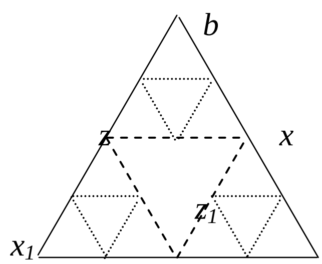
УДК 536.2

О. Демчишин
(Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя)

ГАРМОНІЧНІ ФУНКЦІЇ НА СКІНЧЕННИХ МНОЖИНАХ ТОЧОК

Властивості множин можна вивчати за допомогою означення на її елементах функцій. В квантовій механіці множину розглядають як об’єкт на якому задано простір функцій, властивості якого потрібно вивчити. Найбільш зручними для вивчення є гармонічні функції. На множинах, які містять поняття відстані, можна означити гармонічну функцію такою, що її значення в точці дорівнює середньоарифметичному значенню функцій в точках, що знаходяться у безпосередній близькості від заданої точки. Характеристичною властивістю такої функції є принцип максимуму: функція не може приймати максимального значення всередині області. За цим принципом, кожна гармонічна функція буде визначатися її значеннями на границі області, і, якщо гармонічна функція на границі дорівнює нулю, то вона дорівнюватиме нулю в будь-якій точці всередині області. Для фрактала «решітка Серпінського», придуманого у 1915 році польським математиком В. Серпінським, процес побудови починається із рівностороннього трикутника, в якого сторона дорівнює, наприклад, 1. Після першого етапу побудови матимемо шість точок a, b, c, x, y, z. Означивши зовнішніми точками такі, які мають менше сусідніх, отримаємо: три зовнішні точки a, b і c – вершини початкового трикутника і три внутрішні точки x, y, z – вершини утвореного рівностороннього трикутника із стороною 0,5.



Гармонічна функція на множині із шести точок повністю визначається значеннями в граничних точках. Умови гармонічності для внутрішніх точок визначають систему трьох рівнянь:

$$\begin{cases} 4f(z) = f(a) + f(b) + f(x) + f(y), \\ 4f(y) = f(a) + f(c) + f(x) + f(z), \\ 4f(x) = f(b) + f(c) + f(y) + f(z). \end{cases}$$

Якщо просумувати рівняння системи, то отримаємо рівність, за якою сума невідомих значень дорівнює сумі відомих:

$$f(x) + f(y) + f(z) = f(a) + f(b) + f(c).$$

Розв’язання системи дає значення функції у внутрішніх точках:

$$f(x) = \frac{1}{5}(2f(b) + 2f(c) + f(a)),\ f(y) = \frac{1}{5}(2f(a) + 2f(c) + f(b)),\ f(z) = \frac{1}{5}(2f(a) + 2f(b) + f(c)).$$

Для знаходження значень функції у 9 точках наступного наближення і т.д., можна використати обмеження гармонічної функції лише одним відрізком, наприклад, основою, довжини 1. Тоді функція залежить від параметра $t \in [0;1]$. Записавши її у вигляді $f_{ac}^{b}(t)$, отримаємо: значення функції, наприклад, у точці z_1 другого наближення, буде визначатися через значення функції у граничних для неї точках x, y, c за допомогою функції $f_{yc}^{x}(0{,}5)$. Функція, яка є обмеженням гармонічної функції на відрізок $[0;1]$, буде завжди неперервною, частково монотонною і недиференційовною на ньому.