УДК 536.2

М. Шелестовська
(Тернопільський національний економічний університет)

РОЗВ'ЯЗОК РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО ІЗОТРОПНОГО ПІВПРОСТОРУ ПРИ НЕІДЕАЛЬНОМУ ТЕПЛОВОМУ КОНТАКТІ

Розглянемо трансверсально ізотропний півпростір на границі якого в круговій області здійснюється неідальний тепловий контакт з гарячим штампом через проміжковий шар. Зовні кругової області з поверхні півпростору і з бічної поверхні проміжкового шару відбувається теплообмін за законом Ньютона. Задача визначення температурного поля $T(r,z)$ в півпросторі зводиться до розв'язування стаціонарного рівняння теплопровідності, яке в циліндричній системі координат r,φ,z у випадку осьової симетрії та стаціонарного поля записується так:

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + L^2 \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad . \tag{1}$$

Граничні умови при $z=0$:
$$\lambda \Delta T - 3\lambda_1 \frac{\partial T}{\partial z} - 3h\left(T - T_0\right) = 0, \quad 0 \le r < a, \tag{2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = kT, \quad r > a \tag{3}$$
$$\frac{\partial T}{\partial r} = -k_1 T, \quad r = a \ . \tag{4}$$

Розв'язок рівняння (1) подамо у вигляді:

$$T = \int_0^\infty \alpha A(\alpha) e^{\frac{-\alpha z}{L}} J_0(\alpha r)\, d\alpha \tag{5}$$

Умова (2) запишеться так:
$$\Delta T - \frac{3h}{\lambda} T = -\frac{3h}{\lambda}\cdot T_0 - \frac{3\lambda_1}{L\lambda}\int_0^\infty \alpha^2 A(\alpha) J_0(\alpha r)\, d\alpha. \tag{6}$$

Загальний розв'язок рівняння (6):

$$T = C_0 \mathrm{I}_0\left(\sqrt{\frac{\lambda}{3h}}\cdot r\right) + T_0 + \frac{3\lambda_1}{L\lambda}\int_0^\infty \frac{\alpha^2 A(\alpha)\cdot\Delta(\alpha)}{\alpha^2 + 3h\lambda^{-1}} J_0(\alpha r)\, d\alpha \ . \tag{7}$$

Задовольняючи граничні умови (2)-(3), одержимо парні інтегральні рівняння

$$\int_0^\infty E(\alpha) J_0(\alpha r)\, d\alpha = C_0 \mathrm{I}_0\left(\sqrt{\frac{\lambda}{3h}}\cdot r\right) + T_0\,,\ 0 \le r < a, \tag{8}$$

$$\int_0^\infty \frac{\alpha E(\alpha)}{1 - g(\alpha)} J_0(\alpha r)\, d\alpha = 0, \quad r > a, \qquad E(a) = \left[\alpha - \frac{3\lambda_1 a}{\lambda L}\left(\frac{\alpha^2 \Delta(\alpha)}{\alpha^2 + 3ha^2\lambda^{-1}}\right)\right] A(\alpha),$$

які зводяться до інтегрального рівняння Фредгольма другого роду

$$\varphi(x) - \frac{1}{\pi}\int_0^1 \varphi(t)\left[G(x+t) + G(x-t)\right] dt = F(x), \quad 0 \le x \le 1. \tag{9}$$

Тут $g(\alpha)$ відома раціональна функція, $G(y) = \int_0^\infty g(\alpha)\cos\alpha y\, d\alpha$.

Функція $E(\alpha)$ визначається за формулою:
$$E(\alpha) = \left[1 - g(\alpha)\right]\int_0^1 \varphi(t)\cos\alpha t\, dt. \tag{10}$$