

УДК 539.3

В.К. Опанасович, докт.фіз.-мат.наук, доц., М.С. Слободян, канд.фіз.-мат.наук, доц.,
В Я.Бедрій

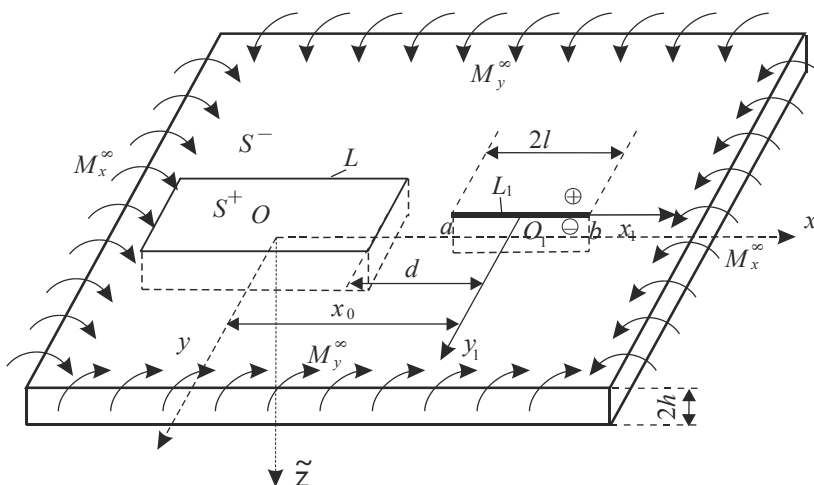
Львівський національний університет імені Івана Франка, Україна

**НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНІЙ СТАН ІЗОТРОПНОЇ ПЛАСТИНИ З
ПРЯМОКУТНИМ ПРУЖНИМ ВКЛЮЧЕННЯМ ТА ТРІЩИНОЮ З
УРАХУВАННЯМ КОНТАКТУ ЇЇ БЕРЕГІВ**

V. K. Opanasovich, Dr. Sci., Assoc. Prof., Slobodyan M. S., PhD, Assoc. Prof., Bedriy V.
Y., PhD student

**STRESS-STRAIN STATE OF ISOTROPIC PLATE WITH ELASTIC
RECTANGULAR INCLUSION AND A CRACK CONSIDERING ITS SHORES
CONTACT**

Досліджена задача про двосторонній згин безмежної ізотропної пластини завтовшки $2h$ з прямокутним пружним включенням та прямолінійною тріщиною завдовжки $2l$, береги якої вільні від зовнішнього навантаження, а під дією згинальних моментів на нескінченності M_x^∞ і M_y^∞ вони приходять в гладкий контакт поблизу верхньої основи пластини по області постійної ширини h_1 . В серединній площині пластини виберемо декартові системи координат, які разом із позначеннями зображені на рис. 1. Враховуючи контакт берегів тріщини задачу розбиваємо на дві задачі: плоску задачу і задачу згину, де використана класична теорія згину пластин.



Задача розв'язана за таких крайових умов:

$$M_y = (1 - \gamma/3)N, \quad \partial_x [v_n] + [\partial_{xy}^2 w] \left(\frac{1 + (1 - \gamma)^2}{2} \right) = 0, \quad x \in L_1,$$

$$\sigma_{xy}^\pm = 0, \sigma_{yy}^\pm = -N/2h, M_y^\pm = M_y, P^\pm = 0 \quad x \in L_1,$$

$$[\sigma_{nn} + i\sigma_{n\tau}] = 0, [u + iv] = 0, [M_n] = 0, [H_{n\tau}] = 0, [Q_n] = 0, [w] = 0, [dw/dn] = 0, \quad x \in L,$$

де $\gamma = h_1/h$, N - контактне зусилля між берегами тріщини, σ_{yy} , σ_{nn} і σ_{xy} , $\sigma_{n\tau}$ - нормальні і дотичні напруження, u, v - компоненти вектора переміщення відповідно по осі Ox та Oy у плоскій задачі; M_n, M_y та $H_{n\tau}$ - відповідно згинальний та крутний моменти, Q_n - перерізувальна сила, n, τ - відповідно одиничні орти нормалі та дотичної до лінії L , w - прогин пластини, P - узагальнена в сенсі Кірхгофа перерізувальна сила; $[f] = f^+ - f^-$, причому значками «+» і «-» на лінії L_1 позначено граничне значення відповідної величини при $y_1 \rightarrow \pm 0$, а на L - із області S^+ і S^- .

