УДК 539.3

Семенина Н. – ст. гр. КТ-12
Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

ЗАДАЧА ПРО КОЛИВАННЯ КРУГЛОЇ МЕМБРАНИ

Науковий керівник: к.ф.-м.н., доцент Самборська О.М.

Нехай в стані спокою однорідна пружна мембрана займає круг радіуса R з центром в початку координат. При дослідженні коливань круглої мембрани доцільно перейти до полярних координат. Відхилення точок мембрани від положення рівноваги $u(r,\varphi,t)$ задовольняє диференціальне рівняння

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \qquad (1)$$

Нехай мембрана закріплена вздовж контура $r=R$: $u\big|_{r=R}=0$. (2)

В початковий момент часу точки мембрани мають певні відхилення від положення рівноваги та певні швидкості:

$$u\big|_{t=0}=u_0(r,\varphi),\quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=u_1(r,\varphi) \qquad (3)$$

Задача про коливання мембрани зводиться до знаходження розв'язку рівняння (1), який задовольняє крайову умову (2) та початкові умови(3).

Знайдемо розв'язок цієї задачі у випадку, коли початкове відхилення мембрани має форму параболоїда обертання, а початкова швидкість дорівнює нулю:

$$u\Big|_{t=0}=h\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right),\ h=const,\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0 \qquad (4)$$

Оскільки початкові умови не залежать від кута φ, то відхилення мембрани в довільний момент часу t також не буде залежати від φ. Рівняння (1) набуває вигляду:

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} \qquad (5)$$

Застосовуючи метод Фур'є відокремлення змінних, візьмемо $u(r,t)=V(r)T(t)$.

Для шуканих функцій $V(r)$ та $T(t)$ отримуємо рівняння:

$$V''(r)+\frac{1}{r}V'(r)+\lambda^2V(r)=0\,,\ T''(t)+a^2\lambda^2T(t)=0\,.$$

Із крайової умови (2) випливає, що $V(R)=0$.Отримано розв'язки рівняння (5), які задовольняють умову (2):

$$u_m(r,t)=\left(A_m\cos\left(a\mu_m^{(0)}R^{-1}t\right)+B_m\sin\left(a\mu_m^{(0)}R^{-1}t\right)\right)J_0\left(\mu_m^{(0)}rR^{-1}\right)$$

Тут $J_0(x)$ - функція Бесселя першого роду нульового порядку; $\mu_m^{(0)}\ (m=1,2,3,...)$ - додатні корені цієї функції. Розв'язок задачі (5), (2), (4) шукаємо у вигляді ряду: $u(r,t)=\sum_{m=1}^{\infty}u_m(r,t)$. Використовуючи розклади функцій $u_0(r),u_1(r)$ в ряди Фур'є-Бесселя за функціями $J_0\left(\mu_i^{(0)}R^{-1}r\right)\ (i=1,2,3,...)$, знаходимо невідомі коефіцієнти A_m та B_m.