УДК 537.311.21

Філюк Я. – ст. гр. ЕЕ –11

Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

МОДИФІКОВАНА ЕЛІПТИЧНА СИСТЕМА КООРДИНАТ

Науковий керівник: к.т.н., доцент Романюк Л.А.

Зазвичай, при розв'язанні задач математичної фізики в областях, які мають симетрію еліптичного циліндра, використовується стандартна еліптична система координат , у якої одна із координатних поверхонь є еліпсом:

$$x = c \cdot ch\xi \cdot \cos\eta,\ y = c \cdot sh\xi \cdot \sin\eta,\ z = z, \tag{1}$$

де $\eta \in [-\pi, \pi]$, $\xi \in [0, \infty]$, $z \in (-\infty, \infty)$, c - напівфокальна відстань: $c^2 = a^2 - b^2$, де a і b - це відповідно велика і мала півосі еліпса, який відповідає $\xi = const$.

На площині $x\,y$ заміна змінних (1) перетворює внутрішню область еліпса з півосями a i b на прямокутну область $\eta \in [-\pi, \pi]$, $\xi \in [0, \xi_0]$, $\xi_0 = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{a+b}{a-b}\right)$ або, враховуючи періодичність змінної η, на смугу $\xi \in [0, \xi_0]$. При цьому розріз $x \in [-c, c]$ переходить у пряму $\xi = 0$, а поверхня еліпса - в $\xi = \xi_0$. Аналогічно зовнішня частина простору переходить у смугу $\xi \in [\xi_0, \infty]$.

Недоліком цієї системи координат є незручний перехід до полярної системи координат (ПСК). У цьому випадку $c \to 0,\ \xi \to \infty$ відповідно, для певного виразу потрібно знайти подвійну границю при $\lim\limits_{\substack{c\to 0\\ \xi\to\infty}} \frac{ce^{\xi}}{2} = \rho$, ρ - радіус в ПСК. Дійсно, за цих умов $\lim\limits_{\substack{c\to 0\\ \xi\to\infty}} (c \cdot sh\xi) = \lim\limits_{\substack{c\to 0\\ \xi\to\infty}} (c \cdot ch\xi) = \lim\limits_{\substack{c\to 0\\ \xi\to\infty}} \left(\frac{ce^{\xi}}{2}\right) \to \rho$ і формула (1) переходить у відомий вираз для ПСК. Якщо тепер у (1) одразу зробити заміну $\frac{ce^{\xi}}{2} = \rho$, то отримуємо:

$$x = \left(\rho + \frac{c^2}{4\rho}\right) \cdot \cos\varphi,\ y = \left(\rho - \frac{c^2}{4\rho}\right) \cdot \sin\varphi,\ z = z,\ \varphi \in [-\pi, \pi],\ \rho \in \left[\frac{c}{2}, \infty\right],\ z \in (-\infty, \infty) \tag{2}$$

При цьому перехід до полярної системи координат здійснюється простою підстановкою $c = 0$. Перетворення (2) будемо вважати означенням модифікованої еліптичної системи координат (МЕСК) і надалі використовуватимемо як заміну змінних для розв'язку поставленої задачі. МЕСК у багатьох відношеннях схожа з ПСК, що робить отримані результати більш наочними.

Зворотне перетворення задається формулами:

$$\sin^2\varphi = \frac{1}{2c^2} \cdot \left(c^2 - x^2 - y^2 + \sqrt{x^2\left(x^2 + 2y^2 - 2c^2\right)\left(y^2 + c^2\right)^2}\right),\ \rho = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{\cos\varphi} + \frac{y}{\sin\varphi}\right) \tag{3}$$

Конкретний корінь першого рівняння системи (3) обирається, виходячи зі знаків змішаних x та y.