При розв'язанні плоскої задачі та задачі згину введемо відповідні комплексні потенціали $\Phi_p^{(j)}(z)$ і $\Psi_p^{(j)}(z)$ та $\Phi_3^{(j)}(z)$ і $\Psi_3^{(j)}(z)$, які подамо у вигляді:

$$\begin{aligned} \Phi_p^{(j)}(z) &= \Phi_{1p}(z) + \Phi_{pT}(z), \quad \Psi_p^{(j)}(z) = \Psi_{1p}(z) + \Psi_{pT}(z); \\ \Phi_3^{(j)}(z) &= \Phi_{13}(z) + \Phi_{3T}(z) + \tilde{\Gamma}, \quad \Psi_3^{(j)}(z) = \Psi_{13}(z) + \Psi_{3T}(z) + \tilde{\Gamma}'; \\ \tilde{\Gamma} &= -\frac{M_x^\infty + M_y^\infty}{4D_2(1+\nu_2)}, \quad \tilde{\Gamma}' = \frac{M_y^\infty - M_x^\infty}{2D_2(1-\nu_2)}, \quad D_j = \frac{2E_j h^3}{3(1-\nu_j^2)}, \quad \Phi_{1p}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{G(t)dt}{t-z} \\ \Psi_{1p}(z) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_L \left[\frac{\overline{G(t)}d\bar{t}}{t-z} + \frac{tG(t)dt}{(t-z)^2} \right], \quad \Phi_{pT}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{g'(t)dt}{T-z}, \quad \Phi_{13}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{q(t)dt}{t-z} \\ \Psi_{pT}(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \left[\frac{\overline{g'(t)}}{T-z} - \frac{Tg'(t)}{(T-z)^2} \right] dt, \quad \Psi_{13}(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_L \left[\frac{\overline{q(t)}d\bar{t}}{t-z} + \frac{tq(t)dt}{(t-z)^2} \right], \\ \Phi_{3T}(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{Q(t)dt}{T-z}, \quad \Psi_{3T}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \left[\frac{-\overline{Q(t)}\tilde{\chi}_2^*}{T-z} - \frac{TQ(t)}{(T-z)^2} \right] dt \end{aligned}$$

$T = t + x_0$; $G(t)$, $g'(t)$, $q(t)$, $Q(t)$ - шукані функції.

Отримана система сингулярних рівнянь має вигляд:

$$\begin{aligned} a_1 \frac{G^*(\theta)}{i(e^{i\theta} - me^{-i\theta})} + \int_0^{2\pi} \left[G^*(v)\tilde{K}_1(v, \theta) + \overline{G^*(v)}\tilde{K}_2(v, \theta) \right] dv + \int_{-1}^1 \left[y^*(v)\tilde{K}_3(v, \theta) + \overline{y^*(v)}\tilde{K}_4(v, \theta) \right] dv &= 0, \\ \tilde{a}_1 \frac{q^*(\theta)}{i(e^{i\theta} - me^{-i\theta})} + \int_0^{2\pi} \left[q^*(v)\tilde{M}_1(v, \theta) + \overline{q^*(v)}\tilde{M}_2(v, \theta) \right] dv + \int_{-1}^1 \left[X^*(v)\tilde{M}_3(v, \theta) + \overline{X^*(v)}\tilde{M}_4(v, \theta) \right] &= \\ = -\frac{3}{8}\tilde{d}(1+\tilde{k})(1-\nu_2) + \frac{3}{4}\tilde{c}_1(1-\tilde{k})(1+\nu_2) \frac{(e^{-i\theta} - me^{i\theta})}{(e^{i\theta} - me^{-i\theta})}, \\ \operatorname{Im} \left[\int_{-1}^1 \frac{y^*(v)dv}{v-w} + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[G^*(v)\tilde{K}_p(v, w) + \overline{G^*(v)}\tilde{M}_p(v, w) \right] dv \right] &= 0, \\ c'_2 \frac{E_2 h^3}{M_y^\infty \tilde{\mu}_{2*}} = \operatorname{Im} \left[\delta' \int_{-1}^1 \frac{X^*(v)dv}{v-w} + \int_0^{2\pi} \left[q^*(v)\tilde{K}_3(v, w) + \overline{q^*(v)}\tilde{M}_3(v, w) \right] dv \right], \\ \operatorname{Re} \left[\delta' \int_{-1}^1 \frac{X^*(v)dv}{v-w} + \int_0^{2\pi} \left[q^*(v)\tilde{K}_3(v, w) + \overline{q^*(v)}\tilde{M}_3(v, w) \right] dv \right] + A' &= \\ = -2\beta \frac{1}{\tilde{\mu}_{2*}} E_2 h^3 \operatorname{Re} \left[\int_{-1}^1 \frac{y^*(v)dv}{v-w} + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[G^*(v)\tilde{K}_p(v, w) + \overline{G^*(v)}\tilde{M}_p(v, w) \right] dv \right], \\ \int_{-1}^1 X^*(v)dv = 0, \quad \operatorname{Im} \left[\int_{-1}^1 vX^*(v)dv \right] = 0, \quad \int_{-1}^1 y^*(v)dv = 0, \quad \operatorname{Re} y^*(v) + \tilde{\beta}' \operatorname{Re} X^*(v) = 0, \end{aligned}$$

За допомогою методів теорії функцій комплексної змінної та комплексних потенціалів розв'язок задачі зведено до задач лінійного спряження. В результаті отримали систему сингулярних інтегральних рівнянь, відносно шуканих функцій, яку розв'язано чисельно за допомогою методу механічних квадратур. Проведений числовий аналіз коефіцієнтів інтенсивності моментів та зусиль, контактного зусилля між берегами тріщини, граничного навантаження.