

УДК 519.6

Н. Бабій; О. Петрик; М. Петрик, канд. техн. наук

Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ ДИFUZІЙНОГО ПЕРЕНОСУ В НЕОДНОРІДНИХ НАПІВОБМЕЖЕНИХ ПЛОСКИХ МАГНІТНИХ СЕРЕДОВИЩАХ

*Резюме.* Методом інтегральних перетворень Фур'є з  $n$ -точками спряження побудовано математичну модель процесів дифузійного переносу в багатошарових магнітних напівобмежених середовищах. Знайдено точний розв'язок такої задачі шляхом побудови головних розв'язків – фундаментальних функцій Коші і Гріна. Досліджено умови їх збіжності. Здійснено моделювання дифузійного переносу та проведено адекватність моделі за результатами натурних експериментів.

*Ключові слова:* математичне моделювання, нестационарні процеси, дифузійні процеси.

N. Babij, O. Petryk, M. Petryk

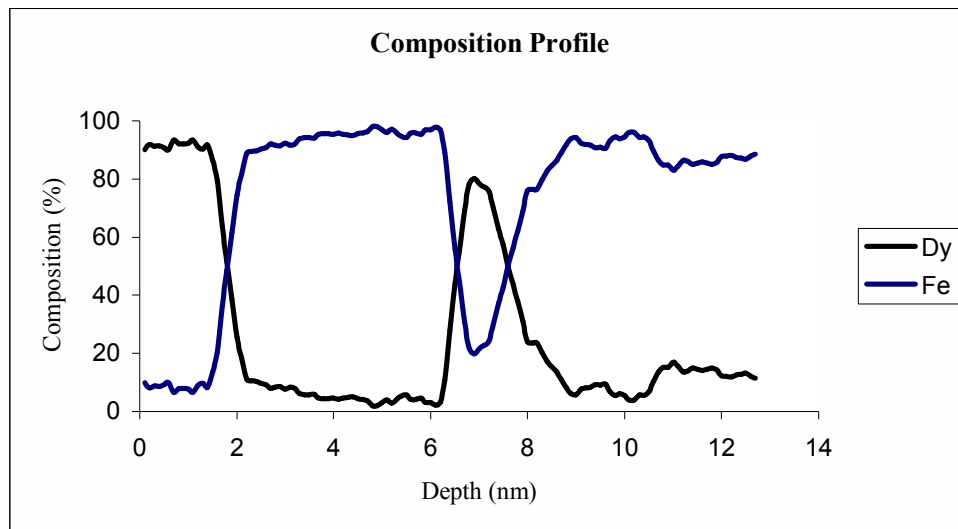
## MATHEMATICAL MODELING OF DYNAMIC PROCESSES OF DIFFUSION MASS TRANSFER IN HETEROGENEOUS HALFLIMITED FLAT MAGNETIC MEDIUMS

*The summary.* Mathematical model of diffusion mass transfer in multilayer magnetic halflimited medium with use of  $n$ -conjunction points Fourier transformation has been built. The analytical solution of such problem according to Cauchy and Green function has been found for the first time. The conditions of convergence. Mathematical modeling of diffusion mass transfer and adequacy check has been done.

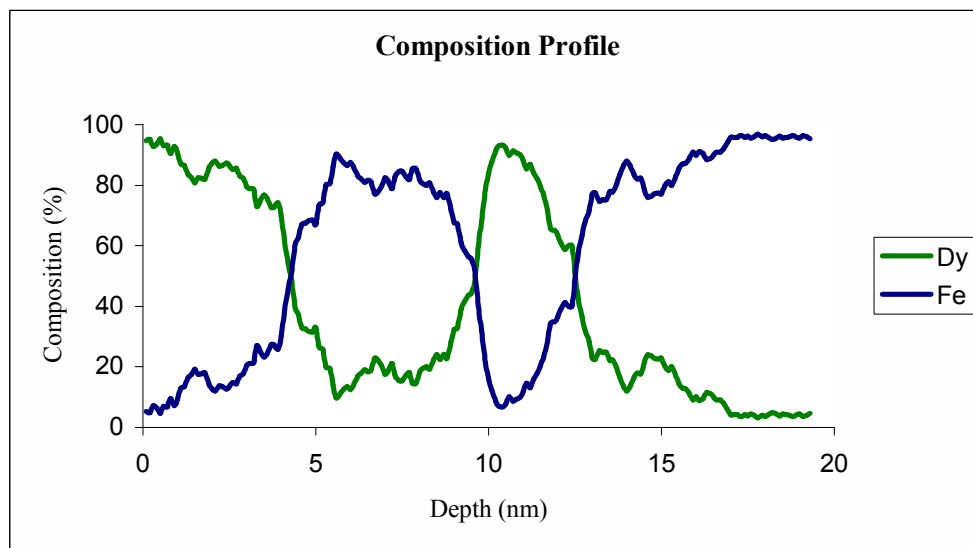
*Key words:* mathematical modeling, nonstationary processes, diffusion.

