УДК 621.865.8
Р.І. Михайлишин, Я.І. Проць, канд. тех. наук, доц., В.Б. Савків, канд. тех. наук, доц..
Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, Україна

КІНЕМАТИЧНИЙ РОЗРАХУНОК ТРАЄКТОРІЙ МАНІПУЛЯТОРІВ

R.I. Mykhailyshyn, Y.I. Prots, Ph.D., Assoc. Prof., V.B. Savkiv, Ph.D., Assoc. Prof.

KINEMATIC CALCULATION OF TRAJECTORIES MANIPULATOR

На сучасному етапі автоматизації виробництва під час планування траєкторії руху маніпулятора виникає необхідність зробити кінематичний розрахунок траєкторії, щоб задовольнити обмеження на систему приводу, які виникли в умовах насиченості. Зокрема, необхідно розглядати кінематичний розрахунок, який потребує від траєкторії задовольнити обмеження на максимальну швидкість і прискорення. Кінематичний розрахунок траєкторії актуальний для тих профілів траєкторій (циклоїдна, гармонійна, поліном різних степенів…), для яких такі значення не призначенні в самому плануванні.

З метою розрахунку траєкторії зручно виразити її в параметричній формі, як функцію з відповідним параметром нормалізації $\sigma = \sigma(t)$. Враховуючи траєкторію $q(t)$, визначену між точками q_i і q_f з часом в дорозі $T = t_f - t_i$, її вираження в нормалізованій формі виглядає наступним чином:

$$q(t) = q_i + h\sigma(\tau)$$

з $h = q_f - q_i$ і :

$$\sigma(t) = \left[a + \left(1 - t_a\right)\tau \right]$$

$$0 \le \sigma(\tau) \le 1, \quad \tau = \frac{t - t_i}{T}, \quad 0 \le \tau \le 1 \text{ (час нормалізації).}$$

Звідси випливає :

$$\begin{cases} \dfrac{dq(t)}{dt} = \dfrac{h}{T}\sigma'(\tau) \\ \dfrac{d^2q(t)}{dt^2} = \dfrac{h}{T^2}\sigma''(\tau) \\ \quad\vdots \\ \dfrac{d^nq(t)}{dt^n} = \dfrac{h}{T^n}\sigma^{(n)}(\tau) \end{cases}$$

Максимальні значення швидкості, прискорення отримані відповідно до максимальних значень функцій $\sigma^{(i)}(t)$: шляхом *зміни часу проходження* T траєкторії, допоможе задовольнити обмеження в умовах кінематичного насичення.

Таблиця 1. Функції траєкторій, які можуть бути параметризовані.

Траєкторія	Функція	Коефіцієнти взяти для параметризації
Полінома третього степеня	$\sigma(\tau) = a_0 + a_1\tau + a_2\tau^2 + a_3\tau^3$	$a_0 = 0,\ a_1 = 0,\ a_2 = 3,\ a_3 = -2.$
Полінома п’ятого степеня	$\sigma(\tau) = a_0 + a_1\tau + a_2\tau^2 + a_3\tau^3 + a_4\tau^4 + a_5\tau^5$	$a_0 = 0,\ a_1 = 0,\ a_2 = 3,\ a_3 = 10,\ a_4 = -15,\ a_5 = 6.$

Гармонійна	$\sigma(\tau)=\frac{1}{2}\left(1-\cos(\pi\tau)\right)$	$\sigma'(0.5),\sigma''(0),\sigma'''(0.5).$
Циклоїдна	$\sigma(\tau)=\tau-\frac{1}{2\pi}\sin(2\pi\tau)$	$\sigma'(0.5),\sigma''(0.25),\sigma'''(0).$

Таблиця 2. Максимальні значення швидкості, прискорення і ривка.

Траєкторія	Функція
Полінома третього степеня	$\dot{q}_{\max}=\frac{3h}{2T}$ $\ddot{q}_{\max}=\frac{6h}{T^2}$
Полінома п'ятого степеня	$\dot{q}_{\max}=\frac{15h}{8T}$ $\ddot{q}_{\max}=\frac{10\sqrt{3}h}{3T^2}$ $\dddot{q}_{\max}=60\frac{h}{T^3}$
Гармонійна	$\dot{q}_{\max}=\frac{\pi h}{2T}$ $\ddot{q}_{\max}=\frac{\pi^2 h}{2T^2}$ $\dddot{q}_{\max}=\frac{\pi^3 h}{2T^3}$
Циклоїдна	$\dot{q}_{\max}=2\frac{h}{T}$ $\ddot{q}_{\max}=2\pi\frac{h}{T^2}$ $\dddot{q}_{\max}=4\pi^2\frac{h}{T^3}$

Ми можемо спланувати траєкторію з $q_i=10°$, $q_f=50°$, для приводів з такими характеристиками $\dot{q}_{\max}=30\ °/c$, $\ddot{q}_{\max}=80\ °/c^2$. В практиці використовується рівняння таких траєкторій результати яких наведенні в Таблиці 3. коли $h=40°$.

Таблиця 3. Приклад кінематичного розрахунку траєкторії.

Траєкторія	Формули	Обмеження	T_{min}
Полінома третього степеня	$\begin{cases}\dot{q}_{\max}=\frac{3h}{2T}\\ \ddot{q}_{\max}=\frac{6h}{T^2}\end{cases}$	$\begin{cases}T=\frac{3h}{60}=2\\ T=\sqrt{\frac{6h}{80}}=1.732\end{cases}$	2
Полінома п'ятого степеня	$\begin{cases}\dot{q}_{\max}=\frac{15h}{8T}\\ \ddot{q}_{\max}=\frac{10\sqrt{3}h}{3T^2}\end{cases}$	$\begin{cases}T=\frac{15h}{240}=2.5\\ T=\sqrt{\frac{10\sqrt{3}h}{240}}=1.699\end{cases}$	2.5
Гармонійна	$\begin{cases}\dot{q}_{\max}=\frac{\pi h}{2T}\\ \ddot{q}_{\max}=\frac{\pi^2 h}{2T^2}\end{cases}$	$\begin{cases}T=\frac{\pi h}{60}=2.094\\ T=\sqrt{\frac{\pi^2 h}{160}}=1.571\end{cases}$	2.094
Циклоїдна	$\begin{cases}\dot{q}_{\max}=2\frac{h}{T}\\ \ddot{q}_{\max}=2\pi\frac{h}{T^2}\end{cases}$	$\begin{cases}T=2\frac{h}{60}=2.667\\ T=\sqrt{2\pi\frac{h}{80}}=1.772\end{cases}$	2.667

З Таблиці 3. ми можемо зробити висновок, що за допомогою кінематичного розрахунку траєкторії можна не тільки задовольнити обмеження на систему приводу, які виникли в умовах насиченості, але і визначити мінімальний час проходження шляху для різних траєкторій, що дасть нам змогу вибрати найбільш оптимальну траєкторію.