УДК 517.9

Лещишин С. – ст. гр. ЕМ-21
Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

РОЗВ'ЯЗОК ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДЛЯ ДВОПРОВІДНОЇ ЛІНІЇ БЕЗ ВТРАТ

Науковий керівник: к.ф.-м.н., доц. Шелестовський Б.Г.

Розглянемо двопровідну лінію як систему рівномірно розподілених індуктивностей, ємностей, опорів та втрат. Позначимо відповідні величини через L, C, R, G, кожну з яких вважаємо віднесеною до одиниці довжини. Нехай $u(x, t)$ та $i(x, t)$ – напруга й струм в точках лінії в момент часу t.

Використовуючи перший та другий закон Кірхгофа, отримаємо систему диференціальних рівнянь з частинними похідними, яким задовольняють функції $u(x, t)$ та $i(x, t)$

$$\frac{\partial i}{\partial x} = -C \cdot \frac{\partial u}{\partial t} - G \cdot u; \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = -L \cdot \frac{\partial i}{\partial t} - R \cdot i. \tag{1}$$

Знайдемо розв'язки рівнянь (1), що відповідають початковим умовам:

$$u(x, 0) = i(x, 0) = 0 \tag{2}$$

та граничним: $u(0, t) = q(t) = E\left(1 - e^{-kt}\right)$, $u(\infty, t) = 0$. Позначимо через $U(x, p)$ та $I(x, p)$ зображення Лапласа функцій $u(x, t)$ та $i(x, t)$. Застосовуючи до (1) перетворення Лапласа, одержимо

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -(Lp + R) I(x, p), \qquad \frac{\partial I}{\partial x} = -(Cp + G) U(x, p) \tag{3}$$

з граничною умовою $U(0, p) = Q(p) \longrightarrow q(t)$ та умовою обмеженості $U(x, p)$ при $x \to \infty$.

Виключимо $I(x, p)$ з рівнянь (3):

$$\frac{d^2U}{dx^2} - \lambda^2 U(x, p) = 0, \qquad \lambda = \sqrt{(Lp + R)(Cp + G)}. \tag{4}$$

Розв'язок рівняння (4) має вигляд:

$$U(x, p) = A(p)e^{\lambda x} + B(p)e^{-\lambda x}, \qquad U(0, p) = Q(p) = B(p),$$

$$U(x, p) = Q(p)e^{-\lambda x}, \qquad I(x, p) = \sqrt{\frac{Cp + G}{Lp + R}} Q(p) e^{-\lambda x}.$$

Нехай $R = G = 0$, тобто маємо лінію без втрат. Тоді

$$\lambda = p\sqrt{LC}, \qquad U(x, p) = Q(p)e^{-p\sqrt{LC}x}, \qquad I(x, p) = \sqrt{\frac{C}{L}} Q(p) e^{-p\sqrt{LC}x}.$$

Застосовуючи теорему запізнення перетворення Лапласа, отримаємо шукані функції

$$u(x, t) = E\left(1 - e^{-k\left(t - x\sqrt{LC}\right)}\right) \cdot \sigma_0\left(t - x\sqrt{LC}\right),$$

$$i(x, t) = \sqrt{\frac{C}{L}} \cdot E\left(1 - e^{-k\left(t - x\sqrt{LC}\right)}\right) \cdot \sigma_0\left(t - x\sqrt{LC}\right).$$