

УДК 517

Налівних І. – ст. гр. ХК-11

Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

ДЕЯКІ ВИПАДКИ ІНТЕГРУВАННЯ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Науковий керівник: к.ф.-м.н. Стельмащук Л.В.

Розв'язки лінійних диференціальних рівнянь вище першого порядку зі змінними коефіцієнтами не завжди можна виразити через елементарні функції. У більшості випадків зведення до квадратур не можливе. На практиці використовують інші методи дослідження.

Розглянемо рівняння другого порядку

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (1)$$

Одним із них є метод його розв'язування є зображення шуканого розв'язку у вигляді степеневих рядів за степенями x з невизначеними коефіцієнтами:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k .$$

Проте, якщо в рівнянні (1) функції $p(x)$ і $q(x)$ – раціональні, то точки, в яких їх знаменники перетворюються в нуль називають особливими точками. У околі особливих точок розв'язки у вигляді степеневих рядів можуть не існувати і їх шукають у вигляді узагальненого степеневих рядів з невизначеними коефіцієнтами:

$$y(x) = (x - x_0)^\lambda \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k .$$

Розглянемо рівняння вигляду

$$x^2 y'' + xp(x)y' + q(x)y = 0, \quad (2)$$

де $p(x)$ та $q(x)$ – аналітичні функції на проміжку $|x| < a$. Воно має два лінійно незалежних розв'язки

$$y_1 = x^{\lambda_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(1)} x^k, \quad y_2 = x^{\lambda_2} \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(2)} x^k, \quad (3)$$

де λ_1, λ_2 – корені визначального рівняння $\lambda(\lambda - 1) + p_0\lambda + q_0 = 0$. Якщо ж різниця $\lambda_1 - \lambda_2$ є цілим числом, то можна побудувати один розв'язок $y_1(x)$ у вигляді узагальненого степеневих рядів та знайти другий за формулою Абеля.

Розглянуто також методи розв'язування гіпергеометричного рівняння (рівняння Гаусса) вигляду

$$x(x-1)y'' + (-\gamma + (\alpha + \beta + 1)x)y' + \alpha\beta y = 0,$$

де α, β, γ – дійсні числа.

А також рівняння Бесселя

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$$

у припущенні, що $\nu \notin Z$. Знайдено розв'язок цього рівняння у вигляді узагальненого степеневих рядів.

Література. Самойленко А.М., Кривошия С.А., Перестюк М.О. Диференціальні рівняння у прикладах та задачах. Навч. посібник – К.: Вища школа, 1994. – 455 с.: іл.