**Вступ.** Процеси дифузійного масопереносу, що протікають у багатоскладових магнітних середовищах складної конфігурації, визначаються неоднорідними фізичними властивостями та наявністю градієнтів маси. Вони можуть мати сильновиражений нестационарний характер (перехідні процеси формування багатошарових наноконструкцій) під дією високотемпературних і електромагнітних полів середовищ, робочих областей [1–2]. Як показують результати нанофізичних експериментів щодо формування багатошарових магнітних наноплівочок, проведених у лабораторії фізики матеріалів Руанського університету (Франція), концентраційні розподіли дифундованих у наночастицях компонентів мають значну неоднорідність властивостей уздовж напрямку переносу по товщині пласту [3, 4].

Розглянемо задачу дифузійного переносу в неоднорідному магнітному середовищі двовимірної області.



a)



б)

Рисунок 1. Результати натурних експериментів неоднорідного масопереносу в магнетних мультшарових Dy/Fe – наноструктурах

**Метою дослідження** є побудова математичної моделі динамічного дифузійного переносу в багатшаровому магнітному середовищі, побудова аналітичних розв’язків моделі та виконання чисельного моделювання отриманих розподілів концентрацій для Fe/Dy-мультикомпонентних середовищ.

**Математична постановка задачі.** З урахуванням отриманого в [1–5] диференціального рівняння переносу сформулюємо крайову задачу дифузії з урахуванням неоднорідностей властивостей уздовж напрямку переносу: побудувати обмежений в області  $D = \left\{ (t, x, z) : t > 0, x \in (0, h_i), z \in \bigcup_{k=1}^{n+1} (I_{k-1}, I_k) \right\}$  розв’язок системи рівнянь

$$\left( \frac{\partial^2 U_k(t, x, z)}{\partial t^2} \right) + b_i \left( \frac{\partial U_k(t, x, z)}{\partial t} \right) = \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_1 \right) D_{x_i}^2 \frac{\partial^2 U_k}{\partial x^2} + \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_1 \right) D_{z_r}^2 \frac{\partial^2 U_k}{\partial z^2} + f_k(t, x, z) \quad (1)$$

з початковими

$$U_k(t, x, z) \Big|_{t=0} = g_{1k}(x, z) \equiv U_{E_k}(0, z); \quad (2)$$

$$\left( \xi_t^k \frac{\partial P_k}{\partial t} + \eta_t^k U_k(t, x, z) \right) \Big|_{t=0} = \left( D_{x_i}^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + D_{z_k}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) U_k(t, x, z) \Big|_{t=0} + \\ + \xi_t^k \frac{\partial U_{E_k}(0, z)}{\partial t} + \eta_t^k U_{E_k}(0, z); \quad (3)$$

крайовими умовами по змінній  $x$

$$U_k(t, x, z) \Big|_{x=0} = g_{0k}(t, z), \quad \frac{\partial}{\partial t} U_k \Big|_{x=h_i} = 0; \quad (4)$$

крайовими умовами по змінній  $z$

$$U_1(t, x, z) \Big|_{z=l_0} = U_{l_0}(t, x) \equiv U_{E_1}(t, l_0) \quad (5)$$

$$\frac{\partial U_{n+1}}{\partial z} \Big|_{z=\infty} = 0 \quad (6)$$

та умовами спряження (неперервності середовища)

$$\left[ U_k(t, x, z) - U_{k+1}(t, x, z) \right] \Big|_{z=l_k} = 0 \quad (7)$$

$$\left[ \frac{\partial U_k}{\partial z} - \frac{\rho_k}{\rho_{k+1}} \frac{\partial U_{k+1}}{\partial z} \right] \Big|_{z=l_k} = 0. \quad (8)$$

Тут  $U_k(\tau, z)$ ,  $k = \overline{1, n+1}$  – функції концентрацій в неоднорідному середовищі;  $(l_{k-1}, l_k)$ ,  $k = \overline{1, n+1}$ ,  $k$ -тий пласт (сегмент) середовища уздовж вісі  $Z$ ;  $D_{x_i}^2$ ,  $D_{z_k}^2$  – узагальнені коефіцієнти дифузії в  $k$ -тому пласті неоднорідного середовища;  $\nu_1$ ,  $b_i$ ,  $K$ ,  $\rho_k$ ,  $\xi_t^k$ ,  $\eta_t^k$  – експериментальні параметри визначені в [1–5].

