УДК 519.217
Бондарук Б. – ст. гр. КТ-22
Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

НЕПЕРЕРВНІ ДРОБИ

Науковий керівник: к.ф.-м.н., доцент Демчишин О.І.

Неперервні дроби (НД) були вперше ведені В. Бункером. Вони дали можливість позиційне представлення квадратичних ірраціональних чисел, які відносно періодичної основи не є періодичними, виразити через відповідні періодичні неперервні дроби (ПНД). Їх представлення здійснюється за допомогою Алгоритму Евкліда.
За цим алгоритмом: 1) Для цілих чисел a_0 і a_1, де $a_1 > 0$, завжди існує лише одна пара чисел q_0 і a_2, таких, що $a_0 = a_1 \cdot q_0 + a_2$. 2) Для цілих чисел a_1 і a_2, де $a_1 > a_2$, завжди існує лише одна пара чисел q_1 і a_3, таких, що $a_1 = a_2 \cdot q_1 + a_3$, і т.д. 3) Для цілих чисел a_{n-1} і a_n, де $a_{n-1} > a_n$, існує число q_{n-1} і a_3, таке, що $a_{n-1} = a_n \cdot q_{n-1}$.
Ціле число a_n, яке виникає, буде найбільшим спільним дільником (НСД) чисел a_0 і a_1.
З іншого боку, якщо позначити $\varphi_0 = a_0 : a_1 = q_0 + a_2 : a_1 = q_0 + \varphi_1^{-1}$,

$$\varphi_1 = a_1 : a_2 = q_1 + a_3 : a_2 = q_1 + \varphi_2^{-1}, \ \ldots, \ \varphi_{n-1} = a_{n-1} : a_n = q_{n-1} + 0,$$

то отримаємо регулярний скінченний (РСНД): $\varphi_0 = a_0 : a_1 = [q_0, q_1, q_2, ..., q_{n-1}]$.
Розглянемо для прикладу числа 245 і 71.

Алгоритм Евкліда	Скінченний неперервний дріб	
$245 = 3 \cdot 71 + 32,$ $71 = 2 \cdot 32 + 7,$ $32 = 4 \cdot 7 + 4,$ $7 = 1 \cdot 4 + 3,$ $4 = 1 \cdot 3 + 1,$ $3 = 3 \cdot 1.$	$\varphi_0 = 245 : 71 = 3 + 32 : 71 = 3 + \varphi_1^{-1},$ $\varphi_1 = 71 : 32 = 2 + 7 : 32 = 2 + \varphi_2^{-1},$ $\varphi_2 = 32 : 7 = 4 + 4 : 7 = 4 + \varphi_3^{-1},$ $\varphi_3 = 7 : 4 = 1 + 3 : 4 = 1 + \varphi_4^{-1},$ $\varphi_4 = 4 : 3 = 1 + 1 : 3 = 1 + \varphi_5^{-1},$ $\varphi_5 = 3 : 1 = 3$	$\frac{245}{71} = 3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3}}}}}$
НСД(245; 71) = 3	245 : 71 = [3; 2; 4; 1; 1; 3]	

Будь-який РСНД породжує раціональне число, а будь-яке раціональне число можна представити у вигляді РСНД. Якщо ж при деяких s і t $\varphi_{s+t} = \varphi_s$, то отримуємо періодичний регулярний неперервний дріб (ПРНД), яким можна представити корені квадратні із додатних цілих чисел. Наприклад, $\varphi_0 = \sqrt{19} = [4; (2;1;3;1;2;8)]$:

$\varphi_0 = \sqrt{19} = 4 + \sqrt{19} - 4$, $\varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{19} - 4} = 2 + \frac{\sqrt{19} - 2}{3}$, $\varphi_2 = \frac{3}{\sqrt{19} - 2} = 1 + \frac{\sqrt{19} - 3}{5}$, $\varphi_3 = \frac{5}{\sqrt{19} - 3} = 3 + \frac{\sqrt{19} - 3}{2}$, $\varphi_4 = \frac{2}{\sqrt{19} - 3} = 1 + \frac{\sqrt{19} - 2}{5}$, $\varphi_5 = \frac{5}{\sqrt{19} - 2} = 2 + \frac{\sqrt{19} - 4}{3}$, $\varphi_6 = \frac{3}{\sqrt{19} - 4} = 8 + \sqrt{19} - 4$, $\varphi_7 = \frac{1}{\sqrt{19} - 4} = \varphi_1$	$\varphi_0 = \sqrt{19} = 4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{8 + \varphi_1^{-1}}}}}}}$