

УДК 517.9

Ласько В. – ст. гр. МІ-11

Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

ЗАСТОСУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПРИ РОЗВ'ЯЗАННІ ЗАДАЧ МЕХАНІКИ

Науковий керівник Габрусєва І. Ю.

Lasko V.

Ternopil Ivan Pul'uj National Technical University

THE USE OF DIFFERENTIAL EQUATIONS IN SOLVING PROBLEMS OF MECHANICS

Supervisor Habrusieva I. Y.

Ключові слова: диференціальні рівняння, пружна лінія, згинаючий момент.

Keywords: differential equations, elastic line, bending moment.

Розглянемо задачу про розрахунок прогину вільного кінця сталюї водостічної труби, що виходить зі стіни на довжину l . Внутрішній діаметр труби d_1 , товщина стінки d_2 . Дана задача потребує визначення пружної лінії труби для знаходження прогину її вільного кінця. Для цього можна скористатись формулою для радіусу кривини пружної лінії $R = \frac{EJ}{M(x)}$, де E – модуль пружності, J – момент інерції

поперечного перерізу відносно нейтральної осі, $M(x)$ – згинаючий момент для даного перерізу. З іншого боку, як відомо із курсу диференціальної геометрії, радіус кривини лінії заданої на декартовій площині рівнянням $y = y(x)$ знаходиться за формулою

$R = \frac{1}{y''}$. Тому диференціальне рівняння пружної лінії матиме вигляд $EJ \cdot y'' = M(x)$.

Труба перебуває під дією рівномірного навантаження q . Для визначення моменту відносно довільної точки пружної лінії $N(x, y)$ розглянемо елементарну ділянку dt , віддалену на відстань t від початку координат. Її елементарний момент відносно точки N $dM = q(t-x)dt$. Звідси матимемо $M(x) = \int_x^l q(t-x)dt = \frac{q}{2}(l-x)^2$.

Врахувавши вираз для $M(x)$ отримаємо диференціальне рівняння пружної лінії

$$EJ \cdot y'' = \frac{q}{2}(l-x)^2, \text{ загальним розв'язком якого буде } y = \frac{q}{24EJ}(l-x)^4 + C_1x + C_2.$$

Значення довільних сталих знаходимо із граничних умов задачі $x=0, y=0, y'=0$: $C_1 = \frac{ql^3}{6EJ}$ та $C_2 = -\frac{ql^4}{24EJ}$. Остаточне рівняння пружної лінії матиме вигляд

$$y = \frac{q}{24EJ}(6l^2x^2 - 4lx^3 + x^4). \text{ Звідки легко визначити прогин на кінці труби } y(l) = \frac{ql^4}{8EJ}.$$