**Схема алгоритму побудови розв’язку.** Якщо застосувати до задачі (1)–(8) скінченне інтегральне Син-перетворення Фур’є, визначене інтегральними операторами [1, 2, 6]:

$$\Lambda_m [U_k(t, x, z)] = \int_0^{h_i} U_k(t, x, z) V_{m_i}(x, \lambda_{m_i}) \partial x = \int_0^{h_i} U_k(t, x, z) \sin \frac{2m-1}{2h_i} \pi x \partial x \equiv U_{k_m}(t, x) \quad (9)$$

$$\Lambda^{-1}_m [U_{km}(t, z)] = \sum_{m=1}^{\infty} U_{km}(t, z) \frac{V_{m_i}(x, \lambda_{m_i})}{\|V_{m_i}(x, \lambda_{m_i})\|^2} \equiv \frac{2}{h_s} \sum_{m=1}^{\infty} U_{km}(t, x) \sin \frac{2m-1}{2h_i} \pi x \equiv U_k(t, x, z) \quad (10)$$

$$\Lambda_m \left[ \frac{\partial^2 U_k(t, x, z)}{\partial x^2} \right] = -\lambda_{m_i}^2 U_{km}(t, z) + V_{m_i}(h_i, \lambda_{m_i}) \frac{\partial U_k}{\partial x} \Big|_{x=h_i} + V_{m_i}(0, \lambda_{m_i}) \frac{\partial U_k(t, 0, z)}{\partial x} = \\ = -\lambda_{m_i}^2 U_{km}(t, z) + \lambda_{m_i} g_{0k}(t, z), \quad (11)$$

то отримаємо нову крайову задачу: побудувати в області

$D_1 = \left\{ (t, z) : t > 0, z \in \bigcup_{k=1}^{n+1} l_{k-1}, l_k, l_{n+1} = \infty \right\}$  обмежений розв’язок системи рівнянь

$$\frac{\partial^2 U_{km}(t, z)}{\partial t^2} + [b_i + D_{x_i}^2 \lambda_{m_i}^2] \frac{\partial^2 U_{km}}{\partial z^2} + \nu_1 b_i^2 \lambda_{m_i}^2 U_{km}(t, z) = \left( \frac{\partial}{\partial t} + \nu_{1_i} \right) D_{z_k}^2 \frac{\partial^2 U_{km}(t, z)}{\partial z^2} + F_{km}(t, z), \quad (12)$$

де  $F_{km}(t, z) = \left( \frac{\partial}{\partial t} + \nu_{1_i} \right) D_{x_i}^2 \lambda_{m_i} g_{10k}(t, z) + \nu_{1_i} f_{km}(t, z)$ ,

з початковими умовами

$$U_{km}(t, z)|_{t=0} = g_{1km}(z) \equiv \frac{2h_i}{(2m-1)\pi} U_{E_k}(0, z); \quad (13)$$

$$\left( \xi_i^j \frac{\partial}{\partial t} + (\eta_i^j + b_i^2 \lambda_{m_i}) \right) U_{km}(t, z)|_{t=0} = D_{z_k}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} U_{km}(t, z)|_{t=0} + \frac{2h_i}{(2m-1)} \xi_i^j \frac{\partial U_{E_k}(0, z)}{\partial t} + \left( \lambda_{m_i} + \eta_i^j \frac{2h_i}{(2m-1)} \right) U_{E_k}(0, z) \quad (14)$$

крайовими умовами по змінній координаті z

$$U_{1m}(t, z)|_{z=l_0} = U_{E_{1m}}(t, l_0) \equiv U_{E_1}(t, l_0) \frac{2h_i}{(2m-1)\pi} \quad (15)$$

$$\frac{\partial U_{n+1}}{\partial z} \Big|_{z=\infty} = 0$$

та умовами спряження

$$\left[ U_{km}(t, z) - U_{k+1,m}(t, z) \right] \Big|_{z=l_k} = 0; \quad \left[ \frac{\partial U_{km}}{\partial z} - \frac{\rho_k}{\rho_{k+1}} \frac{\partial U_{k+1,m}}{\partial z} \right] \Big|_{z=l_k} = 0 \quad (16)$$

Застосуємо до задачі (12)–(16) інтегральне перетворення Фур'є з n-точками спряження для напівобмеженої неоднорідної області, визначене такими інтегральними операторами [1, 2, 6]:

а) пряме перетворення

$$F_n[U_{km}(t, z)] = \int_{l_0}^l U_{km}(t, z) V_k(z, \beta) \sigma_k(z) dz = \sum_{k=1}^{n+1} \int_{l_{k-1}}^{l_k} U_{km}(t, z) V_k(z, \beta) \sigma_k dz \equiv \tilde{U}_m(t) \quad (17)$$

$$F_n^{-1}[\tilde{U}_m(t)] = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \tilde{U}_m(t) V_k(z, \beta) \Omega_n(\beta) \partial \beta = U_{km}(t, z) \quad (18)$$

$$F_n \left[ \sum_{k=1}^{n+1} D_{z_k}^2 \frac{\partial^2 U_{km}(t, z)}{\partial z^2} \right] = \sum_{k=1}^{n+1} D_{z_k}^2 \int_{l_{k-1}}^{l_k} \frac{\partial^2 U_{km}(t, z)}{\partial z^2} V_k(z, \beta) \sigma_k \partial z = -\beta^2 \tilde{U}_m(t) - \sigma_1 b_1^2 V_1(l_0, \beta) U_{E_{1m}}(t, l_0) \quad (19)$$

