УДК 517. 944
Рибачок О. – ст. гр. МБ - 21
Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

ПОБУДОВА ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ СПЕЦІАЛЬНОГО ВИГЛЯДУ

Науковий керівник: к.ф.-м.н., доцент Фурсевич Л.В.

Для дослідження процесів теплопровідностей у речовинах, які володіють тепловою пам'яттю застосовується інтегро-диференціальне рівняння спеціального вигляду:

$$\begin{aligned}\vec{q}(x,t) &= -\lambda(0)\vec{g}(x,t) - \int_0^\infty \dot{\lambda}(\tau)\vec{g}(x,t-\tau)\,d\tau,\\ e(x,t) &= e_0 + \varepsilon(0)u(x,t) + \int_0^\infty \dot{\varepsilon}(\tau)u(x,t-\tau)\,d\tau,\end{aligned} \qquad (1)$$

де $\lambda(t)$, $\varepsilon(t)$ - ядра релаксації теплового потоку та енергії відповідно, $\vec{g}(x,t)$ - градієнт температури, $u(x,t)$ - температура. Врахування фундаментального рівняння збереження енергії $\frac{de}{dt} + div\,\vec{q} = f_0$, де f_0 - локальні джерела тепла та використання (1) приводить до інтегро-диференціального рівняння теплопровідності

$$\mathrm{M}u = \varepsilon_0 \frac{\partial u}{\partial t} - \lambda_0 \nabla^2 u + \dot{\varepsilon} * \frac{\partial u}{\partial t} - \dot{\lambda} * \nabla^2 u = f_0(x,t), \qquad (2)$$

де ∇^2 - оператор Лапласа, $x = (x_1, x_2, x_3)$, $\varepsilon_0 = \lim \varepsilon$, $\lambda_0 = \lim \lambda$ при $t \to 0$. Із фізичних міркувань припускається, що ядра релаксації є монотонно зростаючими та нескінченно диференційовними на $[0,\infty)$ функціями. Як частковий випадок при $\varepsilon, \lambda = const > 0$ із (2) випливає класичне рівняння теплопровідності

$$\mathrm{T}u \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \chi\,\nabla^2 u = f_0(x,t) \quad (\chi = const > 0) \qquad (3)$$

Застосування перетворення Лапласа до рівняння (2) дозволяє звести його до неоднорідного еліптичного рівняння

$$-\nabla^2 \hat{u} + p\frac{\hat{\varepsilon}}{\hat{\lambda}}\hat{u} = \frac{1}{p\hat{\lambda}}\left(\hat{f}_0(x;p) + \varepsilon_\infty u_0(x)\right), \qquad (4)$$

де знак $\hat{}$ позначає операцію перетворення відповідної функції, $u_0(x) = u(x,+0)$, p - параметр перетворення, а також одержати точний розв'язок задачі. Основною трудністю є процедура знаходження оригінала при заданих ядрах релаксації. За визначенням, фундаментальний розв'язок $G(\vec{x},t)$ оператора M задовольняє у $\mathrm{E}^n \times [0,\infty)$ рівняння $\mathrm{M}G = \delta(\vec{x},t)$, (5)

де $\delta(\vec{x},t)$ - дельта-функція Дірака, та умові причиновости. Для того, щоб узагальнена функція $G(\vec{x},t)$ була фундаментальним розв'язком оператора M, необхідно і достатньо, щоб її трансформанта Фур'є-Лапласа була розв'язком алгебраїчного рівняння $\mathrm{M}(-i\vec{\xi}, p)FL[G(\vec{x},t)] = 1$, де $\mathrm{M} \in E^n$.