УДК 536.2

О. Демчишин
(Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя)

ВИЗНАЧЕННЯ ПЛОСКОГО КУТА ЗА ДОПОМОГОЮ ВИЗНАЧНИКА КЕЛІ-МЕНГЕРА

У праці [1] показано, як за допомогою визначника Келі-Менгера можна, користуючись лише відстанями між трьома точками на площині знайти площу трикутника ABC. Якщо сторони трикутника задано ($|AB|=l_1$, $|AC|=l_2$, $|BC|=l_3$), то за формулою Герона площа трикутника визначається співвідношенням:

$$S_{ABC}^2=\frac{1}{16}(l_1+l_2+l_3)(l_1+l_2-l_3)(l_1-l_2+l_3)(-l_1+l_2+l_3).$$

Вираз у правій частині шляхом перетворень зводиться до симетричного визначника Келі-Менгера четвертого порядку:

$$S_{ABC}^2=\frac{1}{16}\begin{vmatrix}0 & 1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & l_2^2 & l_1^2\\ -1 & l_2^2 & 0 & l_3^2\\ -1 & l_1^2 & l_3^2 & 0\end{vmatrix}=\frac{1}{16}K_{4s}.$$

За допомогою цього ж визначника легко виражаються інші лінійні розміри трикутника, наприклад, висота, опущена із точки B на сторону $|AC|=l_2$, дорівнює: $h=(2l_2)^{-1}\sqrt{K_{4s}}$. Визначимо кут φ при вершині, наприклад, A.

За теоремою косинусів, можемо записати: $\cos\varphi=0{,}5(l_1l_2)^{-1}(l_1^2+l_2^2-l_3^2)$.

Візьмемо за основу квадрат чисельника отриманого виразу. Його можна записати у вигляді визначника четвертого порядку після двократного окантування.

$$(l_1^2+l_2^2-l_3^2)^2=\begin{vmatrix}1 & l_3^2\\ 1 & l_1^2+l_2^2\end{vmatrix}^2=\begin{vmatrix}1 & l_3^2 & 0 & 0\\ 1 & l_1^2+l_2^2 & -l_2^2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{vmatrix}^2.$$

Після перетворень, використовуючи властивості визначників, його можна записати у вигляді антисиметричного визначника Келі-Менгера четвертого порядку K_{4as}:

$$K_{4as}=\begin{vmatrix}0 & 1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & l_1^2 & l_3^2\\ -1 & -l_1^2 & 0 & l_2^2\\ -1 & -l_3^2 & -l_2^2 & 0\end{vmatrix}. \text{ Отже, } \cos\varphi=\frac{\sqrt{K_{4as}}}{2l_1l_2}.$$

Література.

1. Владимиров Ю.С. Реляционная теория пространства-времени и взаимодействий. Часть 1. Теория систем отношений. – М.: Изд-во МГУ, 1996. 262 с.