В результаті отримуємо задачу Коші

$$\frac{d^2 \tilde{U}_m(t)}{dt^2} + (b_i + D_{x_i}^2 \lambda_{m_i} + \beta^2) \frac{d \tilde{U}_m(t)}{dt} + (v_{1_i} D_{x_i}^2 \lambda_{m_i}^2 + \beta^2) \tilde{U}_m(t) = \tilde{\Phi}_m(t), \quad (20)$$

де

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_m(t) &= \sum_{k=1}^{n+1} \int_{l_{k-1}}^{l_k} F_{km}(t, z) V_k(z, \beta) \sigma_k \partial z - \sigma_1 D_{z_1}^2 V_1(l_0, \beta) U_{E_{1m}}(t, l_0) \equiv \\ &\equiv \sum_{k=1}^{n+1} \int_{l_{k-1}}^{l_k} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_{1_i} \right) D_{x_i}^2 \lambda_{m_i} U_{E_k}(t, z) + v_{1_i} \frac{2h_i}{(2m-1)\pi} f_k(t, z) \right] V_k(z, \beta) \sigma_k \partial z - \\ &- \sigma_1 D_{z_1}^2 V_1(l_0, \beta) \frac{2h_i}{(2m-1)\pi} U_{E_{1m}}(t, l_0); \end{aligned} \quad (21)$$

за початковими умовами

$$\tilde{U}_m(t)|_{t=0} = \frac{2h_i}{(2m-1)\pi} \sum_{k=1}^{n+1} \int_{l_{k-1}}^{l_k} U_{E_k}(0, z) V_k(z, \beta) \sigma_k \partial z \equiv \tilde{g}_{1m}(\beta) \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \left( \xi_t^i \frac{\partial}{\partial t} + (\eta_t^i + b^2 \lambda_{m_i}^2 + \beta^2) \right) \tilde{U}_m(t) \Big|_{t=0} &= \frac{2h_i}{(2m-1)\pi} \xi_t^i \frac{\partial U_{E_i}(0, z)}{\partial t} + \\ &+ \left( \lambda_{m_i} + \eta_t^i \frac{2h_i}{(2m-1)} \right) U_{E_i}(0, z) \equiv \tilde{g}_{2m}(\beta) . \end{aligned} \quad (23)$$

Тут

а) компоненти власної функції інтегрального перетворення

$$V_k(z, \beta) = \left( \prod_{i=k}^n \xi_{i+1} \frac{\beta}{b_{i+1}} \right) \omega_{k-1,2}(\beta) \cos \frac{\beta}{b_k} z - \omega_{k-1,1}(\beta) \sin \frac{\beta}{b_k} z, k = \overline{1, n}, \quad (24)$$

$$V_{n+1}(z, \beta) = \omega_{n,2}(\beta) \cdot \cos \frac{\beta}{b_k} \cdot z - \omega_{n,1}(\beta) \cdot \sin \frac{\beta}{b_k} ;$$

$\beta$  – власні числа інтегрального перетворення;

в)  $\sigma_k$  – вагова функція, що визначається за правилом

$$\sigma_k = \begin{cases} \xi_k / (b^2 \xi_{n+1}), z \in (l_{k-1}, l_k), k = \overline{1, n}, \\ \frac{1}{b_{n+1}}, z \in (l_n, l_{n+1}). \end{cases} \quad (25)$$

$$\omega_{k,j}(\beta) = \omega_{k-1,2}(\beta) \psi_{1j}^k \left( \frac{\beta}{b_k} l_k, \frac{\beta}{b_{k+1}} l_k \right) - \omega_{k-1,1}(\beta) \psi_{2j}^k \left( \frac{\beta}{b_k} l_k, \frac{\beta}{b_{k+1}} l_k \right) \quad k = \overline{1, n}, j = 1, 2, \quad (26)$$

$$\omega_{01}(\beta) = -\mathcal{G}_1^{01} \left( \frac{\beta}{b_1} l_0 \right); \quad \omega_{02}(\beta) = -\mathcal{G}_1^{02} \left( \frac{\beta}{b_1} l_0 \right),$$

$$\psi_{m,j}^k \left( \frac{\beta}{b_k} l_k, \frac{\beta}{b_{k+1}} l_k \right) = \mathcal{G}_1^{km} \left( \frac{\beta}{b_k} l_k \right) \mathcal{G}_2^{kj} \left( \frac{\beta}{b_{k+1}} l_k \right) - \mathcal{G}_2^{km} \left( \frac{\beta}{b_k} l_k \right) \mathcal{G}_1^{kj} \left( \frac{\beta}{b_{k+1}} l_k \right), \quad m = \overline{1, 2}$$

$$\mathcal{G}_1^{k1} \left( \frac{\beta}{b_s} l_k \right) = \cos \left( \frac{\beta}{b_s} l_k \right); \quad \mathcal{G}_1^{k1} \left( \frac{\beta}{b_s} l_k \right) = \sin \left( \frac{\beta}{b_s} l_k \right), \quad \mathcal{G}_2^{k1} \left( \frac{\beta}{b_s} l_k \right) = -\xi_s \frac{\beta}{b_s} \sin \left( \frac{\beta}{b_s} l_k \right);$$

$$\mathcal{G}_2^{k1} \left( \frac{\beta}{b_s} l_k \right) = \xi_s \frac{\beta}{b_s} \cos \left( \frac{\beta}{b_s} l_k \right) \quad k = \overline{1, n}, j = 1, 2; \quad m = 1, 2; \quad s \in \{k, k+1\}.$$

$$\mathcal{G}_2^{n+1,1} \left( \frac{\beta}{b_{n+1}} l_{n+1} \right) = \cos \frac{\beta}{b_{n+1}} l_{n+1}; \quad \mathcal{G}_2^{n+1,2} \left( \frac{\beta}{b_{n+1}} l_{n+1} \right) = \sin \left( \frac{\beta}{b_{n+1}} l_{n+1} \right).$$

