgaonker, V.G. A new criterion for fracture initiation / V.G. Ukadgaonker, P.J. Awasare // *Eng. Fract. Mech.* – 1995. – 51, No. 2. – P. 265–274.
19. Theocaris, P.S. The Mises elastic-plastic boundary as the core region in fracture criteria / P.S. Theocaris, N.P. Andrianopoulos // *Eng. Fract. Mech.* – 1982. – 16. – P. 425–432.
20. Шваб'юк, В.І. Опір матеріалів: навчальний посібник [Текст] / В.І. Шваб'юк. – К.: Знання, 2009. – 380 с.

*Отримано 04.03.2011*