

УДК 539.3

М. С. Слободян¹, канд. фіз.-мат. наук, доц., ¹Є. Б. Ярема, ²О. В. Білаш,

¹Львівський національний університет імені Івана Франка, Україна

²Академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного, Україна

**ДОСЛІДЖЕННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ПЛАСТИНИ З
ЕЛІПТИЧНИМ ОТВОРОМ ТА ДВОМА РІВНИМИ МІЖ СОБОЮ
СПІВВІСНИМИ ТРІЩИНАМИ**

M. S. Slobodyan, Ph.D., Assoc. Prof., Y. B. Yarema, O. V. Bilash

**RESEARCH OF STRESS-STRAIN STATE OF THE PLATE WITH ELLIPTICAL
HOLE AND TWO EQUAL COAXIAL CRACKS**

У роботі досліджено напружено-деформований стан ізотропної пластини з еліптичним отвором, який вільний від зовнішнього навантаження, та двома прямолінійними рівними між собою співвісними тріщинами завдовжки $2l$, береги яких також вільні від зовнішнього навантаження. У серединній площині пластини виберемо декартову систему координат Oxy з початком у центрі тріщини, що знаходиться зліва від отвору, так, щоб дві тріщини лежали на осі Ox (див. рис. 1). З центром еліптичного отвору, координати якого x_0 та y_0 у системі координат Oxy , пов'яжемо локальну систему координат $O'x'y'$, а його півосі позначимо через a і b . Кут між осями $O'x'$ та Ox позначимо через β . Нехай на нескінченості пластини розтягується рівномірно розподіленими зусиллями p і q , причому зусилля p утворює кут α з віссю Ox та є перпендикулярним до q . Відстань між центрами тріщин позначимо через c ; контури тріщин – через \tilde{L}_1 і \tilde{L}_2 , $L = \tilde{L}_1 \cup \tilde{L}_2$, контур отвору – через L_1 .

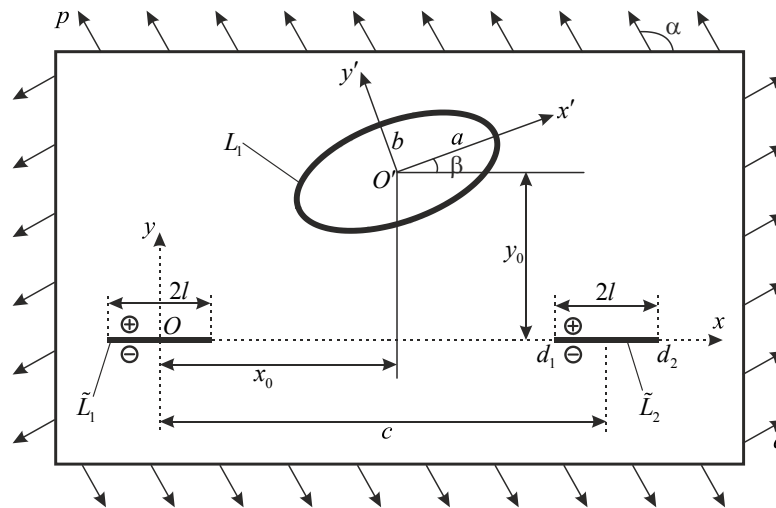


Рис. 1. Схема розміщення отвору і тріщин

Виходячи з формулювання задачі маємо такі крайові умови:

$$\sigma_{yy}^{\pm} - i\sigma_{xy}^{\pm} = 0, \quad x \in L,$$

$$N^{\pm} + iT^{\pm} = 0, \quad t \in L_1,$$

де σ_{yy}^{\pm} , σ_{xy}^{\pm} – компоненти тензора напружень у декартовій системі координат Oxy , N і

T – відповідно нормальна та дотична компоненти зовнішнього навантаження на L_1 ; значками «+» та «-» позначено граничне значення відповідної величини при прямуванні z до лінії справа і зліва по відношенню до заданого напрямку, $[f] = f^+ - f^-$, $z = x + iy$, $i^2 = -1$.

В більшості наукових праць розв'язок задач такого типу зведено до системи сингулярних інтегральних рівнянь на отворі та тріщинах, або тільки на тріщинах. В цій роботі було апробовано новий підхід до розв'язування сформульованої задачі. Використавши методи теорії функції комплексної змінної та комплексних потенціалів Колосова-Мухелішвілі [1], розв'язок задачі зведено до двох задач лінійного спряження, на основі яких отримано сингулярне інтегральне рівняння на межі еліптичного отвору:

$$\int_{L_1} [g_1(u)K(u,t)du + \overline{g_1(u)}M(u,t)d\bar{u}] = \rho(t), \quad t \in L_1,$$

де $g_1(u)$ – шукана функція, а функції $K(u,t)$, $M(u,t)$ та $\rho(t)$ – відомі.

Крайові умови на берегах прямолінійних тріщин вдалося задовольнити аналітично. Сингулярне інтегральне рівняння розв'язувалось числово з використанням методу механічних квадратур [2]. Коефіцієнти інтенсивності напружень [3] для першої (лівої) тріщини визначались за формулою

$$k_1^\pm - ik_2^\pm = 2 \lim_{x \rightarrow \pm l} \left[\sqrt{2\pi|x \mp l|} \left\langle - \left(\Gamma + \frac{\Gamma'}{2} \right) \left(1 - \frac{z^2}{X(x)} + \frac{z(d_1 + d_2)}{2X(x)} + \frac{l^2}{2X(x)} + \frac{(d_1 - d_2)^2}{8X(x)} \right) - \frac{1}{4\pi i X(x)} \int_{L_1} \left\{ g_1(u) \left[\frac{X(x) - X(u)}{u - x} + \frac{X(x) - \overline{X(u)}}{\bar{u} - x} + u + \bar{u} - (d_1 + d_2) \right] du - \overline{g_1(u)} \left[\frac{(\bar{u} - u)}{(\bar{u} - x)} \times \left(\frac{4\bar{u}^3 - (3\bar{u}^2 - l^2)(d_1 + d_2) + 2\bar{u}(d_1 d_2 - l^2)}{2\overline{X(u)}} - (\bar{u} - x) + \frac{X(x) - \overline{X(u)}}{\bar{u} - x} \right) \right] d\bar{u} \right\} + \frac{C_0}{X(z)} \right\rangle \right],$$

де $X(x) = \sqrt{(x^2 - l^2)(x - d_1)(x - d_2)}$, $\Gamma = \frac{1}{4}(p + q)$, $\Gamma' = -\frac{1}{2}(p - q)e^{-2i\alpha}$, d_1 та d_2 – вершини правої тріщини у системі координат Oxy , а C_0 – відома стала.

Також в роботі проведено числовий аналіз коефіцієнтів інтенсивності напружень при різних параметрах задачі, на основі якого побудовано відповідні графічні залежності.

Література

1. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мухелишвили. – М.: Наука, 1966. – 707 с.
2. Панасюк В. В. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках / В. В. Панасюк, М. П. Саврук, А. П. Дацьшин. – К.: Наук.думка, 1976. – 444с.
3. Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами / М. П. Саврук. – Киев: Наук. думка, 1981. – 324 с.