Розв'язком задачі Коші (20)–(23) є:

$$\begin{aligned} \tilde{U}_m(t) &= \frac{\tilde{g}_{2m}(\beta) - (\xi_t^i \gamma_2 + \eta_t^i) \tilde{g}_{1m}(\beta)}{\xi_t^i (\gamma_1 - \gamma_2)} e^{\gamma_1 t} + \frac{(\xi_t^i \gamma_2 + \eta_t^i) \tilde{g}_{1m}(\beta) - \tilde{g}_{2m}(\beta)}{\xi_t^i (\gamma_1 - \gamma_2)} e^{\gamma_2 t} + \\ &+ \int_0^t K(t-\tau) \cdot \tilde{\Phi}_m(\tau) d\tau , \end{aligned} \quad (27)$$

де  $K(t-\tau)$  – фундаментальна функція Коші, яка будується у вигляді [2]

$$K(t-\tau) = \frac{1}{\gamma_1 - \gamma_2} (e^{\gamma_1(t-\tau)} - e^{\gamma_2(t-\tau)}) \quad (28)$$

Тут  $\gamma_{1,2}$  – корені характеристичного рівняння

$$\begin{aligned} \gamma^2 + (b_i + D_{x_i}^2 \lambda_{m_i} + \beta^2)\gamma + (v_{l_i} D_{x_i}^2 \lambda_{m_i}^2 + \beta^2) &= 0; \\ \gamma_{1,2} &= -\frac{1}{2} [b_i + D_{x_i}^2 \lambda_{m_i} + \beta^2] \pm \sqrt{\frac{1}{4} [b_i + D_{x_i}^2 \lambda_{m_i} + \beta^2]^2 - 4 [v_{l_i} D_{x_i}^2 \lambda_{m_i}^2 + \beta^2]}. \end{aligned} \quad (29)$$

Тоді розв'язок задачі Коші (20)–(23) матиме вигляд

$$\begin{aligned} \tilde{U}_m(t) &= \frac{1}{\xi} K(t) \tilde{g}_{2m} - \frac{\eta^j}{\xi} K(t) \tilde{g}_{lm} + \frac{1}{\gamma_1 - \gamma_2} [(-\gamma_{11} - \varepsilon) e^{\gamma_{11} t} + (-\gamma_{11} + \varepsilon) e^{\gamma_{11} t}] \tilde{g}_{lm} + \\ &+ \int_0^t K(t-s) \tilde{\Phi}_m(\tau) d\tau = \frac{1}{\xi} K(t) \tilde{g}_{2m} + \left[ \gamma_{11} - \frac{\eta^j}{\xi} \right] K(t) \tilde{g}_{lm} + \frac{\partial K(t)}{\partial \alpha} \tilde{g}_{lm} + \int_0^t K(t-s) \tilde{\Phi}_m(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (30)$$

Тут  $\eta^i = \eta_i^i + b_i^2 \lambda_{m_i}^2 + \beta^2$ .

Визначимо головні розв'язки крайової задачі (12)–(16):

а) функції Гріна

$$W_{1_{k,k_1}}^m(t, z, \xi) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty K(t) V_k(z, \beta) V_{k_1}(\xi, \beta) \Omega_n(\beta) d\beta; \quad (31)$$

$$W_{2_{k,k_1}}^m(t, z, \xi) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t} K(t) V_k(z, \beta) V_{k_1}(\xi, \beta) \Omega_n(\beta) d\beta; \quad (32)$$

б) фундаментальні функції Коші

$$H_{1_{k,k_1}}^m(t, \tau, z, \xi) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty K(t-\tau) V_k(z, \beta) V_{k_1}(\xi, \beta) \Omega_n(\beta) d\beta; \quad (33)$$

$$H_{2_{k,k_1}}^m(t, \tau, z, \xi) = \frac{2}{\pi} \sigma_1 b_1^2 \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t} K(t-\tau) V_k(z, \beta) V_{k_1}(\xi, \beta) \Omega_n(\beta) d\beta; \quad (34)$$

