УДК 517.9

Білоус І. - ст. гр. КА-21
Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

ПОШИРЕННЯ ТЕПЛА В ОДНОРІДНОМУ ЦИЛІНДРІ

Науковий керівник: канд. фіз. – мат. наук, доцент Самборська О.М.

Bilous I.
Ternopil Ivan Pul'uj National Technical University

HEAT PROPAGATION IN A UNIFORM CYLINDER

Supervisor: Samborska O.

Ключові слова: рівняння теплопровідності, циліндричні координати, функції Беселя.
Key words: heat conduction equation, cylindrical coordinates, Bessel functions.

Початкова температура в однорідному циліндрі $0 \le r \le R$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le z \le l$ дорівнює $f(r,z) = A(R^2 - r^2)z$. Визначити розподіл температури в цьому циліндрі в будь – який момент часу t, якщо бічна поверхня та нижня основа підтримуються при нульовій температурі, а верхня основа теплоізольована.

Задачу розв'яжемо в циліндричній системі координат. Оскільки температура в будь-якій точці циліндра не залежить від кута φ, то позначимо її $U(r,z,t)$. Ця функція повинна задовольняти рівняння теплопровідності $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$, (1)

крайові умови $u(r,0,t) = 0, \quad u(R,z,t) = 0, \; U'_z(r,l,t) = 0$ (2)

та початкову умову $U(r,z,0) = f(r,z)$. (3)

Розв'язок задачі шукаємо методом Фур'є: $U(r,z,t) = F(r)Z(z)\mathrm{T}(t)$ (4)

Для функції $F(r)$ та Z(z) отримаємо рівняння:

$F''(r) + \frac{1}{r}F'(r) + \lambda^2 F(r) = 0$ (5), $\qquad Z''(z) + \eta^2 Z(z) = 0$ (6)

та крайові умови: $F(R) = 0$ (7), $\qquad Z(0) = 0$, $Z'(l) = 0$ (8)

Для функції $T(t)$ одержимо рівняння: $T'(t) + a^2(\lambda^2 + \eta^2)\,T(t) = 0$ (9)

Оскільки розв'язок рівняння (5) повинен бути скінченним при $r = 0$ і задовольняти крайову умову (7), то отримаємо: $F_\kappa(r) = C_\kappa J_0\left(\frac{\mu_\kappa r}{R}\right)$, де μ_κ -додатні корені функції Бесселя першого роду $J_0(x)$. Підставивши розв'язки задач (5), (7) та (6), (9) і розв'язок рівняння (9) у формулу (4), отримаємо:

$$U_{\kappa n}(r,z,t) = \mathrm{M}_{\kappa n}\, e^{-a^2(\lambda_\kappa^2 + \eta_n^2)t} J_0\left(\frac{\mu_\kappa r}{R}\right)\sin\frac{(2n+1)\pi z}{2l} \qquad (10)$$

Розв'язок задачі (1), (2), (3) шукаємо у вигляді подвійного ряду Фур'є:

$$U(r,z,t) = \sum_{\kappa=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} U_{\kappa n}(r,z,t) \qquad (11).$$