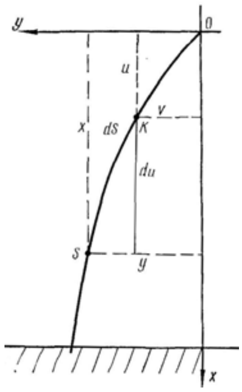
УДК 539.3
Бойко М. – ст. гр. МБ-12
Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

ВИКОРИСТАННЯ РІВНЯННЯ БЕССЕЛЯ ПРИ РОЗВ'ЯЗАННІ ФІЗИЧНИХ ЗАДАЧ

Науковий керівник: к.ф.-м.н. Габрусєв Г. В.



Розглянемо задачу визначення критичної довжини циліндричного стержня із закріпленим нижнім та вільним верхнім кінцем. Тобто визначимо довжину при якій, під дією сили тяжіння, може відбутись прогин стержня.

Розглянемо елемент стержня довжиною ds та координатами центра мас $K(u,v)$. Момент його сили тяжіння відносно точки $S(x,y)$, за умови, що згин достатньо малий, $q(y-v)ds \approx q(y-v)du$, де q – маса одиниці довжини стержня. Тоді згинаючий момент перерізу S

$$M = q\int_0^x (y-v)\,du = qxy - \int_0^x v\,du \qquad (1)$$

Граничні умови задачі матимуть вигляд:

при $x=0$, $M = \dfrac{d^2y}{dx^2} = 0$; при $x=l$, $\dfrac{dy}{dx} = 0$. (2)

Продиференціювавши по x диференціальне рівняння пружної лінії, отримаємо $EJ\dfrac{d^3y}{dx^3} = -\dfrac{dM}{dx}$. Із співвідношення (1) матимемо $\dfrac{dM}{dx} = qy + qx\dfrac{dy}{dx} - q\,v\big|_{u=x} = qx\dfrac{dy}{dx}$.

Прирівнявши вирази для $\dfrac{dM}{dx}$, отримаємо $\dfrac{d^2z}{dx^2} + \alpha^2 xz = 0$, де $\alpha^2 = \dfrac{q}{EJ}$, $z = \dfrac{dy}{dx}$. (3)

Зробивши у (3) заміну $x = \left(\dfrac{3}{2\alpha}t\right)^{\frac{2}{3}}$, $z = \psi\sqrt{t}$, отримаємо рівняння Бесселя із $n = \dfrac{1}{3}$:

$t^2\dfrac{d^2\psi}{dt^2} + t\dfrac{d\psi}{dt} + \left(t^2 - \dfrac{1}{9}\right)\psi = 0$, загальний розв'язок якого $\psi = C_1 \cdot J_{1/3}(t) + C_2 \cdot J_{-1/3}(t)$, або

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt[3]{\frac{2\alpha}{3}}x^{\frac{1}{2}}\left[C_1 J_{1/3}\left(\frac{2\alpha}{3}x^{\frac{3}{2}}\right) + C_2 J_{-1/3}\left(\frac{2\alpha}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\right]. \qquad (4)$$

Врахувавши першу умову (2) та продиференціювавши по змінній x співвідношення (4) матимемо, що $C_1 = 0$, тобто $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt[3]{\dfrac{2\alpha}{3}} \cdot C_2 \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot J_{-1/3}\left(\dfrac{2\alpha}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)$.

Із другої умови (2), вважаючи $C_2 \neq 0$, отримаємо $J_{-1/3}\left(\dfrac{2\alpha}{3}l^{\frac{3}{2}}\right) = 0$. Найменший додатній корінь функції $J_{-1/3}(t)$, $t_0 \approx 1.87$, отже критична довжина $l_{кр} = 1.99 \cdot \sqrt[3]{\dfrac{EJ}{q}}$.