У результаті розв'язок крайової задачі (12)–(16) набуде вигляду

$$\begin{aligned}
 U_m(t, z) = & \sum_{k_1=1}^{n+1} \int_{l_{k_1-1}}^{l_{k_1}} \left[ \frac{1}{\xi_i} \frac{2h_i}{(2m-1)\pi} W_{1,k_1}^m(t, z, \xi) \left( \xi_i \frac{\partial}{\partial t} + \eta_i^i \right) + \frac{D_{x_i}^2 \lambda_{m_i}}{\xi_i} W_{1,k_1}^m(t, z, \xi) + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{\xi_i} \frac{2h_i}{(2m-1)\pi} \left[ \left( \gamma_{11} - \frac{\eta_i^i}{\xi_i} \right) W_{1,k_1}^m(t, z, \xi) + W_{2,k_1}^m(t, z, \xi) \right] \right] \cdot U_{E_{k_1}}(0, \xi) \sigma_{k_1} d\xi + \\
 & + \int_0^t \sum_{k_1=1}^{n+1} \int_{l_{k_1-1}}^{l_{k_1}} \left[ \frac{2h_i \cdot \nu_{l_i}}{(2m-1)\pi} H_{1,k_1}^m(t, \tau, z, \xi) f_{k_1}(\tau, \xi) + D_{x_i}^2 \lambda_{m_i} H_{1,k_1}^m(t, \tau, z, \xi) \left[ \frac{\partial}{\partial \tau} + \nu_{l_i} \right] U_{E_{k_1}}(\tau, \xi) \right] \sigma_{k_1} d\xi d\tau - \\
 & - \int_0^t \frac{2h_i}{(2m-1)\pi} H_{2,1,k_1}^m(t, \tau, z) U_{E_{k_1}}(\tau, \xi) d\tau
 \end{aligned} \tag{35}$$

Визначимо головні розв'язки крайової задачі (1)-(8):

а) функції Гріна

$$W_{1,k_1}(t, x, z, \xi) = \frac{4}{\xi_i} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)\pi} W_{1,k_1}^m(t, z, \xi) \sin \frac{2m-1}{2h_i} x, \tag{36}$$

$$W_{2,k_1}(t, x, z, \xi) = \frac{2}{h_i} \frac{b_i^2}{\xi_i} \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_{m_i} W_{1,k_1}^m(t, z, \xi) \sin \frac{2m-1}{2h_i} x, \tag{37}$$

$$W_{3,k_1}(t, x, z, \xi) = \frac{2}{h_i \xi_i} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)\pi} \left[ \left( \gamma_{11} - \frac{\eta_i^i}{\xi_i} \right) W_{1,k_1}^m(t, z, \xi) + W_{2,k_1}^m(t, z, \xi) \right] \sin \frac{2m-1}{2h_i} x, \tag{38}$$

б) фундаментальні функції Коші

$$H_{11,1,k_1}(t, \tau, x, z, \xi) = \nu_{l_i} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)\pi} H_{1,k_1}^m(t, \tau, z, \xi) \sin \frac{2m-1}{2h_i} x; \tag{39}$$

$$H_{12,1,k_1}(t, x, \xi) = \frac{2}{h_i} D_{x_i}^2 \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_{m_i} H_{1,k_1}^m(t, \tau, \xi) \sin \frac{2m-1}{2h_i} x; \tag{40}$$

$$H_{2,1,k_1}(t, x, z, \xi) = \frac{2}{h_i} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2h_i}{(2m-1)\pi} H_{2,1,k_1}^m(t, \tau, z) \tag{41}$$

У результаті нескладних математичних перетворень розв'язок крайової задачі (1)–(8) остаточно набуде вигляду

$$\begin{aligned}
 U_k(t, x, z) = & \sum_{k_1=1}^{n+1} \int_{l_{k_1-1}}^{l_{k_1}} \left[ W_{1,k_1}(t, x, z, \xi) \left( \xi_i \frac{\partial}{\partial t} + \eta_i^i \right) U_{E_{k_1}}(0, \xi) + \right. \\
 & \left. + W_{2,k_1}(t, x, z, \xi) g_{10_{k_1}}(0, \xi) + W_{3,k_1}(t, x, z, \xi) U_{E_{k_1}}(0, \xi) \right] \sigma_{k_1} d\xi + \\
 & + \int_0^t \sum_{k_1=1}^{n+1} \int_{l_{k_1-1}}^{l_{k_1}} \left[ H_{11,k_1}(t, \tau, x, z, \xi) f_{k_1}(\tau, \xi) + H_{12,k_1}(t, \tau, x, z, \xi) \left[ \frac{\partial}{\partial \tau} + \nu_{l_{k_1}} \right] g_{10_{k_1}}(0, \xi) \right] \\
 & \cdot \sigma_{k_1} d\xi d\tau - \int_0^t H_{2,1,k_1}(t, \tau, x, \xi) U_{E_{k_1}}(\tau, l_0) d\tau
 \end{aligned} \tag{42}$$

**Чисельне моделювання на ЕОМ.** Розроблену математичну модель автори реалізували у вигляді пакета прикладних програм. На рис. 2–5 показані результати графічного моделювання, що демонструють кінетику перебігу процесу.

На рис. 2 зображено використувані при чисельному моделюванні експериментальні концентраційні розподіли в неоднорідній магнетній мультишаровій Dy/Fe-наноструктурі товщиною 10 нм.

На рис. 3 показано отриманий у результаті реалізації процедури зворотної задачі розподіл коефіцієнтів дифузії диспрозію Dy для даного мультишару. Як бачимо з рис. 3, даний розподіл певною мірою відображає неоднорідність уздовж координати товщини по напрямку переносу, що відповідає експериментальному концентраційному розподілу (рис. 2).

Використовуючи отриманий коефіцієнтний розподіл та аналітичний розв'язок моделі, проведено порівняльний аналіз експериментального й модельного розподілу (рис. 4). Як бачимо з рис. 4, криві експериментального й модельного розподілів із достатньою для технологічних застосувань точністю узгоджуються між собою. Максимальне значення величини відносної похибки не перевищує 5–7 відсотків.

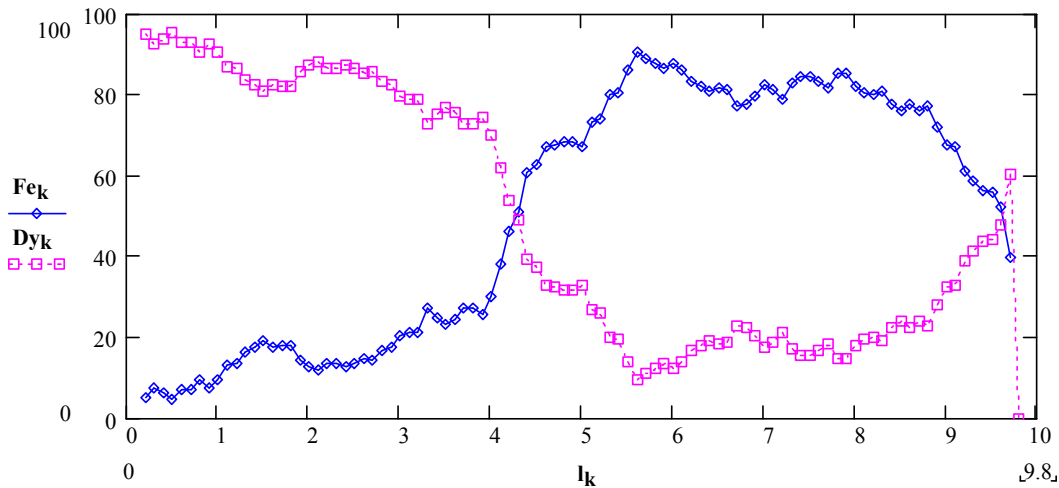


Рисунок 2. Експериментальні концентраційні розподіли в магнетних мультишарових Dy/Fe-наноструктурах

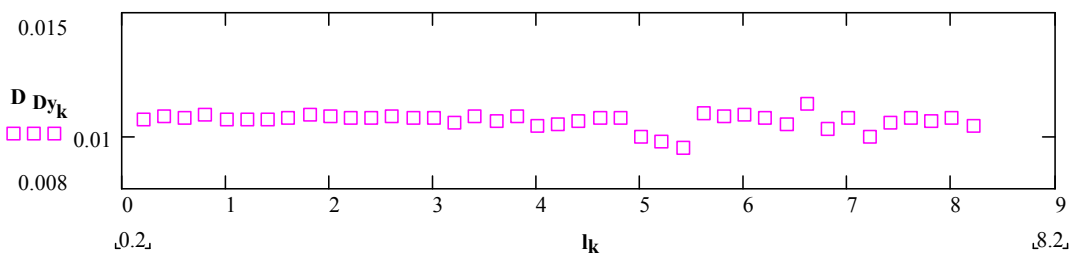


Рисунок 3. Розподіл коефіцієнта дифузії для Dy

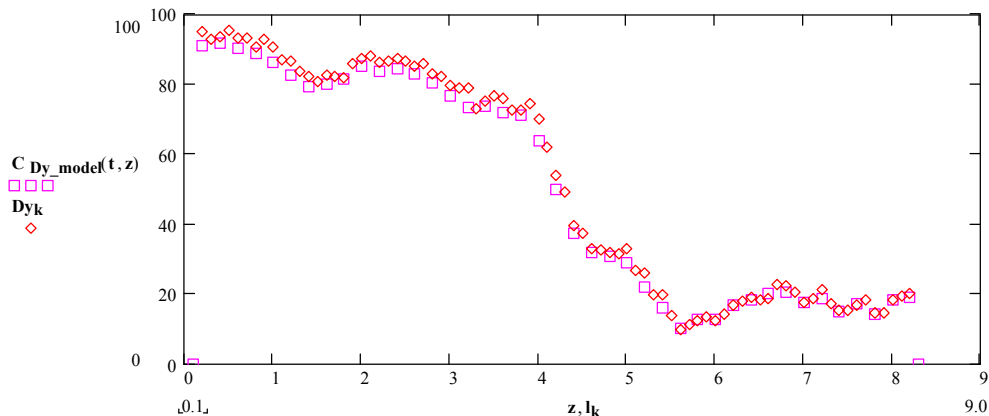


Рисунок 4. Порівняльний аналіз експериментального і модельного Dy-концентраційних розподілів



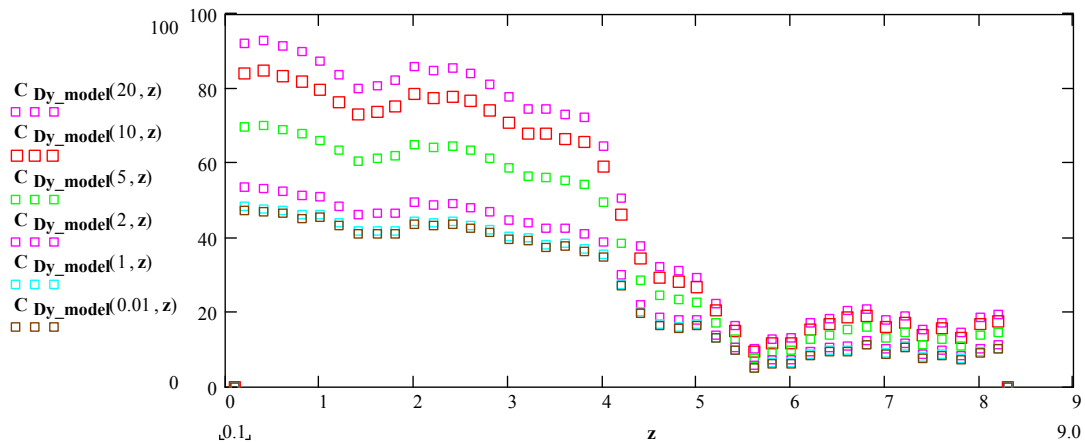


Рисунок 5. Динаміка залежності концентраційних розподілів уздовж координати товщини мультишару та приведенного часу

Рис. 5 відображає динаміку зміни концентрацій від приведенного часу (реальний час помножений на коефіцієнт дифузії  $\tau = D_{Dy}t$ ). Як бачимо з рис. 5, при  $\tau = 20$  уже практично спостерігаємо збіжність до крайової умови, де заданий експериментальний концентраційний розподіл. При наближенні до нуля спостерігаємо повільне зменшення концентраційного розподілу.

**Висновки.** Методом інтегральних перетворень Фур'є з  $n$ -точками спряження побудовано математичну модель процесів дифузійного переносу в багат шарових магнітних напівобмежених середовищах. Побудовано головні розв'язки задачі (функції впливу умов) та точний розв'язок такої змішаної крайової задачі. Показано умови їх збіжності. Виконано числове моделювання дифузійного переносу для неоднорідного магнетного мультишарового Dy/Fe-середовища та проведено адекватність моделі за результатами натурних експериментів.

#### Література.

1. Петрик, М.Р. Математична модель процесу фільтраційного відтиску неоднорідних напівобмежених середовищ у плоских конічних каналах [Текст] / М.Р. Петрик // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 1998. – № 3. – С.20–28.
2. Петрик, М.Р. Математичне моделювання процесів фільтрації і відтиску для неоднорідного середовища [Текст] / М.Р. Петрик, В.І. Воробйов // Вісник Української державної академії водного господарства. – Рівне, 1998. – С. 119–122.
3. Бабій, Н.В. Математичне моделювання масопереносу зі змінними коефіцієнтами дифузії для неоднорідних обмежених магнітних середовищ [Текст] / Н.В. Бабій, М.Р. Петрик // Збірник наук. прац. інституту кібернетики ім. В. Глушкова НАНУ та КПНУ ім. І. Огієнка. – Серія «Комп'ютерне моделювання». – Київ, 2010. – № 4. – С. 125–138.
4. Vorobyov E “An Experimental and Theoretical Study of Dewatering Organic Sediments” / E. Vorobyov, M. Petryk, M. Shinkaryk // 7-ht World Filtration Congres. Budapest. – 1996. – Vol.2. – P. 894–898.
5. Lanoiselle J.-L. Modélisation du Pressage à Pression Constante. Casdes Produits a Structure Celluloire / J.-L. Lanoiselle, E. Vorobyov, I.-M. Bouvier // Entropie. – 1994 – P. 39–56.
6. Ленюк, М.П. Интегральное преобразование Фурье для кусочно-однородных неограниченных и полуограниченных сред [Текст] / М.П. Ленюк. – Препр. АН УССР. Ин-т математики. – 1985. – 60 с.
7. Shirato M. Continuous expression of slurry in a screw press / M. Shirato, T. Murase, M. Iwata, N. Hayashi, Y. Ogawa // Int. Chem.Eng. – 1985. – Vol. 25. – № 1. – P. 88–96.
8. Zajic V. Abhangigkeit der Radialdrucke in der Shnechenvorpresse von den technologischen Bedingungen beim Rapssamenpressen / V. Zajic, S. Volhejn, K. Jirousek // Fette. Seifen. Anstrichmittel 88. – 1986. – № 6. – P. 231–238.

Отримано 15.04.2011